

**Apor Vilmos Katolikus Főiskola**

**Matematikai, természettudományi és informatikai tanszék**

**Varázslatos matematika, avagy élménypedagógiai eszközök alkalmazása a  
6. osztályos matematika tanításában**

**Készítette:**

Kelemen Orsolya

Tanító alapképzési szak 4. évfolyam

**Témavezető oktató:**

Libor Józsefné dr. PhD

főiskolai tanár

**Tanszékvezető:**

Horváth Alice dr. PhD

főiskolai tanár

Vác 2014

# Tartalomjegyzék

|                                                                                                                                       |                                        |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------|
| I.Bevezetés .....                                                                                                                     | 4                                      |
| II. A kutatás és eredményei .....                                                                                                     | 6                                      |
| 1. 2. osztályos kérdőívek kiértékelése: .....                                                                                         | 6                                      |
| 2. 3. osztályos kérdőívek kiértékelése.....                                                                                           | 8                                      |
| 3. 4. osztályos kérdőívek kiértékelése.....                                                                                           | 10                                     |
| 4. 5. osztályos kérdőívek kiértékelése.....                                                                                           | 12                                     |
| 5. 6. osztályos kérdőív kiértékelés .....                                                                                             | 17                                     |
| 6. 7. osztályos kérdőívek kiértékelése.....                                                                                           | 21                                     |
| 7. 8. osztályos kérdőívek kiértékelése.....                                                                                           | 23                                     |
| 8. Összegző következtetések, megállapítások .....                                                                                     | 25                                     |
| III. A 6. osztályos matematika tananyaghoz kapcsolódó matematikusok és érdekességek, a munkásságukkal és életükkel kapcsolatban ..... | 26                                     |
| 1. Gondolkodási módszerek.....                                                                                                        | 26                                     |
| 2. Számtan algebra .....                                                                                                              | 28                                     |
| Mi az az egész szám?: Számhalmazok tisztázása, Számkör bővítés .....                                                                  | 28                                     |
| Osztó, többszörös fogalmának átisméltése .....                                                                                        | 30                                     |
| Prímszám, összetett szám, relatív prímekek .....                                                                                      | 32                                     |
| Oszthatósági szabályok: 2, 5, 10.....                                                                                                 | 34                                     |
| Relatív prímekek:.....                                                                                                                | 35                                     |
| Törtek –racionális számok halmaza, számkör bővítés.....                                                                               | 37                                     |
| Reciprok.....                                                                                                                         | 38                                     |
| Tizedes törtek:értelmezése fogalma.....                                                                                               | 38                                     |
| 3. Számtan algebra, függvények .....                                                                                                  | 41                                     |
| Arányosság:.....                                                                                                                      | 41                                     |
| Grafikonok, diagramok értelmezése, összefüggések megfigyeltetése.....                                                                 | 42                                     |
| Százalékszámítás: .....                                                                                                               | 43                                     |
| 4. Geometria mérések .....                                                                                                            | 43                                     |
| Mérések:.....                                                                                                                         | 43                                     |
| Szögek átisméltése (egyállású, váltó, csúcs, kiegészítő, pót, merőleges szárú szög).....                                              | 43                                     |
| háromszögek fajtái (általános, egyenlő szárú, egyenlő oldalú, hegyes szögű, derékszögű tompaszögű).....                               | 44                                     |
| Szabályos sokszögek.....                                                                                                              | 45                                     |
| párhuzamosság, merőlegesség .....                                                                                                     | 46                                     |
| Tengelyes szimmetria: háromszögek, négyszögek, sokszögek, természetben.....                                                           | 46                                     |
| 5. Statisztika, kombinatorika.....                                                                                                    | 47                                     |
| IV. Mellékletek .....                                                                                                                 | <b>Hiba! A könyvjelző nem létezik.</b> |

1. Melléklet: 2. osztályos kérdőív 1. oldal **Hiba! A könyvjelző nem létezik.**
2. Melléklet: 2. osztályos kérdőív 2. oldal **Hiba! A könyvjelző nem létezik.**
3. Melléklet: 3. osztályos kérdőív 1. oldal **Hiba! A könyvjelző nem létezik.**
4. Melléklet: 3. osztályos kérdőív 2. oldal **Hiba! A könyvjelző nem létezik.**
5. Melléklet: 3. osztályos kérdőív 3. oldal **Hiba! A könyvjelző nem létezik.**
6. Melléklet: 4. osztályos kérdőív 1. oldal **Hiba! A könyvjelző nem létezik.**
7. Melléklet: 4. osztályos kérdőív 2. oldal **Hiba! A könyvjelző nem létezik.**
8. Melléklet: 4. osztályos kérdőív 3. oldal **Hiba! A könyvjelző nem létezik.**
9. Melléklet: 4. osztályos kérdőív 4. oldal **Hiba! A könyvjelző nem létezik.**
10. 5-6. osztályos kérdőív 1. oldal ..... **Hiba! A könyvjelző nem létezik.**
11. 5-6. osztályos kérdőív 2. oldal ..... **Hiba! A könyvjelző nem létezik.**
12. Melléklet: 5-6. osztályos kérdőív 3. oldal **Hiba! A könyvjelző nem létezik.**
13. Melléklet: 5-6. osztályos kérdőív 4. oldal **Hiba! A könyvjelző nem létezik.**
14. Melléklet 7-8. osztályos kérdőív 1. oldal **Hiba! A könyvjelző nem létezik.**
15. Melléklet: 7-8. osztályos kérdőív 2. oldal **Hiba! A könyvjelző nem létezik.**
16. Melléklet: 7-8. osztályos kérdőív 3. oldal **Hiba! A könyvjelző nem létezik.**
17. Melléklet: 7-8. osztályos kérdőív 4. oldal **Hiba! A könyvjelző nem létezik.**

|       |                           |                                        |
|-------|---------------------------|----------------------------------------|
| V.    | irodalomjegyzék.....      | 48                                     |
| VI.   | Diagram jegyzék.....      | 49                                     |
| VII.  | Ábra jegyzék.....         | 50                                     |
| VIII. | Mellékletek Jegyzéke..... | <b>Hiba! A könyvjelző nem létezik.</b> |

## I. BEVEZETÉS

A témám címe varázslatos matematika. Mindez azt foglalja magában, hogy a matematika nagyon érdekes és szép tudományág bár sok diák ezzel biztosan vitába szállna.

Sok felmérés készült az országban, sőt világszerte arról, hogy a diákoknak melyik tantárgy a kedvence. Érdekes tény, hogy alsó tagozaton, főleg első és második osztályban, a legnépszerűbb tantárgyak közé tartozik a matematika. Véleményem szerint ez azért van, mert ebben a két osztályban még rengeteg játékos feladatot oldanak meg, sokat színeznak, útkeresőset játszanak, stb... . Ezt ők játéknak élik meg, de mi tudjuk, hogy ez matematika. Harmadik, negyedik osztályban már kezdi elveszíteni a matematika a népszerűségét, bár ez még nem akkora visszaesés, mint amekkora felső tagozaton elkezdődik főleg hatodik osztálytól kezdve.

Jó lenne választ találni arra, hogy ez minek köszönhető. Hipotézisem az, hogy ez azért van, mert amíg a kisgyerek azt éli meg iskolás éveinek elején, hogy mennyire érdekes és színes ez a tantárgy, utána fokozatosan azt kell megtapasztalnia, hogy nagyon száraz és egyáltalán nem érdekes számukra, főleg ha nem oldhatnak meg érdekes, gondolkodtató feladatokat, amikben örömet lelik. Szerintem az is nagy segítség lenne, ha esetleg azokról a feladatokról, amiket meg kell oldaniuk, tanulniuk, megtudhatnának több mindent. Ezalatt például a feladat történelmi hátterét értem esetleg azt, hogy régen hogyan jöttek rá erre a problémára. Az a véleményem, hogy ez a legtöbb diákot érdekelné. Az emberek azt tanulják szívesen, ami érdekli őket, amiben örömet lelik. Nem csoda, ha a diákok nem tanulják szívesen a matematikát, ha nem lelik benne örömet.

Pedig ez egy kötelező tantárgy és a pedagógusoknak arra kell törekedni, hogy valahogy megszerettessék ezt is a gyerekekkel. Ami talán a legnehezebb feladat, mert ahány diák annyi érdeklődési kör, annyi fejlettségi szint. Azoknak a diákoknak, akik jobban értik a matematikát nem biztos, hogy érdekes, ha történelmi érdekességeket mesélünk. Őket lehet jobban lekötné, ha nehezebb gondolkodtató feladatokat oldhatnának meg. Akiknek pedig nehezebben megy, több érdekességet kéne mesélni. Egyszerűbb, de érdekes feladatokat kéne megoldatni velük, amik nem unalmasak, nem csak arra jók, hogy a kötelező szinten elsajátítsák a matematikát, hanem ők is szívesen dolgozzanak.

Tudom, hogy ennek rengeteg akadálya van és a tanórák keretei között ezt szinte lehetetlenség megoldani. A Nemzeti alaptanterv is elég nagy tananyagot jelöl ki a tananyag mennyiségéhez viszonyítva, kis óraszámot rendelve hozzá. Ez az óraszám arra elég, hogy a törzsanyagot megtanítsuk és örülünk, ha az adott év anyagát befejezzük év végéig. Erre most talán megoldást nyújt az egész napos iskola. Ha délutánonként esetleg indítunk egy-egy

szakkört, amikor az órai anyagot kicsit szívesebbé tesszük, ahol kisebb létszámban tudunk foglalkozni a tanulóinkkal, és tudásuknak megfelelő szintű, és érdekes feladatokat adunk nekik, az már nagy előrelépés. Arról nem is beszélve, ha ezzel elérjük azt, hogy a matematika órákra is szívesebben fognak bejárni.

A Hipotézisemet, hogy a matematika egyre népszerűtlenebb lesz, ahogy magasabb osztályokba lépünk, egy kérdőíves kutatással, fogom alátámasztani. A kutatást a Kispesti Erkel Ferenc Általános Iskolába végeztem, évfolyamonként egy-egy osztályban. Emellett, ebben az iskolában interjúkat készítettem hatodik osztályos gyerekekkel és az őket tanító pedagógussal. A kutatás eredményeként azt várom, hogy a tárgy valóban népszerűtlenebb lesz, harmadik osztálytól fölfelé.

A dolgozat következő részeiben először a kutatásomat és annak eredményeit fogom ismertetni, majd az eredményt figyelembe véve, egy tananyag kiegészítést készítek, ami szorosan kapcsolódik a Nemzeti alaptantervhez és az erre épülő kerettantervhez. A kiegészítés matematikatörténeti érdekességeket, és érdekes gondolkodtató feladatokat fog tartalmazni, amik mind tanórai és tanórán kívüli tevékenységek céljából felhasználhatók. Ezt úgy fogom felépíteni, hogy a 6. osztályos tanmenet témaköreit, kis témáit egészítem ki.

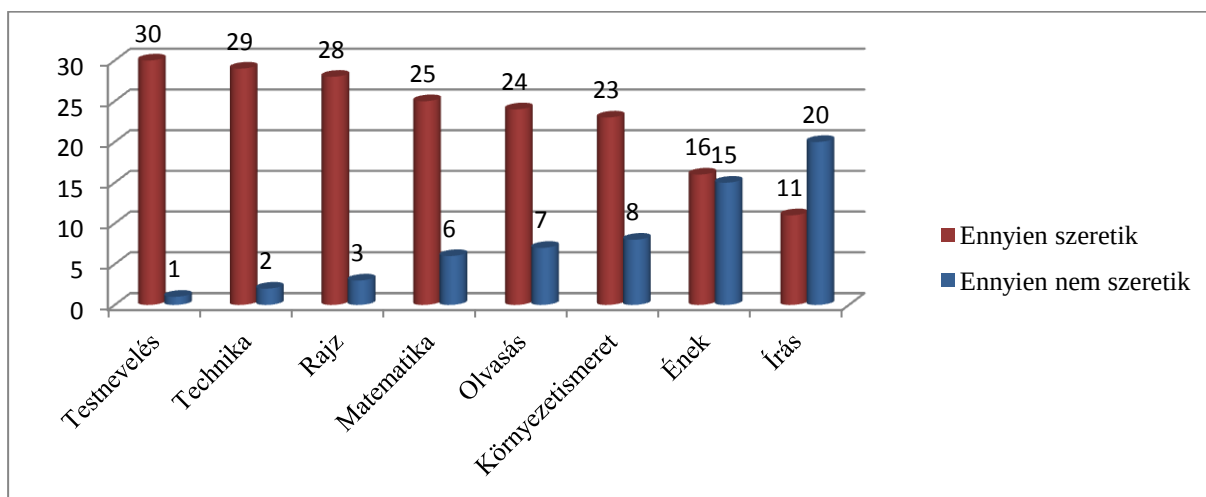
## II. A KUTATÁS ÉS EREDMÉNYEI

Kérdőíveket készítettem 2-től 8. osztályos tanulók számára. Ezekben azt mértem fel, hogy a gyerekek mennyire szeretik a matematikát, milyen matematikai feladatokat szeretnek és melyeket nem, szokták-e érteni a feladatokat az órán, a házi feladatukat meg tudják-e oldani, korrepetálásra, szakkörre járnak-e, voltak-e versenyen és, hogy a tevékenykedtető feladatokat szeretik-e.

### 1. 2. osztályos kérdőívek kiértékelése:

2. osztályban: 31 gyerek töltötte ki a kérdőíveket.

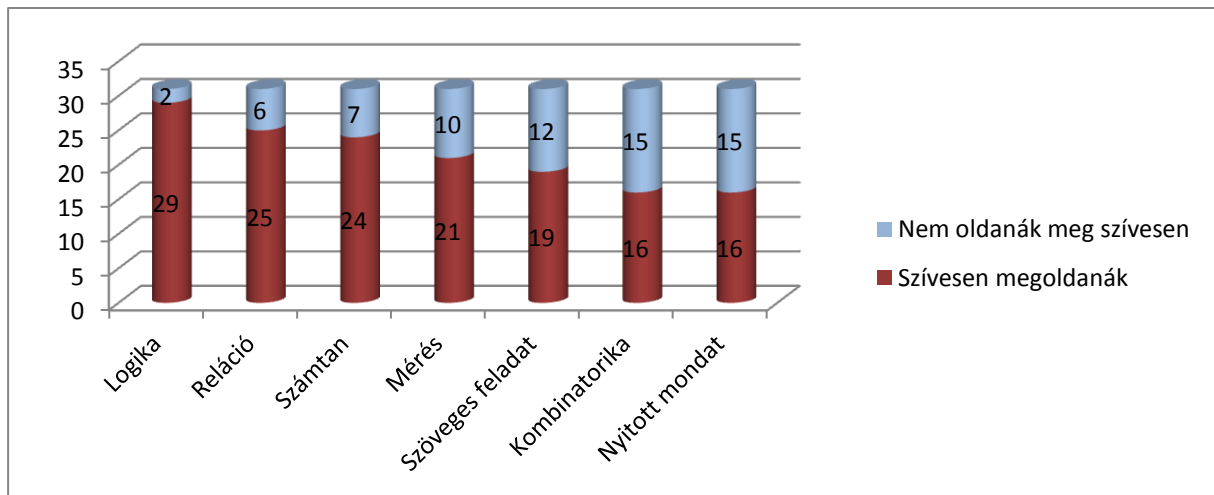
Az első feladatban az volt a gyerekek feladata, hogy az általuk tanult tantárgyak közül határozzák meg, hogy melyeket szeretnek és melyeket nem.



1. Diagram: Tantárgyak kedveltsége 2. osztályban.

Erről a diagramról leolvashatjuk, hogy a tantárgyakat hányan szeretik, ezt a piros oszlopok mutatják, és hányan nem szeretik, ezt a kék oszlopok mutatják. Látható, hogy a matematika a népszerű tárgyak közé tartozik, a készségtárgyak után rögtön ez következik.

A második feladatban a gyerekeknek matematikai feladatokról kellett eldönteni, hogy szívesen megoldanák, vagy nem.



2. Diagram: Matematikai feladatok kedveltsége 2. osztályban

Innen láthatjuk, hogy azok a feladatok a népszerűbbek, ahol több eszközt használnak, amik szárazabb számolási feladatokból állnak vagy szövegértési feladatok azok kevésbé népszerűek.

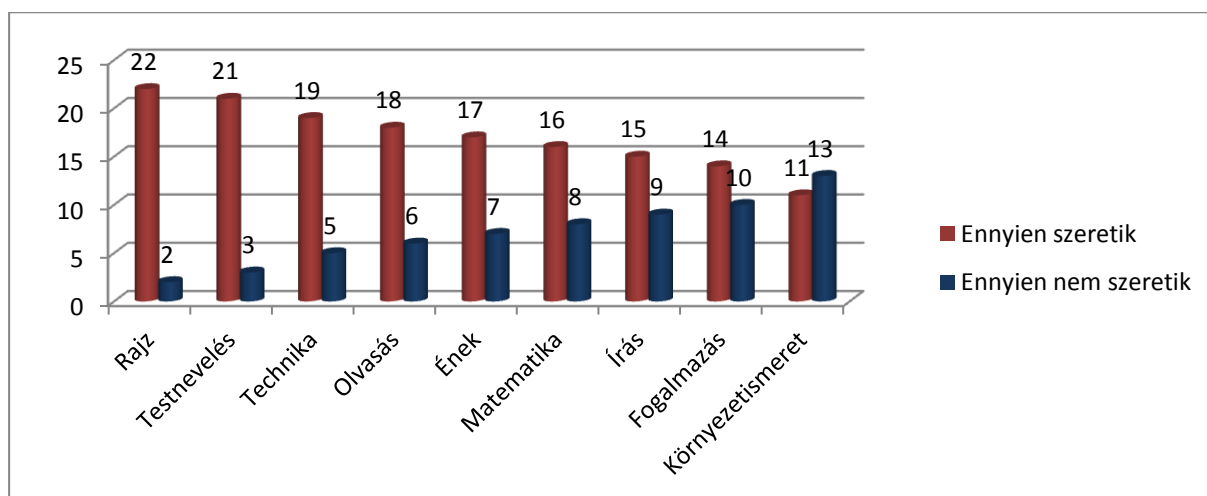
És végül a harmadik feladat igaz hamis állításokkal kérdeztem rá a matematika órákkal kapcsolatban bizonyos dolgokra.

Ebből a táblázatból az derül ki, hogy a gyerekek mindegyike megérti a matematika órai feladatokat és sikeresnek érzi magát a megoldásában. Két gyereknek kell korrepetálásra járnia ami nagyon jó eredmény, ez azt jelenti, hogy eredményes az órai munka és 17 gyerek matematika szakkörös, több mint az osztály fele érdeklődik a matematika iránt ez is nagyon jó eredmény. 3 gyerek volt versenyen az iskolán kívül és ketten az iskolában, amelyik tanuló versenyzett középtájon végzett. A gyerekek nagy része szeret eszközöket használni az órákon, kevés gyerek válaszolta azt, hogy nem szeret a színesrúddal, a logikai készlettel vagy korongokkal dolgozni.

## 2. 3. osztályos kérdőívek kiértékelése

3. osztályban: 24 gyerek töltötte ki a kérdőívet.

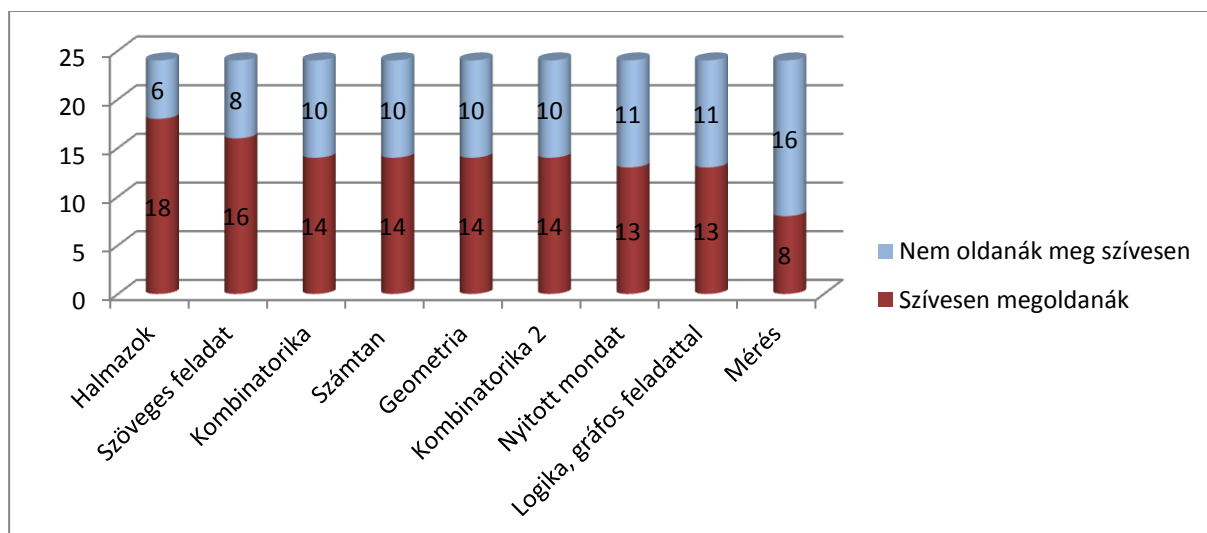
Itt is az volt az első kérdés, hogy melyik általuk tanult tárgyat szeretik és melyiket nem.



3. Diagram: Tantárgyak kedveltsége 3. osztályban.

Itt is a készségtárgyak szerepelnek a rangsor elején, annyiban különbözik a 2. osztályostól, hogy itt az ének megelőzi a matematikát, így az egy hellyel hátrébb csúszott.

A második feladat is ugyan az volt, mint 2. osztályban, matematika feladatokról kellett eldönteniük, hogy szeretik, vagy nem szeretik.



4. Diagram: Matematikai feladatok kedveltsége 3. osztályban.

Itt az eredmény szinte teljesen eltér az egyel fiatalabb évfolyamétól a gyerekek a legjobban a halmazos feladatokat szeretik, majd utána a szöveges feladatok jönnek ezt a feladattípust a másodikok a rangsor végefele tették, valószínűleg a biztonságosabb olvasási készség miatt szeretik jobban a harmadikosok a szövegeseket. A harmadik helyen holtversenyben a két kombinatorika feladat a számтан és a geometria feladatok állnak. Ez azért érdekes, mert kombinatorikából direkt két feladatot tettem az egyik színezős sok képet

tartalmazó feladat volt én arra számítottam, hogy ezt jobban fogják szeretni a gyerekek, mint a másikat, ami pedig egy számalkotó feladat volt számjegyek alapján. A negyedik helyen a nyitott mondat és a logikai feladat áll, a másodikosok a logikai feladatot szerették a legjobban, érdekes, hogy a harmadikosok a végére tették, és a legvégén a mérés áll, ez egy órás feladat volt, valószínűleg az órát még nem használják biztosan a gyerekek.

És a harmadik feladat is megegyezett a másodikosokéval.

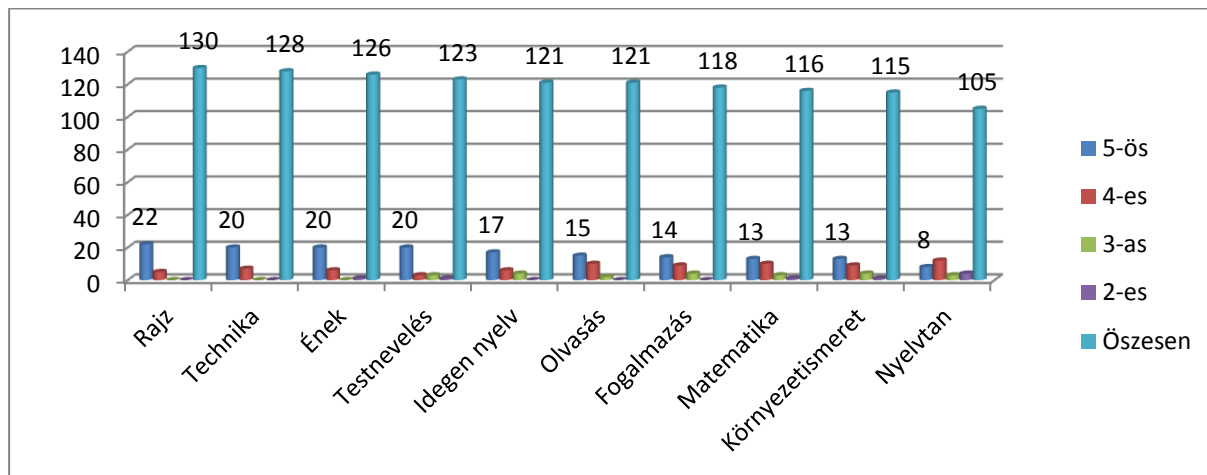
A gyerekek két fő kivételével megértik az órán a tananyagot és sikeresnek érzik magukat a feladatok megoldásában, és egy fő kivételével meg tudják oldani egyedül a házi feladatukat ez a nehezedő tananyag mellett nagyon jó arány. 5 tanulónak kell járnia korrepetálásra, viszont itt már kevesebben járnak szakkörre 13 fő. 9-en voltak matematika versenyen az iskolán kívül és 14-en az iskolán belül. A gyerekek nagy része ebben az évfolyamban is szeret eszközöket használni az órán.

Azok közül a gyerekek közül akik voltak matematika versenyen (14 fő), 4 gyerek jelölte be, hogy az elsők között végzett, 8-an végeztek középtájon és 2-en a vége felé ez azt jelenti, hogy azok a gyerekek akik érdeklődnek a matematika iránt azok elég eredményesek.

### 3. 4. osztályos kérdőívek kiértékelése

4. osztályban: 27 tanuló töltötte ki a kérdőívet.

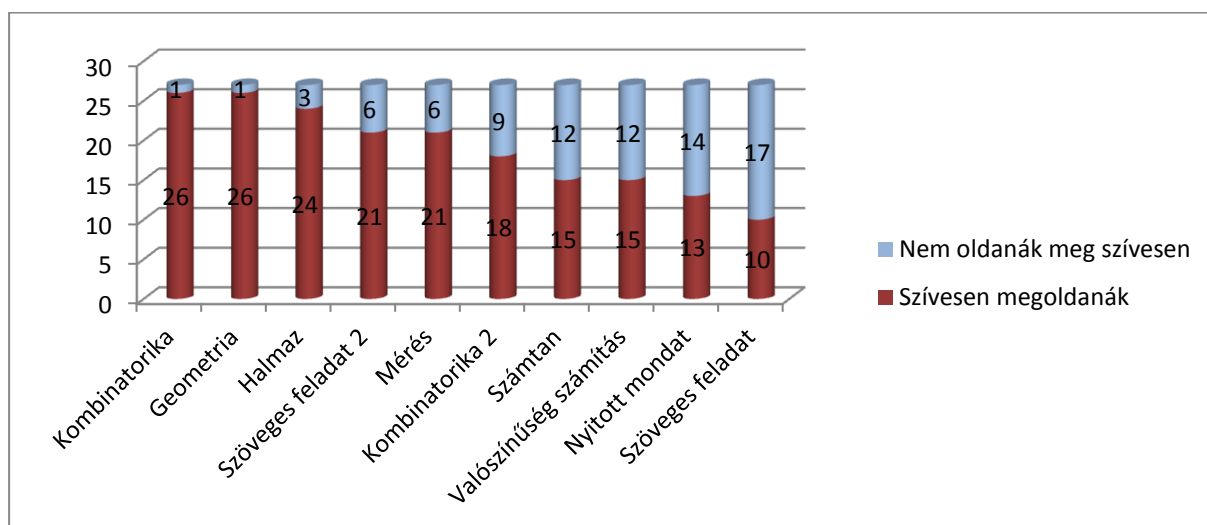
Az első feladata az volt a gyerekeknek, hogy osztályozzák a tantárgyaikat az általuk ismert érdemjegyekkel. (5-ös a legjobb és 1-es a legrosszabb.)



5. Diagram: Tantárgyak értékelése 4. osztályban.

A tantárgyak közül a legnépszerűbbek a készségtárgyak, valószínűleg azért mert nincs nagymennyiségű elméleti anyaga ezeknek a tárgyaknak. Ebben az évfolyamban a matematika, viszont eléggé hátracsúszott itt már határozott visszaesés figyelhető meg. Ennek a kérdésnek, még az is érdekessége volt, hogy 1-es osztályzatot egy tantárgynak sem adtak a gyerekek, 2-es is csak keveset osztottak a többi osztályzat dominált. Ez valószínűleg azért van, mert a gyerekek egyik tárgyukat sem utálják.

A második és harmadik feladat felépítése megegyezik az előző osztályokénak. A második feladatban feladatokról kellett eldönteniük a gyerekeknek, hogy megoldanák-e szívesen vagy nem.



6. Diagram: Matematikai feladatok kedveltsége 4. osztályban

Ebben az évfolyamban már szinte teljesen más feladatokat kedvelnek a gyerekek, mint az alsóbb osztályokban, az egyszerűbb sablonos feladatok helyett a gondolkodtató, érdekes feladatok kerültek előrébb a népszerűségi sorban.

A harmadik kérdéssor a gyerekek matematikához való viszonyát mérte, igaz hamis állításokkal.

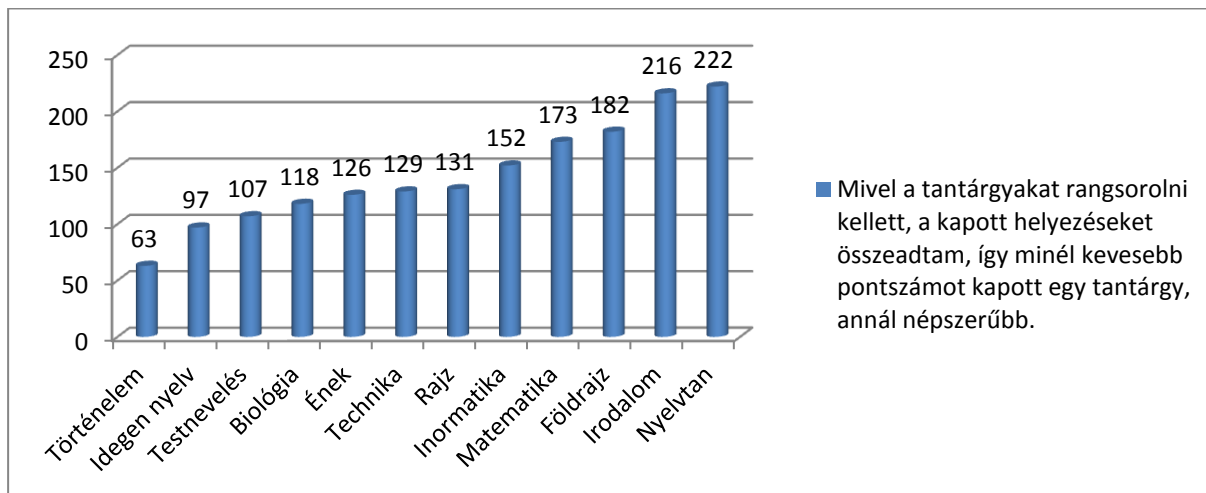
A feladatokat az osztályból egy gyerek kivételével mindenki megérti az órákon ez nagyon jó eredmény, 18 tanuló érzi úgy, hogy sikeres a feladatok megoldásában, a házi feladatát mind a 27 gyerek meg tudja oldani egyedül, ez is azt mutatja, hogy órán valóban megértik a tananyagot. 9 gyerek jár korrepetálásra és 19 gyerek jár szakkörre ez azt jelenti, hogy a gyerekek több mint a fele mutat érdeklődést a matematika iránt. 5 gyerek volt iskolán belüli matematika tanulmányi versenyen és 8-an vettek rész iskolán kívüli versenyen. A versenyen részt vett gyerekek közül 1 nyert a versenyen 5-en végeztek az első 5-ben és 4-en végeztek középtájon. Ez azt mutatja, hogy eredményesek azok a gyerekek, akik versenyen indultak, valószínűleg a szakkör is eredményesen működik. A gyerekek kifejezetten szeretnek a logikai készlettel dolgozni, a pálcikák, korongok és színesrúd készlet kicsit népszerűtlenebb, de ezekkel is az osztály több mint fele szeret manipulálni.

Az alsó tagozatosok eredményéről tehát általánosan elmondható, hogy a gyerekek szeretik a matematikát, sikeresek is benne, tehát a házi feladataikat önállóan képesek megoldani, tudják követni az óra menetét és jó versenyeredményeket érnek el. Kifejezetten szeretnek eszközzel dolgozni.

#### 4. 5. osztályos kérdőívek kiértékelése

5. osztályosban: 22 tanuló töltötte ki ebben az osztályban a kérdőívet.

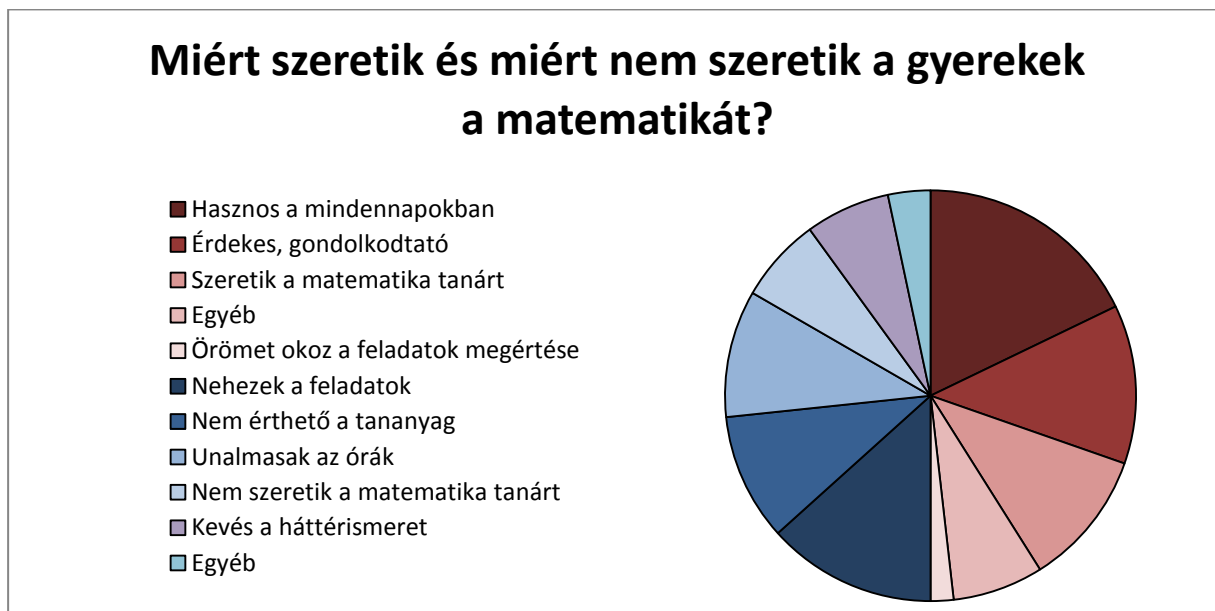
Ez sokkal összetettebb volt, mint az alsósoké. Az első feladatban egy rangsort kellett felállítani az eddig tanult tantárgyak között.



7. Diagram: Tantárgyak kedveltsége 5. osztályban

A második feladatban azt kérdeztem tőlük, hogy szeretik-e a matematikát, vagy nem. Ezt meg is indokoltattam velük. Az indoklásnál több válaszlehetőséget is felkínáltam nekik és egy egyéb lehetőséget, ha az általam felsoroltakat még kiegészítenék.

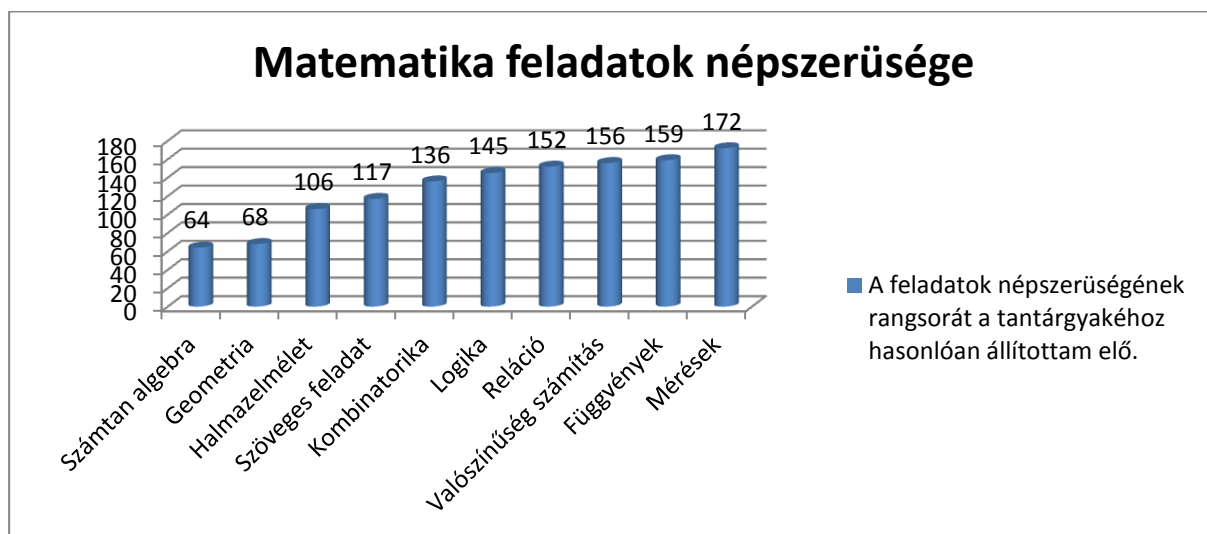
Az osztályból 14 gyerek szereti a matematikát, és 9-en pedig nem szeretik ezt a tárgyat, ami szerintem nagyon sok! Egy tanuló pedig nem válaszolt.



8. Diagram: Miért szeretik és miért nem szeretik a gyerekek a matematikát 5. osztályban?

A kördiagramon feltüntettem, hogy miért szeretik a gyerekek a matematikát, ezt piros árnyalatokkal jelöltem, és kék árnyalatokkal pedig azt, hogy miért nem szeretik.

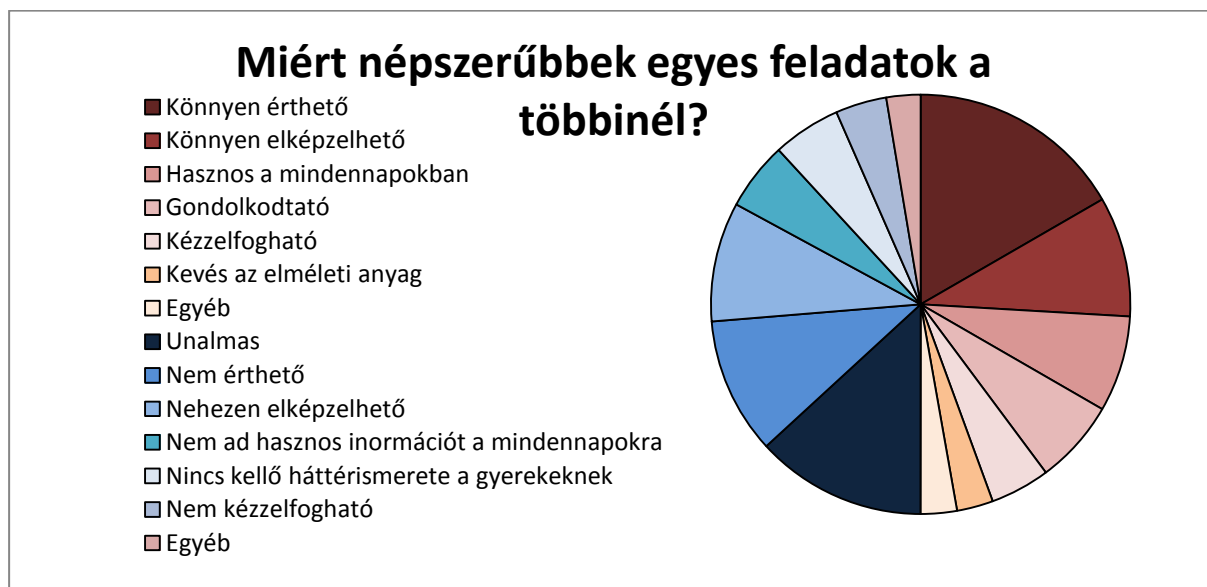
A harmadik feladatban matematikai feladatokat kellett rangsorolniuk a tanulóknak. A következő sorrend állt elő.



9. Diagram: Matematikai feladatok kedveltsége 5. osztályban

Tehát amikor feladatokat állítok össze a gyerekek számára az utolsó helyezett feladatokból, olyanokat kell választani, melyek közelebb állnak a gyerekekhez, érdekesebb a számukra, hogy azokat is megszerettessük a gyerekekkel.

Meg is indokoltattam velük, hogy bizonyos feladattípusokat, miért szeretnek és másokat pedig miért nem. A kedvelt feladatokat piros árnyalatokkal, a nem kedvelteket pedig kék árnyalatokkal jelöltem.



10. Diagram: Miért kedveltebbek egyes feladatok 5. osztályban?

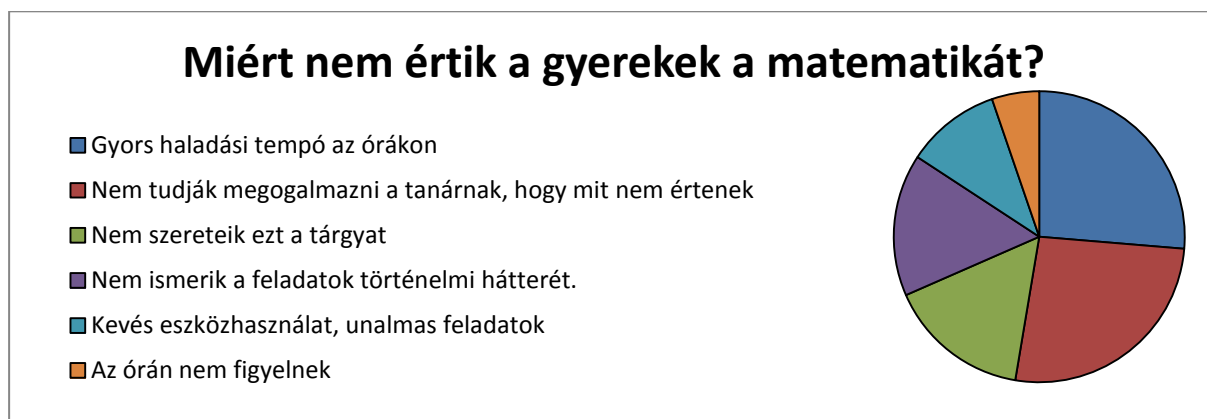
Itt látható, hogy a gyerekek a könnyen érthető és a mindennapokban használható feladatokat szeretik. Amiket nem szeretnek annak az oka, hogy nem tudják elképzelni nem

érthető számukra, vagy unalmasnak tartják. Azt a lehetőséget is sokan bejelölték, hogy nem ismerik a feladatok történeti háttérét.

Ez után arról érdeklődtem, hogy megértik-e az órai anyagot, ha nem mi ennek az oka.

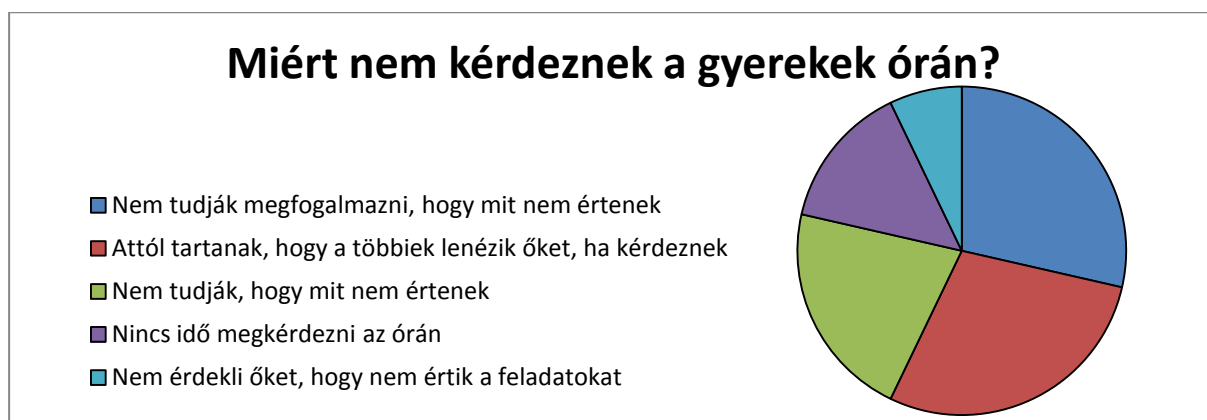
A feladatokat az osztályból 14-en értik meg általában és 9-en nem. Egy tanuló nem válaszolt.

Azt, hogy miért nem értik az eddig használt módszerrel mértem. Eredménye:



11. Diagram: Miért nem értik a gyerekek a matematikát 5. osztályban?

Az órai anyag megértéséhez szerintem szorosan hozzátartozik az, hogy ha a gyerekek valamit nem értenek egyből kérdezzék meg. A gyerekektől is megkérdeztem, hogy szokták-e jelezni, ha valamit nem értenek. 10 gyerek válaszolta azt, hogy órán kérdez és ezután meg is érti azt a mozzanatot, amit addig nem, viszont 14 nem szokott kérdezni ez szerintem nem jó arány. A kérdezés hiányának okát is vizsgáltam, ennek az eredménye:



12. Diagram: Miért nem kérdeznek a gyerekek órán 5. osztályban?

Sajnos ez azt mutatja, hogy a gyerekek nagy része azért nem érti meg az anyagot, mert a többiek reakciójától tartva nem is kérdezi meg a tanártól azt, amit nem ért, ezen a hozzáálláson is változtatni kellene, mert sok problémát ki lehetne küszöbölni vele. Ide illik egy Dán szólás is, miszerint: „Aki nem mer kérdezni, az szégyell tanulni.”

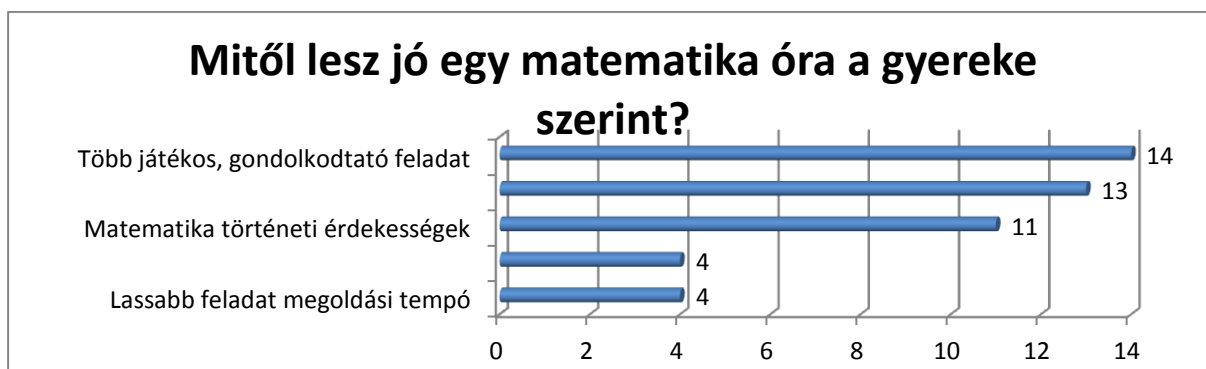
A következő kérdéscsoportom a korrepetálásokra vonatkozott. Először arra kérdeztem rá, hogy van-e lehetőségük korrepetálásra. A 24-ből 22 tanuló válaszolta azt, hogy van és 2 azt nincs, tehát valószínűleg a szaktanár tart korrepetálásokat. Ezután, azt kérdeztem meg, hogy hányan járnak korrepetálásra, ez mindössze 5 fő, ami szerintem nagyon kevés. A korrepetálás hatékonyságáról is érdeklődtem, aki jár korrepetálásra azt nyilatkozta, hogy korrepetálás után általában megérti a feladatokat. Azt is megkérdeztem, hogy a korrepetálás miben különbözik egy általános matematika órától, ami segít a megértésben. Itt a következő válaszokat kaptam:



13. Diagram: Mitől lesz sikeres vagy sikertelen a korrepetálás 5. osztályban?

Itt is a piros árnyalatok a pozitív a kék árnyalatok a negatív válaszokat jelöli. A megoldásokból egy ellentmondás is született ugyanis a pozitív válaszok közül sokan jelölték be, hogy többféle magyarázatot kapnak, viszont a negatív válaszokban előkerült ennek az ellentéte, ezek a tanulók valószínűleg nem figyelnek kellőképpen.

A 12. pontban arról kértem ki a gyerekek véleményét, hogy milyen lenne egy általuk ideálisnak tartott matematika óra. A gyerekek válaszai az általuk felállított sorrendben:



14. Diagram: Mitől lesz jó egy matematika óra a gyerekek szerint 5. osztályban?

Érdekes, hogy a két utolsó választ ugyan annyian jelölték meg, de ellentétei egymásnak, erre szerintem jó megoldás lenne a tanórai differenciálás, vagy pótfeladatok megoldásnak a lehetőségét felkínálni a gyorsabban haladóknak.

A tanulók közül 18-an mondták azt, hogy a matematika történeti érdekességek érdekelnék őket és, hogy ez segítené az adott tananyag megértését. 10 tanulót érdekelne egy olyan szakkör, ahol versenyfeladathoz hasonló gondolkodtató feladatokat oldhatnak meg.

Végül azt mértem fel, hogy hány tanuló volt már matematika versenyen az iskolán belül, illetve kívül és milyen eredményességgel versenyeztek.

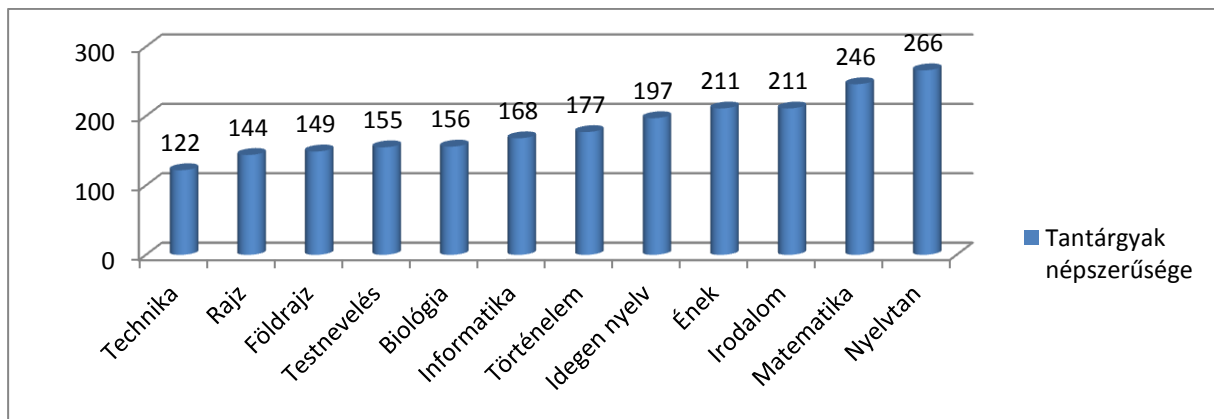
6 tanuló volt matematika versenyen az iskolán kívül közülük egy nyert, ketten végeztek közép tájon és 3-an a vége felé. Szintén 6-an vettek részt matematika versenyen az iskolában meghirdetett tanulmányi versenyen. Itt is volt egy tanuló, aki győzött, 4-en végeztek középtájon és egy gyerek a vége felé.

## 5. 6. osztályos kérdőív kiértékelés

6. osztályban: 28 tanuló válaszolt.

Ennek a kérdőívnek a felépítése ugyan olyan, mint az 5. osztályosokénak, úgy hogy kicsit vázlatosabban elemzem, mint az előzőt.

Először is a tantárgyak sorrendje, népszerűségük szerint: (Az első helyre kerül a legnépszerűbb tárgy és az utolsóra a legnépszerűtlenebb.)

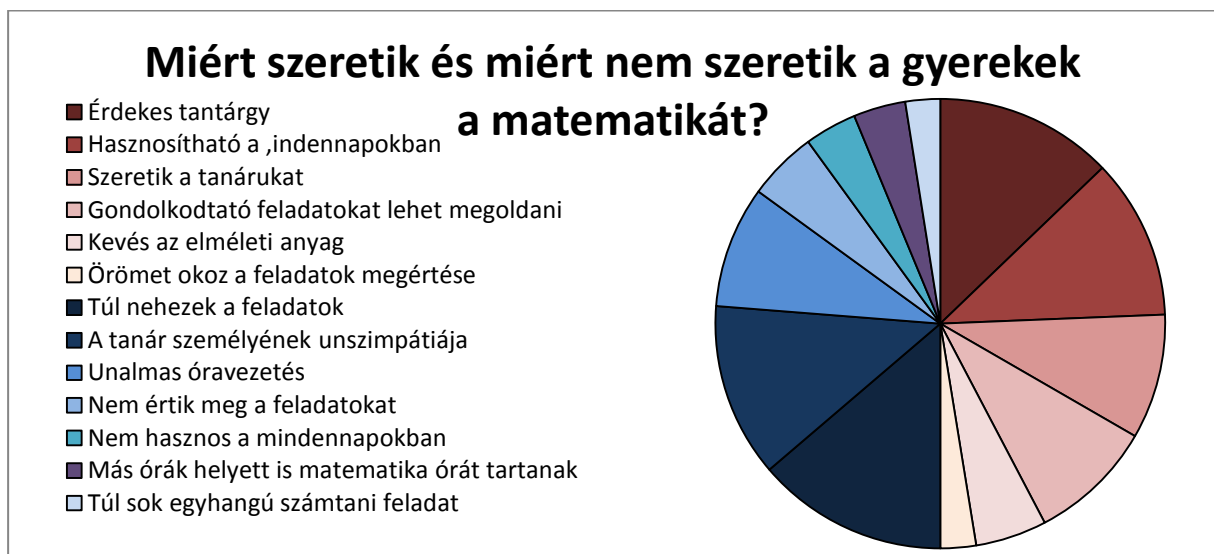


15. Diagram: A tantárgyak kedveltsége 6. osztályban

Itt a matematika még hátrébb csúszott a tantárgyak között, már csak az utolsó előtti helyen áll.

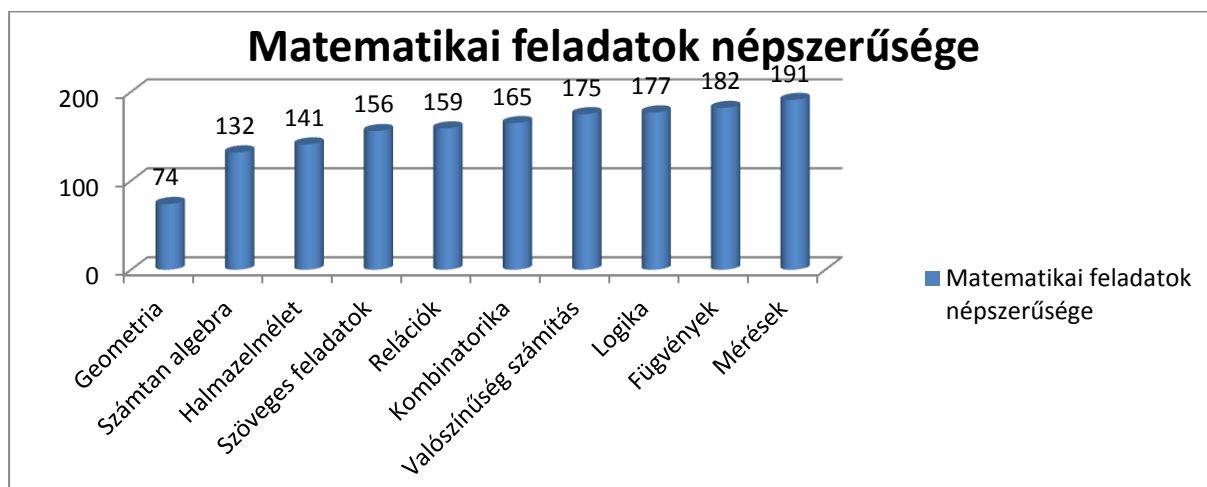
A következő kérdés csoportban azt vizsgálom, hogy hányan szeretik a matematikát és hányan nem majd ezeknek az okait. Az előző évfolyamban nagyobb arányban szerették a matematikát, az ő eredményeikhez viszonyítva ez nagy visszaesés.

Nézzük az okokat. Azokat a válaszokat piros árnyalatokkal jelöltem, amik arra a kérdésre érkeztek, hogy miért szeretik a matematikát, kék árnyalatokkal pedig, amik arra kérdésre válaszolnak, hogy miért nem szeretik.



16. Diagram: Miért szeretik és miért nem szeretik a gyerekek a matematikát 6. osztályban?

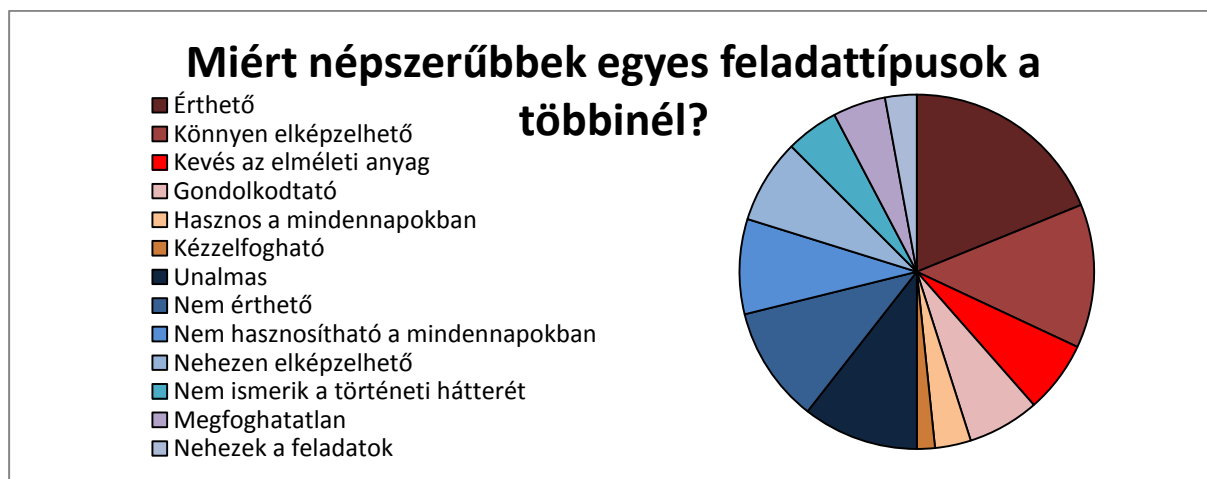
A matematikai feladatok rangsorolása következik: itt is az a feladattípus kerül az első helyre, amelyik a legnépszerűbb és az utolsó helyre a legnépszerűtlenebb.



17. Diagram: Matematika feladatok kedveltsége 6. osztályban

Itt is látszik, hogy azok a feladattípusok kerültek az utolsó helyekre, amelyek nehezen feldolgozhatók, kézzelfogható szemléltetés nélkül, amikor majd a dolgozatom következő részébe feladatokat keresek ezekhez a témakörökhöz szemléltető eszközöket is tervezek ezekhez a feladatokhoz.

A következő kördiagramról az olvasható le, hogy a gyerekek miért szeretnek egyes feladattípusokat, ezeket piros árnyalatokkal jelölöm és másokat miért nem ezek a kék árnyalataival szerepelnek rajta.



18. Diagram: Miért kedveltebbek egyes feladatok 6. osztályban?

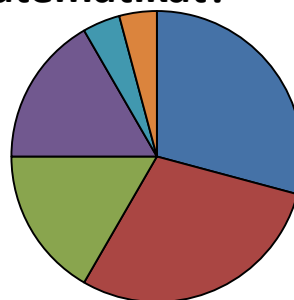
Ezek után a gyerekeknek azokra a kérdésekre kellett választ adniuk, hogy megértik-e a matematikát vagy nem, és ha nem ennek mi az oka.

A 28 tanulóból 25 válaszolta azt, hogy megértik a matematikát és 3 azt, hogy nem, ez nagyon jó eredmény!

És most nézzük, hogy miért nem értik a gyerekek a matematikát?

## Miért nem értik a gyerekek a matematikát?

- Nem tudják megfogalmazni, hogy mit nem értenek
- Túl gyors a feladat megoldási tempó
- Unalmas feladatok
- Egyéb
- Nem ismerik a feladatok történelmi hátterét
- Nem figyelnek az órán

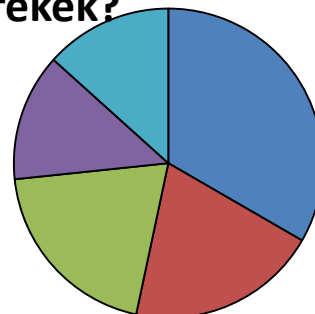


19. Diagram: Miért nem értik a gyerekek a matematikát 6. osztályban?

17 gyerek szokott kérdezni az órákon, ha valamit nem értenek, 11 pedig nem. És, hogy miért nem szoktak kérdezni:

## Miért nem kérdeznek a gyerekek?

- Attól tartok, hogy a többiek lenéznek
- A tanórán nincs idő kérdéseket eltenni
- Nem tudják megfogalmazni, hogy mit nem értenek
- Jár korrepetálásra, majd ott megkérdezi
- Nem érdekli, hogy nem érti



20. Diagram: Miért nem kérdeznek a gyerekek órán 6. osztályban?

A gyerekközül 27-en válaszolták azt, hogy, ha kérdeznek, akkor utána megértik a feladatot.

Ebből is látjuk, hogy nagyon fontos lenne arra szoktatni a tanítványokat, hogy kérdezzenek és ebben az évfolyamba is nagyon magasan az az állítás kapta a legtöbb szavazatot, hogy a többiek rosszallása miatt nem mernek kérdezni, ezt mindenképpen orvosolni kellene.

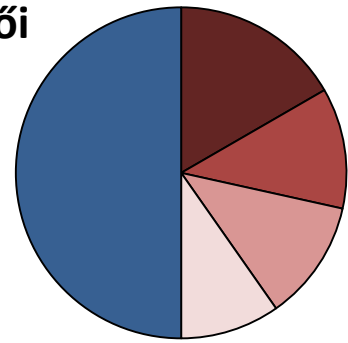
A következő sarkalatos pont a korrepetálás:

18 gyerek válaszolta azt, hogy van lehetősége korrepetálásra és 10-en azt, hogy nincs ez számomra nagyon érdekes adat, mert egy osztályban ez egységes szokott lenni.

Nézzük, hogy a korrepetálás miben más, ami a tanulók szerint segíti a megértést ezeket a válaszokat piros árnyalatokkal jelölöm és miért fordulhat elő, hogy a gyerekek korrepetáláson sem értik meg az órai feladatokat, ezeket kék árnyalatokkal jelölöm:

## A korrepetálás sikerességének, vagy sikertelenségének tényezői

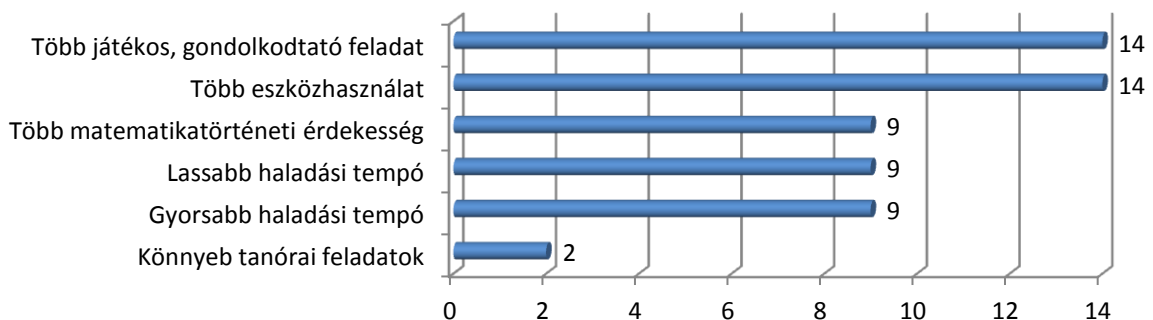
- Lassabb feladatmegoldási tempó
- Van idő arra, hogy a tanulók feltegyék a kérdéseiket
- A kisebb létszám miatt a tanár jobban tud figyelni az egyéni problémákra
- Többféle magyarázat
- Még ez az idő is kevés a feladatok megértéséhez



21. Diagram: Mitől lesz sikeres vagy sikertelen a korrepetálás 6. osztályban?

Nézzük, hogy a 6. osztályosok szerint milyen egy jó matematika óra?

## Mitől lesz jó egy matematika óra?



22. Diagram: Mitől lesz jó egy matematika óra 6. osztályban?

Ezekből a válaszokból is a differenciálás fontossága derül ki a 2. helyezett válaszokból, a diákok ugyan annyian mondták azt, hogy több időre lenne szükségük, és azt hogy több feladat kéne, mert unatkoznak.

Végül a matematikával kapcsolatos külön tevékenységekre kérdeztem rá.

A gyerekek közül 17-et érdekelnének a matematikatörténeti érdekességek ebből 13-an gondolták azt, hogy ettől jobban megértenék a tananyagot. 11-en mondták azt, hogy szívesen járnának matematika szakkörre. 8 gyerek volt iskolán kívüli matematika versenyen ebből 2-en végeztek a első öt között és 6-an végeztek középtájon. 11-en voltak iskolai tanulmányi versenyen ebből a tárgyból, 2-en adták azt a választ, hogy megnyerték, 3-an végeztek az első ötben és 6-an kerültek a középmezőnybe.

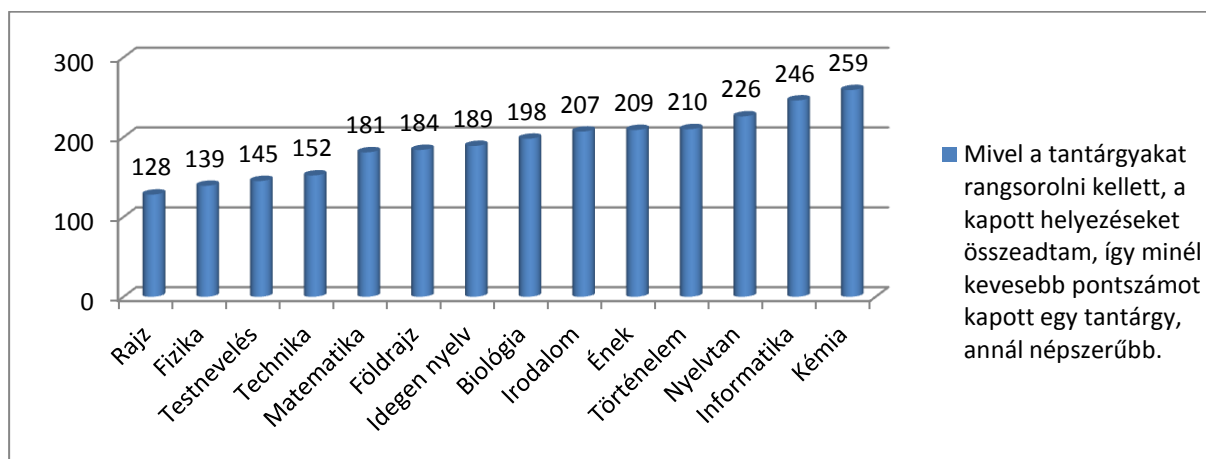
Ezek nagyon jó eredmények úgy tűnik, hogy ez az évfolyam eredményesebb, mint az 5. osztályos. Csak az a kérdés, hogy akkor miért nem szeretik a matematikát?

## 6. 7. osztályos kérdőívek kiértékelése

7.osztályban: 26 tanuló töltötte ki a kérdőíveket.

Ennek a kérdőívnek a felépítése is ugyanaz mint az 5. osztályosé csak az új bejövő tantárgyakkal bővítettem ki. Ezt már csak vázlatosan elemzem ki.

feladat a tantárgyak rangsorolása:



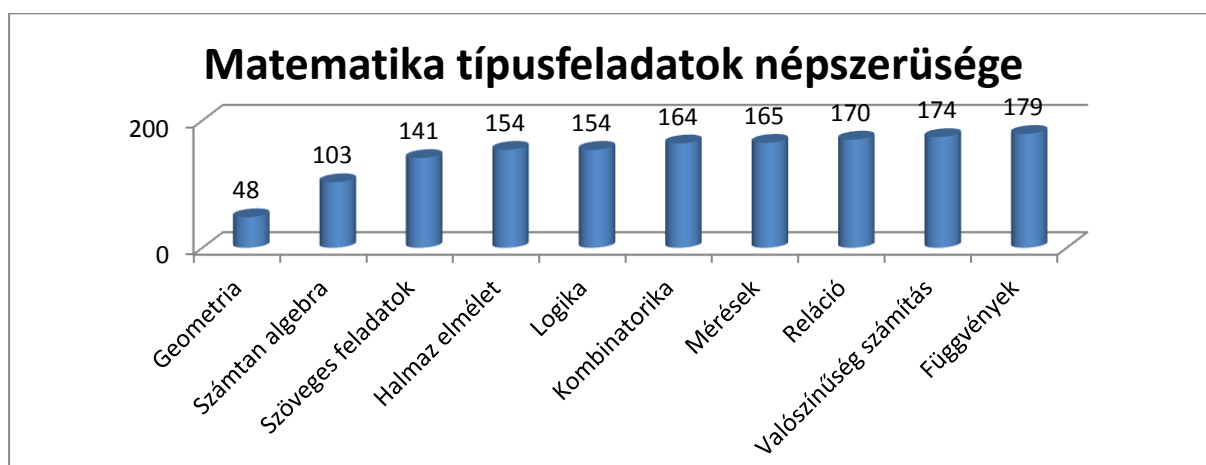
23. Diagram: Tantárgyak kedveltsége 7. osztályban

Itt a matematika az előzőekhez képest nagyon jó helyen van.

A matematikát 19-en szeretik és 7-en nem. Az előző osztályokhoz képest ez is meglepően jó eredmény.

Akik nem szeretik, a matematikát azoknak a válaszokból kiindulva azért nem szeretik, mert nem értik. Amit még fontos kiemelni, hogy akik szeretik a matematikát, a legtöbben azt jelölték be, hogy szeretik a tanárukat, ez azt jelenti, hogy egy jó tanár jó módszerekkel és eszközökkel a nehéz tárgyakat is meg tudja szerettetni a tanulókkal.

A matematikai típusfeladatok rangsorolása következik:



24. Diagram: Feladatok kedveltsége 7. osztályban

Arra kérdésre, hogy szokták-e érteni az órai feladatokat 21 tanuló válaszolta azt, hogy igen és 5 tanuló azt, hogy nem szokták megérteni.

A tanulók kérdezési szokásai: 4 tanuló mondta azt, hogy egyből kérdez, ha valamit nem ért és 22-en mondták azt, hogy általában nem szoktak kérdezni. 21 gyerek mondta azt, hogy ha kérdez utána megérti az anyagot és 5-en azt, hogy a kérdezés nem segít neki a feladat megértésében. És az okok, hogy a tanulók nagy része miért nem kérdez:

A többiek lenézésétől félnek a legtöbben

Korrepetáláson meg lehet kérdezni

Nem tudom megfogalmazni, hogy mit nem értek, egyéb: otthon is megtudom kérdezni, magamtól is rájövök

Nem is érdekel, hogy nem értem, nincs rá idő az órán

A korrepetálásról kérdeztem a gyerekeket. 24 tanuló adta azt a választ, hogy van lehetőségük korrepetálásra és 2-en azt, hogy nincs, tehát nagy valószínűséggel van matematikából iskolai korrepetálás. 13-an járnak korrepetálásra rendszeresebben és ebből mind a 13-an azt válaszolták, hogy megértik a feladatokat a különórán.

Itt arról kértem ki a gyerekek véleményét, hogy milyen lenne az a matematika óra mire szívesen bejárnának:

Több játékos feladat lenne az órákon.

Több idejük lenne a feladatokra.

Több eszközhasználat lenne az órákon.

Több történeti érdekességet tudhatnának meg.

Gyorsabb feladatmegoldás.

Ebben a feladatban azt kérdeztem, hogy a matematikatörténet érdekelné-e a gyerekeket és, szerintük ennek az ismerete segítené-e a feladatok megértését. A 26 tanulóból 14-en válaszolták azt, hogy érdekelné őket a matematika történet ebből 13-an gondolják azt, hogy ez a matematika megértését is elősegítené.

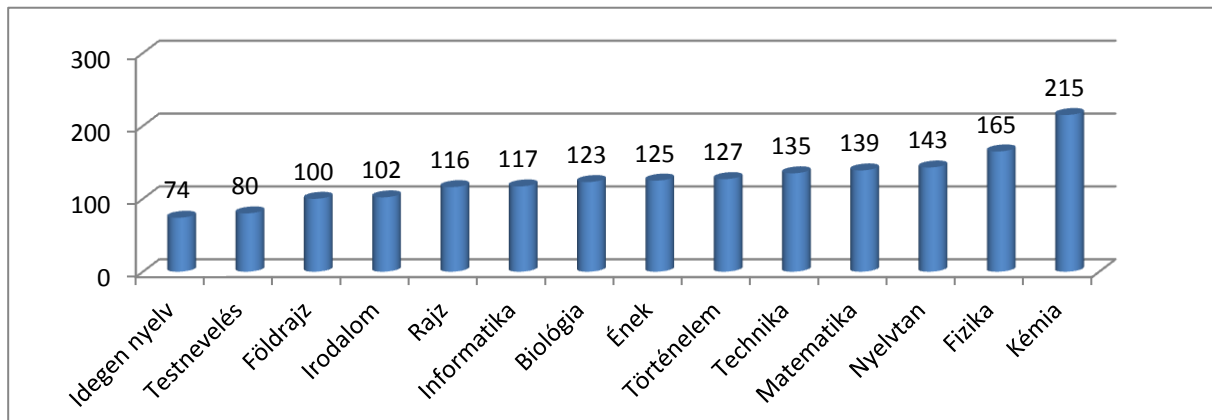
Azt is megkérdeztem tőlük, hogy járnának-e olyan matematika szakkörre ahol érdekes feladatokat oldhatnak meg. Erre a kérdésre 11 tanuló válaszolt igennel.

Végül arra kérdeztem rá, hogy szoktak-e versenyre járni, iskolán belül vagy iskolán kívül. Iskolán kívüli matematika versenyre 3 tanuló szokott járni és általában középtájon végeznek. Iskolán belüli versenyre 12 diák jár, közülük 2-en válaszolták, hogy az első ötben szoktak végezni 5-en azt, hogy középtájon és 5-en pedig a vége felé.

## 7. 8. osztályos kérdőívek kiértékelése

8. osztályban: 17 tanuló töltötte ki a kérdőívet.

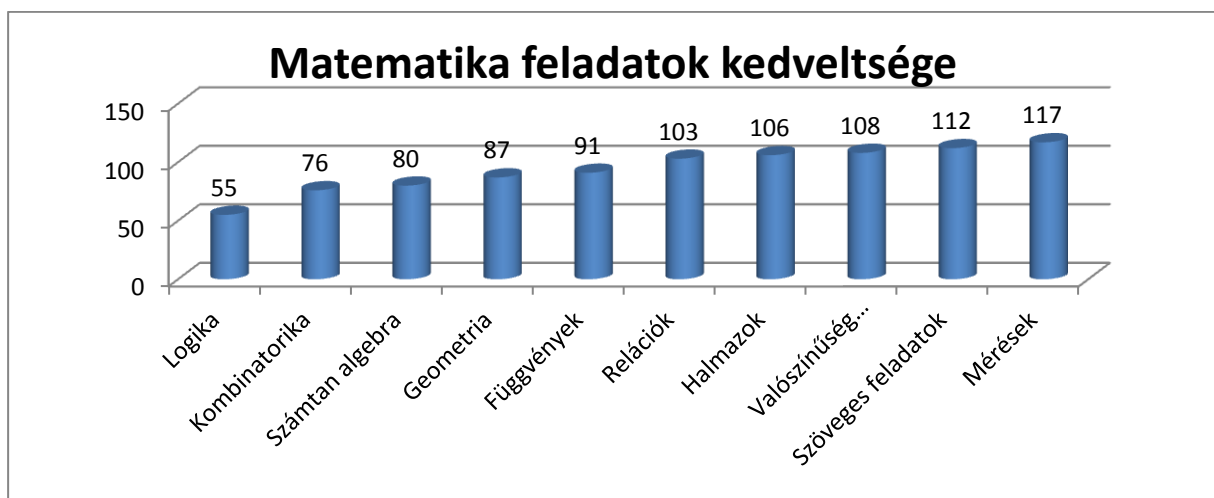
A tantárgyak népszerűségi sorrendje:



25. Diagram: Tantárgyak kedveltsége 8. osztályban

Azt vizsgáltam, hogy hányan szeretik és hányan nem szeretik a matematikát, és ennek mi az oka. 9-en adták azt a választ, hogy szeretik a matematikát és 8-an azt, hogy azt nem.

A feladattípusok kedveltségi sorrendje következik:



26. Diagram: Matematika feladatok kedveltsége 8. osztályban

Azt is megkérdeztem a tanulóktól, hogy miért szeretik jobban azokat a feladattípusokat amiket az első helyekre írtak, és miért kevésbé amiket a végére soroltak be.

A következő kérdésem arra irányult, hogy hányan értik a matematikát, hányan nem és ez miért van így. 14-en válaszolták azt, hogy megértik, és szerencsére csak 3-an azt, hogy nem értik a matematikát.

A kérdezési szokások vizsgálata következik: A 17 tanulóból 5 válaszolta azt, hogy ha valamit nem ért rögtön megkérdezi, és 12-azt, hogy nem szokott kérdezni az órán. Annak az okai, hogy miért nem kérdeznek a gyerekek:

Nem tudják megfogalmazni, hogy mit nem értenek.

Nem mernek kérdezni, mert attól félnek, hogy a többiek ezért lenézik majd őket.

Nincs rá idő az órán, járnak korrepetálásra és ott megtudják kérdezni, nem tudják, hogy hol vesztették el a fonalat.

Még arra kérdeztem rá, hogy ha megkérdezik, amit nem értenek akkor megértik-e. Erre 16 tanuló válaszolta, hogy megértik, ha kérdeznak és 1 azt, hogy nem.

Ebben a kérdéscsoportban azt vizsgáltam, hogy a gyerekeknek van-e lehetősége korrepetálásra, élnek-e ezzel a lehetőséggel, és ha igen milyen eredményességgel javít ez a teljesítményükön. 14-en válaszolták azt, hogy van lehetőségük korrepetálásra és ebből a 14 főből 10-en rész is vesznek rajta rendszeresen. Ezek közül a gyerekek közül 9-en értik meg a tananyagot korrepetálás után.

Arról is véleményt kellett alkossanak a gyerekek, hogy számukra milyen lenne az a matematika óra, amire szívesen bejárnának. A vélemények rangsora a következő lett:

Több játékos feladat lenne az órákon, és több matematikai érdekességet tudhatnának meg.

Több eszközhasználat lenne az órákon, és több idő a feladatok megoldására.

Gyorsabban haladnának a feladatok megoldásával.

A gyerekek véleménye arról, hogy érdekelné-e őket a matematika történet és ez elősegítené-e a tananyag megértését, és részt vennének-e olyan szakkörön ahol érdekes, gondolkodtató feladatokat oldhatnak meg: 14-en válaszolták az, hogy érdekelné-e őket a matematika történet, 10-en azt, hogy ez segítené a feladatok megértését. A 17 tanulóból 8-an járnának szakkörre.

És végül a versenyen való részvételek számáról és eredményességéről érdeklődtem, az iskolán kívüli és belüli versenyeken egyaránt. 6 tanuló adta azt a választ, hogy szokott iskolán kívüli versenyeken is részt venni, mind a 6-an azt a választ jelölték be, hogy középtájon szoktak végezni. Iskolán belüli versenyre 10 gyerek szokott járni, közülük 3-an adták azt a választ, hogy az első ötben végeznek, 5-en azt, hogy középtájon és 2-en azt, hogy a vége felé. Ez elég jó eredmény.

Általánosan a felső tagozatos eredményekről elmondható, hogy már nem kedvelt tárgy a matematika. A gyerekek a társak gúnyolódásától tartva nem mernek kérdezni, és szeretnének több érdekességgel, a való életből vett példával, szórakoztatóbb feladatokkal és eszközökkel dolgozni.

## 8. Összegző következtetések, megállapítások

Nagyon tanulságos volt számomra a kérdőívek kitöltése és a kiértékelés eredménye. Sokat megtudtam arról, hogy a gyerekeket mivel lehetne jobban motiválni, mi az ami kevésbé megy nekik, mi az ami jobban. Bár ebből a kutatásból nem lehet messzemenő következtetéseket levonni, mert csak egy iskolát vizsgáltam, de szerintem érdemes lenne a kutatást kiterjeszteni. A hipotézisem az volt, a gyerekek, ahogy felsőbb osztályba lépnek egyre kevésbé szeretik a matematikát ez beigazolódt, főleg 6. osztályig utána inkább stagnál, nagyobb zuhanás 5. osztálytól tapasztalható. Arra kell tehát törekedni, hogy ezen változtassunk.



27. Diagram: A matematika tantárgy helyezései évfolyamonként

A 7. osztályban tapasztalható nagy eltérés egy kedvelt tanár személyéhez köthető, figyelemre méltó, hogy mennyit jelent egy tantárgy megítélésében a tanár szeretete.

A gyerekek általánosan azt válaszolták, hogy szívesebben járnának be matematika órára, ha érdekes eszközökkel dolgozhatnának felsőbb osztályokban is.

A matematikából gyengébb, valószínűleg humán tárgyak iránt érdeklődő gyerekeket, jobban érdekelté lehetne tenni a matematika történeti érdekességekkel.

Nagyon fontos minden tanórán a jó osztályközösség formálására törekedni, mert a kérdezési szokások vizsgálatánál, kiderült a diákok nagy százaléka szorong attól, hogy ha kérdeznének az órán, a többiek ezért lenéznék vagy kinevetnék őket. Jól használható lehet, ha néhány tanórán projekt munkát, vagy csoport munkát adnánk az osztálynak, természetesen a tanulók tudatos csoportba sorolásával.

Megfontolandó az az eredmény, hogy matematika attól is lehet népszerűtlen, ha közepes tempóval haladunk az órákon, és nem differenciálunk, mert a gyengéknek még ez is gyors lehet, az ügyesebb tanulók pedig unatkoznak. Itt kiemelném a matematika órai differenciálás fontosságát.

### III. A 6. OSZTÁLYOS MATEMATIKA TANANYAGHOZ KAPCSOLÓDÓ MATEMATIKUSOK ÉS ÉRDEKESSÉGEK, A MUNKÁSSÁGUKKAL ÉS ÉLETÜKKEL KAPCSOLATBAN

Azért pont ezt a korosztály választottam, mert matematika műveltség területet végzek, tehát 6. osztályig foglalkozhatok a matematikával és 2. osztálytól 6. osztályig a 6-osok szeretik legkevésbé a matematikát a kérdőíves kiértékelés alapján. Emellett bizonyítható, hogy a gyerekek pszichoszexuális fejlődése egyre gyorsul, tehát a pubertás kor már 12 éves korban elkezdődik, ami pont a 6-osokat érinti. Tehát ez egy nagyon érzékeny korosztály, ezért nem mindegy, hogy hogyan kezeljük, tanítjuk ezeket a gyerekeket és a műveltség területet képzsének köszönhetően talán a tanítói attitűddel közelebb kerülünk a gyerekekhez.

Ahogy a bevezetőben már említettem a dolgozatom harmadik részében történeti érdekességeket és gondolkodtató számolási feladatokat fogok gyűjteni, amik szorosan kapcsolódnak a Nemzeti Aaptantervhez, a Kerettantervhez és beépíthető az iskolai tanmenetekbe is.

A 6. osztályos matematika tananyag nagy témakörei a NAT és a Kerettanterv alapján:

- I. Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok
- II. Számtan, algebra
- III. Függvények, az analízis elemei
- IV. Geometria
- V. Statisztika, valószínűség

#### **1. Gondolkodási módszerek**

Ezt a fejezetet év eleji bevezetésnek szánom, különböző gondolkodtató kedvcsináló feladattal, amik célzottan egy-egy gondolkodási módszerre épülnek. Ezek:

- Kombinatorikus gondolkodás: például ide sorolhatók a különböző átkelési problémák.
- Helyes halmazszemlélet (halmaz, elem, részhalmaz, egyesítés, közös rész)
- Matematikai logikai és relációs kifejezések helyes használata: egyenlő, kisebb, nagyobb, több, kevesebb, legalább, legfeljebb, nem, és, vagy, vagy-vagy, minden, van olyan, biztos, lehetetlen, lehetséges. Ide felsorakoztathatunk különböző igaz mondós és hazudós feladatokat, és következtetéssel megoldható feladatokat.
- Algoritmikusgondolkodás, ezt a képességet különböző számkeresési feladatokkal lehet érdekesebbé tenni. Pl.: Hány olyan kétjegyű természetes szám van, amelyekben az egyik számjegy 3-al nagyobb a másikonál?

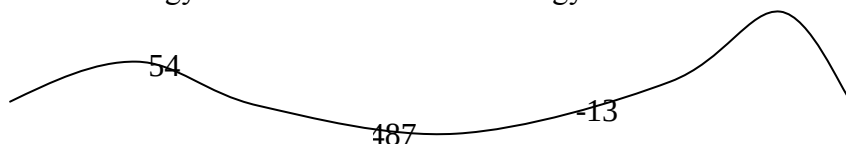
- Megfigyelő képesség és rendszerező képesség, itt olyan példákat hozhatunk, hogy egy számhalmaz elemeinek tulajdonságáról, olyan dolgokat állítok, amik nem igazak. Tehát a gyerekeknek át kell fordítani az információt és rendszerezni kell ezek alapján a halmaz elemeit.
- Analizáló képesség
- Absztrakciós képesség, itt olyan feladatok a jellemzőek, ahol az addig tanultakat, nehezebb példák megoldására kell alkalmazzák a gyerekek, nem feltétlenül abban a formában, ahogy tanulták.
- Inverz gondolatmenet, olyan feladatok, amit csak úgy tudnak megoldani, ha visszafelé levezetik az eseménysort.
- Szintetizáló képesség, ennél az a követelmény, hogy részinformációkból fel tudják építeni a feladatokat a gyerekek.
- Probléma megoldási képesség:

Tanítási gyakorlataim során és matematika tanárokkal folytatott, beszélgetések alapján azt a következtetést tudom levonni, hogy a gyerekek akkor gondolkodnak a legtöbbet, ha olyan problémákat tárunk eléjük, amikre ők maguk rájönnek és ebből saját maguk meg tudják fogalmazni a szabályt. Szeretik tudósok módjára feltárni az ok okozati összefüggéseket. Amit talán a legjobban élveztek, és én is ki tudtam a gyerekekkel próbálni, amikor úgy fedeztetjük fel a szabályokat velük, hogy eljátsszuk, hogy közben ők tanítanak minket, a szókratészi dialógushoz hasonlóan. (Dr. Iker János, Szerencsi Sándor, Dr. Vörös György 1995).

Feladat: A gyerekekkel 5. osztályban a számegyenes fogalmát kellett tisztáznom ezt úgy oldottam meg, hogy azt mondtam a gyerekeknek, hogy én az úrből jöttem és hallottam, hogy itt a Földön használnak számegyenest és megkértem őket, hogy mondják el nekem, hogy ez hogy néz ki.

A válaszuk: - az egy vonal, amin számok vannak.

Én erre rajzoltam a táblára egy görbe vonalat és rá írtam a számokat, úgy, hogy azok véletlenül se legyenek növekvő sorrendben. Így:



Ezt a gyerekek nagyon élvezték természetesen, és egyből elkezdtek pontosítani az előző válaszukat: - A számegyenes egy egyenes vonal a végén nyíl van, a számok pedig alatta vannak.

Ennek az információnak megfelelően rajzoltam egy egyenest a bal végére rajzoltam egy jobbra mutató nyílat, a számokat pedig az előzőhöz hasonlóan írtam az egyenes alá.

Ez még nagyobb derűtséget váltott ki, de újból pontosítottak: - a számegyenesen a nyíl a jobboldalon van és mindig a számok növekedési irányát jelöli, a számok pedig, növekvő sorrendben vannak alatta.

A következő számegyenes, amit rajzoltam, már egészen hasonlított egy szabályos számegyeneshez, a jobb végén megvolt a jobbra mutató nyíl a számokat növekvő sorrendbe írtam alá, természetesen nem azonos differenciával és beosztás nélkül.

Végül a gyerekek is megfogalmazták a számegyenes ezen tulajdonságait is. Én felrajzoltam egy szabályos számegyenest ők büszkék voltak magukra, mert el tudták, magyarázni, hogy milyen egy számegyenes és közben, rá kényszerültek a szakszavak használatára. Minden gyerek hasznára válna, ha fontosabb fogalmakat így tanulnának.

## **2. Számtan algebra**

Az egész számok szorzásával és osztásával foglalkozok, ez azért praktikus szerintem, mert mielőtt áttérünk a törtekre és a tizedes törtekre, a szorzást osztást át tudjuk ismételni és stabilabb számolási készségekkel és stabilabb műveletvégzéssel kezdjük el feldolgozni a törteket, tizedes törteket.

### Mi az az egész szám?: Számhalmazok tisztázása, Számkör bővítés

Az egész számokkal való műveletvégzés már 3. osztályban megjelenik, általában negatív hőmérséklet és adósság formájában. Műveletvégzésnél a gyerekek használhatnak eszközt (hőmérőt, vagyon és adósság kártyákat). 4. osztályban is hasonló formában jelennek meg az egész számok, de már nagyobb számkörben. 5. osztályban, már mind a 4 alpművelet megjelenik az egész számok körében, de a feladatok nagy részénél ott van segítségként a számegyenes, megjelenik az abszolút érték fogalma. 6. osztályban: egész számok szorzásával, osztásával foglalkozunk és ezek abszolút értékével és ellentettjével. Itt viszont csak ismétlődő feladatoknál van számegyenes, tehát ebben az évfolyamban, már a gyerekeknek biztos számolási készséggel és ismeretekkel kell rendelkezniük ebben a számhalmazban.

Én ennek a témának a tanítását, mindenképpen a számhalmazok tisztázásával és számhalmaz bővítés kérdésével kezdeném. Az a számkör, amivel alsóban elkezdenek foglalkozni 1-2. osztályban az a természetes számok halmaza. Már az ó-korban ezzel a számhalmazzal biztosan végeztek alpműveleteket, természetesen ebben az időben még nem tartozott ebbe a halmazba a 0. Ez a szám Európában csak a 17. században terjedt el. Az ó-korban a negatív számokkal sem végeztek műveleteket, mint az adósság mértéke szerepelt,

inkább mennyiség volt, mint absztrakt szám. Ezzel a számcsoporthal még az ó-kori görögök sem foglalkoztak, főleg azért mert az ő matematikájuk geometria központú volt, a geometriában nem jelennek meg negatív számok (nincs negatív oldalhosszúság). A nullával és a negatív számokkal való számolás szabályait először Kr. u Indiában Bramagupta, fogalmazta meg. Tehát a természetes számokat azért kellett kiegészíteni a negatív számok halmazával, mert rájöttek, hogy ha olyan művelettel találkozunk, aminek negatív szám az eredménye, ez nem értelmezhető a természetes számok halmazán. Ugyanis a természetes számok halmazában korlátlanul csak az összeadás és a szorzás végezhető el. Ha már kivonást is kell végeznünk szükség van az egész számok halmazára.

Történeti érdekesség: Bramagupta-nak (Kr. u 598-660) és öt 100 évvel megelőző elődjének Áryabhata-nak (476- ≈550) köszönhetjük a nulla fogalmát, a nullával való számolás szabályait, ezeknek a szabályoknak a nagy része ma is érvényes, egyedül a nullával való osztás kérdését nem tudták tisztázni. Emellett még nekik köszönhetjük a helyi értékes 10-es számrendszert. Ma már szinte lehetetlen lenne elképzelni, hogy más számrendszert tanítsunk elsőként a gyerekeknek, mint a 10-es. Ő fogalmazta meg elsőként az előjeles számokkal való műveletvégzés szabályait, mind a négy alapl műveletre bár a negatív számokat ő is még adósságnak tartotta.

Az indiai matematikának, volt még egy olyan érdekessége az eredetiség és korukat megelőző felfedezések mellett, hogy nagy ellentmondásokat is elfogadtak. Ez Bramagupta-ra is jellemző volt, hiszen ő azt állította pl.: hogy ha egy negatív számot elosztunk 0-val egy olyan törtet kapunk, aminek a nevezője 0.

Az akkori hagyományok megkövetelték az indiai tudósoktól, hogy feljegyzéseiket verses formában közöljék, aminek még a verselését meghatározták, ez a következő volt: abababcc. Ebben a verselésben írta meg Arany János is a Bolond Istókot.

#### Feladat:

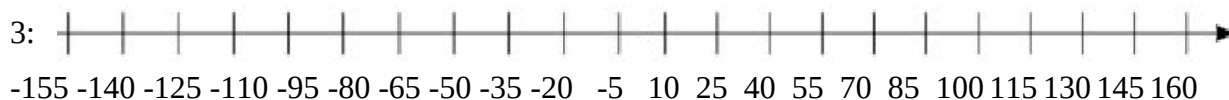
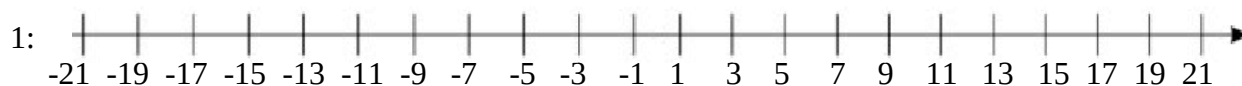
- 1.) Egész számokkal való műveletvégzés szabályainak összefoglalása verses formában.
- 2.) A Marianna-árok Japánban, Tokiótól  $\approx 2400$  km-re a Marianna-szigetcsoporthal keletre található. Ez a Földünk legmélyebb pontja 11034m mély és mintegy 2250 km hosszú. Legmélyebb pontja a Challenger szakadék. Hazánk legmagasabb pontja a Mátra hegységben levő Kékestető magassága 1014 m. A világ legmagasabb pontja pedig Csomolungma (Mount Everest), a Himalája egységhez tartozik, a csúcsán húzódik Nepál és Kína határvonala. A 8848m magas (egy 210-es nepáli mérés alapján). Mekkora a szintkülönbség hazánk legmagasabb pontja és a világ legmagasabb pontja között? Mekkora a különbség hazánk

legmagasabb pontja és a Marianna-árok között? Mekkora a szintkülönbség a Csomolungma és a világ legmélyebb pontja között?

3.) Állapítsd meg a következő szorzás értékéről, hogy pozitív, vagy negatív szám lesz!

A 78 és a 46 különbsége legyen az egyik tényező, a másik a 78 és 46 különbségének az ellentettje.

4.) A Haxo bolygó lakói 3 féle számegyenest használnak az elsőt a beosztások 2-esével szerepelnek és csak páratlan számot jelölnek rajta. A második 12-es beosztású és csak páros számok szerepelnek rajta, végül a harmadik 15-ös beosztású, ezen egy páros és egy páratlan szám szerepel egymás után. A három számegyenes a következő képpen néz ki:



A Haxo bolygón lakó kétszer harmadikosoknak az a feladata, hogy a következő műveleteket kiszámolja és ezeket jelölje azon a számegyenesen, amelyen a legpontosabban meg tudja adni a helyét, illetve jelölje, hogy ez pontos vagy megközelítő érték. Segíts nekik!

$$(-23)-(-25)*68=136$$

$$(-12)*4/(-2)=24$$

$$123/(-3)+(-4)/9=-5$$

$$(-6)*8+(-42)*0-6=-42$$

### Osztó, többszörös fogalmának átismétlése

Történelmi érdekesség: Fermat volt az első, aki azzal foglalkozott, hogy egy szám összes osztóját előállítsa. Erre két utat talált: az egyik, hogy osztópáronként megkeressük az összes osztót, a másik: az adott számot prímtényezőkre bontjuk és a tényezőknek különböző variációit keressük. Pl.: a 72 prímtényező felbontása: 3db 2-es és 2db 3-as ezeknek az elemeknek keressük 1, 2, 3, 4 és 5 elemű variációját.

Az oszthatóság kérdését vizsgálva eljuthatunk egy érdekes fogalomhoz a maradékosztályokhoz. Egy szám akkor osztója egy másiknak, ha maradéktalanul megvan benne, viszont, ha nem osztója, akkor valamennyi maradékot fog adni. Azok a számok tartoznak egy maradékosztályba, amelyeket ugyanazzal a számmal osztva ugyan annyi maradékot adnak. Ezzel sok érdekes feladatot lehet megoldani, például meg lehet határozni,

hogy 1000, vagy akárhány nap múlva milyen nap lesz. De a feltekert számegyenesek is ebbe a kategóriába tartoznak.

#### Feladatok:

1.) Kittinek november 5-ére esik a születésnapja. Úgy szereti tartani a születésnap ünnepségeket, hogy azok arra a hétfőjére essenek, amelyek a legközelebb vannak a születésnapjához. Az idei zsúrt már megszervezte, de mivel nem lehet elég korán elkezdni, már elkezdte kiszámolni, hogy a következő évben milyen napra esik a születésnapja és ehhez, hányadikai hétfője esik a legközelebb. Milyen napra esik Kitti születésnapja? Melyik hétfőjén fogja megrendezni az ünnepséget?

2.)Egy általános iskola a felső tagozatos tanulók számára kirándulást szervez a pécsi Leonardo da Vinci kiállításra. A kirándulásra busszal mennek, és ajánlatot kértek a távolsági busztársaságtól, hogy mennyibe kerülne az iskolának, ha 8 osztályt, összesen 236 tanulót szeretnének utaztatni. Az autóbusz társaságnak 2 fajta busza van: egy kisebb 23 személyes és egy nagyobb 44 személyes. A 23 fős buszt 18500 Ft kibérelni a nagyobb buszt 26850 Ft. Milyen típusú buszból és mennyit kell kibérelniük, hogy a legolcsóbban utazhassanak, úgy, hogy minden gyereknek kell ülőhelye legyen.

A görögök is kutatták ezt a kérdést már az ókorban. Ők is találtak olyan számokat, amik az oszthatóságuk terén érdekes tulajdonságokat mutatnak, bár konkrétan az oszthatósággal nem oglakoztak. Megalkották a tökéletes szám fogalmát, ennek a meghatározásáról két elmélet maradt fenn. Az egyik az, hogy ők csak a 10-et tekintette tökéletes számnak, mert az  $1+2+3+4=10$ . Ezek a számok azért fontosak, mert ezekkel kifejezhető a 3 legfontosabb zenei hangköz aránya, de erről majd később az arányoknál. A másik forrás szerint, amit, Euklidész is vallott: azok a tökéletes számok, amelyek megegyeznek, valódi osztóinak összegével, (ők az 1-et is idesorolták). Tökéletes szám pl.: a 6, mert osztói: 1, 2, 3, 6 ebből a pythagoreusok szerint a valódi osztók az 1, 2 és a 3, mivel  $1+2+3=6$  ez egy tökéletes szám.

És a barátságos számok is ide tartoznak. Ezek olyan számpárok, amelyeknek a valódi osztóinak a számának az összege (idesorolják az 1-et is) megegyezik a másik számmal és fordítva. Ilyen számpár a 284 és 220.

284 osztói: 1, 2, 4, 71, 142, ezeknek az összege: 220

220 osztói: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, ezeknek az összege: 284.

Ezen felül még három kategóriát hoztak létre, voltak a hiányos számok, amelyeknek a valódi osztóinak a számának az összege (az 1-et is belevéve) kevesebb mint maga a szám. Ilyen például a 35, osztói: 1, 5, 7, 35 a 35-öt nem tekintették valódi osztónak, tehát valódi

osztóinak összege:  $1+5+7=13$ . Ezeknek az ellentettjei a bővelkedő számok ezen számok, valódi osztóinak összege, ezeket az eddigiek analógiájára kiszámolva, nagyobb számot kapunk, mint az eredeti szám. Ilyen például a 48, osztói önmagát kivéve: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, ezeknek az összege: 76. Végül az aranyközép út az alig-alig bővelkedő számok. A pythagoreusok szerint ezek olyan számok, amelyeknek valódi osztóinak összege, az egyet is bele értve egyel nagyobb, mint maga a szám. Ilyen számot nem találtak, sőt senki más sem. Ez még napjainkban is nyitott kérdés.

### Prímszám, összetett szám, relatív príme

Történeti érdekességek: Amint láttuk, ahhoz, hogy egy szám összes osztóját biztonsággal és könnyen megtaláljuk, ismernünk kell a prímszámokat. Néhány prímszámokhoz köthető érdekesség következik. Először is mi az a prímszám? A prímszámok olyan számok, amelyeknek nincs valódi osztója, tehát csak egyel és önmagukkal oszthatók.

A prímszámokkal szinte minden ókori birodalom foglalkozott, mezopotámiai tudósoktól kezdve az egyiptomiakig. Az áttörést az ókori Görög országban érték el a pythagoreusok. A pythagoreusok, a számokról úgy gondolkodtak, mint diszkrét egyekről, ezeket kövekkel ki is rakták, vagy pontokkal jelölték őket. Rájöttek, hogy egyes számosságú köveket, különféle alakzatokba tudnak kirakni, azokat amiket legalább két tényezőre, (ami nem egy és nem maga a szám) lehet bontani, téglalap formában ki lehet rakni, ezeket téglalap számoknak nevezték el. Ilyen például a 24, ezt a számot fel lehet bontani  $2*12$ -es téglalapra,  $3*8$ -as téglalapra illetve  $4*6$ -os téglalapra.



1. ábra: Téglalap számok

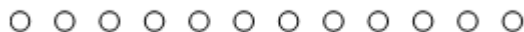
Itt láthatjuk a kirakható téglalapokat.

Találtak olyan számokat is, amelyeket két egyforma tényezőre tudtak bontani ezeket négyzetszámoknak nevezték, ugyanis ezeket négyzet formába is ki tudták rakni. pl:  $9=3*3$



2. ábra: Négyzet szám

És voltak olyan számok is, amelyeket nem tudtak két tényező szorzatára bontani ezeket lineáris számnak nevezték, ezek a prímszámok. Pl.: 13 ezt csak úgy tudjuk felbontani, hogy:  $1*13$ .



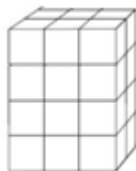
3. ábra: Lineáris szám

Ez a számcsoporthoz nagyon foglalkoztatta, már az ó-kori népeket is, például, hogy mennyi van belőle, hogyan lehet ilyen számokat előállítani. Euklidész be tudta, már akkor bizonyítani, hogy végtelen darab prímszám van. Eratoszthenész pedig kifejlesztette azt az eljárást, amivel elő tudjuk ezeket a számokat állítani, ezt az eljárást róla is nevezték el Eratoszthenész szitájának. Ez a módszer abból áll, hogy egy táblázatba beírjuk 1-100-ig a számokat, majd vesszük az első egynél nagyobb számot, szóval a 2-t és kihúzzuk az összes többszörösét, majd vesszük a következő számot, ami még nincs kihúzva és annak is kihúzzuk a többszöröseit, ezt addig folytatjuk, amíg el nem fogynak a számok. Ezzel a módszerrel teljes biztonsággal tudunk prímszámokat előállítani, az a hibája, hogy a nagy számok körében már nehézkes az alkalmazása. Fermat is sokat foglalkozott a prímszámokkal, de ő már olyan magas szinten, hogy ezeket nem érdemes bevinni általános iskolákba.

A prímszámok elhelyezkedésének a vizsgálata is érdekes. 0 és 100 között 25 db prímszám van, 100 és 1000 között 143, amíg ha egyenes arányosság állna fenn 200db kellene legyen, 1000 és 10000 között a 2000 helyett már csak 1061db ilyen szám van és, ha ugrunk egy nagyot a számkörben 10000000 és 10000100 között már csak 2db prímszám van. Ez természetesen még nem zárja ki azt a tényt, hogy végtelen db prímszám van.

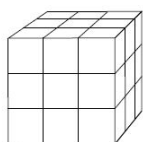
Napjaink tudósait is foglalkoztatja ez a téma, újabb és újabb prímszámokat keresnek különböző módszerekkel. Az eddig ismert legnagyobb prímszámot 2008-ban fedezték fel és ez 12 978 189db számjegyből áll. Már a következő szám megtalálására is pályázatot írtak ki annak 100 milliónál több jegye kell legyen, és a jutalom a felfedezőnek 150000dollar.

Azokra a számokra is felfigyeltek, amelyek három tényező szorzatára bonthatók ezeket testszámoknak nevezték, mert ezeket téglatest formában fel tudták építeni, az egyik tényező volt a magasság, a második a szélesség, a harmadik pedig a mélység. Ilyen például a 24 ezt felbonthatjuk a 2, 3 és a 4 szorzatára.



4. ábra: Testszám

Végül felismerték, hogy vannak olyan speciális testszámok, amelyeket három egyenlő tényező szorzatára tudtak bontani, ezekből szabályos kockát tudtak építeni és köbszámoknak nevezték őket. Ilyen pl.: a 27 ez  $3 \cdot 3 \cdot 3$ .



5. ábra: Köbszám

A lineáris számok kivételével az összes többi szám összetett szám, ezeknek a számoknak van valódi osztójuk, táhet a téglalap, a négyzet, a test és a köbszámok is ide tartoznak, de a barátságos, a tökéletes, a bővelkedő, a hiányos és az alig-alig bővelkedő számok is összetett számok.

Oszthatósági szabályok: 2, 5, 10

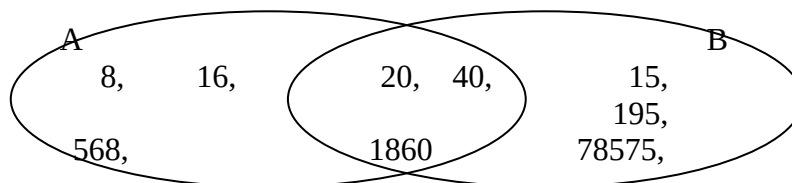
4, 25, 100

8, 125, 1000

3, 9

Térjünk rá az oszthatósági szabályokra, az oszthatóság témakörén belül, van néhány alapvető szabály, amelyek segítségével, ránézésre meg lehet mondani számokról, hogy osztható, vagy nem osztható valamivel. Legegyszerűbb a 2-vel, 5-el és 10-el való oszthatóság. Az ilyen szabályokra jobb a gyerekeket rávezetni, mint hogy készen átadjuk őket, mert így nagyobb a sikerélmény ezáltal nő a motiváció, és tartósabb lesz a tanulás. Ezt lehet például úgy tenni, hogy különböző számhalmazokat adunk a gyerekeknek például:

Feladatok:



Határozd meg az A és B halmazt az elemek alapján. Itt addig segíteni a gyerekeket kérdésekkel, amíg rá nem jönnek, hogy az A halmaz elemei: a 2-vel osztható számok, a B halmaz elemei az 5-el osztható számok. Rá lehet arra is vezetni őket, hogy a metszetbe nem csupán az 5-el és 2-vel osztható számok vannak, hanem ezek 10-el oszthatók. Érdekes módomban a 10-et úgy tudjuk szorzó tényezőkre bontani, hogy:  $2 \cdot 5$ .

A 4, 25, 100 és a 8, 125, 1000 osztó hármast is lehet így tanítani.

Nézzük a 3-al és 9-el való oszthatóságot. Én ezt úgy vezetném be, hogy játszanék egy barkóbat a gyerekekkel és mindig megadnám a számjegyek összegét a feladatban és valamilyen oszthatósági szabályt.

Pl.:

- Gondoltam egy számra a százások helyén a legnagyobb alaki értékű szám áll, páratlan szám, ezresekre kerekített értéke ezer a számjegyeinek összege 27 és a szám osztható 9-el és 3-al is.

- Gondoltam egy számra a számjegyeinek összege 21, a szám három egymást követő számjegyből áll a legkisebb alaki értékű szám áll a százások helyén, a legnagyobb alaki értékű szám áll az egyesek helyén és a szám osztható 3-al.

- Gondoltam egy négyjegyű számot, amelynek százásokra kerekített értéke 4600, ez egy polindrom szám, a százások és tízesek helyi értékén egyforma alaki értékű számok állnak, a számjegyek összege pedig 18 és a szám osztható 9-el.

Ezekből az adatokból könnyen rá tudjuk vezetni a gyerekeket, hogy egy szám akkor osztható 3-mal, vagy 9-cel, ha a számjegyek összege is osztható 3-mal vagy 9-cel. Sőt azt is észrevetethetjük, hogy ha egy szám 9-el osztható, akkor biztos osztható lesz 3-al is, mert a 9 a 3 többszöröse.

#### Relatív prímek:

Jöjjenek azok a számok, amelyekre nincs általános szabályunk, de mégis kell osztanunk velük. Ezek pl. a 6, 12, 15 stb. Ezekkel a számokkal akkor lesz osztható egy szám, ha relatív prímpárokra bontjuk őket és mindkét számmal osztható a vizsgált szám. De mik is azok a relatív prímek? A relatív prímeket felfedezését is az ó-kori görögöknek köszönhetjük, Euklidész volt, aki leírta a definíciójukat és azt a szabályt, hogy hogyan tudjuk bebizonyítani két számról, hogy relatív prímek. Azok a számok relatív prímek, amelyeknek 1-en vagy a (-1)-en kívül nincs más közös osztójuk.

Euklidész a következőképpen határozta meg, azt az eljárást, amivel kiderül egy számpárról, hogy relatív prímek-e: a nagyobb számból kivonjuk a kisebbet, majd a különbséget vonjuk ki a kisebb számból úgy, hogy a kisebbítendő nem lehet osztója a kisebb számnak, ezt addig folytatjuk, amíg maradékul 1-et nem kapunk. Ha 0-t kapunk a két szám nem relatív prím.

|                                       |                                                                   |
|---------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| Pl.: 11;17                            | 11;8                                                              |
| 17-11=6                               | 11-8=3                                                            |
| 11-6=5                                | 8-6 (azért 6-ot vonunk ki, mert a 3 többször van meg a 8-ban.)= 2 |
| 6-5=1 tehát a 11 és 17 relatív prímek | 3-2=1 a 11 és 8 is relatív prímek.                                |

- Legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös

Ezeket a fogalmakat is szorosan az oszthatóság témakörével együtt szoktuk tanítani, bár inkább már a törtek témakörét készíti elő, ugyan is a legnagyobb közös osztót, akkor

használjuk, ha törtet szeretnénk egyszerűsíteni, ezzel is a görögöknél találkozunk először a relatív prímekhez hasonlóan Euklidész fejlesztette ki az algoritmust, amivel megtaláljuk két szám legnagyobb közös osztóját. Az osztás általános algebrai kifejezéséből indul ki, miszerint:  $a=b*q+r$  ahol 'a' és 'b' legnagyobb közös osztója egyenlő a 'b' és 'r' legnagyobb közös osztójával, ahol 'a', 'b', 'q', 'r' egész számok. Mivel a maradékos osztás maradéka mindig kisebb az osztónál, ezért két szám legnagyobb közös osztójának meghatározását át lehet vezetni két kisebb szám legnagyobb közös osztójára. Ez az algoritmus főleg akkor praktikus, ha nagy számok legnagyobb közös osztóját kell meghatároznunk. Nézzük az algoritmus működését:

Először a nagyobb számot elosztom a kisebbel, például ha keressük a 2205 és a 252 legnagyobb közös osztóját, akkor a 2205-öt elosztom 252-vel, ez megvan 8-szor és marad 189, ezt behelyettesítem a fenti képletbe:  $2205=252*8+189$  ebből az következik, hogy  $(2205, 252)=(252, 189)$ -el. Újból elvégezzük [az új]számpárral az előző eljárást:  $252/189=1$  maradék a 63. Felírjuk szorzatformába:  $252=189*1+63$  ebből az következik, hogy  $(252, 189)=(189, 63)$ . Újból megismételjük az előző algoritmust  $189/63=3$  a képletbe helyettesítve:  $189=63*3+0$ , ami azt jelenti, hogy :  $(189, 63)=63$  tehát a legnagyobb közös osztó a 63.

A legkisebb közös többszörös szoros kapcsolatban áll a legnagyobb közös osztóval ezt, akkor használjuk, ha törtet bővítünk, vagy közös nevezőre hozunk. Egy nagyon hasznos összefüggés a kettő között:  $a*b=(a,b)* a, b$

Tehát, ha két számot összeszorozunk jelen esetben 'a-t' és 'b-t' ez egyenlő lesz a két szám legnagyobb közös osztójának és legkisebb közös többszörösének szorzatával.

Nézzük, hogy napjainkban hogyan számoljuk a legnagyobb közös osztót és a legkisebb közös többszöröst. Mind a kettő a prímtenyezős felbontással kezdődik, miután felírtuk a prímtenyezőket a legnagyobb közös osztóhoz kiválasztjuk a közös tényezőket a lehető legkisebb hatványon, a legkisebb közös többszöröshöz, minden tényezőt kiválasztunk a lehető legnagyobb hatványon.

Lássuk, hogy a prímtenyezős felbontást kinek köszönhetjük: ezt más néven törzstényezős felbontásnak nevezzük, ez eredményezi a kanonikus alakot, az egyik leglényegesebb mozzanata a matematikának, és ebből indul ki a számelmélet alaptétele, miszerint minden egynél nagyobb természetes szám egyféleképpen felbontható prímtenyezők szorzatára, a szorzótényezők sorrendjétől eltekintve. Sok matematikus foglalkozott a prímtenyezőkkel, többek között Gauss is, ő jött rá, hogy kapcsolat van a szabályos sokszögek szerkeszthetősége és a prímszámok között. Kimondta, hogy csak azok a szabályos sokszögek szerkeszthetők meg euklideszi szerkesztéssel, ha a prímtenyezős felbontásában csak 2

hatványai szerepelnek, tetszőleges nem negatív kitevővel és a Fermat prímek, első hatványon. (A Fermat prímek egy különleges prímszám csoport ilyenek a  $2^{2^n} + 1$  alakú prímek pl.: a 3, 5, 17, 257, 65537) Tehát szerkeszthető lesz a 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 17, ..., 257 oldalú szabályos sokszög.

#### Feladatok:

- 1.) 2014-el bezárólag leírtuk a természetes számokat. Hány perc szükséges ehhez megközelítőleg, ha 92 számjegyet tudunk leírni percenként?
- 2.) Az első 1000 szám közül, hány olyan szám van, amelyek sem 3-al sem 4-el nem oszthatóak. (mivel a 3 és 4 relatív prímek azokat a számokat kell kizárni, amelyek 12-vel oszthatóak).

Ide sorolhatók még olyan feladatok, ahol hat, hét vagy annál többjegyű számok osztóját keressük, vagy a számozási feladatokat (hány számjegyet kell felhasználnom, ha egy 512 oldalas könyvnek leírom az oldalszámait).

#### Törtek –racionális számok halmaza, számkör bővítés

Kicsit térjünk vissza a számkör bővítéshez, az előző nagy témakörben eljutottunk az egész számok halmazáig, ebben a számhalmazban korlátlanul elvégezhetjük a összeadást, szorzást és a kivonást, de osztani még mindig nem tudunk ebben a halmazban korlátlanul, csak a maradéktalan osztás végezhető el benne, de a maradékos osztás is megjelenik már 3. osztályban, úgy hogy szükség van még egy számhalmazra, amiben az osztás is elvégezhető korlátlanul. Így a számkör kibővül a racionális számok halmazával, ezek azok a számok, amelyek felírhatók két szám hányadosaként.

Történeti érdekesség: Törtek az egyenlő részekre osztásból alakultak ki, első sorban olyan feladatoknál használták, ahol ismerték egy halmaz számosságát, és azt vizsgálták, hány egyenlő számosságú részhalmazt tudnak létrehozni, emellett arányok kifejezésére is használták. Már i.e. 2500 körül használták a sumérok a törteket, az első írásos emlék a törtek létezéséről i.e. 1800-as évekből származik, ékírásos agyagtáblák formájában.

Az ókori Egyiptomban is számoltak törtekkel, de nagyon furcsa törtfogalmuk volt, általában olyan egységtörtekkel számoltak, ( olyan törtek, amiknek a számlálójuk egy), nem is nagyon végeztek műveletet velük, ha végeztek is szorzást, de leginkább összeadást. Ha osztást kellett végezniük átalakították őket. A törtet csak úgy tudták elképzelni, mint az egység valahányad részét. a  $\frac{8}{9}$ -et úgy számolták ki, hogy vették az egység  $\frac{1}{9}$ -ed részét és megszorozták 8-al, az eszükbe sem jutott, hogy  $\frac{8}{9}$  formába is számolhatnák. Az egység

törtek mellett még két nevezetes törtjük volt, ezekre külön szót is használtak, ezek voltak a:  $\frac{2}{3}$  és  $\frac{3}{4}$ .

### Reciprok

A babiloni birodalomból származik az első feljegyzés arról, hogy ismernék a reciprok fogalmát, arra használták, mint napjainkban, hogy törttel tudjanak osztani, mind törtet, mind pedig egész számot. Nagyon ötletesen azzal könnyítették meg a dolgukat, hogy táblázatokat készítettek, volt négyzetszamos táblázatuk, reciprokos, a köb számokról, stb. ...

Feladat: Sorold fel az összes olyan számot, amelyekre igaz, hogy a 6/11-ed része ugyanakkora, mint a hatszorosának az 2/22-ed része?

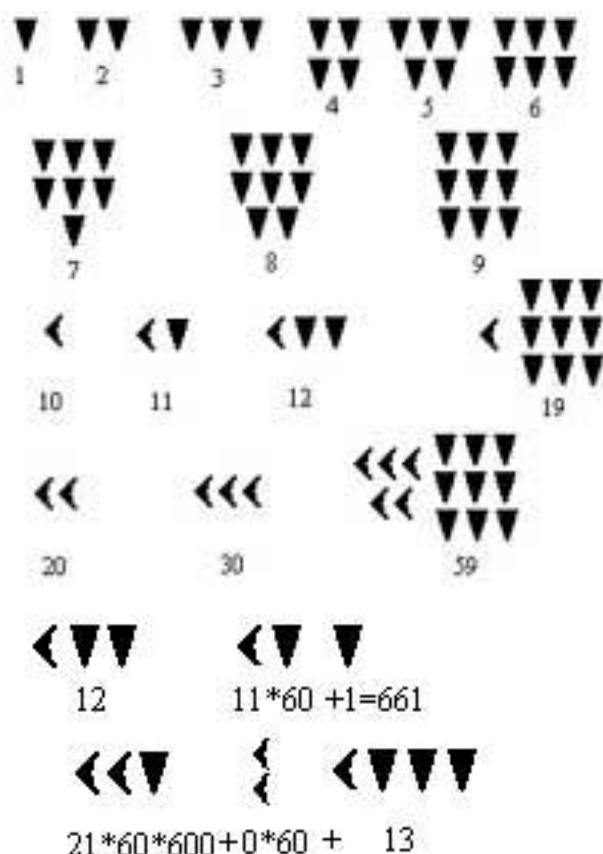
Ennek a feladatnak az az érdekessége, hogy könnyen észrevehető, hogy a két szám egymás reciproka lesz, így minden szára igaz lesz ez az állítás a gyerekek mégis hajlamosak megijedni az ilyen feladatoktól.

### Tizedes törték:értelmezése fogalma

A tizedes törtet Stevin Simon vezette be 1585-ben, addig egyáltalán nem használták ezeket a számokat, azt vette észre, hogy a 10, 100, 1000, stb. ... nevezőjű törteteket, nem csak tört formában lehet felírni, hanem normális számhoz hasonlóan is. A tizedes jegyeket a szám egész része után írta, bár ő nem tizedes vesszőt használt, hanem külön jelöléseket vezetett be. Ő kezdeményezte, hogy vezessék be a pénz, a mértékegységek tizedes törtes ábrázolását, mert leegyszerűsítene a velük való számolást. Stevin Simon egy elég furcsa ember volt 1548-ban Brugge-ben (Nyugat Flandria legnagyobb városában) született, Galilei kortársa volt, először tudós akart lenni, majd kereskedelemmel foglalkozott, végül beállt a hadseregbe, mint katonai hivatalnok, de mindig arra törekedett, hogy reformálni, korszerűsíteni tudja az addigi ismereteket. Nagyon szerény tudós volt, és nagyon sokat köszönhetünk neki. Érdekes tudni róla, hogy anyanyelvén írta a feljegyzéseit, mert szerinte így tudja az ember a leghatékonyabban kifejezni magát, ezt vallotta minden ó-kori társadalom, akik nagy eredményeket értek el. Ez a korunk emberének is megszívlelendő dolog.

Ahhoz, hogy a tizedes törtékkel megfelelően számolni tudjunk, szükségünk van arra, hogy a helyi értékekkel pontosan tisztában legyünk, hogy ha a feladat azt kívánja, ki tudjuk tenni a helypótló nullákat, és megértsük, hogy a tizedes vessző elé egynél több nullát nem szükséges kitenni. Hogy a gyerekek érdeklődését felkeltsem, az ó-kori kultúrák számírási szabályairól, szokásairól gyűjtöttem anyagokat:

Történeti érdekesség: Az ókori babiloniak: ők, már helyi értékes számírást használt, bár a nullát még nem jelölték, viszont hatvanas számrendszerben dolgoztak, innen származtatjuk az időmérés hatvanas egységeit. Már a mai algebrai jelekhez hasonló szójelekkel is dolgoztak. Mivel 60-as számrendszerük volt, 59-ig nem használtak helyi értékes írásmódot, úgy jelölték a számokat, hogy 1-9 ig megfelelő számosságú jelet használtak, a tízre külön jelük volt tíz fölött egymás után írták a megfelelő jeleket. 60-tól viszont áttértek a helyi értékes számírásra, kezdetben hézagokkal jelölték a 'tízes váltást', majd ahol a számon belül helypótló nullára lett volna szükség, a nulla hiányában egy tízes jelenet írtak. A szám végi nullákat nem jelölték.



7. ábra: Ókori babiloni számírás 2.



6. ábra: Ókori babiloni számírás 1.

# 1. Melléklet:

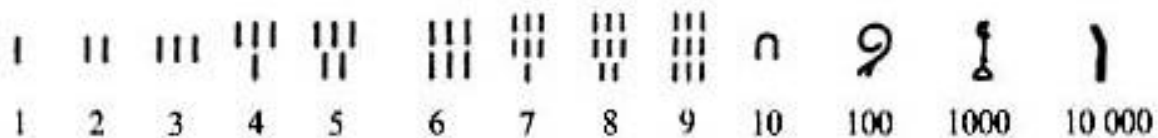
A görögöknél, ugyan 10-es számrendszert használtak már, de ez még nem helyi értékes számírás volt. A számok jelölésére az abc betűit használták, majd ezeket egymás után írták, érdekes, hogy a jelölésre használt betűk, arra voltak elegek, hogy 1-től 900-ig jelöljék velük a számokat, ezért az ezreseket ugyan azzal a jellel jelölték, mint az egyeseket, csak egy vesszőt tettek elé, és hogy ezeket a szavaktól meg tudják különböztetni, egy vízszintes vonalat húztak fölé. Ahhoz hasonlóan, ahogy napjainkban is megadunk egy olyan feladatot, ahol a számjegyeket kell megkeresni. (Pl.: az  $\overline{AB}$  egy olyan szám, amelynek számjegyei összege a szám fordítottját adják  $\overline{BA}$ )

|            |           |            |             |             |              |             |           |           |  |
|------------|-----------|------------|-------------|-------------|--------------|-------------|-----------|-----------|--|
| $\alpha,$  | $\beta,$  | $\gamma,$  | $\delta,$   | $\epsilon,$ | $\varsigma,$ | $\zeta,$    | $\eta,$   | $\theta,$ |  |
| 1          | 2         | 3          | 4           | 5           | 6            | 7           | 8         | 9         |  |
| $\iota,$   | $\kappa,$ | $\lambda,$ | $\mu,$      | $\nu,$      | $\xi,$       | $\omicron,$ | $\pi,$    | $\rho,$   |  |
| 10         | 20        | 30         | 40          | 50          | 60           | 70          | 80        | 90        |  |
| $\varrho,$ | $\sigma,$ | $\tau,$    | $\upsilon,$ | $\phi,$     | $\chi,$      | $\psi,$     | $\omega,$ | $\lambda$ |  |
| 100        | 200       | 300        | 400         | 500         | 600          | 700         | 800       | 900       |  |

$5342 = \overline{\epsilon\tau\mu\beta}$

8. ábra: Ókori görög számírás

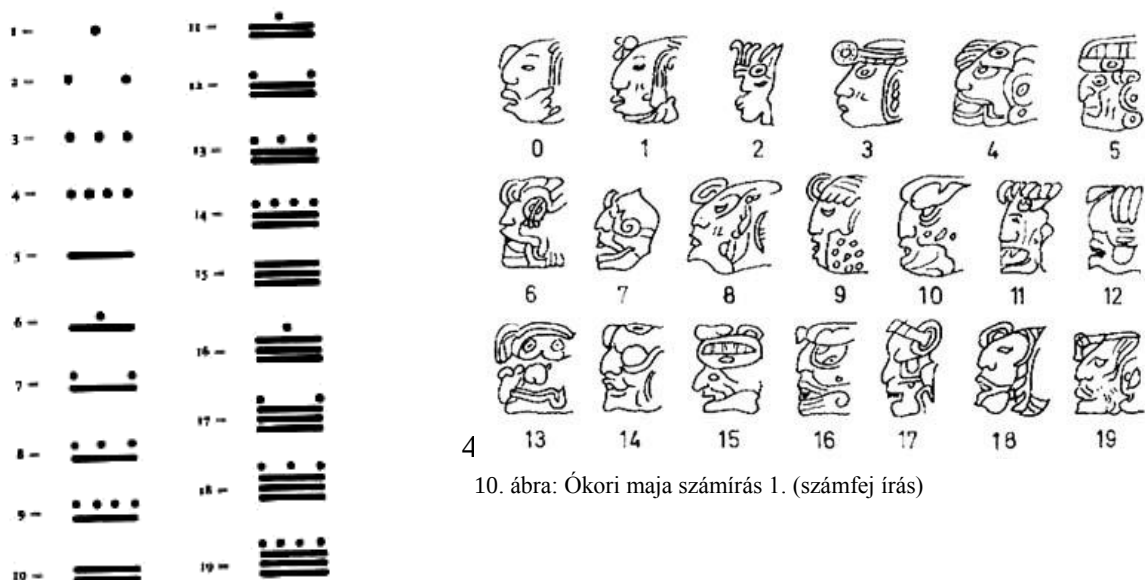
Az egyiptomiaknak és a rómaiaknak is hasonló tízes, de helyi érték nélküli számrendszerük volt. Az egyiptomiaknak külön jelük volt az 1-re, 10-re, 100-re és 1000-re, a többi számot ezek kombinálásával, egymás után írásával kapták, tehát annyi jelet írtak, amennyire az adott számban szükség volt.



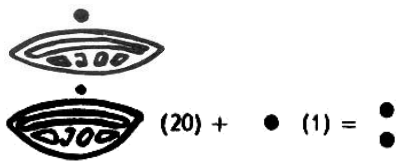
9. ábra: Ókori egyiptomi számírás

A római is ehhez hasonló csak nekik, több számjegyre volt külön számjegyük 1-en, 10-en, 100-on és 1000-en kívül nekik az 5-re, 50-re és 500-ra is volt külön jelölésük a számok leírásának sorrendje egyben műveletet is jelentett.

Érdekes volt még a Maják számírása, ők is fejlett matematikai ismerettel rendelkeztek, de sajnos kevés emlék maradt fenn az ő kultúrájukról. A számírásuk helyiértékes volt, és 20-as számrendszerben dolgoztak, amivel előrébb voltak, mint az eddig említett népcsoportok, hogy ők, már jelölték a 0-t. A húszas számrendszer miatt 1-től 19-ig voltak számjegyeik és, amikor elérték a 20-at, azaz a helyi érték váltást, megjelenik a 0. Majd 20 után a helyi értékeknek megfelelően írták a már meglévő számjegyeket. Abban is különlegesek voltak, hogy kétféle számjelölésük volt az egyik ez a jelrendszer, a másik pedig az úgynevezett fejrás. Arról nincsenek biztos források, hogy melyiket mikor használták.



10. ábra: Ókori maja számírás 1. (számfej írás)



11. ábra: Ókori maja számírás 2.

### 3. Számтан algebra, függvények

A harmadik témakör is a számtan algebra területén marad. Ezen belül is az egyenletek és függvények kerülnek terítékre. Először az egyenletmegoldás műveleti sorrend átismétlésével, egyenlőtlenségek megoldása a relációs jelek átismétlésével, majd az arányosság és végül a százalékszámítás kerül feldolgozásra.

Egy ismeretlenes egyenlet megoldása lebontogatással

Történeti érdekesség: Ezzel a problémával is foglalkoztak, már az ó-korban, elsősorban az egyiptomiaknak és a kínaiaknak, volt erre rendszerük, hogy hogyan tudnak egyenletet megoldani, valamilyen algoritmus segítségével. Ez hasonlatos volt a tervszerű lebontogatással, a neve „regula falsi” volt, ami annyit jelentett, hogy egy tetszőlegesen, praktikus okokból választott számon kipróbálják a feladatot és abból következtetnek a helyes megoldásra. Kínában is ezt a módszert használták. A hindu matematikusok, pedig arról voltak híresek, hogy szerették a bizonytalan egyenleteket (több ismeretlenes egyenleteket), több megoldási módszert dolgoztak ki ezekre, ami nagyon érdekfeszítő, de ilyenekkel nem foglalkozunk még általános iskolában.

Feladat: Egy ókori Egyiptomból származó feladatot mutatnék be, ami az akkori iskolákban a gyerekeknek meg kellett oldani. (Rhind papirusz)

1.) 7 házban 7 macska él minden macska 7 egeret evett meg, minden egér 7 kalász búzát, és minden búzalkalászban 7 szem búza volt. Hány szem búzát ettek meg összesen az egerek.

Ezt a feladatot, nem nehéz kiszámolni, azt el lehet mondani nekik, hogy az egyiptomiak rossz megoldásra jutottak, mert miután kiszámolták a mennyiségeket, külön-külön összeadták őket. Ez a feladat a mértani sorozatok témakörében is előkerülhet.

Arányosság:

Történeti érdekesség: A pythagoreusok kiemelten foglalkoztak a zenei arányok témakörével, sok legenda is kering arról, hogy hogyan keltette fel ez a téma az érdeklődésüket. Vannak olyan források, akik szerint, amikor az egyik tanítvány egy kovács

műhelye előtt sétált el, meghallotta, hogy minden méretű kalapács más hangot ad, amikor az üllőre csapnak vele és ezért kezdték el ezt a témát vizsgálni. Ez egy nagyon érdekes feltevés, és valóban annyi igazság alapja van, hogy ha más-más méretű fémkalapáccsal csapunk egy másik fémre, annak más hangja lesz, de kétlem, hogy ebből indult volna ki a felfedezésük. Még az is problémát jelenthetett, hogy a klasszikus görög hangszer a lant volt, ez pedig akkoriban héthúros hangszer volt. Kérdés, hogy ezen, hogyan tudták megtalálni a legalapvetőbb zenei simphoniát az oktávot. Erről keringenek legendák, hogy Pythagoras és csoportja találták meg a nyolcadik hangot, de sokan azt is elképzelhetőnek tartják, hogy az oktáv jelentése symphónia, ami összeillesztést jelent, lehet, hogy két négy húros thetrakord összeillesztéséből kapták a nyolc húrt. Ezek voltak a legendák, amik igen érdekesek, de tudományosan nem bizonyítottak, az viszont biztos, hogy megtalálták a három legfontosabb zenei összhangzat arányát, méghozzá úgy, hogy egy 12-es beosztású mérővessző fölé kifeszítettek egy húrt, és észrevették, hogy ha megpendítik az egész húrt, majd a húr felét, megkapják az oktávot, tehát ennek az aránya 12:9. Később rájöttek, hogy ezt úgy is kifejezhetik 2:1. Tovább kísérletezve megtalálták, hogy ha az egész húrt megpendítik majd egy 9 egység hosszú szakaszt, akkor kvart hangközöt kapják, tehát ennek az aránya 12:9 később több felbontását is megtalálták, ami szintén 4:3-hoz arányt fog adni. Végül a kvintet úgy tudták megszólaltatni, hogy az egész húr megpendítése után a húr 8 egység hosszú részét pendítik meg. Ebből kijött, hogy a kvint aránya 12:8 ennek is megtalálták több változatát, ami legegyszerűbb 3:2-höz arányhoz vezet. Azt is felismerték, hogy egy 8 húros hangszeren egymás után megszólaltatható egy kvart és egy kvint, vagy fordítva. Ezt a gyerekeknek szemléltetni is lehet például egy gitár egyik húrján.

Feladat: Itt különböző, keverési feladatokat végezhetünk. Például.: 0,75l-es málnaszörpre azt az utasítást írták, hogy a hígítási aránya 1:9-hez. Összesen mennyi hígított szörpöt lehet ebből készíteni.

#### Grafikonok, diagramok értelmezése, összefüggések megfigyeltetése

Ehhez a témához is szorosan kapcsolódik az arányosság fogalma. Ez a téma főleg arra épít, hogy adatokat tudjanak a gyerekek megjeleníteni grafikonon, vagy adatokat tudjanak leolvasni grafikonokról. Én ennél a témánál biztos kiadnám nekik, hogy például a féléves érdemjegyeket tantárgyanként ábrázolják grafikonon csoportmunkában, ez azért lenne praktikus, mert a közösséget is építené, mert a gyerekeknek kommunikálni kell egymással, hogy egymás osztályzatát megtudják, a grafikonokat pedig, közösen kell megcsinálják. Az adatok leolvasását, úgy oldanám meg, hogy például a dolgozataik jegyeit grafikonon ábrázolva vinném be.

#### Százalékszámítás:

Ennél a témakörnél, szerintem nagyon fontos a törtekkel és az arányokkal párhuzamot vonni, hogy a gyerekek, ne csak egy képletet tanuljanak meg, hanem meg is kell érteniük az adott feladatokat. Itt viszonylag könnyű a tanároknak feladatokat bevinni az órára, mert rengeteg példát tudunk az életből is meríteni, boltokban sokszor látjuk, hogy a leértékelést százalékban adják meg. Amit kiemelnék, hogy érdemes többféle kiszámítási módot mutatni. (A következtetési megoldást az egy százalék kiszámításával következtetünk az egészre, az arány egyenletet, a formális megoldást, amikor képletet használunk)

#### **4. Geometria mérések**

A negyedik témakörben a geometriai és a mérési feladatokat tárgyalnám. Először a hosszúsággal, tömeggel és időméréssel foglalkozok. Majd áttérek a geometriai alapfogalmak átismétlésére, szögek és háromszögekkel foglalkozok bővebben, majd a körrel. Ezután áttérek a tengelyes tükrözésre, és a tengelyesen szimmetrikus alakzatokra, végül alapvető szerkesztésekkel foglalkozok. Ezt a témakört nem fejtem ki olyan bőven mint a számtannal és algebrával foglalkozókat, mert a matematikai feladatok értékelésekor a geometria mindig a népszerűbb feladatok közé tartozott.

#### Mérések:

Ennél a témánál visszautalnék arra a fejezetre, ahol különböző népek számírásával foglalkoztam, itt fel lehet az időméréssel kapcsolatba eleveníteni a 60-as számrendszert, vagy a maják naptárát, amit csomózós technikával készítettek.

#### Szögek átismétlése (egyállású, váltó, csúcs, kiegészítő, pót, merőleges szárú szög)

Itt is találunk kapcsolatot a 60-as számrendszerrel, szögperc és szögmásodperc átváltásnál. Itt lehet foglalkozni Euklidésszel, a gyerekeknek meg lehet mutatni, hogy milyen szerkesztési rendszert dolgozott ki, a gyerekek ki is próbálhatják.

Történeti érdekesség: Euklidész egy alexandriai matematikus volt, életéről nem sokat tudunk, a munkásságáról, már annál többet. Ő volt az a tudós, aki összefoglalta a saját felfedezéseit és ezzel együtt elődei és kortársai eredményeit is az Elemek című munkájában. Erről a könyvről érdekesség, hogy a Biblia után a legtöbb kiadást ért meg. A matematikának nagyon sok területével foglalkozott, prímszámokkal (ő bizonyította be, hogy végtelen sok prímszám van), püthagoraszi számhármakokról is bebizonyította, hogy végtelen sok van belőlük. A legnagyobb közös osztó kiszámításának egyik algoritmusai is az ő nevéhez fűződik. A geometriában pedig egy teljes szerkesztési rendszert alkotott, amit euklidészi geometriának

és szerkesztésnek nevezünk, hat pontban összefoglalta a legfőbb szerkesztési feladatokat. Ezek:

1.: Két pont egyértelműen meghatároz egy egyenest, amit úgy kapunk, hogy a két pontot összekötjük vonalzóval.

2.: Két pont távolságát meghatározhatjuk úgy, hogy körzőnyílásba vesszük azokat.

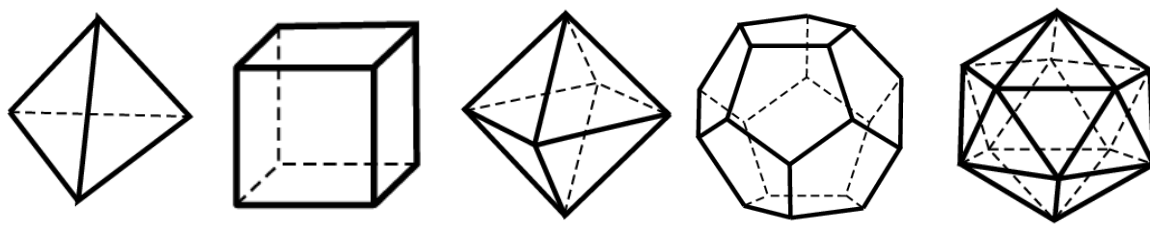
3.: Egy adott pont körül, meghatározott sugárral körző segítségével kört rajzolhatunk.

4.: Egyértelműen meghatározható két egyenes metszéspontja.

5.: Egyértelműen meghatározható egy egyenes és egy kör metszéspontja is.

6.: És szintén egyértelműen meghatározható két kör metszéspontja is.

Ami még óriási felfedezés volt a geometriában az, hogy meg tudta határozni, hogy csak öt darab szabályos test létezik. Ezek: tetraéder, hexaéder, oktaéder, dodekaéder, ikozaéder.



12. ábra: Szabályos testek

Végül két történet, amelyeken keresztül megismerhetjük Euklides személyiségét: Proklosz egy ó-kori történetíró lejegyezte, hogy Ptolemaiosz király mivel nem akart túl sok időt szánni a matematika tanulmányozására és remélte, hogy ő királyi előjogon könnyebben hozzájuthat ezekhez az ismeretekhez, megkérdezte Euklideszt, hogy nem lenne-e esetleg, más út, hogy megtanulja a matematikát ő pedig azt válaszolta, hogy: "A geometriához nem vezet királyi út".

Egy másik történet: egy tanítványa megkérdezte tőle, hogy mi értelme van annak, hogy tanulják a geometriát. Ez azért sok mai diáknak is megfordul a fejében. Ő oda hívott egy építő munkást és azt mondta neki: "Adj ennek az embernek három obolust, mert a geometria tanulásának hasznát keresi". Az obolus: egy ó-kori görög pénznem volt. Ez azt jelentette, hogy később a megélhetését biztosítja majd azzal, amit most megtanul. Ez ma is érvényes tanulság.

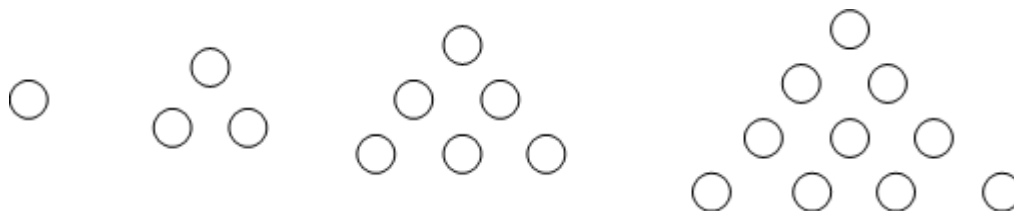
háromszögek fajtái (általános, egyenlő szárú, egyenlő oldalú, hegyes szögű, derékszögű tompaszögű)

A háromszögekkel kapcsolatban a pithagoreusok nevét említeném először, ők nagyon sokat foglalkoztak, a háromszögekkel, főleg a derékszögű háromszöggel. De már ők is megkülönböztették a derékszögű a tompaszögű és hegyesszögű háromszöget. Ők fedezték,

fel, hogy a háromszög belső szögeinek összege  $180^\circ$ . Ezt úgy tudták bebizonyítani, hogy előttük Thalesz már bebizonyította, hogy a félkörön nyugvó kerületi szög mindig derékszög. és észrevették, hogy ha két párhuzamos egyenest, egy harmadikkal metszenek, váltószögeket kapnak. Ebből a következő ábrát tudták megalkotni:

Az ábrán látszik, hogy a  $\gamma$  szög derék szög kell legyen, mert kerületi szög, azt is tudjuk, hogy a két  $\alpha$  egyenlő és a két  $\beta$  is. Látszik, hogy a  $\gamma$  szöget az  $\alpha$  és a  $\beta$   $180^\circ$ -ra egészíti ki, tehát  $\alpha + \beta + \gamma$  amik a három szög szögei is  $180^\circ$ -ot adnak. Ezzel a feladattal, jól elő tudjuk készíteni a bizonyítást.

Amit még ennél a témánál meg lehet említeni, azok a háromszög-számok. Ezek olyan számok, amelyeket, ha kavicsból kirakunk egyenlő szárú háromszögeket kapunk. Fontos, hogy az első háromszög-szám az egy (ez egy kavics, amit háromszöggként fogunk fel), a második a három, ez egy olyan háromszög, aminek az alapja két kavicsból áll, a harmadik háromszögszám a hat, ez egy olyan háromszög, aminek három kavics az alapja.



14. ábra: Az első négy háromszögszám

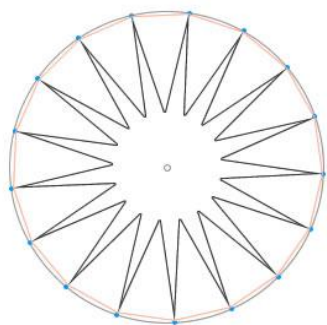
Az ábrán az első négy háromszög-szám látható, könnyen észrevehető, hogy az alap megmutatja, hogy hányadik háromszög-számról van szó. Az elsőnek egy az alapja, a másodiknak kettő, a harmadiknak három és így tovább. Ami szintén érdekes, hogy a sorok az alaptól fölfelé mindig eggyel csökkennek, ebből adódik a képzési szabályuk: ahányadik háromszög számot szeretnénk képezni, addig össze kell adni egytől a számokat. Pl.: ha a nyolcadik háromszög-számot szeretnénk megkapni a következő összeadást kell végezni:  $1+2+3+4+5+6+7+8=36$  tehát a nyolcadik háromszög-szám a 36.

Ez egy kis kitekintés volt a geometriától, de érdekes szerintem.

#### Szabályos sokszögek

Ezt a témát is a Pithagoreusok munkásságával vezetném be, ők azzal kérdéssel foglalkoztak, amit a gyerekeknek is bátran felvethetünk szerintem, hogy melyek azok a szabályos sokszögek, amelyekkel le lehet fedni egy adott pont körül a síkot. Amire itt feltétlenül rá kell mutatnunk szerintem az, hogy ennek az a feltétele, hogy csak olyan

sokszögekkel valósítható ez meg amelyeknek a szögei osztói a 360-nak. Ha ezt észrevették, már könnyű rájönni, hogy három ilyen sokszög van, az első a szabályos háromszög, ennek minden szöge  $60^\circ$ -os ezt, ha hattal megszorozom megkapom a 360-at. A második a négyzet, ennek minden szöge  $90^\circ$ -os ezt, ha megszorozom négygyel szintén 360-at kapok. Végül a szabályos hatszög, ennek minden szöge  $120^\circ$ -os ezt hárommal szorozva 360-ad, más szabályos sokszögre nem teljesül ez a feltétel.



15. ábra: Szabályos 17 szög

A másik érdekesség ezzel a témával kapcsolatban Gauss nevéhez kapcsolódik, ő ugyanis azzal foglalkozott, hogy milyen oldalszámú szabályos sokszögek szerkeszthetők euklideszi szerkesztéssel. Azt vette észre csak olyan oldalszámú sokszög szerkeszthetők euklideszi szerkesztéssel, amelyek prímtényezős felbontásában csak kettő szerepel

tetszőleges nem negatív egész kitevőjű hatványon és Fermat prímek első hatványon. (Ezek: a  $2^{2^n}+1$  alakú prímek eddig öt ilyen számot ismerünk ezek a 3, 5, 17, 257, 65537).

#### párhuzamosság, merőlegesség

Ennél a témánál is Euklidesz nevét említeném, ő bizonyította, be hogy két egyenes, akkor párhuzamos, ha egy harmadik egyenessel metszve őket váltószögeket kapunk a metszéspontoknál. Ezt a szögek témájánál is el lehet mondani a gyerekeknek.

#### Tengelyes szimmetria: háromszögek, négyszögek, sokszögek, természetben

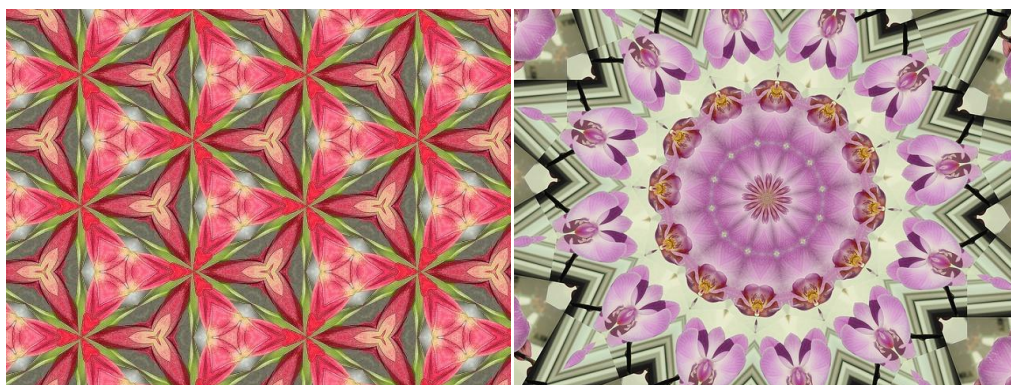
Ebben a fejezetben inkább a látványos elemeket emelnék ki, mint például a szimmetria a természetben.



16. ábra: Szimmetria a természetben, a víztükör mint tükörtengely



17. ábra: A lepke és a szitakötő szárnyai, szimmetria tengely a testük



18. ábra: Kaleidoszkóp képek

Néhány érdekesség a kaleidoszkópról: ezt is ismerték már az ókori Görögországban, optikai játéknak tekintették. A lényege abban rejlik, hogy egy csőbe több tükröt helyezünk és gyöngyöket teszünk bele, a tükrök többszörösen visszaverik a gyöngyök képét, így szimmetrikus geometriai alakzatokat is létrehozhatunk. Ezzel a kérdéssel Leonardo da Vinci is foglalkozott, megpróbált minél több geometriai formából álló szimmetrikus alakzatot rajzolni, szerkeszteni.

## 5. Statisztika, kombinatorika

Az utolsó témakörben, minimálisan betekintünk a statisztika alapjaiba, adatok ábrázolásával és leolvasásával foglalkozunk elsősorban, kombinatorikában pedig csak a sorba rendezéssel ( permutációval) foglalkozunk.

Már foglalkoztam adatok ábrázolásával és leolvasásával, a kombinatorika tanításánál, pedig, első sorban a gráfok alkalmazását mutatnám meg a gyerekeknek, vagy különböző ábrák készítését, amik praktikussá teszik ennek a témakörnek a feldolgozását megértését.

Például, hány darab háromjegyű szám képezhető a 2, 2, 0, 0, 1 és 4 számjegyekből. Ez egy nehezebb feladat, mert van benne számismétlés és nulla is, ami nem állhat a szám elején, itt érdemes a gyerekeknek egy fa gráffal szemléltetni a feladatot.

#### IV. IRODALOMJEGYZÉK

Dr. Iker János, Szerencsi Sándor, Dr. Vörös György (1995): *A matematika tanítása I.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

Szemjon Grigorijevics Gingyikin (2003): *Történetek fizikusokról és matematikusokról.* Typotex kiadó, Budapest.

J. I. Perelman (2001): *Matematikai ki mit tud.* Black & White kiadó, Nyíregyháza.

J.I. Perelman (1953): *Szórakoztató geometria.* Művelt Nép Könyvkiadó, Budapest.

J.I. Perelman (1979): *Matematikai történetek és rejtvények.* Gondolat Kiadó, Budapest.

Újvári István (1994): *A gondolkodás alapiskolája.* Észak-Pest megyei matematikai tehetségfejlesztő, Vác.

Dr. Török Tamás. *Eszközhasználat I.* Calibra Kiadó, Budapest.

Róka Sándor (1996): *Szakköri feladatok matematikából.* Start Rehabilitációs Vállalat és Intézményei, Nyírség.

Róka Sándor (2003): *A matematika órák humora.* Start Rehabilitációs Vállalat és Intézményei, Nyírség.

Róka Sándor (2001): *Négyzetszámok.* Tóth Könyvkereskedés és Kiadó Kft., Debrecen.

Szalay Mihály (1998): *Számelmélet.* TYPOTEX Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

Szabó Árpád (1978): *A görög matematika kibontakozása.* Magvető Kiadó, Budapest.

Andrásfai Béla (1986): *Versenymatek gyerekeknek.* Tankönyvkiadó, Budapest.

Jean-Claude Ballif (1989): *Logikai sziporkák.* Gondolat Kiadó, Budapest.

Bencsics Ferencné, Gráczol Józsefné (1990): *A tehetséges tanulók versenyeztetése matematika tantárgyból.* Győr-Moson-Sopron Megyei Pedagógiai Intézet, Győr.

Blohovitev, Koltovoj, Lagovszkij (1989): *Furfangos fejtörő feladatok.* Műszaki Kiadó, Budapest.

Bonifert Domonkos (1992): *Néhány tipikus probléma szituáció matematikából.* MOZAIK Oktatási Stúdió, Szeged.

Csordás Mihály, Domozi Diána, Gálné Szalontai Mária, Háriné Kun Éva, Nagy Tibor, Pap-Szigetiné Németh Anikó, Szabó István (2007): *Zrínyi 2006.* MATEGYE Alapítvány, Kecskemét.

Csepcsányi Éva, Csordás Mihály, Csordásné Szécsi Jolán, Háriné Kun Éva, Koleszár Edit, Nagy Tibor (1999): *Matematikai versenyesztek.* Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged.

Csepcsányi Éva, Csordás Mihály, Koleszár Edit, Nagy Tibor (1998): *Matematikai versenytesztek*. Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged.

dr. Wintsche Gergely, Tóthné Szalontai Anna (2014): *Matematika 6.* Oktatókutató és Fejlesztő Intézet, Debrecen.

dr. Wintsche Gergely, Tóthné Szalontai Anna (2014): *Matematika 5.* Oktatókutató és Fejlesztő Intézet, Debrecen.

## V. DIAGRAM JEGYZÉK

1. Diagram: A tantárgyak kedveltsége 2. osztályban
2. Diagram: Matematikai feladatok kedveltsége 2. osztályban
3. Diagram: A tantárgyak kedveltsége 3. osztályban
4. Diagram: Matematikai feladatok kedveltsége 3. osztályban
5. Diagram: Tantárgyak értékelése 4. osztályban
6. Diagram: Matematikai feladatok kedveltsége 4. osztályban
7. Diagram: Tantárgyak kedveltsége 5. osztályban
8. Diagram: Miért szeretik és miért nem szeretik a gyerekek a matematikát 5. osztályban?
9. Diagram: Matematikai feladatok kedveltsége 5. osztályban
10. Diagram: Miért kedveltebbek egyes feladatok 5. osztályban?
11. Diagram: Miért nem értik a gyerekek a matematikát 5. osztályban?
12. Diagram: Miért nem kérdeznak a gyerekek az órán 5. osztályban?
13. Diagram: Mitől lesz sikeres vagy sikertelen a korrepetálás 5. osztályban?
14. Diagram: Mitől lesz jó egy matematika óra a gyerekek szerint 5. osztályban?
15. Diagram: Tantárgyak kedveltsége 6. osztályban
16. Diagram: Miért szeretik és miért nem szeretik a gyerekek a matematikát 6. osztályban
17. Diagram: Matematikai feladatok kedveltsége 6. osztályban
18. Diagram: Miért kedveltebbek egyes feladatok 6. osztályban
19. Diagram: Miért nem értik a gyerekek a matematikát 6. osztályban?
20. Diagram: Miért nem kérdeznak a gyerekek az órán 6. osztályban?
21. Diagram: Mitől lesz sikeres vagy sikertelen a korrepetálás 6. osztályban?
22. Diagram: Mitől lesz jó egy matematika óra a gyerekek szerint 6. osztályban?
23. Diagram: Tantárgyak kedveltsége 7. osztályban
24. Diagram: Matematikai feladatok kedveltsége 7. osztályban
25. Diagram: Tantárgyak kedveltsége 8. osztályban
26. Diagram: Matematikai feladatok kedveltsége 8. osztályban
27. Diagram: A matematika tantárgy helyezései évfolyamonként

## VI. ÁBRA JEGYZÉK

1. Ábra: Téglalap számok
2. Ábra: Négyzetszám
3. Ábra: Lineáris szám
4. Ábra: Testszám
5. Ábra: Köbszám
6. Ábra: Ókori babiloni számírás 1.
7. Ábra: Ókori babiloni számírás 2.
8. Ábra: Ókori görög számírás
9. Ábra: Ókori egyiptomi számírás
10. Ábra: Ókori maja számírás 1. (számfejtár)
11. Ábra: Ókori maja számírás 2.
12. Ábra: Szabályos testek
13. Ábra: Bizonyítás, hogy a háromszög belső szögeinek összege  $180^\circ$
14. Ábra: Az első négy háromszögszám
15. Ábra: Szabályos 17 szög
16. Ábra: Szimmetria a természetben, a víztükör mint tükörtengely
17. Ábra: A lepke és a szitakötő szárnyai, szimmetria tengely a testük
18. Ábra: Kaleidoszkóp képek