

OTDK-dolgozat

2015

Periódusvégi konvenció és várható élettartam
A két hiba együtt jobb?
End-of-period convention and expected asset life:
Do two wrongs make a right?

Tartalomjegyzék

1.	BEVEZETÉS	1
2.	A FELTÉTELEZETT PÉNZÁRAMPROFIL ÉS ÉLETTARTAM-ELOSZLÁS	4
3.	ESETEK	7
3.1.	ADOTT T ÉLETTARTAMIG SZÁMÍTOTT JELENÉRTÉK	7
3.2.	A PONTOS JELENÉRTÉK	8
3.3.	A „TANKÖNYVI” MEGKÖZELÍTÉS	10
3.4.	PONTOS PÉNZÁRAMPROFIL	11
3.5.	VALÓSZÍNŰSÉGEKKEL SÚLYOZOTT PERIÓDUSVÉGI KONVENCIO	13
4.	AZ ESETEK RELATÍV HIBÁI	16
4.1.	A „TANKÖNYVI” MEGKÖZELÍTÉS HIBÁJA	17
4.2.	HIBA A PONTOS PÉNZÁRAMPROFIL HASZNÁLATA ESETÉN	20
4.3.	HIBA A VALÓSZÍNŰSÉGEKKEL SÚLYOZOTT PERIÓDUSVÉGI KONVENCIO ESETÉN	22
5.	ÖSSZEHASO NLÍTÁS	26
5.1.	ÖSSZEHASO NLÍTÁS A NÖVEKEDÉSI ÜTEMET MEGHALADÓ DISZKONTRÁTA ESETÉN	26
5.1.1.	Összehasonlítás nulla növekedési ütem esetén	30
5.2.	ÖSSZEHASO NLÍTÁS A DISZKONTRÁTÁT MEGHALADÓ NÖVEKEDÉSI ÜTEM ESETÉN	32
5.3.	ÖSSZEHASO NLÍTÁS NÖVEKEDÉSI ÜTEMEL MEGEGYEZŐ DISZKONTRÁTA ESETBEN	34
6.	ÖSSZEFOGLALÁS	35
7.	IRODALOMJEGYZÉK	37

Táblázatok jegyzéke

1. táblázat: *Adott r és j kombinációkhoz tartozó „tankönyvi” hiba mértéke a különböző ($\Theta[\text{év}]$) várható élettartamok szerint (Színskála értelmezésével)18*
2. táblázat: *Adott r és j kombinációkhoz tartozó valószínűségi periódusvégi konvencióval a hiba mértéke a különböző ($\Theta[\text{év}]$) várható élettartamok szerint (Színskála értelmezésével)...23*
3. táblázat: *Adott r és j kombinációra az összes eset közül a legkisebb hibát eredményező megközelítés a különböző ($\Theta[\text{év}]$) várható élettartamok szerint (Színskála értelmezésével)...27*
4. táblázat: *Adott r és j kombinációkhoz tartozó „tankönyvi” és „profil” hiba közti abszolút különbség $j > r$ tartományra koncentrálna a különböző ($\Theta[\text{év}]$) várható élettartamok szerint (Színskála értelmezésével)33*

Ábrajegyzék

1. ábra: Feltételezett pénzáramprofil és élettartam-eloszlás	5
2. ábra: A „tankönyvi” megközelítés.....	10
3. ábra: Pontos pénzáramprofillal történő számítás.....	12
4. ábra: Valószínűségekkel súlyozott periódusvégi konvenció	13
5. ábra: A „tankönyvi” megközelítés relatív hibája $j=0$ fennállása esetén a különböző várható élettartamokra: $\Theta=2$ év (folytonos fekete), $\Theta=5$ év (szaggatott), $\Theta=10$ év (pontosított fekete), $\Theta=20$ év (folytonos szürke), $\Theta=40$ év (pontosított szürke) görbével jelölve	19
6. ábra: A „tankönyvi” megközelítés hibájának alakulása $j=r$ esetén.....	20
7. ábra: A „valószínűségi” megközelítés relatív hibájának alakulása $j=0$ esetben a különböző várható élettartamokra: $\Theta=2$ év (folytonos fekete), $\Theta=5$ év (szaggatott), $\Theta=10$ év (pontosított fekete), $\Theta=20$ év (folytonos szürke), $\Theta=40$ év (pontosított szürke) görbével jelölve.....	24
8. ábra: A „valószínűségi” megközelítés relatív hibájának alakulása $j=r$ esetben a különböző várható élettartamokra: $\Theta=2$ év (folytonos fekete), $\Theta=5$ év (szaggatott), $\Theta=10$ év (pontosított fekete), $\Theta=20$ év (folytonos szürke), $\Theta=40$ év (pontosított szürke) görbével jelölve.....	25
9. ábra: A „tankönyvi” és a „valószínűségi” megközelítések közti abszolút különbség 13 éves várható élettartam esetén ($\Theta[\text{év}]=13$).....	28
10. ábra: A három megközelítés abszolút értelmű relatív hibájának maximuma adott várható élettartamok szerint, ha $j < r$, $r \in [0\%;30\%]$ és $j \in [0\%;20\%]$	29
11. ábra: Adott Θ és r kombinációhoz tartozó legpontosabb megközelítés $j=0$ esetben	30
12. ábra: A „tankönyvi” és a „valószínűségi” abszolút értelmű relatívhibák közti abszolút különbség adott r és Θ kombinációkra $j=0$ esetén.....	31
13. ábra: Az esetek maximális abszolút értelmű relatív hibája különböző várható élettartamokra ($\Theta[\text{év}]$), amikor $j=0$ és $r \in [0\%;30\%]$ vizsgált tartománynak.....	32
14. ábra: Az esetek maximális abszolút értelmű relatív hibája különböző várható élettartamokra ($\Theta[\text{év}]$), amikor $j=r$ és $r \in [0\%;30\%]$ vizsgált tartománynak	34

1. BEVEZETÉS

A pénzügyek területén végzett értékeléseknek számos megközelítése létezik, melyek valamilyen eszköz (azaz pénzáram, illetve pénzáramra való jogosultság (Dülk, 2013), például részvények esetén az osztalék, kötvények esetén a kamatszervény és a névértékre való jogosultság) értékét hivatottak meghatározni. Ilyen megközelítés például a relatív értékelés, az opciós értékelés, a diszkontált pénzáramlás (Discounted Cash Flow - DCF) alapú értékelés, stb. A diszkontált pénzáramlás alapú értékelés ugyan csak egy a lehetséges szemléletmódok közül, mégis bizonyos mértékig ennek megértése elengedhetetlen a többi értékelési módszer használatához. A dolgozat megírása során főként az ehhez kapcsolódó nehézségek kerülnek górcső alá. Első lépésként érdemes megismernedni magával a megközelítéssel. A DCF alapja a jelenérték-számítás, melynek lényege, hogy egy eszköz értékét a tőle várt jövőbeli pénzáramlások jelenre vetített értékeként határozza meg, egy az eszköz kockázatosságát, a befektetett tőke költségét tükröző diszkontráta segítségével. (Damodaran, 2006, 11. o.) A jelenérték-számítás formailag főként kétféle módon szokott történni: meghatározott időpontokban jelentkező diszkrét pénzáramokat diszkontálunk egy adott hosszúságú periódusra vonatkozó diszkrét diszkontrátával, vagy időben folytonos pénzáramokat diszkontálunk egy adott periódushosszra vonatkozó folytonos diszkontrátával. (ld. például: Park és Sharp-Bette, 1990; Remer, Tu, Carson, Ganiy, 1984; Eschenbach, 2011) Jelen kutatás kiindulópontját a folytonos eset képezi.

Tekintve, hogy a DCF alapú értékelés „tankönyvi” megközelítésének vizsgálata adja a dolgozat eredményeinek alapját, így második lépésként érdemes ebbe az irányba továbblépni. A „tankönyvi” megközelítés szerint a jelenérték-számításhoz a következő bemeneti információkra van szükség: a periódus hosszára (általában egy év), az eszköz várható élettartamára (a periódushosszal megegyező mértékegységben, például évben), a periódusokra becsült aggregált pénzáramokra a periódusok végére tolva (időzítve), a periódusra becsült diszkontrátára. (Dülk, 2013) Látható, hogy a bemeneti adatok egy része becsült, más része pedig a valóságot torzítva, mondhatni leegyszerűsítve jeleníti meg, ezzel valamekkora hibát okozva a számításban. Ez az eltérés elméleti szinten mérhető, mely fontos momentum a kutatás szempontjából. A hibák tehát a bemeneti adatok generálása során merülnek fel legfőképpen a következők miatt: a pénzáramok és a diszkontráta pontatlan becslése, az eszköz élettartamával kapcsolatos bizonytalanság figyelmen kívül hagyása, a pénzáramok valódi időzítésének figyelmen kívül hagyása. (Dülk, 2013a) Ezen hibák elkövetésének következményeként természetesen leegyszerűsödik maga a számítás is, cserébe csak egy

közelítő eredményt kapunk, amely értelemszerűen eltérhet a helyes pénzáramprofillal és az élettartam valószínűség-eloszlásával előállítható pontos jelenértéktől. Felmerül a kérdés, hogy ez az eltérés vajon milyen mértékű, elfogadható-e az egyszerűségét mérlegelve, vagy érdemes lenne feloldani ezen egyszerűsítő feltételeket egy feltételezetten pontosabb ám bonyolultabb számítási módszer kedvéért? Ennek köszönhetően a kutatás főként a DCF módszer „tankönyvi” megközelítése esetén tett egyszerűsítő feltételekből fakadó hibák együttes hatásának és az egyszerűsítő feltételek feloldása által kapott eredmények egymáshoz viszonyított pontosságának a vizsgálatára fókuszál.

A dolgozat megírása során az előbb említett hibák közül a periódusvégi konvencióból (a pénzáramok periódus végére tolásából) és a várható élettartamig történő számításból fakadó hibák együttes hatását vizsgálom. Az átláthatóság kedvéért külön esetek kerülnek definiálásra és ezáltal összehasonlításra. Korábbi kutatások alapján az összehasonlításhoz a relatív hibát használok, azaz az adott eset közelítő jelenértékének és a pontos jelenértéknek a hányadosát, mert ez a hibát jobban jellemzi, mint a pl. Chen és Manes (1986) által használt abszolút hiba, mely utóbbi nem dimenzió nélküli, hanem függ a tényleges pénzösszegektől. (Andor, Dülk, 2013a) A hiba mértéke függ a pénzáramprofiltól és az élettartam valószínűség-eloszlásától is, melyek mind elméleti szinten, mind a valóságban sokfélék lehetnek. Az elemzés elvégzéséhez a gyakorlatban előforduló legjellemzőbbnek tekinthető kombinációt választottam, amely a folytonos, exponenciálisan növekvő/csökkenő pénzáramprofil exponenciális eloszlású élettartammal. Későbbi kutatás elképzelhető a gyakorlatban még jellemzően előforduló pénzáramprofilok megvizsgálásán keresztül, de ez nem célja a jelenlegi kutatásnak.

Fontos említést tenni a számításokhoz nélkülözhetetlen paraméterekről is. Három paraméter minden esetben befolyásolja a fentebb említett relatív hiba kimenetelét: a növekedési ütem, a diszkontráta és az eszköz várható élettartama. Különféle kikötéseket kellett tenni azzal kapcsolatban, hogy ezeknek a paramétereknek mely tartománya használható ahhoz, hogy az eredményeket kezelhetően értelmezni lehessen. Ezen kikötések részleteiben majd később kerülnek kifejtésre.

A fentebb említett folytonos, exponenciálisan növekvő/csökkenő pénzáramprofil és exponenciális eloszlású élettartam kombinációra a korábbi, az említett hibákat önmagukban vizsgáló kutatásokból megállapítható, hogy a növekedési ütemet meghaladó nemnegatív diszkontráta esetén a várható élettartamig történő számítás túlbecslést (Andor, Dülk, 2013a), míg a periódusvégi konvenció alulbecslést eredményez (Andor, Dülk, 2013b).

Mindez további motivációként szolgál, hiszen elképzelhető, hogy a két hiba eredője végül pontosabb közelítést eredményez – a hiba abszolút értékét tekintve –, mint csak az egyik hiba elkövetése.

Először azt elemzem, hogy a „tankönyvi” megközelítés mikor pontosabb annál az eljárásnál, amikor a pontos pénzáramprofillal számolunk a várható élettartamig, tehát csak az élettartammal kapcsolatban hibázunk. Ezután azt vizsgálom, hogy javít-e a „tankönyvi” számítás pontosságán, ha a periódusok végére tolt pénzáramokat súlyozom a periódusok végére értelmezett – bizonytalan élettartamból fakadó – bekövetkezési valószínűségekkel, ezáltal közelítőleg mintegy figyelembe véve az élettartammal kapcsolatos bizonytalanságot. (Elképzelhető egy negyedik megközelítés, miszerint a valószínűségekkel súlyozott pontos pénzáramprofillal számolunk a várható élettartamig, de ez a gyakorlatban értelmetlen közelítés, mert végtelen élettartamig számítva éppen a pontos jelenértéket kapnánk. Ezért ezt nem vesszem a vizsgálendő esetek közé.)

Az eredmények alapján, a fenti három megközelítés pontosságát összevetve, megállapítható, hogy a gyakorlatban jellemzően előforduló esetek egy jelentős részében a „tankönyvi” eljáráshoz képest nem érdemes törekedni sem a helyes pénzáramprofil, sem az élettartammal kapcsolatos bizonytalanság figyelembevételére.

2. A FELTÉTELEZETT PÉNZÁRAMPROFIL ÉS ÉLETTARTAM-ELOSZLÁS

A hiba mértéke, ahogyan a bevezetésben is említettem, függ a pénzáramprofiltól és az eszköz élettartamának valószínűség-eloszlásától. Természetesen rengeteg variáció elképzelhető mind elméletben, mind gyakorlatban, ezért az összes eset számításba vétele igencsak nehézkes lenne. Szükségem van tehát egy olyan pénzáramprofil és élettartam-eloszlás kombinációra, mely a gyakorlatban jellemzően előfordul és elméleti szinten is jól leírható. Az elemzés elvégzéséhez ezért a gyakorlatban előforduló legjellemzőbbnek tekinthető kombinációt választottam, amely a folytonos, exponenciálisan növekvő/csökkenő pénzáramprofil exponenciális eloszlású élettartammal.

Érdemes kezdésként magát az exponenciális eloszlást és a rá jellemző eloszlás- és sűrűségfüggvényt megismerni, hiszen ezek a dolgozat egészében többször előkerülnek. „Exponenciális eloszlás leginkább bizonyos véletlen hosszúságú időtartamok eloszlásaként lép fel. Exponenciális eloszlással írható le például egy olyan berendezésnek, ill. alkatrésznek az élettartama, hibamentes működési ideje, melynek tönkremenetelét nem kopás vagy természetes elhasználódás okozza, hanem váratlan törés szakadás illetve egyéb véletlen ok”. (Kövesi, Erdei, Nagy, Tóth, Jónás, 2012, 118. o.) Segítségével egy valószínűségi változót jellemezhetünk. Az eloszlásfüggvény – általános definíciója szerint – minden x valós számhoz annak a valószínűségét rendeli, hogy a valószínűségi változó ennél kisebb értéket vesz fel.

Az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye ($\Phi(x)$) matematikailag a következőképpen írható fel:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , \text{ ha } x \geq 0 \\ 0 & , \text{ ha } x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

ahol e a természetes logaritmus alapja, λ az exponenciális eloszlás paramétere.

Ha x valószínűségi változónak létezik a sűrűségfüggvénye ($f(x)$) akkor az az eloszlásfüggvény deriváltjaként adódik.

Matematikailag a következő alakban írható fel:

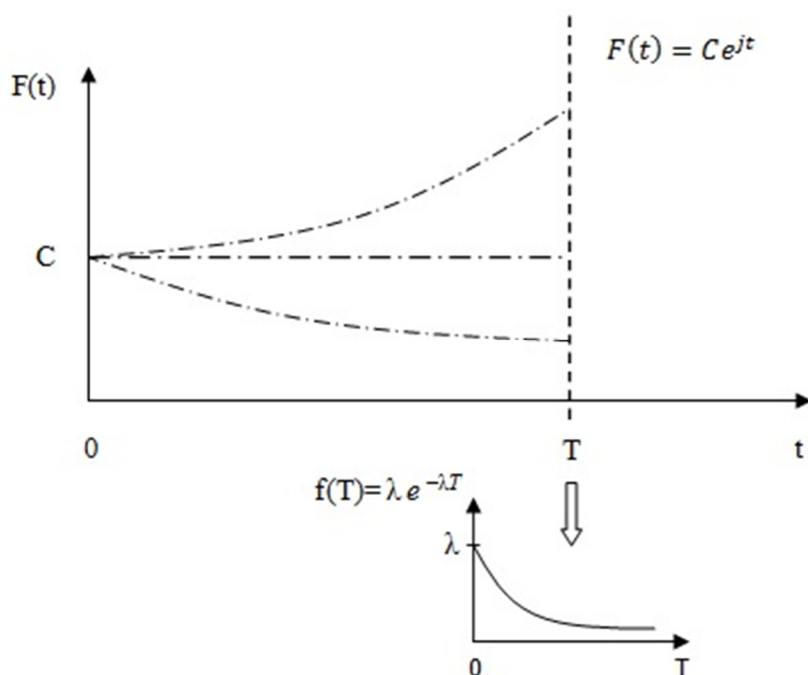
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \text{ ha } x \geq 0 \\ 0 & , \text{ ha } x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

ahol $\lambda > 0$.

Egy ilyen X folytonos valószínűségi változó várható értéke az alábbi módon számítható ki (ahol $E()$ a várható értéket jelöli):

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda} \quad (3)$$

Térjünk vissza a feltételezett kombináció részletesebb bemutatására, amely szemléltetésére készült az alábbi 1. ábra.



1. ábra: Feltételezett pénzáramprofil és élettartam-eloszlás

A vízszintes tengelyen az idő (jele: t , mértékegysége: év), a függőleges tengelyen pedig a folytonos exponenciális pénzáramprofil ($F(t)$) látható. A folytonos exponenciális pénzáramprofil leírása matematikailag a következő:

$$F(t) = Ce^{jt} \quad (4)$$

ahol C a konstans pénzáram-paraméter, j folytonos növekedési ütemet (amely természetesen lehet negatív növekedés is), t pedig a vízszintes tengely elnevezésével konzisztensen az időt jelöli. (Andor, Dülk, 2013a) A pénzáramok a vízszintes tengelyen jelölt T időpontig

jelentkeznek, mely T egy a bizonytalan élettartamot kifejező valószínűségi változó. Az 1. ábrán látható, hogy T a már emlegetett exponenciális eloszlással jellemezhető.

Mivel matematikailag a pénzáramprofilt és az élettartam-eloszlás ismert, kiszámítható az elméleti értelemben vett pontos jelenérték. A következő fejezetben a jelenérték-számítás különféle eshetőségei kerülnek bemutatásra – a teljesség igénye nélkül –, főként a kutatás szempontjából kulcsfontosságúakat állítva a fókuszba.

3. ESETEK

Ebben a fejezetben bemutatom az elemzésben összehasonlításra kerülő jelenérték-számítási módokat az említett pénzáramprofil és élettartam-eloszlás kombinációra. Elsőként az adott T élettartamig számított jelenérték, majd ebből kiindulva a pontos jelenérték kerül meghatározásra. Ezután ismertetem a már említett egyszerűsítő feltételekkel operáló „tankönyvi” metodika, valamint további két esetet, melyek az egyszerűsítő feltételek egyenkénti feloldását hivatottak megvizsgálni. Első esetben a periódusvégi konvenció elkövetéséből fakadó hiba kiküszöbölése, míg a második esetben az eszköz élettartamával kapcsolatos bizonytalanságnak a figyelembevétele a cél.

A fejezetben meghatározásra kerülő jelenértékek matematikailag esetenként olyan végeredményhez vezetnek, amelyek további vizsgálódást tesznek szükségessé. A nullával való osztás kialakulásának elkerüléséhez külön meg kell vizsgálni azokat az eseteket, amikor a növekedési ütem nulla, és azt is, amikor a növekedési ütem éppen egyenlő a diszkontrátával. Ahhoz, hogy az eredmények konzisztensek legyenek, ezen eshetőségeket minden jelenérték-számítási megközelítés esetén bemutatom (kivéve adott T élettartamig számított jelenérték esetén, mert erre a későbbiekben nem lesz szükség).

Az esetek szemléltetésére készített ábrák a feltételezett pénzáramprofil egyenletes (tehát se nem csökkenő, se nem növekvő) változatát mutatják be az egyszerűség kedvéért, de a számításokban továbbra is feltételezem az exponenciális növekedés, illetve csökkenés lehetőségét.

3.1. Adott T élettartamig számított jelenérték

Ha előre tudnánk egy eszköz pontos élettartamát, akkor a jelenérték-számítás matematikailag így nézne ki (ld. Tufekci, Young, 1987):

$$\int_0^T F(t)e^{-rt} dt = \int_0^T C e^{jt} e^{-rt} dt = \frac{C(-1+e^{(j-r)T})}{j-r} \quad (5)$$

ahol az e^{-rt} tag a diszkonttényező, és r adott periódushosszra értelmezett folytonos diszkontráta.

Viszont a valóságban az esetek nagy részében nem tudható előre, hogy az eszköz meddig fogja a pénzáramokat biztosítani. Például, ha egy vállalat megvesz egy termelő berendezést, akkor a berendezésről nem tudja pontosan, hogy az meddig lesz képes termelni. Van viszont

valamilyen várható élettartam, amely tudható tapasztalatok alapján, vagy a gyártó információja alapján és ez felhasználható elemzéseinkben. Csak ezzel a várható értékkel számolva az elméletileg pontos jelenértékhez képest csak egy közelítő eredményt kapunk, viszont az eltérés mérhető, mely a későbbiekben bemutatott esetek összehasonlíthatóságához fog vezetni. A következő fejezetben az elméletileg pontos jelenérték kerül bemutatásra.

3.2. A pontos jelenérték

Az elméletileg pontos jelenérték-számítás során figyelembe kell venni, hogy az eszköz élettartamának bizonytalanságát exponenciális eloszlás jellemzi. Az exponenciális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye ebben az esetben azt mutatja meg, hogy mekkora annak a valószínűsége, hogy egy eszköz nem él tovább adott t időpontnál (ld. (1). képlet). A bizonytalan élettartamot tartalmazó várható pénzáramprofil előállításához ennek komplementerével kell súlyozni a korábban már definiált pénzáramprofilt, azaz annak valószínűségével, hogy az adott eszköz legalább t időpontig él. Ezt fejezi ki a (6). képlet:

$$E[F(t)] = Ce^{jt}(1 - (1 - e^{-\lambda t})) = Ce^{(j-\lambda)t} \quad (6)$$

Ezt beépítve a számításokba a jelenérték így alakul (ld. Zinn, Lesso, Motazed, 1977):

$$\begin{aligned} P_{pontos} &= \int_0^{\infty} E[F(t)]e^{-rt} dt = \int_0^{\infty} Ce^{(j-\lambda)t}e^{-rt} dt = \int_0^{\infty} Ce^{(j-\lambda-r)t} dt = \\ &= \frac{C}{-j+\lambda+r} \end{aligned} \quad (7)$$

Tehát a súlyozott pénzáramprofil kerül diszkontálásra végtelenig számított lehetséges élettartammal, ugyanis elméleti szinten az a feltételezés – az exponenciális eloszlás feltételezéséből fakadóan –, hogy az eszköz bármeddig élhet. Ezt mutatja a (7). egyenlet, ez adja a később bemutatandó esetek összehasonlításánál előkerülő relatív hiba bázisát, a pontos jelenértéket. A (7). egyenlet láthatóan csak a $j < (\lambda + r)$ feltétel teljesülése esetén áll fenn (különben az improprius integrál divergens, azaz a jelenérték végtelen, más megfogalmazásban: nem létezik). Ez az összehasonlítás során konvergencia kritériumot fog alkotni, azaz a paraméterek csak azon tartományát vizsgálom, ahol a $j < (\lambda + r)$ feltétel teljesül. Ennek az az egyszerű oka, hogy a pontos jelenérték minden hiba meghatározásánál szerepet kap, ezért annak értelemszerűen léteznie kell. (Ezen számítás során és a dolgozat egészében sem foglalkozom a pénzáramok és az élettartam közötti esetleges korrelációval, mivel az az

elemzést túlzottan elbonyolítaná. Ennek diszkrét időben történő numerikus megközelítésével egyébként Van Horne (1972) foglalkozik.)

A fejezet elején említésre került, hogy a konzisztencia kedvéért minden esetben megvizsgálom az egyes jelenértékek meghatározásánál problémát okozó $j=0$ és $j=r$ eseteket.

Abban az esetben, ha $j=0$ a pontos jelenérték így alakul:

$$P_{pontos,j=0} = \int_0^{\infty} E[F(t)]e^{-rt} dt = \int_0^{\infty} C e^{-\lambda t} e^{-rt} dt = \int_0^{\infty} C e^{(-\lambda-r)t} dt = \frac{C}{\lambda+r} \quad (8)$$

Az így kapott eredmény szintén feltételes ($\lambda+r>0$), mely általános érvényű lesz a többi esetre is, amikor a növekedési ütem nulla ($j=0$). Csak olyan eseteket vizsgállok, ahol a pontos jelenérték létezik, azaz véges.

Abban az esetben pedig, mikor $j=r$ a pontos jelenérték a következő:

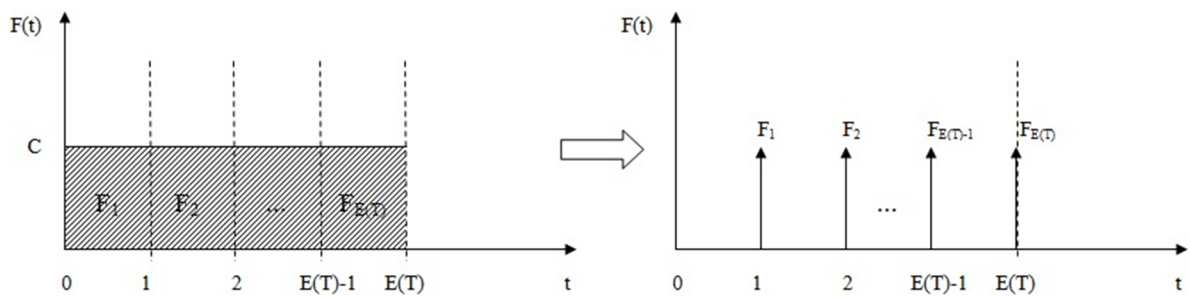
$$P_{pontos,j=r} = \int_0^{\infty} E[F(t)]e^{-rt} dt = \int_0^{\infty} C e^{(r-\lambda)t} e^{-rt} dt = \int_0^{\infty} C e^{-\lambda t} dt = \frac{C}{\lambda} \quad (9)$$

Ekkor a $\lambda>0$ feltétel lesz az általános érvényű konvergencia kritérium.

Minden további esetben a jelenértéket az eszköz élettartamának várható értékéig számítom, hiszen a valóságban leginkább ez áll az elemzésekhez rendelkezésre. A különbséget majd az jelenti az esetek között, hogy a „tankönyvi” eljárás figyelmen kívül hagyja a pénzáramok valódi időzítését és az eszköz élettartamának bizonytalanságát, míg a definiált esetek ezeket fokozatosan figyelembe fogják venni. Az első esetben elhagyásra kerül a „tankönyvi” eljárás által javasolt periódusvégi konvenció, a második esetben pedig számításba vesszem az élettartammal kapcsolatos bizonytalanságot. Ahogy a bevezetésben említésre került, a pontos pénzáramprofil szerint a bizonytalan élettartam figyelembevételével a várható élettartamig történő számítás (mely jelen tárgyalásunkban a két egyszerűsítő feltétel együttes feloldását jelentené) nem tekinthető életszerű közelítésnek, hiszen technikailag nem jelent könnyebbséget a pontos jelenérték kiszámításához képest. A különbség annyiban nyilvánul meg, hogy végtelenig vett integrál helyett a várható élettartamig integrálunk (7)., (8)., és (9). egyenletben. Ezért ezzel a megközelítéssel a kutatás szempontjából nem foglalkozom.

3.3. A „tankönyvi” megközelítés

Az átláthatóság kedvéért idézzük fel a bevezetésben bemutatott tudnivalókat. A „tankönyvi” jelenérték-számításhoz a következő bemeneti információkra van szükség: a periódus hosszára (amelyet itt praktikusán egy évnek tekintek), az eszköz várható élettartamára ($E(T)$, a periódushosszal megegyező mértékegységben, és feltételezésem szerint csak egész értéket vehet fel), az adott periódusra becsült aggregált pénzáramokra a periódus végére tolva, a periódushosszhoz tartozó becsült diszkontrátára (r). (Andor, Dülk, 2013a)



2. ábra: A „tankönyvi” megközelítés

A 2. ábrán az látható, hogy a feltételezett pénzáramprofilon periódusvégi konvenciót hajtunk végre az eszköz várható élettartamáig. A periódusvégi konvenció matematikailag a következő:

$$F(t) = \int_{t-1}^t C e^{jt} dt = \frac{C e^{j(-1+t)}(-1+e^j)}{j} \quad (10)$$

Ezáltal a korábban folytonos függvényként értelmezett $F(t)$ diszkrét függvény lesz.

Mivel az élettartamról exponenciális eloszlást feltételeztem, így a további számításokhoz szükség van az exponenciális eloszlás várható értékére, amelyet már korábban definiáltam ld. (3). képlet. A közelítő jelenérték (jelölve: $\hat{P}$) kiszámításához már csak diszkontálni kell a periódus végére tolt pénzáramokat a megfelelő folytonos diszkontrátával és az élettartam várható értékéig összegezni.

Ezt mutatja a (11). egyenlet:

$$\begin{aligned}\hat{P}_{tankönyvi} &= \sum_{t=1}^{E(T)} F(t)e^{-rt} = \sum_{t=1}^{\frac{1}{\lambda}} \frac{ce^{j(-1+t)}(-1+e^j)}{j} e^{-rt} = \\ &= \frac{ce^{-(1+\frac{1}{\lambda})r}(-1+e^j)(-e^{(1+\frac{1}{\lambda})r} + e^{\frac{j}{\lambda}+r})}{(e^j - e^r)j}\end{aligned}\quad (11)$$

A „tankönyvi” megközelítés jelenértéke matematikailag sem a $j=0$, sem a $j=r$ esetben nem értelmezhető ebben a formában, hiszen akkor nullával való osztás állna elő. Tehát a kezdeti bemeneti paraméterek módosításával külön meg kell ezeket az eseteket vizsgálni.

Amikor $j=0$ a „tankönyvi” megközelítés jelenértéke a következőképpen írható fel:

$$\hat{P}_{tankönyvi,j=0} = \sum_{t=1}^{E(T)} F(t)e^{-rt} = \sum_{t=1}^{\frac{1}{\lambda}} C e^{-rt} = -\frac{C-Ce^{-\frac{r}{\lambda}}}{1-e^r} \quad (12)$$

A $j=r$ esetén pedig:

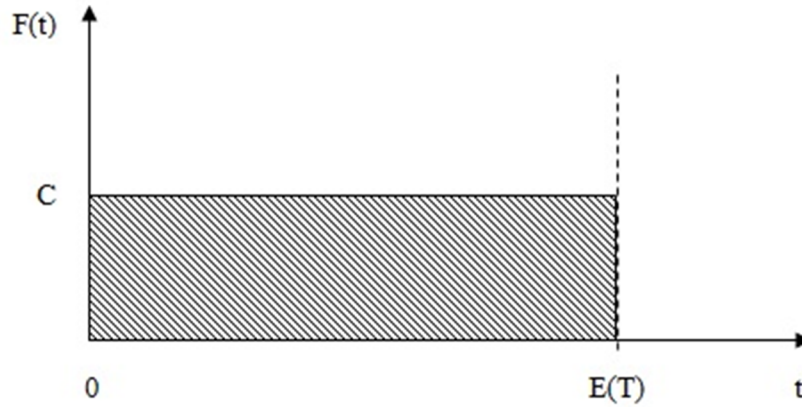
$$\hat{P}_{tankönyvi,j=r} = \sum_{t=1}^{E(T)} F(t)e^{-rt} = \sum_{t=1}^{\frac{1}{\lambda}} \frac{ce^{(-1+t)r}(-1+e^r)}{r} e^{-rt} = \frac{C-Ce^{-r}}{\lambda r} \quad (13)$$

Ezen eredmények később kerülnek majd felhasználásra a relatív hiba meghatározásánál, de előbb még meg kell ismerni további két esetet, melyek majd pontosságuk szempontjából összehasonlításra kerülnek a „tankönyvi” megközelítéssel.

3.4. Pontos pénzáramprofil

A „tankönyvi” megközelítés, ahogy már sokszor előkerült, periódus végére tolt pénzáramok alapján határozza meg a jelenértéket, figyelmen kívül hagyva a pénzáramok tényleges időzítését. Ezt a hiba elkerülhető, ha nem végezzük el a periódusvégi konvenciót. (Andor, Dülk, 2013a)

A 3. ábra szemlélteti az elképzelést, miszerint a jelenérték-számítás a pontos pénzáramprofil szerint történik az eszköz élettartamának várható értékéig. A pontos pénzáramprofil a dolgozat egészén átívelő feltételezésnek megfelelő folytonos exponenciális pénzáramprofil. A 3. ábrán az egyszerűség kedvéért ennek folytonos egyenletes változata van ábrázolva, amikor a növekedési ütem nulla ($j=0$), de a számításokban természetesen szerepel az exponenciális növekedés és csökkenés lehetősége.



3. ábra: Pontos pénzáramprofillal történő számítás

Ezen eset jelenértékének számítása matematikailag a következő:

$$\hat{P}_{profil} = \int_0^{E(T)} F(t) e^{-rt} dt = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} C e^{jt} e^{-rt} dt = \frac{C(-1 + e^{\frac{j-r}{\lambda}})}{j-r} \quad (14)$$

A jelenérték $j=r$ esetén ebben a formában nem értelmezhető, erre az esetre a következőképpen írható fel:

$$\hat{P}_{profil, j=r} = \int_0^{E(T)} F(t) e^{-rt} dt = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} C e^{rt} e^{-rt} dt = \frac{C}{\lambda} \quad (15)$$

Belátható, hogy ez megegyezik a pontos jelenértékkel (ld. (9). egyenlet), tehát ebben az esetben nincs eltérés a kettő között.

A konzisztens eredmények érdekében vizsgálandó a pontos pénzáramprofil alapján számított jelenérték alakulása $j=0$ esetre is:

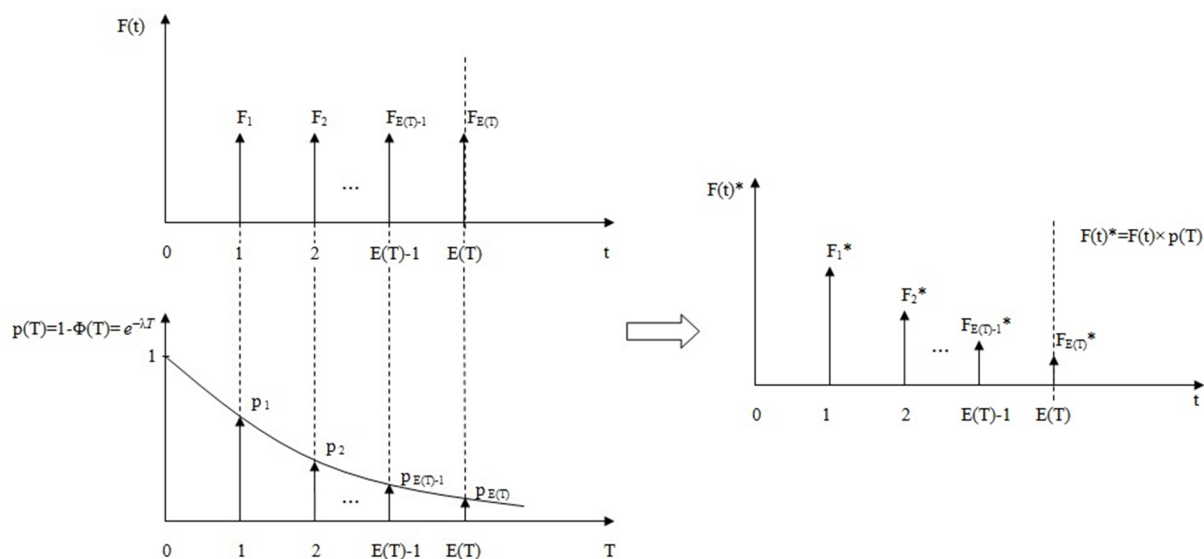
$$\hat{P}_{profil, j=0} = \int_0^{E(T)} F(t) e^{-rt} dt = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} C e^{-rt} dt = \frac{C - C e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r} \quad (16)$$

Belátható, hogy a pontos pénzáramprofillal történő jelenérték-számítás a gyakorlatban nehézkesen használható, hiszen integrálási technika használata szükséges hozzá.

3.5. Valószínűségekkel súlyozott periódusvégi konvenció

A valószínűségekkel súlyozott periódusvégi konvenció a „tankönyvi” megközelítés azon gyengeségét próbálja kijavítani, hogy az nem veszi figyelembe az eszköz élettartamának bizonytalanságát. Bizonytalanság alatt itt egészen pontosan az élettartam valószínűség-eloszlásának másodrendű és afeletti momentumait értem, az első rendű momentumot – azaz az élettartam várható értékét – a „tankönyvi” megközelítés is figyelembe veszi. Ezért fogalmazok úgy, hogy az „élettartammal kapcsolatos bizonytalanság figyelmen kívül hagyása” és nem pedig az „élettartam valószínűség-eloszlásának figyelmen kívül hagyása”. A várható érték a valószínűség-eloszlásnak egy jellemzője, amelyet tehát a „tankönyvi” megközelítés figyelembe vesz. A bizonytalanságnak ez a fajta felfogása egyébként összhangban van a jelenérték-számítás alapkoncepciójával, miszerint a pénzáramokat várható értéken becsüljük és a kockázatot¹, azaz a pénzáramok valószínűség-eloszlásának másodrendű és afeletti momentumait pedig a tőke költség becslésnél vesszük figyelembe.

A feltételezés szerint az eszköz élettartama most exponenciális eloszlást követ, így fogalmazódott meg a gondolat, mi lenne, ha az eloszlásnak megfelelően súlyozásra kerülnének a periódusvégére tolt pénzáramok, ezzel mintegy figyelembe véve a bizonytalanságot.



4. ábra: Valószínűségekkel súlyozott periódusvégi konvenció

¹ Jóllehet, a kockázatot és a bizonytalanságot szokás megkülönböztetni egymástól, de jelen tárgyalásban szinonimaként használom őket, arra utalva, hogy valószínűségi változókkal van dolgunk.

A 4. ábra segít megérteni az elképzelést. A $p(T)$ jelölésű változó annak valószínűségét mutatja, hogy az eszköz legalább adott T időpontig él.

$$p(T) = 1 - \Phi(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda T}) = e^{-\lambda T} \quad (17)$$

Az $F(t)$ -t koordináta-rendszer a már jól ismert periódusvégi konvenció utáni pénzáramokat mutatja, a „tankönyvi” megközelítés esetén bemutatottal megegyezően, ld. (10). egyenlet. A „periódusvégekhez” tartozó valószínűségekkel (4. ábrán: $p_1, p_2, \dots, p_{E(T)-1}, p_{E(T)}$) súlyozva a periódusvégi pénzáramokat (4. ábrán: $F_1, F_2, \dots, F_{E(T)-1}, F_{E(T)}$) elő áll az $F(t)^*$ -t koordináta-rendszerben ábrázolt valószínűségekkel súlyozott pénzáram-sorozat (4. ábrán: $F_1^*, F_2^*, \dots, F_{E(T)-1}^*, F_{E(T)}^*$).

Mindez matematikailag így írható le:

$$F(t)^* = F(t) \times p(t) = \frac{ce^{j(-1+t)}(-1+e^j)}{j} \times e^{-\lambda t} = \frac{ce^{j(-1+t)-\lambda t}(-1+e^j)}{j} \quad (18)$$

Megjegyzem, hogy a (18). egyenletben a p függvény változóját T -ről t -re cseréltem az egyenlet konzisztenciája érdekében, ezt azért tehető meg, mert a két változó dimenziója ugyanaz (és egyébként $F(t)$ itt diszkrét függvény).

Érdemes megjegyezni, hogy ez ugyanazt a logikát követi, mint a pontos jelenérték levezetése. Belátható, hogy ez tulajdonképpen egy „valószínűségi periódusvégi konvenció”, hiszen a periódus minden pénzárama ugyanazzal a (periódus végére számolt) valószínűséggel van súlyozva. Érdemes szemügyre venni az elgondolást, hiszen ez a gyakorlatban (pl. Excelben) könnyen implementálható.

Már csak egy dolog maradt hátra, méghozzá ennek a mesterségesen előállított profilnak a jelenérték-számítása, amely a következőképpen történik:

$$\begin{aligned} \hat{P}_{\text{valószínűség}} &= \sum_{t=1}^{E(T)} F(t)^* \times e^{-rt} = \sum_{t=1}^{\frac{1}{\lambda}} F(t)^* \times e^{-rt} = \\ &= \frac{ce^{-\frac{\lambda+r}{\lambda}}(-1+e^j)(e^{j/\lambda} - e^{1+\frac{r}{\lambda}})}{(e^j - e^{\lambda+r})j} \end{aligned} \quad (19)$$

Látható a végeredményen, hogy a $j=0$ esetet ebben a formában nem lehet értelmezni, ha a növekedési ütem nulla, a jelenérték-számítás így alakul:

$$\hat{P}_{valószínűség, j=0} = \sum_{t=1}^{E(T)} F(t)^* \times e^{-rt} = \sum_{t=1}^{\frac{1}{\lambda}} C e^{-\lambda t} e^{-rt} = -\frac{C - C e^{-\frac{\lambda+r}{\lambda}}}{1 - e^{\lambda+r}} \quad (20)$$

A konzisztencia kedvéért itt is nézzük meg a jelenérték alakulását $j=r$ esetben:

$$\hat{P}_{valószínűség, j=r} = \sum_{t=1}^{E(T)} F(t)^* \times e^{-rt} = \sum_{t=1}^{\frac{1}{\lambda}} F(t)^* \times e^{-rt} = \quad (21)$$

$$\frac{C e^{-(2+\frac{1}{\lambda})r} (-1 + e^r) (e^{(1+\frac{1}{\lambda})r} - e^{-1+r+\frac{r}{\lambda}})}{(-1 + e^{\lambda})r}$$

Bemutatásra került az összes kutatás szempontjából szükséges eset jelenérték-számításának elvi háttere. A továbbiakban a fenti esetek és a pontos jelenérték közti eltérés meghatározása következik, melyhez a relatív hiba nyújt segítséget.

4. AZ ESETEK RELATÍV HIBÁI

A hiba mérésére a kapcsolódó kutatásokat követve (ld. Lohmann, Ofakford, 1984; Fleischer, Mason, Zhou, 1998) a relatív hibát alkalmazom, amelyet Andor és Dülk (2013a) használt fel elsőként a közelítő és pontos jelenérték közti eltérés jellemzésére bizonytalan élettartam esetén. Véleményük szerint ez által jobban leírható a számított eltérés, mint például a Chen és Manes (1986) által használt abszolút hibával ($\hat{P} - P_{\text{pontos}}$). Ennek legfőbb oka, hogy a relatív hiba dimenzió nélküli és százalékos eredményt ad, míg az abszolút hiba függ a tényleges pénzösszegektől és pénzösszegben adja meg az eredményt.

$$\varepsilon = \frac{\hat{P}}{P_{\text{pontos}}} - 1 \quad (22)$$

A relatív hiba jelölése: ε , számításának módját a (22). képlet mutatja. A vizsgálatokban a relatív hiba abszolút értékét fogom tekinteni, mert a hiba nagysága és nem pedig az iránya alapján célszerű megítélni egy közelítés pontosságát. A $\hat{P}$ jelölés mindig a korábban bemutatott közelítő esetek egyikét, a P_{pontos} jelölés pedig a már definiált pontos jelenértéket jelenti. Az esetek megkülönböztetéséhez külön indexszel lesznek ellátva a kifejezések.

Andor és Dülk (2013a) egy korábbi kutatásában megállapítja, hogy a Jensen-egyenlőtlenség² értelmében, a $j < r$ esetén a pontos pénzáramprofillal a várható élettartamig történő számítás túlbecslést, míg $j > r$ esetén alulbecslést eredményez. A $j = r$ esetben pedig a hiba éppen nulla, tehát a jelenértéke teljesen pontos. Andor és Dülk (2013b) egy másik kutatásának eredményét, – miszerint nemnegatív r esetén a periódusvégi konvenció mindig alulbecslést eredményez – ehhez hozzávéve megállapítható, hogy a $j > r$ (azon tartományában, mely a korábban definiált konvergencia kritériumoknak megfelel, ld. 3.2. fejezet) és $j = r$ esetekben a „tankönyvi” eljárás hibája nagyobb, mint a pontos pénzáramprofillal történő számításé, mert ez ahhoz képest (jobban) alulbecsül. (Andor, Dülk, 2013a) A „valószínűségi” eljárás pedig értelemszerűen még a „tankönyvinél” is pontatlanabb, hiszen ahhoz képest tovább súlyosbítja az alulbecslést. Ezek értelmében a mindhárom esetet érintő összehasonlítás szempontjából se a $j > r$, se a $j = r$ esetet nem kell megvizsgálnom részletesebben, hiszen ekkor a pontos pénzáramprofillal történő számítás adja a legjobb közelítést. Érdekes viszont j és r

² Jensen-egyenlőtlenség a valószínűség-számítás keretében általában a következő formában áll fent: Ha X egy valószínűségi változó és φ konvex függvény, akkor $\varphi(E[X]) \leq E[\varphi(X)]$.

vizsgált tartományon belüli összes kombinációját figyelembe venni a relatív hibák meghatározásánál, hiszen az összehasonlítás során nem lehet megelégedni azzal, hogy a „profilos” megközelítés adja a legjobb eredményt, tovább vizsgálendő a „tankönyvi” megközelítéssel számított jelenérték pontos pénzáramprofillal számított jelenértéktől való eltérésének mértéke is. Elképzelhető ugyanis, hogy ez elfogadható hibahatáron belül van, de erről később részletesebben értekezem.

Az eredmények jobb kezelhetősége végett most csak j és r nemnegatív tartományát vizsgálom meg. Konkrétan $j \in [0\%;20\%]$ és $r \in [0\%;30\%]$ tartományokat, melyek egyébként a gyakorlatban előforduló tipikus esetek egy jelentős részét lefedik. A valóságban előfordulhat természetesen, hogy a növekedési ütem negatív, de élek azzal a feltételezéssel, hogy a gyakorlatban minden vállalat törekszik a növekedési ütem pozitív pályán tartására, ezért a gyakorlatban tapasztalható esetek nagyobb részében ez a helyzet áll fent. Dülk (2013a, 2014) kutatásaiból az derül ki, hogy a gyakorlatban elképzelhető, hogy előfordul negatív diszkontráta is (pl.: a CAPM-ben (Capital Asset Pricing Model) negatív bétákon keresztül), például energiahatékonysági projektek esetén. A gyakorlatban viszont a pozitív diszkontráta az alapvető, és az sem jellemző, hogy ez meghaladná a 30%-ot. Andor és Dülk (2013b) a kapcsolódó kutatások alapján (például: Lawrence, 2009; Horvath, 1995) egyébként a rátát 50%-ban maximalizálják, de jelen kutatás szempontjából megelégszem a gyakori életszerű esetek lefedésével.

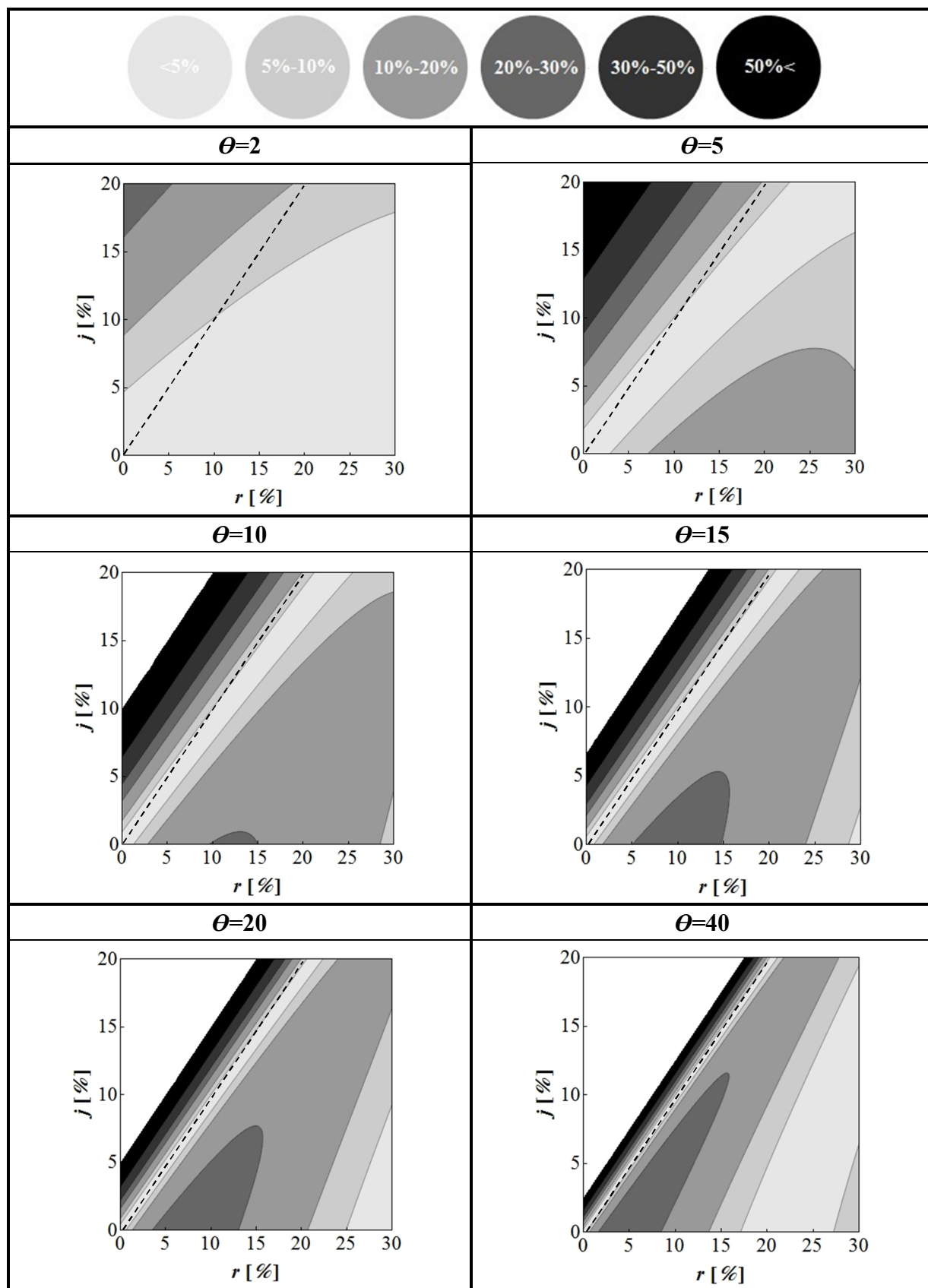
4.1. A „tankönyvi” megközelítés hibája

A relatív hiba meghatározása tehát mindig az előbb bemutatott eljárás alapján készül. Szükség van az előző fejezetben kiszámolt „tankönyvi” megközelítéshez tartozó jelenértékre (ld. (11). egyenlet), valamint a pontos jelenértékre (ld. (7). egyenlet), melyek felhasználásával a „tankönyvi” megközelítés relatív hibája a következőképpen alakul:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{tankönyvi}} &= \frac{\hat{P}_{\text{tankönyvi}}}{P_{\text{pontos}}} - 1 = \frac{\frac{ce^{-(1+\frac{1}{\lambda})r}(-1+e^j)(-e^{(1+\frac{1}{\lambda})r} + e^{\frac{j}{\lambda}+r})}{(e^j - e^r)j}}{\frac{c}{-j+\lambda+r}} - 1 = \\ &= -1 - \frac{(-1+e^j)(-1+e^{\frac{j-r}{\lambda}})(j-\lambda-r)}{(e^j - e^r)j}\end{aligned}\quad (23)$$

A hiba mértékét jelentősen befolyásolja a három paraméter alakulása, így a szemléletesség kedvéért készült a következő 1. táblázat.

1. táblázat: Adott r és j kombinációkhoz tartozó „tankönyvi” hiba mértéke a különböző (Θ [év]) várható élettartamok szerint (Színskála értelmezésével)

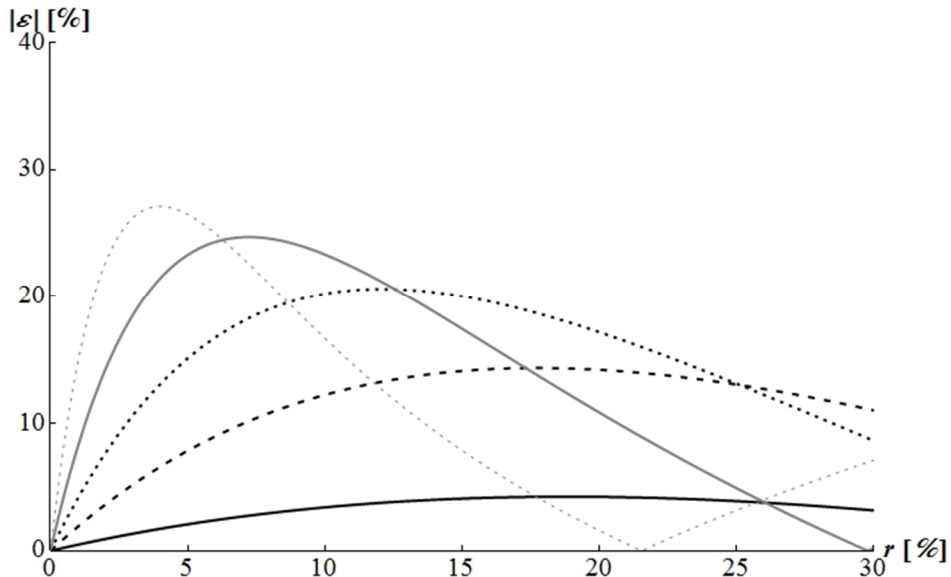


Az 1. táblázaton a fekete szaggatott vonal jelzi a $j=r$ eseteket, értelemszerűen az egyenes felett a $j>r$ esetek, míg alatta a $j<r$ esetek találhatók. A színskála értelmezése egyszerű. A legvilágosabb szín az 5% alatti (abszolút értékű) relatív hibát jelöli, az eggyel sötétebb árnyalat az 5% és 10% közti hibát, és így tovább a többi árnyalat az 1. táblázatban jelöltek szerint. A színskálán nem látható a fehér terület jelentése, ennek oka, hogy a fehér terület nem hiba nagyságát mutatja, hanem azt, hogy azon a tartományon nem teljesül a korábban kikötött $j<(\lambda+r)$ konvergencia kritérium. A növekedési ütem, diszkontráta és várható élettartam azon tartományát, ahol nem teljesül a feltétel, a vizsgálódás szempontjából figyelmen kívül hagyom a későbbiekben is.

Az 1. táblázat önmagában főleg annak belátására használható, hogy a várható élettartam növekedésével (ceteris paribus) nő a hiba nagysága az általam vizsgált $j<r$ tartományra koncentrálva, azonban ennek a megállapításnak csak később lesz igazán jelentősége.

Ahogy korábban említettem, a $j=0$ esetet is szükséges megvizsgálni. Ekkor a „tankönyvi” jelenérték-számítás relatív hibája a (8). és (12). egyenletet felhasználva a következőképpen alakul:

$$\varepsilon_{\text{tankönyvi},j=0} = \frac{\hat{P}_{\text{tankönyvi},j=0}}{P_{\text{pontos},j=0}} - 1 = \frac{\frac{C-Ce^{-\frac{r}{\lambda}}}{1-e^{-r}}}{\frac{C}{\lambda+r}} - 1 = -1 + \frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}(-1+e^{\frac{r}{\lambda}})(\lambda+r)}{-1+e^{-r}} \quad (24)$$



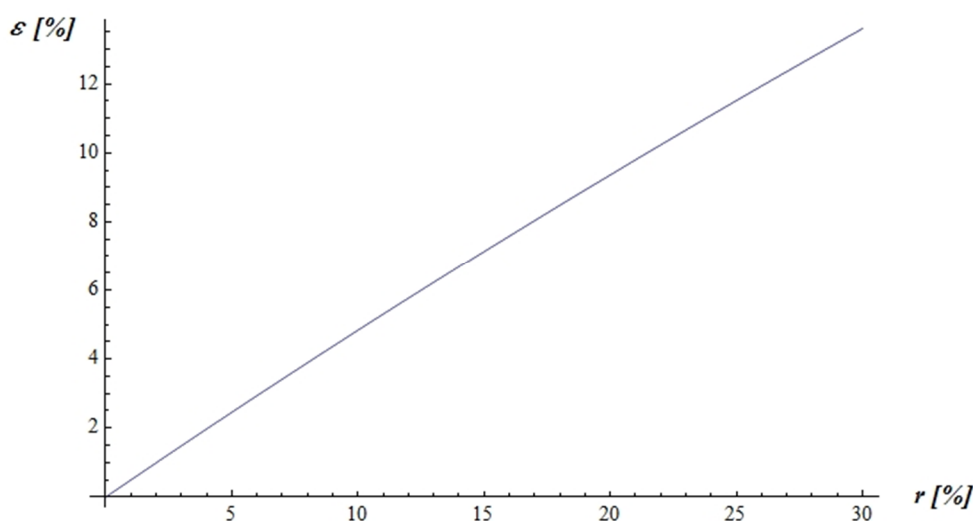
5. ábra: A „tankönyvi” megközelítés relatív hibája $j=0$ fennállása esetén a különböző várható élettartamokra: $\theta=2$ év (folytonos fekete), $\theta=5$ év (szaggatott), $\theta=10$ év (pontosított fekete), $\theta=20$ év (folytonos szürke), $\theta=40$ év (pontosított szürke) görbével jelölve

Az 5. ábrán látható, hogy a relatív hiba abszolút értéke függvényének az általam vizsgált tartományon különböző várható élettartamokhoz van valamekkora lokális maximuma. Ez a lokális maximum a várható élettartam növekedésével növekszik. Az ábrázolt legnagyobb várható élettartam 40 év ($\Theta=40$), ahol a relatív hiba lokális maximuma 27,12%. Tehát ha a $j=0$ és $r \in [0\%;30\%]$, akkor a „tankönyvi” megközelítés relatív hibája nem haladja meg a 28%-ot 40 éves várható élettartamon belül.

Ha $j=r$ akkor a „tankönyvi” megközelítés hibája különleges:

$$\varepsilon_{\text{tankönyvi},j=r} = \frac{\hat{P}_{\text{tankönyvi},j=r}}{P_{\text{pontos},j=r}} - 1 = \frac{\frac{C-Ce^{-r}}{\lambda r}}{\frac{C}{\lambda}} - 1 = -\frac{-1+e^{-r}+r}{r} \quad (25)$$

Különleges alatt azt értem, hogy a hiba mértéke csak a diszkontráta nagyságától függ, de a várható élettartamtól nem. (ld. 6. ábra).



6. ábra: A „tankönyvi” megközelítés hibájának alakulása $j=r$ esetén

A relatív hiba maximuma a vizsgált tartományon ($r \in [0\%;30\%]$) 13,606%.

4.2. Hiba a pontos pénzáramprofil használata esetén

A metodika értelemszerűen itt is megegyezik az előzővel. Szükség van a pontos jelenértékre (ld. (7). egyenlet) és a pontos pénzáramprofillal számított közelítő jelenértékre (ld. (14). egyenlet).

A pontos pénzáramprofillal számított jelenérték relatív hibája pedig:

$$\varepsilon_{profil} = \frac{\hat{P}_{profil}}{P_{pontos}} - 1 = \frac{\frac{c(-1+e^{\frac{j-r}{\lambda}})}{\frac{j-r}{c}}}{-j+\lambda+r} - 1 = -1 + \frac{(-1+e^{\frac{j-r}{\lambda}})(-j+\lambda+r)}{j-r} \quad (26)$$

Dolgozatom részben épít Andor és Dülk (2013a) kutatására, mely kutatás középpontjában többek között ennek az esetnek a vizsgálata is szerepelt, ezért itt az általuk elért eredményeket mutatom be röviden.

Megállapították, hogy a pontos pénzáramprofillal számított jelenérték relatív hibája abszolút értékének lokális maximuma van, mely maximum közelítőleg 29,84%, és ez bármely várható élettartam esetén fennáll. (A globális maximum 100%, mivel a hiba abszolút értékét tekintik.) Tehát ha a diszkontráta meghaladja a növekedési ütemet ($r > j$), akkor a hiba mértéke nem haladja meg a 30%-ot, bár fontos megemlíteni, hogy a hiba nagysága a két tényező közti különbségre érzékenyen reagál. A $j=r$ esetben a számítás ezen formájában szintén matematikailag akadályba ütközik, így a kezdeti paraméterek módosításával külön kell vizsgálnom ezt az esetet. Ezzel egy másik fontos megállapításhoz juthatunk, – melyet Andor és Dülk (2013a) korábban szintén megállapított – hogy $j=r$ esetben a pontos pénzáramprofillal számított jelenérték és a pontos jelenérték megegyezik, azaz értelemszerűn ekkor a hiba nulla.

$$\varepsilon_{profil,j=r} = \frac{\hat{P}_{profil,j=r}}{P_{pontos,j=r}} - 1 = \frac{\frac{c}{\lambda}}{\frac{c}{\lambda}} - 1 = 0 \quad (27)$$

A későbbi összehasonlíthatóság kedvéért itt is nézzük meg a $j=0$ esetén kialakuló relatív hibát, melyhez a (8). és (16). egyenletre van szükség.

$$\varepsilon_{profil,j=0} = \frac{\hat{P}_{profil,j=0}}{P_{pontos,j=0}} - 1 = \frac{\frac{c-ce^{-\frac{r}{\lambda}}}{r}}{\frac{c}{\lambda+r}} - 1 = \frac{\lambda-e^{-\frac{r}{\lambda}}(\lambda+r)}{r} \quad (28)$$

Az összehasonlítás előtt már csak az általam definiált valószínűséggel súlyozott periódusvégi konvenció szerinti jelenérték-számítás relatív hibájának meghatározása van hátra.

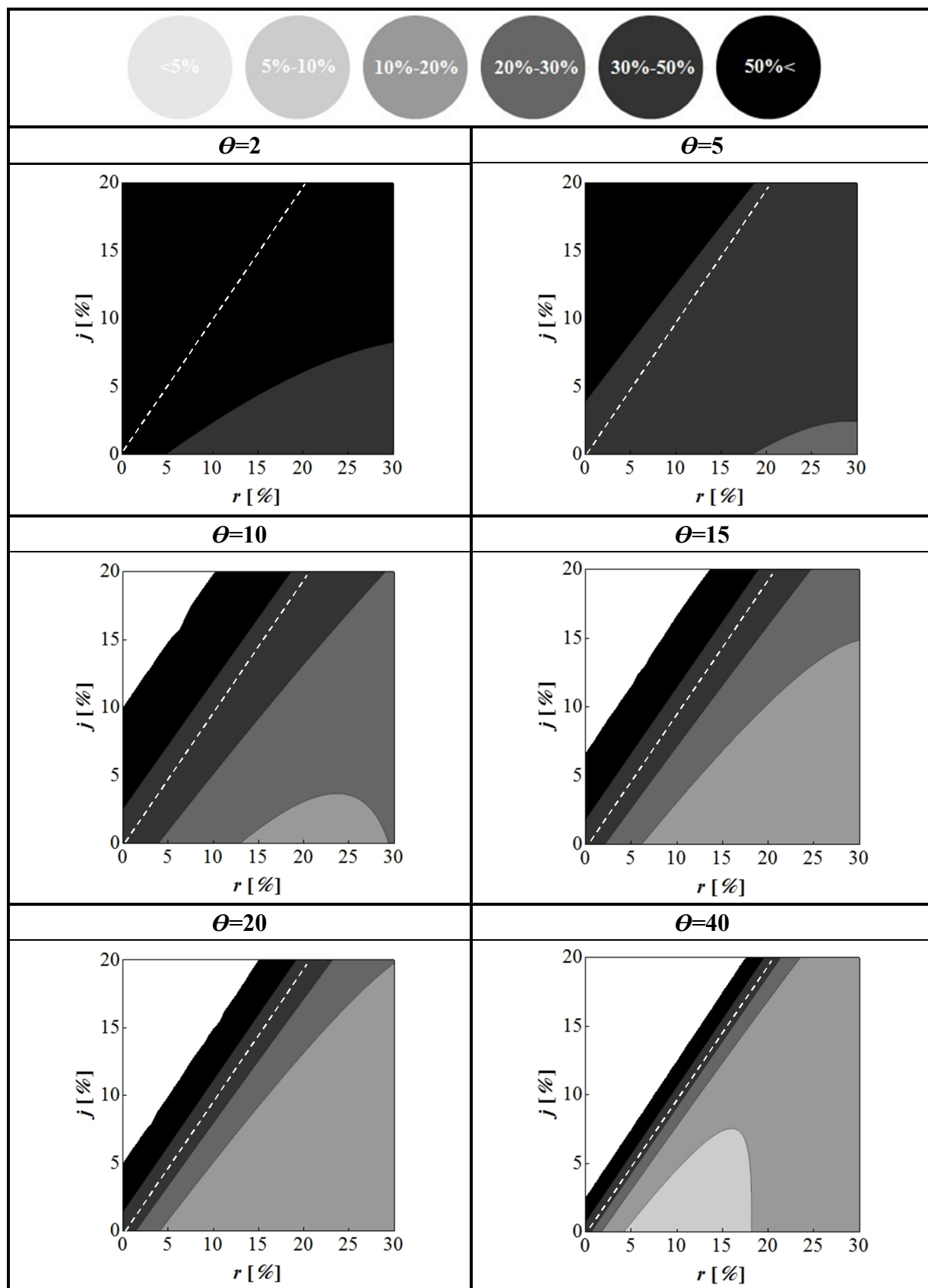
4.3. Hiba a valószínűségekkel súlyozott periódusvégi konvenció esetén

A valószínűségekkel súlyozott periódusvégi konvenció jelenértékének relatív hibája (a (7). és (19). egyenleteket felhasználva) pedig (ld. (29). egyenlet):

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{valószínűség}} &= \frac{\hat{P}_{\text{valószínűség}}}{P_{\text{pontos}}} - 1 = \frac{\frac{ce^{-\frac{\lambda+r}{\lambda}}(-1+e^j)(e^{j/\lambda}-e^{1+\frac{r}{\lambda}})}{(e^j-e^{\lambda+r})j}}{\frac{c}{-j+\lambda+r}} - 1 = \\ &= -1 + \frac{e^{-\frac{\lambda+r}{\lambda}}(-1+e^j)(e^{j/\lambda}-e^{1+\frac{r}{\lambda}})(-j+\lambda+r)}{(e^j-e^{\lambda+r})j}\end{aligned}\quad (29)$$

Szintén csak a szemléletesség kedvéért készült az alábbi 2. táblázat, melyen jól látható a hiba mértékének alakulása a három paraméter függvényében. A 2. táblázaton jelzett fehér szaggatott vonal (láthatósági okok miatt fekete helyett fehér színnel) és a színskála értelmezése az 1. táblázatnál megfogalmazottakkal teljesen megegyezik. A szaggatott vonalon a $j=r$ eset, alatta $j<r$, míg felette $j>r$ esetek találhatók. Az egyes ábrákon a fehér területek jelentése itt is a korábbi konvergencia kritérium teljesülésének hiányát jelenti, egésze pontosan azt jelzi, hogy a relatív hiba bázisát jelentő pontos jelenérték azon a tartományon nem létezik. A „tankönyvi” megközelítésnél a várható élettartam növekedésével (ceteris paribus) a hiba mértékének növekedése figyelhető meg az általam vizsgált szaggatott vonal alatti tartományon, míg itt a „valószínűségi” megközelítésnél pont a hiba mértékének csökkenése látható. Intuitíve végig gondolva ez egyáltalán nem meglepő. Minél hosszabb a várható élettartama az adott eszköznek, annál nagyobb bizonytalanság jellemzi azzal kapcsolatban, hogy vajon ténylegesen elé-e addig. (Ezt a gondolatot tükrözi Andor és Dülk (2013a, 73. o.) Taylor-soros közelítése, miszerint a várható élettartamig történő számítás és a pontos számítás közötti differencia növekszik az élettartam varianciájának növekedésével, mely variancia exponenciális eloszlás esetén a várható érték négyzete.) A megközelítés lényege pont az, hogy ezt a bizonytalanságot valamiképpen igyekszik figyelembe venni a számítás során, ezzel mintegy értelemszerűen csökkenteni a hiba nagyságát. Kis várható élettartam esetén láthatóan nagy hibát eredményez a megközelítés. A 2 éves várható élettartam esetén akár több mint 50%-os hiba is lehetséges, amelyről be kell látni, hogy teljesen elfogadhatatlan. Ha viszont elég hosszú várható élettartammal van dolgunk, a megközelítés csökkenti a hiba mértékét, hiszen a növekvő bizonytalanság fokozatosan beépül a számításba azzal, hogy a pénzáramok súlyozásra kerülnek az eszköz bizonytalan élettartamából fakadó valószínűségekkel.

2. táblázat: Adott r és j kombinációkhoz tartozó valószínűségi periódusvégi konvencióval a hiba mértéke a különböző (θ [év]) várható élettartamok szerint (Színskála értelmezésével)

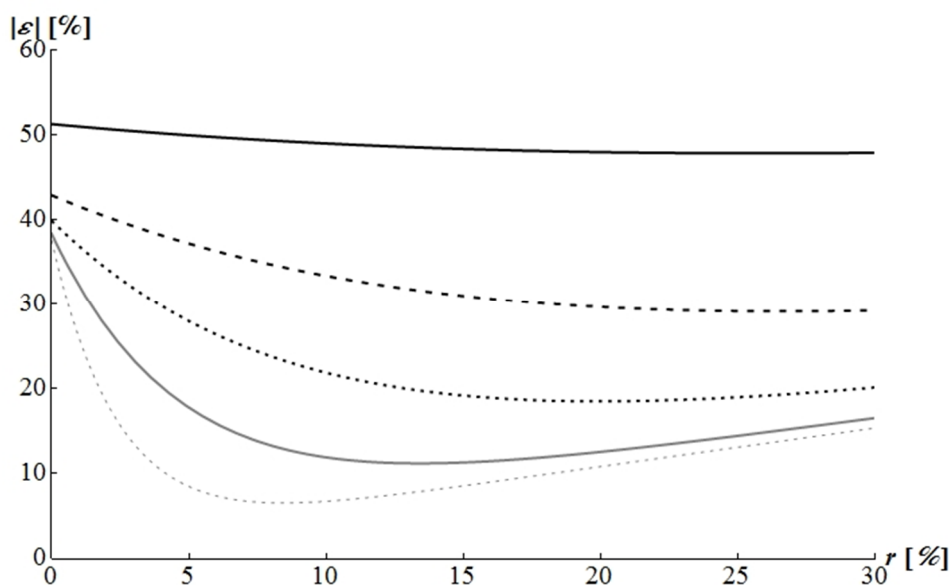


További következtetéseket majd csak a későbbi összehasonlítási eredményeket prezentáló fejezetben teszek.

Nézzük, hogy $j=0$ esetén hogyan alakul ennek a jelenérték-számításnak a relatív hibája (a (8). és (20). egyenletet használom fel korábbról):

$$\varepsilon_{\text{valószínűség}, j=0} = \frac{\hat{P}_{\text{valószínűség}, j=0}}{P_{\text{pontos}, j=0}} - 1 = \frac{\frac{C - Ce^{-\frac{\lambda+r}{\lambda}}}{1 - e^{-\lambda+r}}}{\frac{C}{\lambda+r}} - 1 = -1 + \frac{e^{-\frac{\lambda+r}{\lambda}}(-1 + e^{1+\frac{r}{\lambda}})(\lambda+r)}{-1 + e^{\lambda+r}} \quad (30)$$

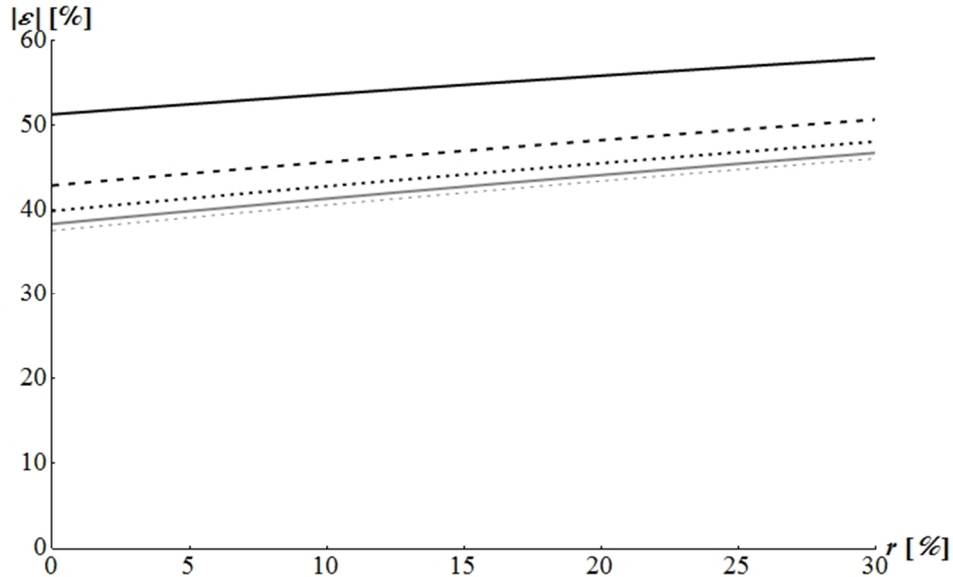
Belátható a 7. ábra alapján, hogy a $j=0$ fennállása esetén is felfedezhető a hiba mértékének csökkenő tendenciája a várható érték növekedésével (ceteris paribus) a vizsgált tartományon. Ez nem meglepő, hiszen $j < r$ eset a lesetéről van szó $j=0$ fennállásakor a nemnegatív diszkontráták feltételezése miatt.



7. ábra: A „valószínűségi” megközelítés relatív hibájának alakulása $j=0$ esetben a különböző várható élettartamokra: $\theta=2$ év (folytonos fekete), $\theta=5$ év (szaggatott), $\theta=10$ év (pontosított fekete), $\theta=20$ év (folytonos szürke), $\theta=40$ év (pontosított szürke) görbével jelölve

Beláttuk korábban, hogy $j=r$ esetben biztosan ez a megközelítés eredményezi a pontos jelenértéktől való legnagyobb eltérést, de a konzisztencia kedvéért lássuk, matematikailag milyen formában írható le a megközelítéshez tartozó relatív hiba:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{valószínűség},j=r} &= \frac{\hat{P}_{\text{valószínűség},j=r}}{P_{\text{pontos},j=r}} - 1 = \frac{\frac{ce^{-(2+\frac{1}{\lambda})r}(-1+e^r)(e^{(1+\frac{1}{\lambda})r}-e^{-1+r+\frac{r}{\lambda}})}{(-1+e^\lambda)r}}{\frac{c}{\lambda}} - 1 = \\ &= -1 + \frac{(-1+e)e^{-1-r}(-1+e^r)\lambda}{(-1+e^\lambda)r}\end{aligned}\quad (31)$$



8. ábra: A „valószínűségi” megközelítés relatív hibájának alakulása $j=r$ esetben a különböző várható élettartamokra: $\theta=2$ év (folytonos fekete), $\theta=5$ év (szaggatott), $\theta=10$ év (pontozott fekete), $\theta=20$ év (folytonos szürke), $\theta=40$ év (pontozott szürke) görbével jelölve

A 8. ábrán a „valószínűségi” megközelítés relatív hibájának alakulása látható $j=r$ esetben a különböző várható élettartamokra. A „valószínűségi” relatív hiba minimuma a vizsgált tartományon 36,7883%. Érezhető, hogy ez már önmagában is elég nagy.

Bemutatásra kerültek a megközelítések relatív hibáinak a növekedési ütem és a diszkontráta különböző viszonyaiból a vizsgált tartományon előálló esetei, a következő fejezet már a megközelítések összehasonlításáról szól.

5. ÖSSZEHASONLÍTÁS

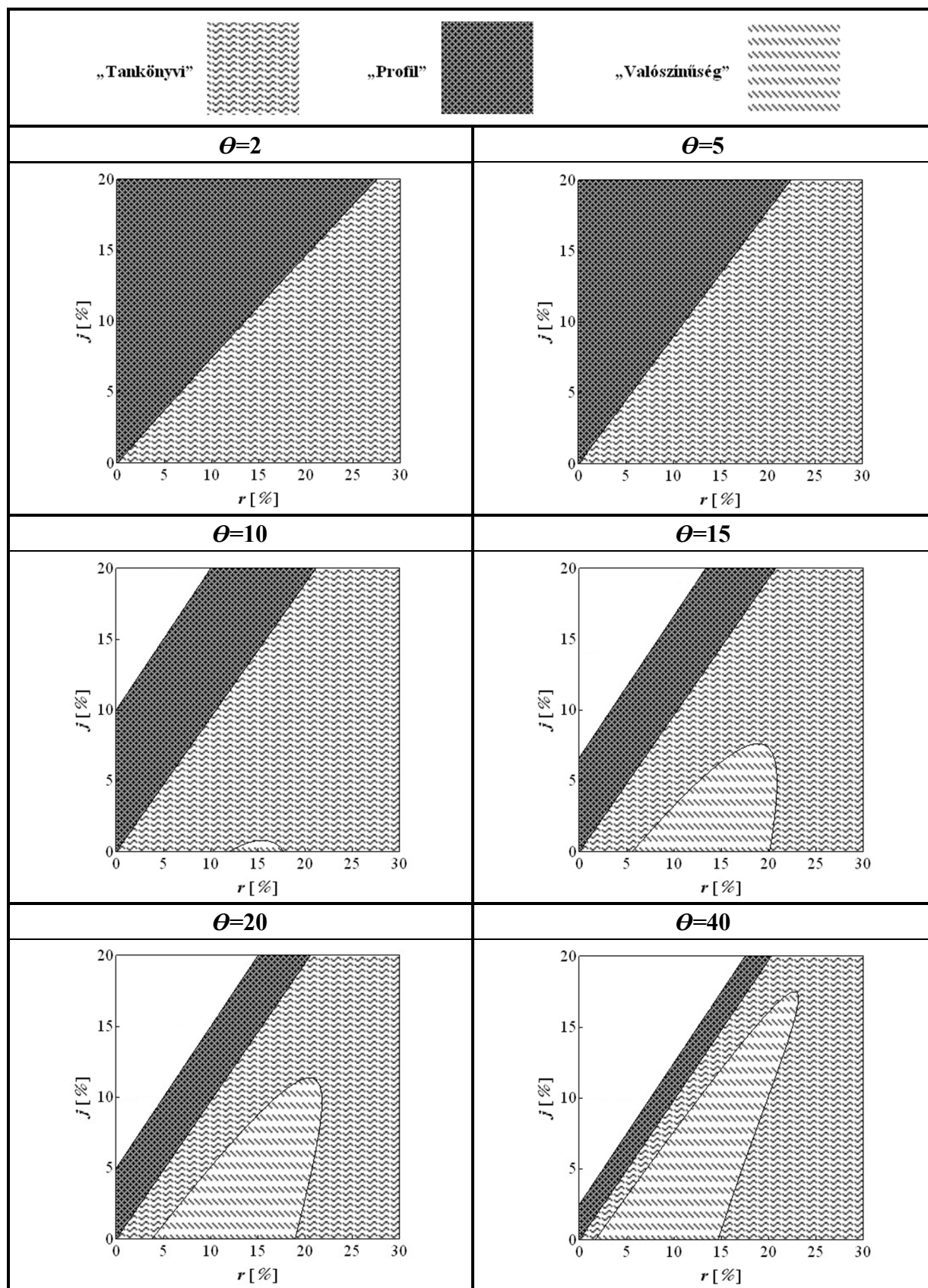
Elérkeztünk a kutatás korábban már sokszor emlegetett részéhez, a bemutatott megközelítések összehasonlításához. Az összehasonlítás elvégeztével levonható a következtetés arról, hogy a feltételezett pénzáramprofil és élettartam-eloszlás kombináció három bemeneti paraméterének mely tartományában lehet a „tankönyvi” megközelítés eredményének pontosságával megelégedni, és mikor kell törekedni a bonyolultabb eljárás használatára a pontosabb eredmény elérése érdekében. Célunk, hogy láthatóvá váljon az olvasó számára is, hogy az esetek pontos jelenértéktől való eltérései – az általam vizsgált tartományokon –, hogyan viszonyulnak egymáshoz. Az eddigiek során bemutatásra kerültek az összehasonlítandó esetek, a hozzájuk tartozó jelenértékek meghatározásának menetei, valamint a pontos jelenértékkel vett hányadosukon keresztül azok relatív hibái. Mostanra világossá vált, hogy a mindhárom esetet érintő összehasonlítást a $j < r$ és a $j = 0$ esetek fennállásán keresztül szükséges elvégezni, hiszen belátható a már említett korábbi kutatásból (ld. Andor, Dülk, 2013a), hogy $j > r$ esetben a pontos pénzáramprofillal számított jelenérték eredményezi a legjobb közelítést, míg $j = r$ esetben ennek a megközelítésnek éppen nulla a hibája, így értelemszerűen önmagában a pontos jelenértéket eredményezi. Érdemes azonban azon is elgondolkozni, hogy a „tankönyvi” és a „profil” megközelítés közti különbség mekkora a $j > r$ és $j = r$ tartományon. Elképzelhető, hogy elfogadható határon belül van a hibák abszolút különbsége és megelégedhetünk az egyszerűbb „tankönyvi” módszer eredményének pontosságával a nehezebben használható „profil” megközelítésének pontosabb eredménye helyett.

Az három esetet érintő összehasonlítást tehát a két reláció különválasztásával végezem el. Külön vizsgálom $j < r$ és $j = 0$ esetén a relatív hibák alakulását, és a relatív hibák egymással való viszonyát. Ezen kívül a $j > r$ és $j = r$ tartományon megvizsgálásra kerül a „tankönyvi” és a „profil” hiba közti abszolút különbség is.

5.1. Összehasonlítás a növekedési ütemet meghaladó diszkontráta esetén

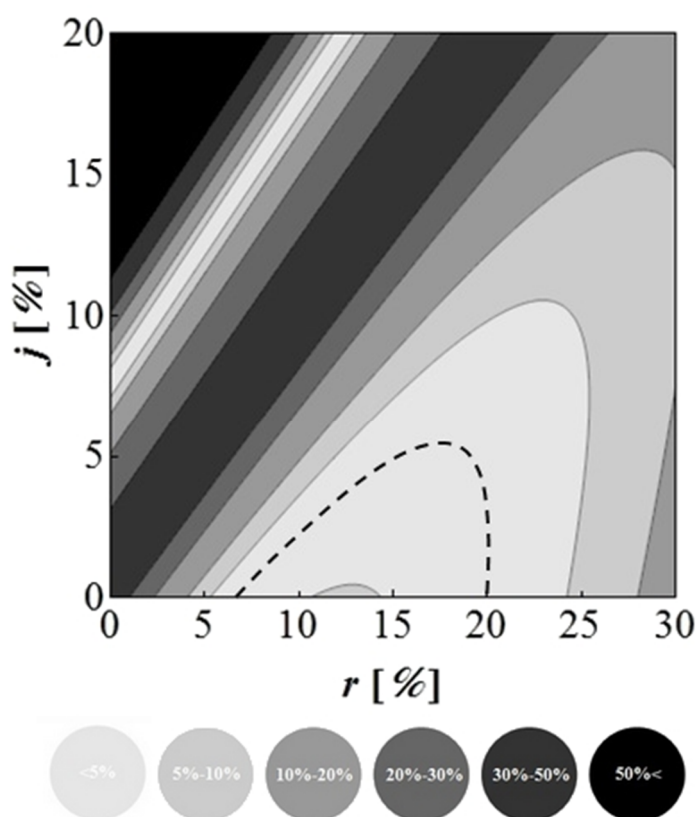
A növekedési ütemet meghaladó diszkontráta esetére az alábbi preferencia-tartomány diagramokat készítettem el (ld. 3. táblázat):

3. táblázat: Adott r és j kombinációra az összes eset közül a legkisebb hibát eredményező megközelítés a különböző (θ [év]) várható élettartamok szerint (Színskála értelmezésével)



Ezekon a diagramokon különböző mintázatokkal jelöltem a növekedési ütem és a diszkontráta azon tartományát, ahol az adott mintázattal jelölt eset hibája a legkisebb a vizsgált esetek közül. A 3. táblázat alapján tehát az a következtetés vonható le, hogy 10 éves várható élettartam alatt ezen a tartományon a „tankönyvi” megközelítés a legjobb. A várható élettartam növekedésével egyre nagyobb teret hódít a valószínűségi megközelítés, azonban érdemes megvizsgálni, hogy mekkora a két eset közti eltérés, hiszen ha ez nem számottevő, akkor érdemesebb továbbra is a „tankönyvi” megközelítést alkalmazni. A két eset közti eltérés alatt a relatív hibák abszolút értékeinek különbségének abszolút értékét értem, a nem számottevőség határát pedig 5%-ban húzom meg.

A korábban tett megállapításokat felidézve, miszerint a várható élettartam növekedése (*ceteris paribus*) a „tankönyvi” megközelítés hibáját növeli, míg a „valószínűségi” megközelítés hibáját csökkenti, meg lehet határozni azt a várható élettartamot, amelynél az említett hibadifferencia nem haladja meg a számottevőség határának tekintett 5%-ot. Ez a várható élettartam számításaink alapján körülbelül 13 év.

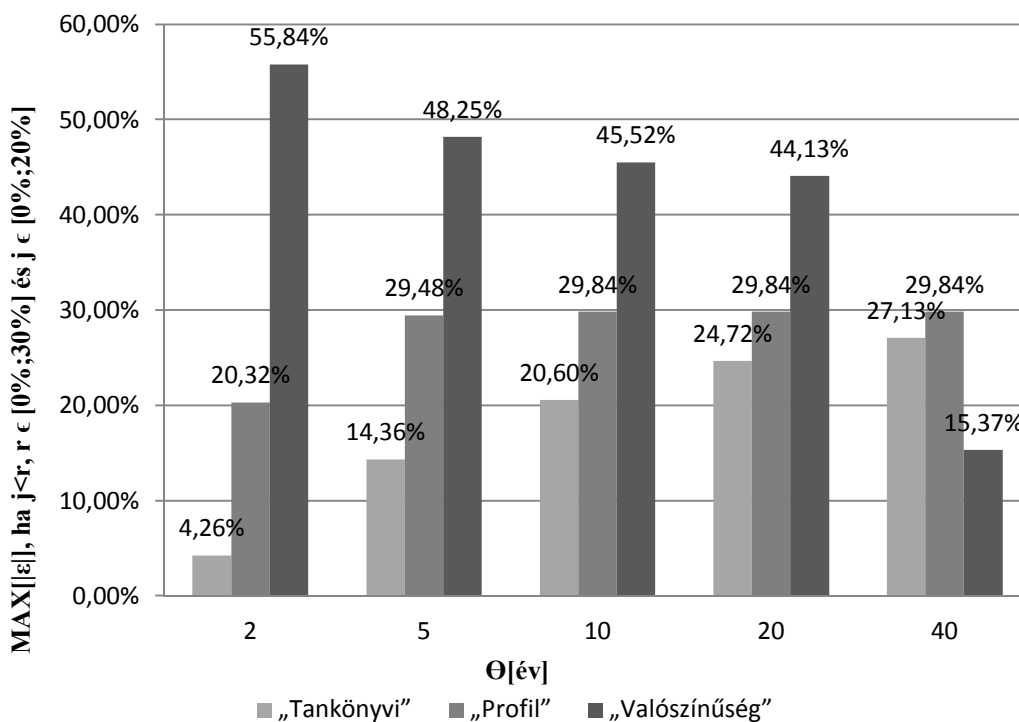


9. ábra: A „tankönyvi” és a „valószínűségi” megközelítések közti abszolút különbség 13 éves várható élettartam esetén ($\theta[\text{év}]=13$)

Ehhez a várható élettartamhoz tartozó, a hibák különbségét mutató diagram a 9. ábra. Az ábrán látható fekete szaggatott vonal jelzi azt a határt, amelynek belsejében a „valószínűségi” megközelítés a pontosabb, körülötte pedig a tankönyvi, de ahogy látható a vizsgált tartományon a kettő közti eltérés nem haladja meg az 5%-ot. A 10% és 15%-os diszkontráta között megjelenő kis sötétebb árnyalatú terület csak abból adódik, hogy a határvonal nem egészen pontosan 13 év (kicsivel kevesebb), ez csak egy kerekített érték. (Korábban feltételeztem, hogy a várható élettartam csak egész értékeket vehet fel.)

Összességében az látható tehát, hogy 13 évet meg nem haladó várható élettartamig megéri a „tankönyvi” megközelítést használni, hiszen ennek egyszerűségét kamatoztathatjuk úgy, hogy a pontosságról nagymértékben nem kell lemondani. A fennálló 5%-os eltérést még elfogadhatónak tekintem.

Másféle szemszögből is érdemes megvizsgálni a három megközelítést. Eddig a megközelítések hibájának minimumait hasonlítottam össze, a 10. ábra pedig a vizsgált tartományban a megközelítések hibájának maximumait ábrázolja. Látható, hogy 20 éves várható élettartamig (az ábrán nagy a lépték, ez valójában 23 éves várható élettartamig igaz, 24. évtől kezdve már nem igaz) a „tankönyvi” megközelítés adja a legkisebb maximális hibát.

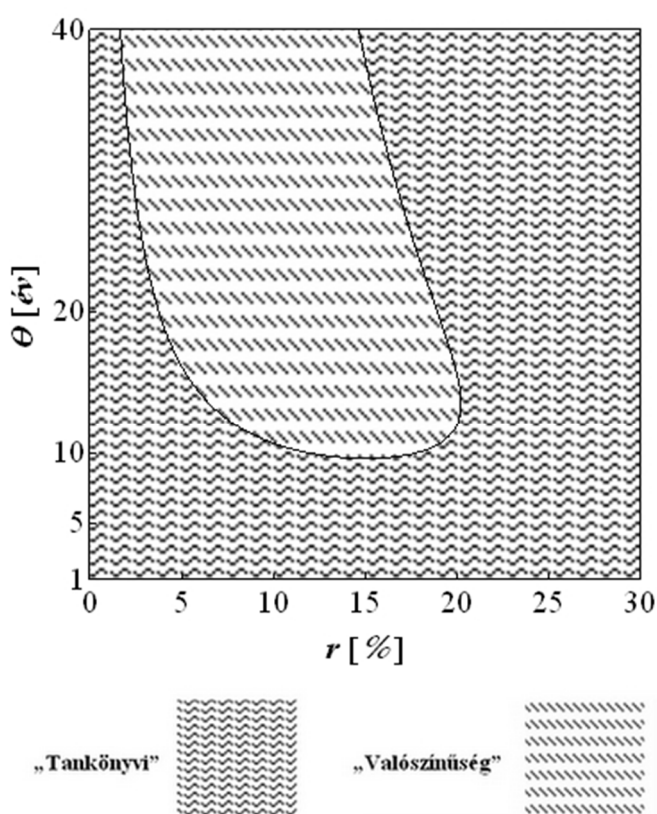


10. ábra: A három megközelítés abszolút értelmű relatív hibájának maximuma adott várható élettartamok szerint, ha $j < r$, $r \in [0\%;30\%]$ és $j \in [0\%;20\%]$

A $j=0$ eset, ahogyan már korábban is említettem, a $j < r$ eset egyik alesete, amely a nemnegatív diszkontráta feltételezéséből adódik. Ennek megvizsgálásával foglalkozom a következő alfejezetben.

5.1.1. Összehasonlítás nulla növekedési ütem esetén

Mivel a növekedési ütem nulla, a diagramokat a fennmaradó két paraméter függvényében egyszerre tudom ábrázolni.

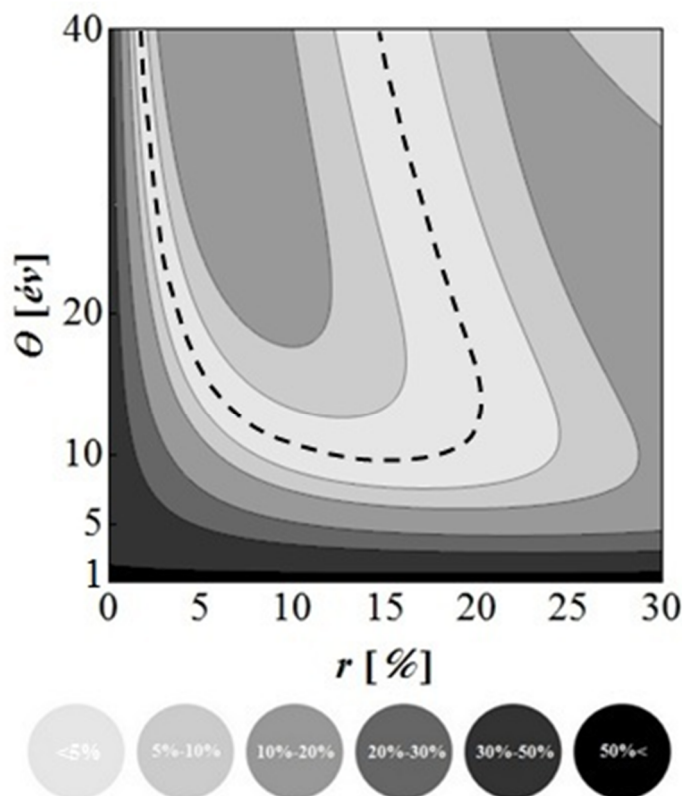


11. ábra: Adott θ és r kombinációhoz tartozó legpontosabb megközelítés $j=0$ esetben

A 11. ábrán látható egyrészt, hogy a „profil” megközelítés a vizsgált tartományon sehol nem eredményezi a legpontosabb közelítést, másrészt látható az is, hogy a $j < r$ esetben megállapítottak a $j=0$ alestre is érvényesek. A „tankönyvi” megközelítés dominál kis várható élettartamok esetén és a várható élettartam növekedésével (ceteris paribus) a „valószínűségi” megközelítés elkezd teret hódítani.

A $j < r$ esethez hasonlóan, itt is érdemes megvizsgálni a két megközelítés abszolút értelmű relatív hibája közti abszolút eltérést (ld. 12. ábra). A 12. ábrán jelzett fekete szaggatott vonal mutatja a határvonalat a két megközelítés között, a belsejében a „valószínűségi”, körülötte

pedig a „tankönyvi” adja a pontosabb közelítést. A legvilágosabb árnyalat 5% hibát jelöl, amelyet még elfogadhatónak tartok. Itt is érvényes a korábbi megállapítás, hogy a „tankönyvi” megközelítést pontossága szempontjából 13 éves várható élettartam alatt megéri használni, hiszen maximum 5%-nyival több hibát vét (nem számottevő).

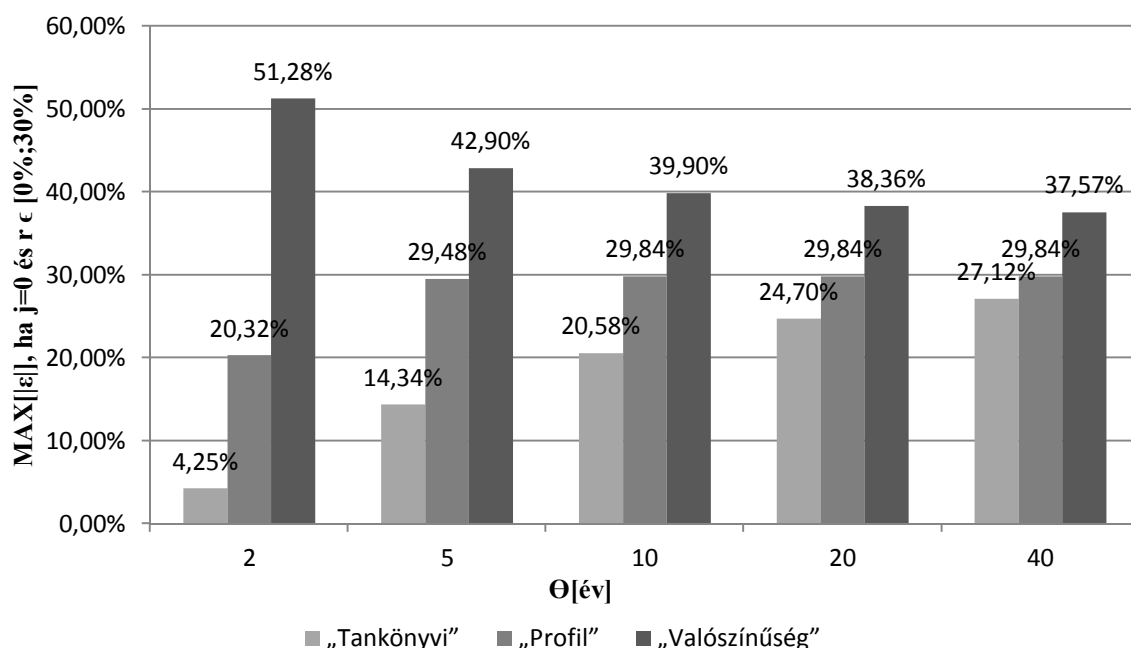


12. ábra: A „tankönyvi” és a „valószínűségi” abszolút értelmű relatívhibák közti abszolút különbség adott r és θ kombinációkra $j=0$ esetén

A $j < r$ esethez hasonlóan itt is érdemes megvizsgálni a három megközelítés relatív hibájának maximumát.

Az alábbi 13. ábrán látható, hogy a 10. ábrához hasonló a tendencia, azzal a kivétellel, hogy a „tankönyvi” megközelítés ezúttal 40 éves várható élettartam esetén is megelőzi a „valószínűségi” megközelítést a tartományban elérhető legkisebb maximális hiba szempontjából.

Egybevéve a két relációt elmondható, hogy a vizsgált tartományon a legkisebb maximális relatív hiba 40 éves várható élettartamig a „tankönyvi” megközelítéshez tartozik. Ez egy igazán erős megállapítás.



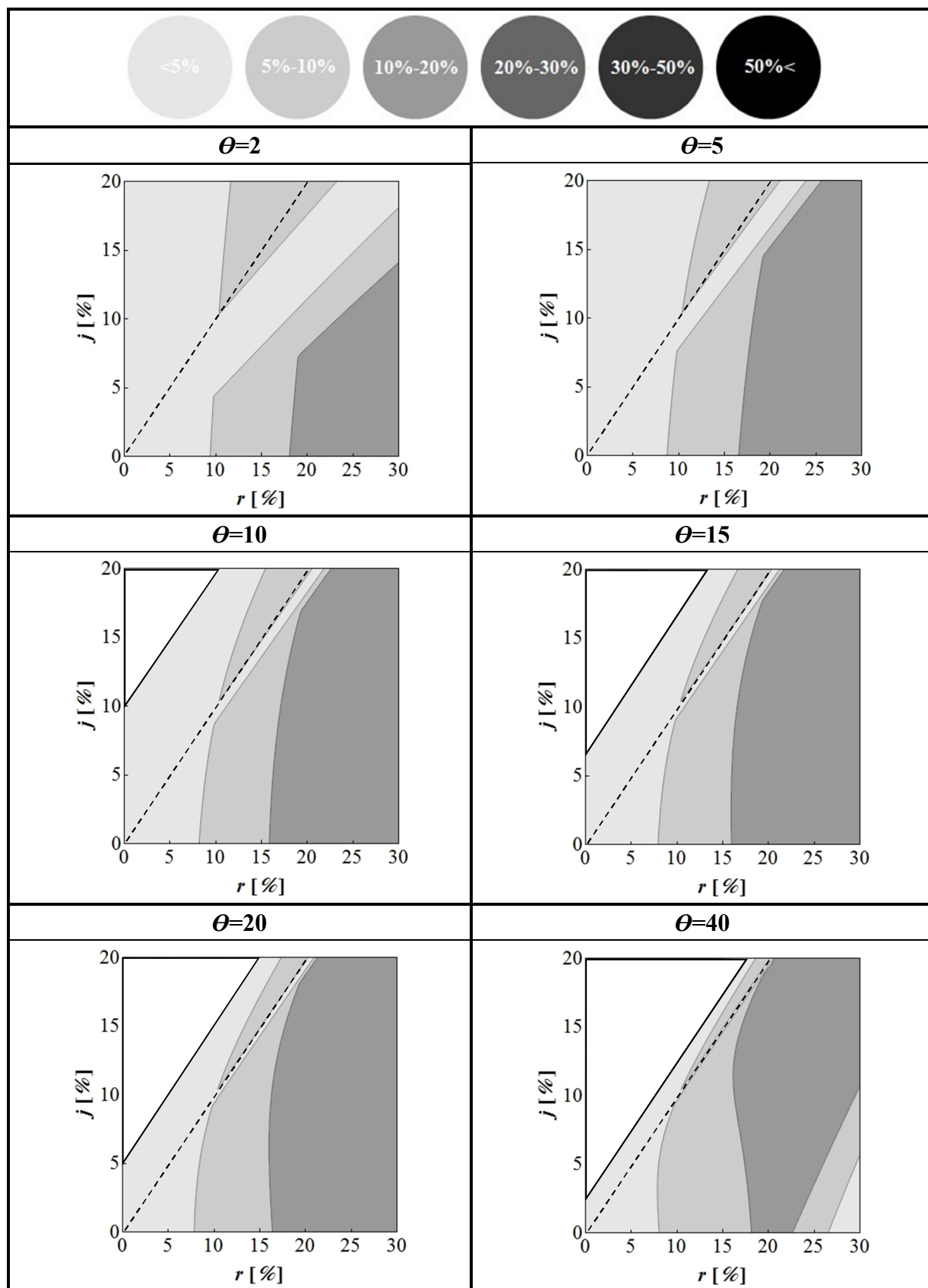
13. ábra: Az esetek maximális abszolút értelmű relatív hibája különböző várható élettartamokra (Θ [év]), amikor $j=0$ és $r \in [0\%;30\%]$ vizsgált tartománynak

5.2. Összehasonlítás a diszkontrátát meghaladó növekedési ütem esetén

A $j > r$ esetben (azon tartományon, ahol a konvergencia kritérium teljesül) a megközelítésekhez tartozó relatív hibafüggvények megegyeznek a $j < r$ esethez tartozókkal. Korábbi kutatások alapján belátható, hogy a tartományon a pontos pénzáramprofillal számított jelenérték adta a legjobb közelítést. Ehhez képest a „tankönyvi” megközelítés jobban alulbecsül, és a „valószínűségi” pedig még a „tankönyvi” megközelítésnél is jobban alulbecsül. Ebből adódik, hogy a továbbiakban csak a „profil” és a „tankönyvi” jelenérték-számítás relatív hibáját kell összevetnem egymással.

A két megközelítés adott várható élettartamok szerinti abszolút relatív hibájának abszolút különbségét mutatja a 4. táblázat. A fekete szaggatott vonal a $j=r$ eseteket ábrázolja, tehát az e feletti ($j > r$) tartománnyal kell foglalkozni. Nem az egész $j > r$ tartományt vizsgálom, hiszen 4. táblázaton látható fehér terület a konvergencia kritérium teljesülésének hiányát jelenti (a pontos jelenérték itt nem létezik). Így a vizsgálandó tartomány leszűkül a folytonos és szaggatott fekete vonalak közötti tartományra. A színskála értelmezéséből látható, hogy ezen tartomány nagy részén 5% alatti a két megközelítés közti hibadifferencia. Ahhoz, hogy általánosítani tudjam a megállapítást, ki kell kötni, hogy a növekedési ütem nem haladja meg a 10%-ot. Ha a gyakorlatot nézzük, ez a kikötés az esetek jelentős részében helytállónak mondható.

4. táblázat: Adott r és j kombinációkhoz tartozó „tankönyvi” és „profil” hiba közti abszolút különbség $j > r$ tartományra koncentrálva a különböző (θ [év]) várható élettartamok szerint (Színskála értelmezésével)



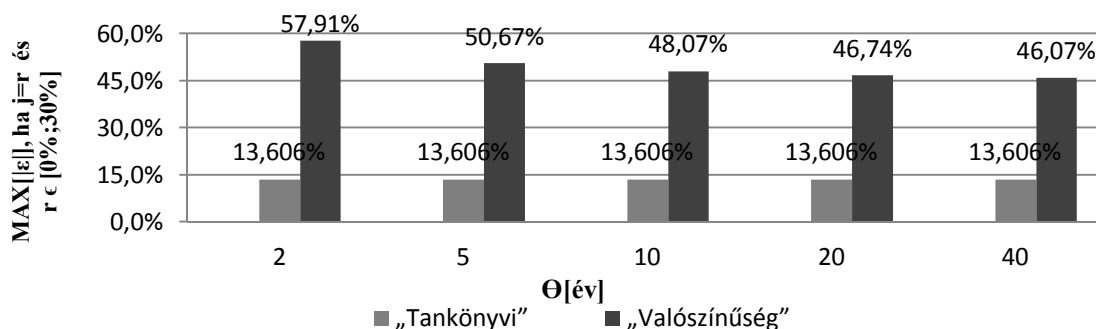
Tehát, ha $j \in [0\%;10\%]$ és a növekedési ütem nagyobb, mint a nemnegatív diszkontráta, akkor a „tankönyvi” megközelítés pontosság szempontjából használható, és nem kell a bonyolultabb pontos pénzáramprofillal számított jelenértékkel bajlódni. Ekkora a két megközelítés közti hibadifferencia ugyanis nem haladja meg az elfogadhatónak tartott 5%-ot.

A hibamaximumokról a tartományra vonatkozó konvergencia kritériumok miatt használható következtetések nem vonhatóak le (például a hiba sok esetben eléri az elméleti 100%-os határt), ezért ezek vizsgálatától eltekintek.

5.3. Összehasonlítás növekedési ütemmel megegyező diszkontráta esetben

Ahogy már korábban megállapításra került, $j=r$ esetben a pontos pénzáramprofillal számított jelenérték relatív hibája éppen nulla. Nincs jelentősége abszolút különbségeket vizsgálni a másik két eset kapcsán, hiszen értelemszerűen a megközelítések saját hibája lesz a különbség tekintve, hogy a „profil” megközelítés ebben az esetben éppen a pontos jelenértéket eredményezi. Sőt az is tudható, hogy ilyenkor a „tankönyvi” megközelítés mindig jobb közelítést ad a „valószínűségi” megközelítésnél. A „tankönyvi” megközelítés relatív hibáját tárgyaló fejezetnél megállapítottam, hogy $j=r$ esetben a hiba mértéke független a várható élettartamtól, és a vizsgált tartományon 13,606% a maximuma. A 6. ábrán került bemutatásra a függvény jellege. Összességében megállapítható, hogy ha $r \in [0\%;10\%]$ és éppen megegyezik a növekedési ütemmel, akkor a „tankönyvi” hiba nem haladja meg az 5%-ot, tehát használható a „tankönyvi” megközelítés a „profil” megközelítés helyett.

A hibamaximumokat tekintve megállapítható, hogy a „profil” megközelítés maximum hibája nulla, hiszen teljesen pontos. A „tankönyvi” megközelítés maximum hibája a vizsgált tartományon a várható élettartamtól függetlenül 13,606%, míg a „valószínűségi” megközelítés enyhén csökkenő tendenciát mutat, de még 40 éves várható élettartamnál is 46,07%.



14. ábra: Az esetek maximális abszolút értelmű relatív hibája különböző várható élettartamokra (Θ [év]), amikor $j=r$ és $r \in [0\%;30\%]$ vizsgált tartománynak

6. ÖSSZEFOGLALÁS

„A két hiba együtt jobb?” – fogalmazódik meg a gondolat a dolgozat címében. Arra a kérdésre kerestem a választ, hogy érdemes-e törekedni a DCF alapú értékelés „tankönyvi” megközelítése esetén tett egyszerűsítő feltételek (periódusvégi konvenció, pusztán a várható élettartamig történő számítás) feloldására, ezáltal egy vélhetően jobb közelítést adva az elméletileg pontos jelenértékre, vagy a „tankönyvi” megközelítés kellően pontosnak bizonyul és egyszerűségét kamatoztathatjuk jelentősebb hatékonyságromlás nélkül. A cél elérése érdekében három megközelítés került összehasonlításra: a „tankönyvi”, a „profil” (periódusvégi konvenció feloldása céljából), és a „valószínűségi” (az élettartammal kapcsolatos bizonytalanság figyelembevétele céljából). A kutatás során feltételezést tettem a pénzáramprofil és élettartam valószínűség-eloszlás kombinációjára, valamint a bemeneti paraméterek (növekedési ütem (j), diszkontráta (r), várható élettartam (θ)) megvizsgált tartományára. Az elemzés elvégzéséhez a gyakorlatban előforduló legjellemzőbbnek tekinthető kombinációt választottam, amely a folytonos, exponenciálisan növekvő/csökkenő pénzáramprofil exponenciális eloszlású élettartammal. A paraméterek tartományát pedig a gyakorlatban előforduló releváns eseteket szem előtt tartva határoztam meg, így $j \in [0\%;20\%]$ és $r \in [0\%;30\%]$. A várható élettartamról azt feltételeztem, hogy egész értékeket vesz fel, és értékét 40 évnél maximáltam. A matematikai korrektség és az eredmények jól kezelhetősége végett külön kellett megvizsgálni a $j < r$, $j = 0$, $j > r$ és $j = r$ eseteket, mind a számítások, mind az összehasonlítás során. Így értelemszerűen az eredményeink is ilyen formában álltak elő. Az összehasonlításhoz a relatív hibát használtam, mely a közelítő és pontos jelenérték hányadosaként adódik.

A vizsgálat eredményei a következők. A növekedési ütemet meghaladó diszkontráta ($j < r$) esetén, 13 évnél nem nagyobb várható élettartamig a „tankönyvi” eljárás javasolt, mert a vizsgált megközelítések közül ez a legpontosabb, illetve pontosságban nem marad el számottevően a közülük legpontosabbtól (azaz a hibák közti különbség kisebb, mint 5%). A 13 évet meghaladó várható élettartamra a „valószínűségi” megközelítés kezd egyre preferáltabb lenni. A relatív hiba abszolút értékének maximumát tekintve, 23 éves várható élettartamig a „tankönyvi” megközelítés adja a legkisebb maximális hibát. A vizsgálat szempontjából a nemnegatív diszkontráta feltételezéséből adódóan a $j < r$ esetbe tartozik a nulla növekedési ütem ($j = 0$) esete, melyre a következtetések ugyanazok kivéve, hogy a

vizsgált tartományon még 40 éves várható élettartam esetén is a „tankönyvi” megközelítés eredményezi a legkisebb maximális relatív hibát.

A diszkontrátával megegyező vagy azt meghaladó növekedési ütem ($j=r$ és $j>r$, tehát $j\geq r$) esetén, a „profil” megközelítés a legpontosabb, pontosságban őt követi a „tankönyvi” megközelítés, majd a „valószínűségi” megközelítés. Viszont 10%-ot meg nem haladó növekedési ütemig a „tankönyvi” megközelítés és a „profil” megközelítés hibája közti különbség nem számottevő (kisebb, mint 5%), tehát egyszerűsége miatt a „tankönyvi” megközelítés javasolt.

Összességében az általam tett feltételezések fényében a három megközelítés pontosságát összevetve megállapítható, hogy a gyakorlatban jellemzően előforduló esetek egy jelentős részében a „tankönyvi” eljáráshoz képest nem érdemes törekedni sem a pontos pénzáramprofil, sem az élettartammal kapcsolatos bizonytalanság figyelembevételére.

7. IRODALOMJEGYZÉK

- Andor G., Dülk M. (2013a): Present value under uncertain asset life: an evaluation of relative error, *Periodica Polytechnica – Social and Management Sciences*, 21/2, pp. 71-82.
- Andor G., Dülk M. (2013b): Harmonic Mean as an Approximation for Discounting Intraproduct Cash Flows, *The Engineering Economist*, 58/1, pp. 3-18.
- Andor G., Dülk M. (2014): Cost of capital estimation for energy efficiency projects through a cash flow beta approach, *Energy Efficiency*, DOI:10.1007/s12053-014-9298-y
- Chen K. C. W., Manes R. P. (1986): A note on bias in capital budgeting introduced by stochastic life, *The Engineering Economist*, 31/2, pp. 165-174.
- Damodaran A. (2006): *Befektetések értékelése*, Panem Kiadó, Budapest
- Dülk M. (2013): *Módszertani továbbfejlesztések a gazdasági elemzésekben*, Tézisfüzet, elérhetőség/hozzáférés:http://www.omikk.bme.hu/collections/phd/Gazdasag_es_Tarsadalomtudomanyi_Kar/2013/Dulk_Marcell/tezis_hun.pdf, [olvasva: 2014.10.21.]
- Eschenbach T. G. (2011): *Engineering economy: Applying theory to practice*, Oxford University Press, New York, NY, third edition.
- Fleischer G. A., Mason A. K., Zhou X. Y. (1998): Technical note - The mid-period and other approximations of relative error, *The Engineering Economist*, 43/4, pp. 369-377.
- Horvath P. A. (1995): Compounding/discounting in continuous time, *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 35/3 (1995), pp. 315-325.
- Kövesi J., Erdei J., Nagy J. B., Tóth Zs. E., Jónás T. (2012): *Gazdaságstatisztika*, Oktatási segédanyag, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
- Lawrence E. C. (2009): Biases in mid-year and end-of-year conventions in discounted cash flow models for corporate valuations, *Journal of Legal Economics*, 16/1, pp. 1-15.
- Lohmann J. R., Oakford R. V. (1984): Errors in present worth evaluations attributable to the end-of-year and mid-year cash flow conventions, *The Engineering Economist*, 29/4, pp. 303-309.
- Park C. S., Sharp-Bette G. P. (1990): *Advanced engineering economics*, John Wiley & Sons, New York, NY

Remer D. S., Tu J. C., Carson D. E., Ganiy S. A. (1984): The state of the art of present worth analysis of cash flow distributions, *Engineering Cost and Production Economics*, 7/4, pp. 257-278.

Tufekci S., Young D. B. (1987): Moments of the present worths of general probabilistic cash flows under random timing, *The Engineering Economist*, 32/4, pp. 303-336.

Van Horne J. C. (1972): Capital budgeting under conditions of uncertainty as to project life, *The Engineering Economist*, 17/3, pp. 189-199.

Zinn C. D., Lesso W. G., Motazed B. (1977): A probabilistic approach to risk analysis in capital investment projects, *The Engineering Economist*, 22/4, pp. 239-260.