

OTDK-DOLGOZAT

2015

**KOCKÁZATMENTES HOZAM? A MAGYAR ZÉRÓ-KUPON
HOZAMGÖRBE ILLESZTÉSE ÉS ELEMZÉSE**

**RISKFREE YIELD? ESTIMATING AND ANALYSING THE
HUNGARIAN ZERO-COUPON YIELD CURVE**

Kézirat lezárva: 2015. január 03.

TARTALOMJEGYZÉK

1. BEVEZETÉS	1
2. KÖTVÉNY MATEMATIKA	2
3. HOZAMGÖRBE MODELLEK	4
3.1. KÖBÖS SPLINE MÓDSZER	5
3.2. NELSON-SIEGEL-SVENSSON MODELLCSALÁD (NSS)	7
3.2.1. Nelson-Siegel modell (NS)	8
3.2.2. Svensson modell	9
3.2.3. Legendre polinom	10
4. EMPIRIKUS HOZAMGÖRBÉK ILLESZTÉSE	12
4.1. OPTIMALIZÁLÁSI ALAPFELADAT	12
4.2. SPLINE ILLESZTÉS	13
4.3. ÁLTALÁNOS FELTÉTELEK A NSS MODELLTÍPUSOKHOZ	14
4.3.1. Diebold-Li módszertan – fix belső paraméter	15
4.3.2. Változó belső paraméterrel rendelkező NSS modellek	15
4.3.3. Kezdőértékek meghatározása	17
4.4. OPTIMALIZÁLÓ ALGORITMUSOK	18
4.4.1. Gradiens alapú algoritmusok	20
4.4.2. Direct-Search (DS)	21
4.4.3. Globális optimalizáció	22
4.5. OPTIMALIZÁLÁS TELJESÍTMÉNYÉT MÉRŐ MUTATÓK	26
5. ADATOK ÉS IMPLEMENTÁCIÓ	27
5.1. A HOZAMGÖRBE ILLESZTÉS EREDMÉNYEINEK RÉSZLETES BEMUTATÁSA	29
5.2. MÓDSZEREKET ÖSSZEHASONLÍTÓ MÉRŐSZÁMOK	34
6. GENERAL AUTOREGRESSIVE SCORE MODELL	37
7. ÖSSZEFOGLALÁS	44

ÁBRÁK JEGYZÉKE

1.	Nelson-Siegel modell loadingjainak értékei a lejárat függvényében	8
2.	Svensson modell loadingjainak értékei a lejárat függvényében	10
3.	Legendre polinomok	11
4.	Legendre ortogonális bázisfüggvények	11
5.	Svensson függvény optimalizálási tere különböző λ -ra	16
6.	Az állampapírok lejáratának szerkezete 2001-2014 között	28
7.	Átlagos árhoz való illesztés eredménye 2002. Január 2.-án	29
8.	Átlagos árhoz való illesztés eredménye 2008. Október 20.-án	30
9.	Átlagos árhoz való illesztés eredménye 2014. Július 29.-én	30
10.	Napi hibastatisztikák értékei: Köbös Spline (OLS) és Svensson (GA)	31
11.	Állampapírok RMSE értékei	32
12.	Teljes idősorra vizsgált árakhoz és hozamokhoz tartozó hibák eloszlásai . .	33
13.	Zéró-kupon hozamgörbék idősorai	33
14.	Dinamikus Nelson-Siegel modell paramétereinek volatiliása (Genetikus Al- goritmusból)	39
15.	Illesztett GAS(2,1) modell DGP elméleti és empirikus eloszlása	41
16.	Feltételes szórások alakulása az időben	42
17.	Paraméterek alakulásának kockázati értékei (2.5% és 97.5%)	42
18.	Nelson-Siegel hozamgörbe VaR: 2008. Október 20.	43

TÁBLÁZATOK JEGYZÉKE

1.	Felhasznált algoritmusok osztályzása	19
2.	Az adott évben felhasznált kötvények lejáratuk szerint	28
3.	Teljes időszorra vett hibák eloszlásának statisztikája és Jarque-Bera teszt értékei	32
4.	Teljes mintából az árra számított ARMSE és AMAE	35
5.	Teljes mintából az hozamokra visszaszámított ARMSE és AMAE	35
6.	Kötvények illesztésénél elkövetett összes hiba leíró statisztikája	36
7.	Egy illesztés átlagos számítási ideje (mp) és konvergenciák hiánya (db - 3380-ból)	37
8.	GAS(2,1) modellek eredményei	40
9.	GAS(2,1) modellek innovációs folyamatainak leíró statisztikái és kiszélesí- tett Pearson tesztje	41

1. BEVEZETÉS

Az állampapírokból számított hozamgörbe a lejáratidő hossza és a hozamok közötti direkt kapcsolatot írja le a diszkont függvény segítségével. A megfelelő függvénykapcsolat és paraméterek identifikálása régóta foglalkoztatja a közgazdászokat. (McCulloch (1971), Vasicek (1977), Nelson és Siegel (1987), Anderson et al. (1996), Bliss (1997b), Ferstl és Hayden (2010)) Megbízható és robosztus illesztéssel, a kapott zéró-kupon hozamok alapján szolgálhatnak a későbbi kockázatkezelési vagy monetáris politikát megalapozó döntésekhez. Bár a zéró-kupon hozamokat több országban is, a kötvény kuponok és tőke külön kereskedésének köszönhetően direkt módon is számítható, a magyar piacon ilyen opció a fix kamatozású forint állampapír kötvények esetében nincsen. A kuponfizetési effektus az éven túl lejáró állampapírok esetében nehézkessé teszi a hozamgörbe számítását és a nem-lineáris kapcsolatok megléte miatt további problémákat kell megoldani az illesztések során. (Manousopoulos és Michalopoulos (2009), Gilli et al. (2010)) Jelen tanulmány ezen nem-lineáris kapcsolatokat térképezi fel és oldja meg különböző nem-lineáris optimalizációs eljárásokkal és saját fejlesztésű hosszmetzeti szempontokat figyelembe vevő kezdőpont kereső algoritmussal. Megfelelő illesztési módszerrel, nem csak az egy adott napra illesztett hozamgörbe illesztésének megfelelő pontosságát lehetséges elérni, hanem megfelelő modell alkalmazásával a napi illesztések idősorosan is értelmezhetővé válnak.

A tanulmány először áttekinti a szükséges fogalmakat, amely a hozamgörbe felírásához szükséges. A második fejezetben bemutatja a felhasznált empirikus hozamgörbe modellek közül a jelenleg Államadósság Kezelő Központ által használt köbös-Spline illesztést, majd a Nelson-Siegel-Svensson model családba tartozó takarékos, exponenciális alapú polinomokat felhasználó modellek közül hármat. A harmadik fejezet az optimalizálással kapcsolatos problémákat és megoldáshoz felhasznált algoritmusokat mutatja be, amely kulcsfontosságú a kívánt tulajdonságok eléréséhez (információ tömörítése, pontosság és az idősoros tulajdonság). A negyedik fejezet a felhasznált adatokat és a különböző modellekkel és optimalizáló algoritmusokkal kapott eredményeket mutatja be. Az ötödik fejezet a legeredményesebb - paraméterekben takarékos modellt - a Nelson-Siegel Genetikus Algoritmussal illesztett paramétereket elemzi a General Autoregressive Score (GAS) modell segítségével.

2. KÖTVÉNY MATEMATIKA

A hozamgörbe és a hozzátartozó számítási módszerek mikéntje széles körben vizsgált. A jelen részben csak azokat az alapkoncepciókat kerülnek bemutatásra, amelyek elkerülhetetlenek az empirikus hozamgörbe illesztésének megértéséhez. További kiváló részletes elemzéseket írnak le erről (Anderson et al. (1996), Bliss (1997b), Bliss (1997a), Csajbok (1998), Bolder és Stréliski (1999))

Egy kötvény ára adott aktuális ára megegyezik a jövőbeni pénzáramok jelenértékével:

$$P_t = \sum_{i=1}^m C_i \delta(\tau) \quad (1)$$

Ahol:

P_t : kötvény aktuális piaci ára ¹

$i = 1, \dots, m$: a papír hátralévő pénzáramai

$\delta(\tau)$ diszkont függvény, ahol τ a lejáratok vektora (évben)

C_i : i -edik cash-flow értéke, ahol a C_m az utolsó cash-flow, amely a névértéket (és általában az aznapra eső kamatkifizetést) tartalmazza

A diszkont függvényt a következő összefüggéssel kapjuk meg:

$$\delta(\tau) = \frac{1}{(1 + z(\tau))^\tau} \quad (2)$$

Ahol $z(\tau)$ a zéró-kupon hozam a τ időpontban. A lejáratig számított hozam a (*yield-to-maturity*, továbbiakban YTM) az egyszeri hozam, amely diszkontálja a jövőbeni hozamokat a jelenbeli értéknek megfelelően:

$$P = \sum_{i=1}^m \frac{C_i}{(1 + y)^{\tau_i}} \quad (3)$$

τ_i : években számított lejárat a i -edik cash-flownak

A zéró-kupon kötvények olyan kuponfizetéssel nem rendelkező papírok, amelyek esetében a zéró-kupon hozam és az YTM megegyezik. Ellenkező esetben, amikor az adott kötvény kuponfizetéssel rendelkezik, a két hozam nem egyenlő, de nem-lineáris módon megfeleltethető egymásnak:

$$P = \sum_{i=1}^m \frac{C_i}{(1 + z_i)^{\tau_i}} = \sum_{i=1}^m \frac{C_i}{(1 + y)^{\tau_i}} \quad (4)$$

¹Következőkben már nem írjuk ki, de mindig az aktuális időpontra gondolunk $P = P_t$

A különbség, a hozamokban jelenik meg, míg a zéró-kupon hozamok lejáratától függenek, addig az YTM az adott T időpontban, egy átlagos kamatlábat határoz meg. Az egyenletnek nincsen analitikus megoldása csak numerikus. A megfelelő összefüggés megteremtése az egy napon meglévő papírok ugyan azon zéró-kupon hozamgörbéjével való leírásával, a tanulmány egyik központi problémája, amelyet a későbbiekben bemutatandó különböző optimalizáló algoritmusokkal végeztem el. A különböző módszerek eltérő stratégiával igyekeznek majd megoldani az egyenletet. Általában a diszkont függvény változtatásával közelítjük a zéró-kupon hozamgörbét a rendelkezésre álló árakhoz vagy YTM-hez. Az empirikusan később előállított diszkont függvény segítségével megkapható a forward hozamgörbe is:

$$r_i = \frac{\delta(\tau_{i-1}) - \delta(\tau_i)}{\delta(\tau_i)} \quad (5)$$

A Nelson-Siegel modell (Nelson és Siegel (1987)), a forward hozamgörbéből kiindulva írja fel a zéró-kupon hozamgörbét (inverz gondolatmenetet alkalmazva) így bizonyos analitikus tulajdonságoknak megfelel a felírt hozamgörbe (pl.: pozitív forward hozamgörbe) A szakirodalom sokszor folytonos közelítéssel él a diszkont függvényre, így további előnyös tulajdonságokat biztosítva (folytonosság, nem-negativitás):

$$\delta(\tau) = e^{-\tau z(\tau)} \quad (6)$$

A közelítés segítségével folytonos forward- és zéró-kupon hozamgörbét is kapunk:

$$\begin{aligned} r(\tau) &= \frac{-\delta'(\tau)}{\delta(\tau)} \\ z(m) &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau r(u) du \end{aligned} \quad (7)$$

Ezzel feltételezve, hogy $\delta(0) = 1$ A folytonos zéró-kupon hozamgörbét a következő összefüggéssel kapható meg (Részletes levezetés lásd pl.: Stander (2005)):

$$P = \sum_{i=1}^m C_i e^{-\tau z(\tau)} \quad (8)$$

A hozamgörbe illesztésnél egy további fogalmat kell bevezetni, a Macaulay durációt, amelyet a kötvények pénzáramlásainak súlyozására alkalmaznak. A Macaulay duráció mind-egyik papírnak a cash-flow jelenértékét és a cash-flow lejáratának (futamidő) szorzatát elosztja a papír lejárat hozamából számított jelenértékével, majd minden egyes lejáratához

tartozó pénzáramra kiszámított értéket összeadja. A számítás feltételezi, hogy a diszkont-ráta ismert:

$$MacD = \sum_{i=1}^m \tau_i \frac{P_i}{P} = \sum_{i=1}^m \tau_i \frac{C_i e^{-\tau_i y}}{P} \quad (9)$$

Az itt vázolt összefüggéseket egy kötvény esetében írtam fel. A következőkben az egyes napokon a meglévő összes kötvényre keressük azt az egy zéró-kupon hozam összefüggést, amely mellett a lehető legjobban visszakapható a különböző árakat vagy YTM-eket. Ennek elérésére a szakirodalomban több különböző modell létezik, amelyet a következőkben tekintünk át.

3. HOZAMGÖRBE MODELLEK

Az elmúlt évtizedekben a hozamgörbe modellek látványos fejlődési szakaszokon mentek végbe. A kezdeti regressziós módszereket az 1960-2000-es évek között használták, amely a lejárat és az YTM között regressziós technikával igyekeznek összefüggést találni. Leghíresebb és máig áttételesen² használt modell a Fama-Bliss modell (Fama és Bliss (1987)). Ezek a modellek túlzottan leegyszerűsítették az összefüggéseket, mert figyelmen kívül hagyják a kuponok hatását (*coupon effect*), valamint nem súlyozzák kellőképpen a rövid lejáratú papírokat így asszimetria lép fel a különböző lejáratok között (Svensson (1994)). A kezdeti módszerekkel előfordulhat, hogy az empirikusan illesztett diszkontfüggvény nem monoton csökkenő (Anderson et al. (1996)). A hozamok modellezésének másik elterjedt formája az elméleti megalapozottságú affin modellek (pl.: Vasicek (1977), Cox et al. (1985), Dai és Singleton (2000)), amelyek legtöbbször arbitrázs mentes kritériumot használnak. (Hull és White (1990), Heath et al. (1992)) Az ezredforduló után ezeket a modelleket több kritika is érte elsősorban gyenge előrejelző képességük miatt (Duffee (2002)). Végül - a tanulmányban is felhasznált - a szakirodalomban „empirikus hozamgörbe modellek”-nek nevezett módszerek következnek, amelyek empirikus és elméleti megfontolásoknak is eleget tesznek. Ezen módszerek, különböző feltételeknek megfelelő függvényformulát illesztenek az adatokra. Két nagy csoportot szokás elkülöníteni, a Spline illesztéseket, amelyek csomópontokkal összeillesztett polinomok és a „takarékos exponenciális” függvényekre (*parsimonious polinoms*), amelyek a végtelenben és nullánál bizonyos feltételeknek megfelelnek.

²pl. Diebold és Li (2006) használja fel számítási inputként

Az empirikus hozamgörbe modelleknek számos további tulajdonsága van függvényformától függően, amelyeket a későbbiekben részletesen áttekintjük. Az utóbbi módszereknek a leginkább elterjedt változata a Nelson-Siegel modell, vagy a kibővített Svensson modell, amelyeket számos központi banknál és adósság kezelő intézménynél alkalmaznak.

A következőkben ezen empirikus hozamgörbe modelleknek különböző fajtáit mutatom be, ezeken belül is egy köbös-spline alapú módszert, amelyet az Államadósság Kezelő Központban (ÁKK) alkalmaznak, valamint a Nelson-Siegel-Svensson modelleszaládból hármat, melyeknek matematikai hátterét is bemutatjuk. A következőkben az empirikus hozamgörbe modelleknél két dimenzióra érdemes a hangsúlyt fektetni, a keresztmetszeti - egy napon meglévő papírok illesztésére vonatkozó értékeket, és a hosszmetsetit - az egymás után elvégzett illesztésekből származó paraméterek idősorát. $(\gamma = [\beta, \lambda])$ ³ Ez utóbbi jelölése megnehezítené az értelmezhetőségét a következőkben, emiatt ettől eltekintek, a keresztmetszeti jelölésnél pedig áttérek a vektoros formulára, így egy adott t napon a diszkontfüggvény összefüggése:

$$\sum_{b=1}^B P_b = \sum_{b=1}^B \sum_{i=1}^m C_{b,i} \delta(\tau) = \mathbf{P} = \mathbf{C} \delta(\tau) \quad (10)$$

Először a Spline alapú modelleszaládból mutatom be részletesen az ÁKK által is használt Köbös Spline modellt majd a Nelson-Siegel-Svensson (NSS) modelleszaládot és a Hubig (2013) féle Legendre polinomot használó hozamgörbe modellt.

3.1. KÖBÖS SPLINE MÓDSZER

A Spline modelleszalád a lejáratok függvényében több részre osztja fel a papírokat/cash-flowkat és adott szabályokat alkalmazva polinomokat illeszt ezen intervallumokra. Fontos, hogy a polinomok „simán” (*smooth*) és pontosan illeszkedjenek egymáshoz a vágási pontokban, ennek köszönhetően a Spline módszertannak különböző fajtái léteznek.⁴ A diszkont

³Spline illesztésnél csak a β paramétereket használjuk, amelyek idősoros tulajdonságait nem vizsgáljuk (ezen paraméterértékek a csomópontok változása miatt nem ad(hat)nak idősorosan értelmezhető adatsort, a vágási pontokat tartalmazó Φ vektor hasonló a λ -hoz, a jelölési és fogalmi zavart elkerülve párhuzamot nem vonva e két paramétervektor között), a Nelson-Siegel, Legendre polinomoknál a λ egyelemű a Svenssonnál kettő.

⁴A kritériumok között trade-off van és elsősorban ennek arányban különböznek egymástól a különböző típusok. A különbségek ellenére matematikailag bizonyíthatóan a lehető legsimábban illeszkedik (simaság definícióját lásd: Adams és Van Deventer (1994)) az adatokra a többi polinom közül (Deventer és Imai

faktort bázisfüggvények állítják elő, majd a diszkontfaktorból numerikus átalakítással lehet megkapni a zéró kupon és forward hozamgörbét. A köbös polinom függvényeket szegmensként kell ráilleszteni a diszkontfüggvényre. A köbös spline biztosítja, hogy a diszkontfüggvényben ne történjenek törések és kellőképpen sima legyen (*continuity, smoothness*). A módszertan három lépésben végzi el az illesztést:

1. Vágási pontok meghatározása
2. Bázisfüggvények megadása
3. Diszkont függvény meghatározása, amelyből előállíthatóak a zérókupon és forward hozamgörbék

Először határozzuk meg az adott napon található összes pénzáramhoz tartozó időpontokat tartalmazó vektort, amely növekvő sorrendbe van rendezve $\tau = (\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < \dots < \tau_m)$: Ezek után a τ vektor segítségével meghatározható a vágási pontok száma, amelyet a bevett gyakorlat alapján négynek vehetők. A vágási pontokat tartalmazó vektor (Φ) ekkor 4 elemű és a vágási pontok három hasonló nagyságú részre osztják a lejárat struktúrát:⁵

$$\Phi = [0, \tau_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor}, \tau_{\lfloor \frac{2m}{3} \rfloor}, \tau_m] \quad (11)$$

Második lépésként a vágási helyek ismeretében minden egyes pénzáramlási időponthoz kiszámítható a $bf_x(\tau)$ bázisfüggvények értékei. A bázisfüggvények száma, amikor 4 vágási

(1997)). Jelen tanulmányban egy köbös spline illesztés kerül bemutatásra, amelyet a magyar állampapírok illesztésénél alkalmaznak, így ezen modell benchmarkként is szolgál az eredmények ismertetésénél. Más Spline modellel is elvégeztük az illesztéseket például McCulloch köbös spline (McCulloch (1971)), B-spline (Steeley (1991), Bolder és Strélski (1999)) és a VRP (Waggoner (1997), Anderson és Sleath (2001)) modellekkel, azonban nem adtak jelentősen jobb/ más eredményt. Részletesen lásd: Reguly (2014) vagy Fegyveres (2014)

⁵Amennyiben nem 4 vágási pontot határozunk meg, hanem ν -t akkor akkor $\Phi = [0, \tau_{\lfloor \frac{m}{\nu-1} \rfloor}, \tau_{\lfloor \frac{2m}{\nu-1} \rfloor}, \dots, \tau_{\lfloor \frac{(\nu-2)m}{\nu-1} \rfloor}, \tau_m]$ a vágási pontok helyei. vegyük észre, hogy mindkét esetben az adott napon lévő lejáratokat olyan intervallumokba osztjuk, ahol közel azonos számmal vannak jelen. Nagyobb vágási pontszámmal figyelni kell, hogy könnyedén „túlilleszthető” (overfitting) a hozamgörbe, vagyis bár szinte tökéletesen illeszkedik a megfigyelt adatokra, nincsen értelmezhető közgazdasági jelentése. Erre ad egy választ McCulloch (1971) módszere.

pontot alkalmazunk, 6 darab ($x = 1, \dots, 6$) és a következő alakban írhatók fel:

$$\begin{aligned}
bf_{x=(1,2,3)}(\tau) &= \begin{cases} 0 & : \tau_i \leq \Phi_x \\ \frac{(\tau_i - \Phi_x)^3}{6(\Phi_{x+1} - \Phi_x)} & : \Phi_x < \tau_i \leq \Phi_{x+1} \\ \frac{(\Phi_{x+1} - \Phi_x)^2}{6} + \frac{(\tau_i - \Phi_{x+1})(\tau_i - \Phi_x)}{2} & : \tau_i > \Phi_{x+1} \end{cases} \\
bf_4(\tau) &= \mathbf{1}_m \\
bf_5(\tau) &= \tau_i \\
bf_6(\tau) &= \tau_i^2
\end{aligned} \tag{12}$$

A diszkontfaktor a bázisfüggvények lineáris kombinációjaként áll össze:

$$\delta(\tau, \beta) = \mathbf{bf} \beta' = \mathbf{1} + \mathbf{bf}^* \beta' \tag{13}$$

A diszkontfaktor értéke a 0 időpillanatban 1, így $\beta_4 = 1$. Ez alapján elegendő az első 5 bázisfüggvényhez tartozó paraméter értékeit kiszámítanunk, így megkapható a diszkontfüggvény a bázisfüggvények súlyozásával. Az átalakítással kapott a diszkontfüggvény 1-től indul. A hozamgörbe illesztését, egyszerű OLS-sel (legkisebb négyzetek módszerével) számolható, amelyet különböző további súlyozással egészített ki.

3.2. NELSON-SIEGEL-SVENSSON MODELCSALÁD (NSS)

A Nelson-Siegel-Svensson (NSS) model család széles körben közkedvelt elméleti és gyakorlati megfontolások egyaránt. A Nelson és Siegel (1987) által megfogalmazott függvényformulának - és az erre alapuló polinomoknak - számos olyan tulajdonsága van, amelyek empirikusan és közgazdaságilag is jól értelmezhető eredményeket adnak, és a paraméterek jelentéssel rendelkeznek:

- β_0 a hosszú távú kamatláb amely a hozamgörbe szintjét jelenti ($\beta_0 > 0, \lim_{\tau \rightarrow \infty} z(\tau) = \beta_0$)
- β_1 a hozamgörbe meredekségét adja meg, a rövid lejáratú hozamok megkaphatóak a $\beta_0 + \beta_1$ összefüggésből ($\beta_0 + \beta_1 > 0, \lim_{\tau \rightarrow 0} z(\tau) = \beta_0 + \beta_1$)
- β_2 a hozamgörbe púposágát adja amelyet a piaci várakozások egy proxyjaként szokás használni
- λ a belső paraméter a púposág maximumának a helyét mutatja meg a lejárat struktúrában

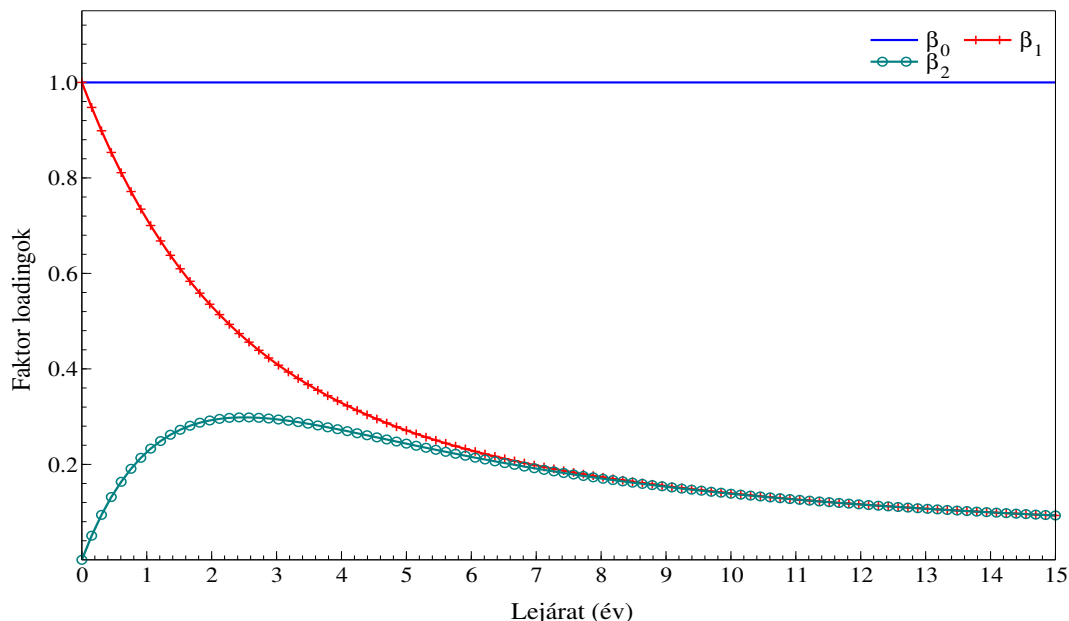
Minden napra elvégezve az illesztést - megfelelő módszerrel és feltételek mellett - idősorosan jól értelmezhető paramétereket kapunk (A kritériumokat részletesebben a 4. fejezetben). A NSS modellcsaládnál a forward hozamgörbét írták fel először, majd ebből számolták ki a zéró-kupon hozamgörbét és diszkontfüggvényt. Ennek pozitív hozadéka, hogy a spline módszertannal ellenben a forward görbe minden esetben „jól” viselkedik.

Jelen tanulmányban három polinomot vizsgáltam meg az NSS családból, a klasszikus Nelson-Siegel alapmodellt (Nelson és Siegel (1987)), a Svensson modellt (Svensson (1994)) és a négy faktorral rendelkező Legendre polinom alapú modellt (Hubig (2013)). Az említett polinomok mindegyikénél a paramétereknek két típusa van, a koefficiensekként értelmezhető β paraméterek és a modellt nem-lineárisává tévő belső paraméter λ .

3.2.1. Nelson-Siegel modell (NS)

Nelson és Siegel 1987-ben publikálta tanulmányát, az általuk bemutatott polinom többször továbbfejlesztésre került, mindemellett a mai napig széles körben használt. Az eredeti polinom forward hozamgörbéje a következő alakkal rendelkezik:

$$r(\tau, \gamma) = \beta_0 + \beta_1 \left(e^{-\frac{\tau_i}{\lambda_1}} \right) + \beta_2 \left(\frac{\tau_i}{\lambda_1} \right) e^{-\frac{\tau_i}{\lambda_1}} \quad (14)$$



1. ábra. Nelson-Siegel modell loadingjainak értékei a lejárat függvényében

Forrás: Saját eredmény

A folytonos forward görbe és a zéró kupon görbe közötti összefüggést felhasználva

(7. egyenlet) megkapjuk a zéró-kupon hozamgörbét:

$$y_t = \beta_{0,t} + \beta_{1,t} \left(\frac{1 - e^{-\frac{\tau}{\lambda_1}}}{\frac{\tau}{\lambda_1}} \right) + \beta_{2,t} \left(\frac{1 - e^{-\frac{\tau}{\lambda_1}}}{\frac{\tau}{\lambda_1}} - e^{-\frac{\tau}{\lambda_1}} \right) \quad (15)$$

A Nelson-Siegel zéró-kupon hozamgörbe esetében az NSS tulajdonságokat mutatja be a 1. ábra. A β -hoz tartozó értékeket lehet látni, rögzített belső paraméter érték mellett. ($\lambda_1 = 0,7173$, amely 2,5 évnél maximalizálja a púposságot, ezt a módszert Diebold és Li (2006) használta először.)

A Nelson-Siegel modell több esetben is rugalmatlannak bizonyult a hozamgörbe leírására. A túlzottan nagy pontatlanság miatt több továbbfejlesztett változata jelent meg az illeszkedés javításának érdekében.⁶ A következőben az egyik legelterjedtebb változatot, a Svensson (1994) által kibővített formulát tekintem át.

3.2.2. Svensson modell

Svensson (1994) kibővítette a Nelson-Siegel formulát egy második púppal - egy újabb koefficiens β_3 és belső paraméter λ_2 segítségével - így javítva az illeszkedést. A Svensson modell jóval rugalmasabb, azonban ennek az ára a nehezebb optimalizálási feladat és az esetleges multikollinearitás megjelenése ($\beta_2 \approx \beta_3$, $\lambda_1 \approx \lambda_2$), amely a túlillesztés egyik jele is lehet.⁷ A Svensson féle négy faktoros modell a következő forward hozamgörbével rendelkezik:

$$r(\tau, \gamma) = \beta_0 + \beta_1 \left(e^{-\frac{\tau_i}{\lambda_1}} \right) + \beta_2 \left(\frac{\tau_i}{\lambda_1} \right) e^{-\frac{\tau_i}{\lambda_1}} + \beta_3 \left(\frac{\tau_i}{\lambda_2} \right) e^{-\frac{\tau_i}{\lambda_2}} \quad (16)$$

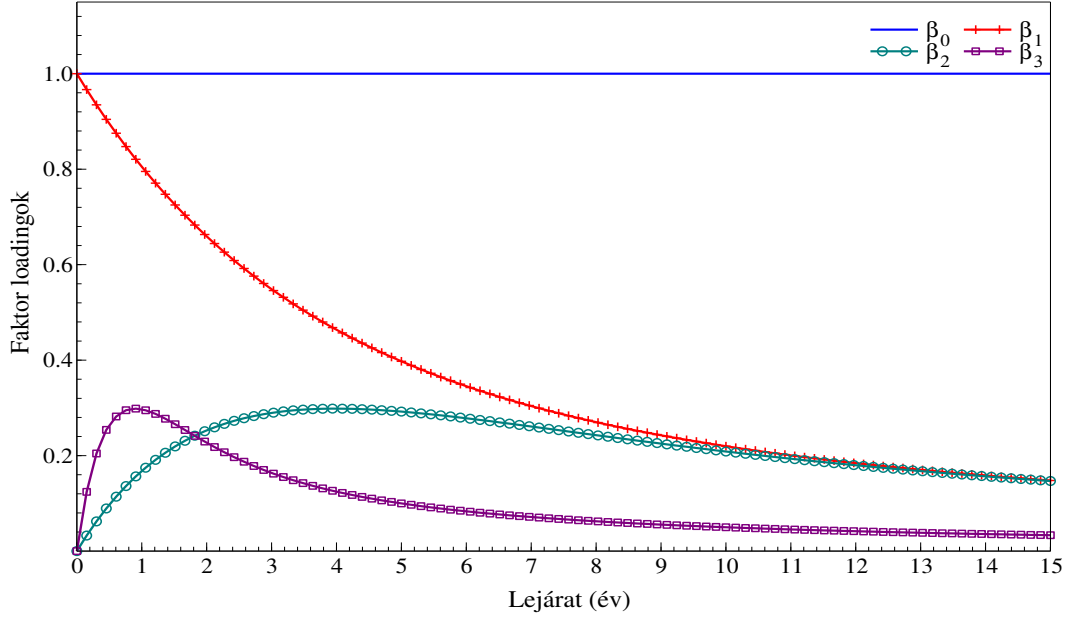
Hasonlóan a forward görbét átalakítva zéró kupon hozamgörbévé:

$$y_t = \beta_{0,t} + \beta_{1,t} \left(\frac{1 - e^{-\frac{\tau}{\lambda_1}}}{\frac{\tau}{\lambda_1}} \right) + \beta_{2,t} \left(\frac{1 - e^{-\frac{\tau}{\lambda_1}}}{\frac{\tau}{\lambda_1}} - e^{-\frac{\tau}{\lambda_1}} \right) + \beta_{3,t} \left(\frac{1 - e^{-\frac{\tau}{\lambda_2}}}{\frac{\tau}{\lambda_2}} - e^{-\frac{\tau}{\lambda_2}} \right) \quad (17)$$

A Svensson modell egy további púppal rendelkezik amelynek irányát a β_3 értéke és helyét a λ_2 határozza meg. A faktorok tulajdonságait fix belső paraméterek mellett ($\lambda_1 = 0.45$, $\lambda_2 = 2$) a 2. ábra mutatja be.

⁶Jó összefoglalót ad Pooter (2007) a különböző típusokról.

⁷Erre dolgozott ki megoldási javaslatot Pooter (2007): az utolsó tag lejáratainak a kétszeresét vette, amely a szakirodalomban az "Adjusted-Svensson" néven terjedt el.



2. ábra. Svensson modell loadingjainak értékei a lejárat függvényében

Forrás: Saját eredmény

3.2.3. Legendre polinom

Hubig (2013) a német állampapírokat vizsgálva használta fel a Legendre polinomokból álló hozamgörbét, amelyet a Nelson-Siegel általánosított alakjára felírt Laguerre polinom alapú görbe (Hurn et al. (2005)) „versenytársaként” alkotott meg. Eredményeik alapján a hozamokra optimalizálva jobb eredményt kaptak mint, a Hurn et al. (2005) által felhasznált Laguerre polinomokkal.⁸ A zéró-kupon hozamgörbét a következő összefüggéssel írták fel:

$$z(\tau, \gamma) = \sum_{j=0}^J \beta_j \sqrt{\lambda_1(2j+1)} P_j(\kappa) \quad \kappa = \frac{\lambda_1 \tau_i - 1}{\lambda_1 \tau_i + 1} \quad (18)$$

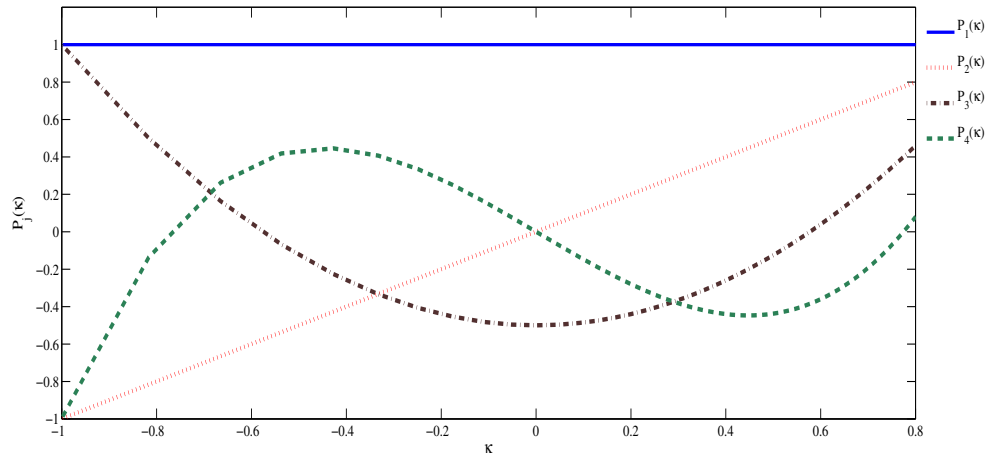
Ahol:

$P_j(\kappa)$: a j -ed fokú Legendre polinom, (Az illesztés során $j = 4$ feltételezünk)

γ : koefficienseket tartalmazó vektor $(\beta_1, \beta_1, \dots, \beta_j, \lambda_1)$

A forward hozamgörbe a 18. függvény deriválásával kapható meg: $f(\tau, \gamma) = z(\tau, \gamma) + \lambda_1 \frac{\partial z(\tau, \gamma)}{\partial \lambda_1}$, amelynek elvégzése nem triviális, a számítása során numerikus közelítést alkalmaztam. A Legendre polinomok $P_j(\kappa)$ viselkedését, a κ függvényében a következő ábra mutatja be:

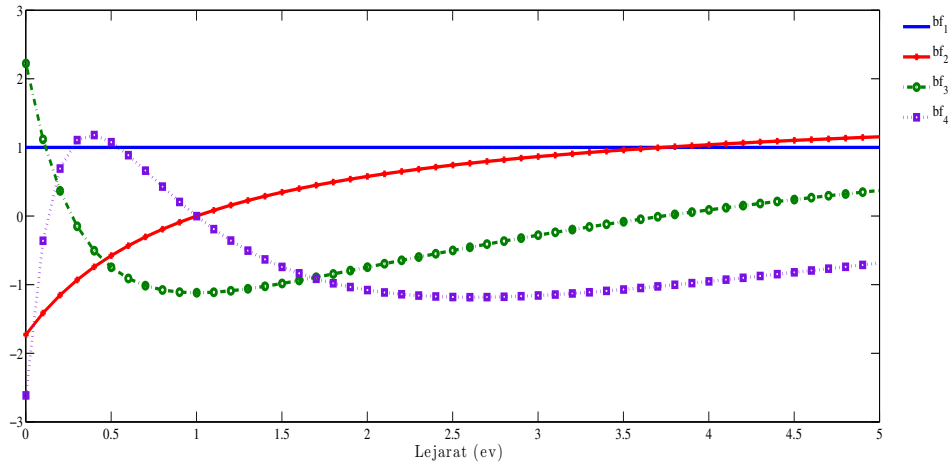
⁸A Nelson-Siegel polinom egy harmadfokú Laguerre polinom amit az említett szerzők általánosítottak



3. ábra. Legendre polinomok

Forrás: Saját eredmény

A bázisfüggvények alakját, feltéve, hogy $\beta = 1$, $\lambda_1 = 1$ a következő ábra mutatja be:⁹



4. ábra. Legendre ortogonális bázisfüggvények

Forrás: Saját eredmény

Hasonlóan a Nelson-Siegelhez (és a Laguerre polinomokhoz) ez a módszer is csak egy λ -t használ fel a modell, így a függvény rugalmasabb, mint az említett Nelson-Siegel a magasabb fokszám miatt, de kevésbé bonyolult optimalizálási térrel rendelkezik, mint a Svensson.

A következőkben éttekintem az implementálás során felhasznált optimalizálási módszertant.

⁹Hubig (2013, 77-78 o.) bebizonyítja, hogy az ilyen módon előállított Legendre polinomokból előállított bázisfüggvények hasonló matematikai tulajdonságokkal rendelkeznek, mint a Nelson-Siegel-Svensson polinomok (3.2. felsorolás)

4. EMPIRIKUS HOZAMGÖRBÉK ILLESZTÉSE

A következőkben először az „alap”optimalizálási probléma kerül bemutatásra, majd a Spline és NSS modellek optimalizálási célfüggvényeit. Ezek után az optimalizálási algoritmusok kerülnek röviden bemutatásra, amely a célfüggvényeket különböző módszerrel minimalizálják. Ezek az eltérő stratégiák alapszintű megismerése - véleményem szerint - lényeges a hozamgörbe illesztésének eredményének megértésében, hiszen az optimalizálási térben való mozgás milyensége hozzájárul a hozamgörbe robosztus becsléséhez. Végül az optimalizálás teljesítményét mérő számokat mutatom be, amelyek segítenek eldönteni, hogy mely optimalizálási algoritmusok és modellek teljesítenek jól.

4.1. OPTIMALIZÁLÁSI ALAPFELADAT

Optimalizálási feladatnak tekinthetünk minden olyan feladatot, amelyben két értéket közelíteni szeretnénk egymáshoz, és a problémában legalább az egyik értékünk (függvény) változó. A közelítési módszereknek számos metrikája létezik, viszont a hozamgörbe illesztésénél konszenzus uralkodik a négyzetes eltéréseket minimalizálásáról. (Bliss (1997b)) A minimalizálási problémát, a következőképpen lehet felírni a súlyozott árakhoz:

$$\min_{\gamma} \varepsilon(\gamma) = \min_{\gamma} \sum_{b=1}^B \left[\left(P_b - \hat{P}_b(\tau, \gamma) \right)^2 \omega_b \right] \quad (19)$$

Ahol:

ε : minimalizálandó érték, amely függ a paraméterektől (γ)

P_b : b-edik kötvény piaci átlag ára

$P_b(\tau, \gamma)$: b-edik kötvény számított átlag ára, amelyet a 8. egyenlet segítségével számolható

ω_b : a b-edik kötvény súlyozása A képletekben átlag árak szerepelnek, míg az adatoknál legjobb ajánlati és kért árakat állnak rendelkezésre. Bliss (1997b) rámutat, hogy az átlag számítása információ veszteséssel jár és helyette a következő megoldást javasolta a hibaszámításnál:

$$\varepsilon(\gamma) = \begin{cases} P^{ask} + \text{felhalmozott kamat} - \hat{P} & \text{ha } \hat{P}_b > P^{ask} + \text{felhalmozott kamat} \\ P_b^{\text{bid}} - \hat{P}_b & \text{ha } \hat{P}_b < P_b^{\text{bid}} \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad (20)$$

Az implementáció során ezen átlag értékhez optimalizálok, azonban az illesztések jóságánál a Bliss féle módszer alapján számolom a hibákat. Ennek következtében azok a modellek és módszerek, amelyek képesek a bid-ask spread folyósóban megmaradni, hasonlóan jól illeszkedéssel bírnak.

Az optimalizáció másik fontos tényezője a súlyozás (ω_b). Az árak súlyozása a lejárat szerkezet ismeretében széles körben elterjedt, jelen tanulmányban a két legelterjedtebbet mutatom be, amelyeket az implementáció során felhasználtam:

1. Bid-Ask spread alapú súlyozás – amelyet a spline-módszertannál használtam fel. Ez a módszer likviditási tényezőre épít, a kevésbé likvid papírok kisebb súllyal szerepelnek (tipikusan a hosszú lejárat oldal):

$$\omega_b = \frac{1}{(P_b^{bid} - P_b^{ask})^2} \quad (21)$$

2. Macaulay duráció (9. egyenlet) inverzét felhasználó súlyozás Bliss (1997b), amelyet az NSS modelleknél használtam fel:

$$\omega_b = \frac{1}{MacD_b} \bigg/ \sum_{b=1}^B \frac{1}{MacD_i} \quad (22)$$

A b -edik kötvény súlya megegyezik a b -edik kötvény Macaulay durációjának arányával a teljes portfólió durációjához mérten. Ezzel az adott papír súlya kapható meg az aznapi kötvény-portfólióban. Minél kisebb egy adott kötvénynek a durációja annál nagyobb súllyal kerül figyelembe az illesztés során.

4.2. SPLINE ILLESZTÉS

A spline illesztések során két paraméter csoportot kell megállapítani, a vágási pontok számát és azoknak a helyét Φ , valamint a bázisfüggvényekhez tartozó koefficienseket β . A vágási pontok száma konvenció alapján a 3.1 fejezetben leírtak megfelelően 4 darab. A koefficiensek meghatározása sima OLS-sel történik, ahol az árakat a 21. egyenlet alapján Bid-Ask spreaddel súlyoztam, így a konkrét optimalizálási feladat:

$$\min \varepsilon(\gamma) = \left(\mathbf{P} - \hat{\mathbf{P}}(\tau, \gamma) \right)' \text{diag}(\boldsymbol{\omega}) \left(\mathbf{P} - \hat{\mathbf{P}}(\tau, \gamma) \right) \quad (23)$$

ahol, a $\text{diag}(\boldsymbol{\omega})$, $B \times B$ nagyságú mátrix átlóiban elhelyezett súlyvektor értékei található.

4.3. ÁLTALÁNOS FELTÉTELEK A NSS MODELLTÍPUSOKHOZ

Az NSS modelltípusoknál bemutatásra került a különböző tulajdonságokat, amelyekkel az NSS modelleszaládba tartozó polinomoknak bírnak. Ezek a tulajdonságok az optimalizálási eljárásnál korlátként jelennek meg. A megkötések az optimalizálási eljárástól függően vagy büntető értékként, vagy tiltó megkötésként értelmezendők. Ezek a megkötések a következők:

$$c_1(\beta_0) = \beta_0 > 0 - \text{a hosszú távú kamatláb nem lehet negatív}$$

$$c_2(\beta_0, \beta_1) = (\beta_0 + \beta_1) \leq 0 - \text{a rövid távú kamatláb nem lehet negatív}^{10}$$

$$c_3(\lambda_1) = \lambda_1 > 0 - \text{az első csúcs helye nem lehet negatív lejáratnál}$$

$$c_4(\lambda_2) = \lambda_2 > 0 - \text{a második csúcs helye nem lehet negatív helyen}$$

További megkötések, amelyek segítenek a gyorsabb optimum megtalálásához, de szigorúan véve nem szükséges megkötések:

$$c_5(\lambda_1) = \lambda_1 \leq 30$$

$$c_6(\lambda_2) = \lambda_2 \leq 15$$

$$c_7(\lambda_1, \lambda_2) = |\lambda_1 - \lambda_2| > 0$$

Saját tapasztalatok alapján, amennyiben Legendre polinom kerül felhasználásra, akkor érdemes egy további specifikus megkötés a harmadik-negyedik koefficiensre:

$$c_8(\beta_3, \beta_4) - 30 < \beta_3, \beta_4 < 30, \text{ ha Legendre polinom alapú modell}$$

Amennyiben az algoritmusnál nem lehetséges korlátokat megadni,¹¹ akkor bevezethető a büntető függvény (*penalty function*), amely a következő alakot ölti:

$$\Gamma_k(\zeta) = \begin{cases} 0 & , c_k(\zeta) \geq 0 \\ \Pi & , c_k(\zeta) < 0 \end{cases} \quad k = 1, \dots, 8 \quad (24)$$

ahol pl.: $\Pi = 10^6$ Ekkor a kiegészített optimalizálási feladat a következőképpen módosul:

$$\min \left[\varepsilon(\gamma) + \sum_{k=1}^J \Gamma_k(\zeta) \right] \quad (25)$$

¹⁰Ez elmúlt időben ezt a tapasztalatok alapján relaxálni kell, hiszen az Európai Központi Bank rövid lejátatai negatív hozamokat hoznak

¹¹Ilyen a DS+NM és PSO-H

A következőkben az NSS modelleket két részre osztható attól függően, hogy a belső paraméter(ek) λ az optimalizálásban részt vesznek, vagy fixálásra kerülnek. Mind két módszertannak megvan az előnye és hátránya, melyet a szakirodalom részletesen tárgyal, bár mind a mai napig vitára ad okot. Először az fix belső paraméterrel rendelkező módszert tekintem át.

4.3.1. Diebold-Li módszertan – fix belső paraméter

A szakirodalomban nem forrott ki egyértelmű preferencia az NSS modellekben megtalálható belső paraméterrel kapcsolatos módszertannal szemben. Amennyiben fixálásra kerülnek a belső paraméterek ($\lambda \notin \gamma$), akkor idősorosan jobban értelmezhetőek a paraméterek, ellenben rosszabb az illeszkedés. A következőkben hasonlóan a spline módszerhez viszonyítási pontként használok fel a fix belső paraméterrel rendelkező illesztéseket, amelyeket a későbbiekben bemutatandó BFGS algoritmussal végzem el.¹² A módszer egyik alkalmazása amelyet Diebold és Li (2006) használ, hogy a λ értékét úgy választja meg, hogy a β_2 faktor az adott időszakra az átlagos lejárati értéknél legyen maximális. Ez a kiválasztás önkényes és bár a Nelson-Siegel polinomnál értelmezhető, hiszen így nő a rugalmassága az illesztésnek, a Svensson és Legendre polinomnál ez nincs meg. További hátránya a fixált λ értéknek a multikollinearitás megjelenése (Annaert et al. (2013)). Röviden, a fix belső paraméterrel rendelkező NSS modell típusnak hátránya hogy érzékeny a λ paraméter megválasztására és a megfelelő érték kiválasztáshoz nincsen elméleti háttér. Előnye, hogy az optimalizálási feladat kevésbé nehézkes, valamint idősorosan értelmezhető adatokat ad a becsült koefficiensekre. Az implementáció során a pilnomok Genetikus Algoritmussal illesztett λ paraméter értékeinek idősorából számított medián értékeket használtam fel a fixált λ értékeknek.

4.3.2. Változó belső paraméterrel rendelkező NSS modellek

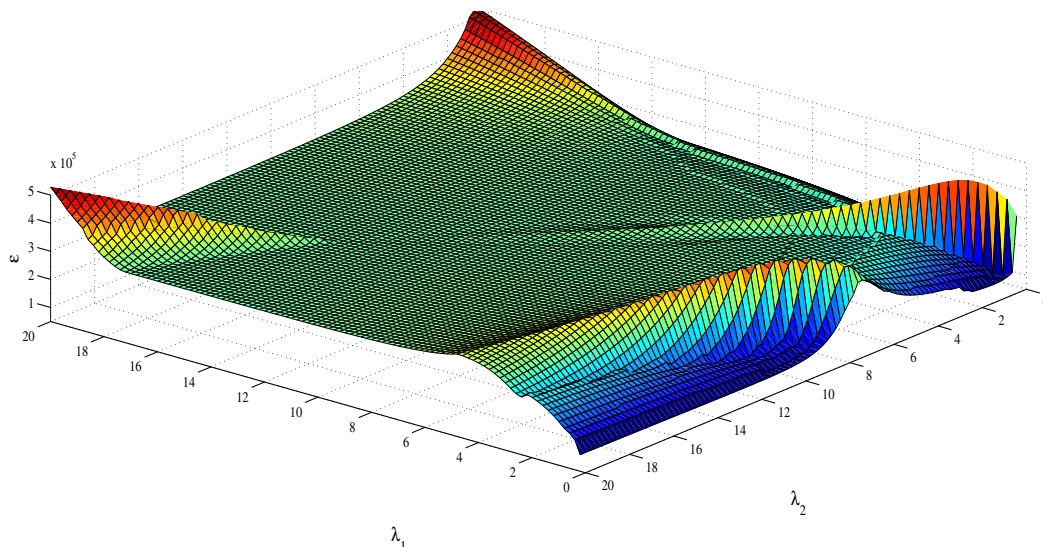
A dinamikus NSS modell típusok esetében a β és a λ egyaránt változókként jelennek meg az optimalizálási térben. A megoldandó feladat egy bonyolult nem-lineáris, több lokális minimumhellyel rendelkező nem-konkáv optimalizálási térrel rendelkezik. A magyar

¹²Bár ahogyan később látható, a BFGS módszer amennyiben a belső paraméter is változó akkor nem ad jó eredményt, ellenben fixált λ mellett az optimalizálási tér már jól viselkedő, így megfelelő eredményt kapunk.

adatokon robosztus eredmények eléréséhez a három lépés hajtható végre:

- Az optimális változókhoz közeli kezdőértékek megadása
- Megfelelő optimalizáló algoritmus kiválasztása
- Különböző teljesítmény/robosztussági mutatók alapján az illesztés értékelése

A következő ábra a Svensson függvénnyel kapott hibák értékeinek változását mutatja be különböző λ értékek esetére, optimalizált β -kal:



5. ábra. Svensson függvény optimalizálási tere különböző λ -ra
Forrás: Saját eredmény

Az ábra rámutat arra, hogy az elvégett optimalizálási tér nem „jól viselkedő”, valóban több lokális minimumhellyel rendelkezik és nem-konkáv. Ezen tulajdonságok következménye, hogy nem mindegy milyen:

- Kezdeti értékből indul az (iteratív) optimalizáció
- Milyen algoritmust kerül felhasználásra és annak milyen a mozgása a térben
- Ezen algoritmusok mennyi idő alatt és melyik minimumhelyre érkeznek
- Mekkora tér kerül megvizsgálásra, mielőtt megáll az optimalizáció

A következő alfejezetben a tanulmány egyik legfontosabb hozzájárulásként, a kezdeti értékek meghatározását mutatom be.

4.3.3. Kezdőértékek meghatározása

Eltérő kezdeti értékek eltérő eredményhez vezethetnek. Az itt bemutatásra kerülő kezdetiérték meghatározás igyekszik hozzájárulni a becsült koeficiensek idősoros értelmezhetőségéhez. Bliss et al. (2011), a Diebold és Li (2006) módszerrel határozza meg a kezdeti értékeket, Wernen és Ferenczi (2006) kétrészes optimalizáción keresztül, Manousopoulos és Michalopoulos (2009) ad hoc kezdeti értékeket határoz meg. Reguly (2014) rámutat, hogy ezen kezdeti értékek meghatározása nem segíti elő az idősoros értelmezhetőséget, a katasztrófikus törések (*catastrophic jumps* - Cairns és Pritchard (2001), Virmani (2012)) továbbra is fennállnak.

A számítások során egy speciális tanuló algoritmust fejlesztettem ki, amely jobban képes elkerülni a katasztrófális törések bekövetkezését. Az algoritmus a következő lépéseken megy keresztül:

1. Első 10 megfigyelési nap kezdeti értékének meghatározása Diebold és Li (2006) megfeleltetés alapján:
 - (a) A harmadik faktor loadingját maximalizálva az adott nap átlagos lejáratí időre meghatározásra kerül a λ -t
 - (b) A Spline illesztéssel megkapott zéró-kupon hozamok felhasználásra kerülnek a koeficiensek kezdő értékének meghatározásához: $\beta_0 = 10$ éves, $\beta_1 = 10$ éves - 3 hónapos hozam, $\beta_2 (= \beta_3) = 2 \times 2$ éves - 10 éves - 3 hónapos hozam
 - (c) Svensson modell esetében ez utóbbi érték gyorsan meg fog változni a korlátok miatt ($|\lambda_1 - \lambda_2| > 0$)
 - (d) Svensson esetében a harmadik és negyedik faktor maximalizálása, a λ segítségével az adott nap lejáratának alsó és felső kvartiliséhez
2. Tanuló algoritmus AR(9)+Outlier szűrő segítségével elindítása a fentebbi módon előállított 10 megfigyelési napot tartalmazó tanulópopuláción:
 - (a) Az 1.-ban lévő módszerrel és genetikus algoritmus segítségével optimalizált értékeket (4.4.3. fejezet) tanuló populációnak vesszük
 - (b) A tizenegyedik időszaktól kezdődően a t-edik időpontban a kezdőértéket a következőképpen kapjuk meg:

- (c) Megvizsgáljuk az elmúlt 9 időszak $(t-9, t-8, \dots, t-1)$, γ paraméter értékeit, ha azok közül talál olyat, ahol 300 bázispontonál nagyobb törés van az átlaghoz képest, akkor azt outliernek tekinti és kizárja a megfigyelésből
- (d) A korábbi 9 periódus nem outlierok értékeiből átlagot számít, és ezt veszi kezdőértéknek
- (e) Amennyiben az elmúlt 9 periódusban több mint 7 outlier van akkor megemeli +200 bázisponttal a tűréshatárt
- (f) Amennyiben az elmúlt 9 periódusban kevesebb mint 5 outlier van, és a vágási pont nagyobb mint 300, akkor fokozatosan visszacsökkenti 200 bázisponttal a tűréshatárt egészen 300 bázispontig

Az így elindított optimalizáció gyorsabban találja meg az optimum helyet és bár bizonyos optimalizációs eljárásoknál (pl: Levenberg-Marquardt) előfordul, hogy egy lokális optimumban megragad - ennek következtében nem a legjobb hiba mutatószámokkal rendelkezik - idősorosan jobb eredményeket ad, mint a korábban említett eljárással meghatározott kezdőérték. A következő részben az optimalizáló algoritmusokat tekintem át, hiszen a kezdeti értéktől való indulás és optimalizációs tér feltérképezése nagyban különbözhetnek az egyes módszereknél. Jobb megértéssel válasz kapható arra, hogy bizonyos módszerek miért rekednek meg egy suboptimális megoldásnál és mások miért jutnak el egy jobb eredményhez.

4.4. OPTIMALIZÁLÓ ALGORITMUSOK

Robosztus eredménynek eléréséhez több különböző optimalizáló algoritmust használtam fel, majd a különböző eredményeket összehasonlítottam. A következőkben bemutatott algoritmusok háromszor három nagy csoportra bonthatóak:

- Optimalizáció típusa: Globális optimalizációs algoritmusok, direkt kereső (*direct-search*) algoritmusok valamint a gradiens alapú algoritmusok. Mind három csoportnak több altípusa létezik.
- Keresés iránya: Sima függvényérték alapú algoritmusok (*single point*) - egy pályát követnek bizonyos szabály szerint az optimalizálási térben - vagy több függvényérték alapú algoritmus (*multi-point*)- populációt használó algoritmus amelyek több külön

pályákat vizsgálnak meg adott szabályszerűségek mentén és ezek közül a legjobbat választja ki.

- Keresés módszere: A több függvényértékkel rendelkező algoritmusokat mozgázuk alapján lehetnek determinisztikusak vagy sztochasztikusak (*deterministic or randomized*). A determinisztikus algoritmusok szabályszerűen viselkednek, random tényező nélkül, míg a sztochasztikus algoritmusokban randomitás szerepel.

Az általam felhasznált optimalizáló eljárások a következők:

1. táblázat. Felhasznált algoritmusok osztályozása

Algoritmus Neve	Típusa	Keresés iránya	Keresés módszere
Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno	Gradiens alapú	Sima függvényérték	Determinisztikus
Levenberg-Marquardt	Gradiens alapú	Sima függvényérték	Determinisztikus
DS+Nelder-Mead	Közvetlen keresés	Több függvényérték	Determinisztikus
Simulated Annealing	Globális optimalizáció	Sima függvényérték	Sztochasztikus
Real-coded Genetikus	Globális optimalizáció	Több függvényérték	Sztochasztikus
Particle Swarm	Globális optimalizáció	Több függvényérték	Sztochasztikus

Forrás: Saját összeállítás, Bliss et al. (2011), Gabrel et al. (2014) alapján

A további robosztus optimalizálási módszerekről jó összefoglalót ad Gabrel et al. (2014) cikke. Az algoritmusok kiválasztásánál több szempont alapján kellett mérlegelni. Alapvető célként a legnagyobb területeket átfogó algoritmusok, a hozamgörbe becslési szakirodalomban legelterjedtebb és leghatásosabb módszerek közül próbáltam kiválasztani a legeredményesebbeket és ezeket egymással összemérni. Léteznek további a bemutatottaktól eltérő algoritmusok, ezekből felsorolás szerűen a teljesség igénye nélkül: rács kereső módszer (*grid-search*) a λ paraméter(ek)re majd második körben a β -ra, (Annaert et al. (2013), Virmani (2012)); Sparse grid és HCP algoritmus (Wernen és Ferenczi (2006)); Differential Evolution algoritmus (Gilli et al. (2010)); Powell féle taxisofőr algoritmus (Bliss et al. (2011), Manousopoulos és Michalopoulos (2009)); Generalized Reduced Gradient Algorithm; Gauss-Newton algoritmus (Csajbok (1998)); Newton-Raphson módszer (Schich (1997)); Fuzzy regressziós módszer (de Andrés Sánchez és Terceno Gomez (2004)); Linearizált hibataggal ellátott „naiv” algoritmus (Gauthier és Simonato (2012)); Elsőrendű Taylor sor becslés alapú (Hladíková és Radová (2012)). A következőkben röviden, a teljesség igénye nélkül áttekintem az optimalizáló algoritmusok vázát attól függően, hogy gradiens alapú, direkt kereső, vagy globális optimalizáció alapú.

4.4.1. Gradiens alapú algoritmusok

A gradiens alapú algoritmusok kiszámítják (vagy megbecsülik) a célfüggvény gradiensét, minden egyes paraméterre, minden egyes iterációban. Ez meglehetősen lassúvá és számításigényessé teszi ezt a módszert. Továbbá ki kell számítani (vagy megbecsülni) a Hesse mátrixot is. Az illesztés során két típusú, gradiens alapú algoritmus kerül bemutatásra - amelyeket széles körben használnak - a Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS)-t, az és a Levenberg-Marquard féle nemlineáris OLS módszert. A gradiens alapú módszerek előnye, hogy elméleti hátterük jól kidolgozott és amennyiben a keresési térről előzetes ismerettel rendelkezünk, akkor az egyik legjobb eredménnyel rendelkeznek. A hozamgörbe illesztésnél, változó belső paraméter mellett a keresési térről nincsen előzetes információ és a változó belső paraméternek köszönhetően, ahogyan az 5. ábrán is látható, több helyi minimummal rendelkezik.

Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) A Brodyen-Fletcher-Goldfarb-Shanno algoritmus, kvázi-Newton algoritmus, amely iteratív lokális kvadratikus módon becslő függvényt használ. Becslést használ a Hesse mátrixra, és nem számolja ki egyenként az értékeket, így nagymértékben csökkenti a számolás bonyolultságát. A Newton módszer összes típusának tulajdonsága, hogy elindulnak egy kezdőérték vektortól (γ_0) és egy kvadratikus polinom ($J^0(\gamma)$) másodrendű Taylor sorának segítségével közelít a $J(\gamma)$ függvényt a γ_0 helyen:

$$J(\gamma) \approx J(\gamma_0) + \nabla J(\gamma_0)'(\gamma - \gamma_0) + \frac{1}{2}(\gamma - \gamma_0)' \nabla^2 J(\gamma_0)(\gamma - \gamma_0) \quad (26)$$

ahol ∇ a gradiens operátor ($\partial J / \partial \gamma$) vektor és $H = \nabla^2 J(\gamma_0)$ Hesse mátrixa a $J(\gamma_0)$ -nak, úgy hogy a szimmetrikus mátrix tartalmazza a másodrendű deriváltjait a J -nek: $H = \frac{\partial^2 J}{\partial \gamma \partial \gamma'(\gamma_0)}$. Ezekből a kvázi-newton módszer, a keresés irányát a következőképpen definiálja: $d_j = -H_j^{-1} + \nabla J(\gamma_0)^T$. A lépés nagysága a minimalizáció során változik, mértéke legyen s_j ahol az irányt meghatározó H_j pozitív definit mátrix. Ekkor H_j -t úgy módosítjuk, hogy a d_j megfelelő becslést adjon a Newton irányra. Algoritmus lépései:

1. Paraméterezés: Kezdőértékek megadása γ_0 ; kezdő Hesse mátrix megadása (általában az identitás mátrix) valamint a megállás feltételei – hibahatár (ε), hibafüggvény értéke (Θ)
2. Kiszámolása a $H_j d_j = -\nabla J(\gamma_j)$ feladatnak

3. Kiszámolása az $s_j = \operatorname{argmin} J(\gamma_j + s_j d_j)$
4. Új paraméterértékek meghatározása: $\gamma_{j+1} = \gamma_j + s_j + j d_j$
5. Frissíteni a Hesse-t (H_j):

$$\begin{aligned} g_{j+1} &= \gamma_{j+1} - \gamma_j \\ h_{j+1} &= \nabla J(\gamma_{j+1}) - \nabla J(\gamma_j) \\ H_{j+1} &= H_j - \frac{g_j g_j'}{g_j' h_j} - \frac{H_j h_j h_j' H_j}{s_j' H_j h_j} \end{aligned}$$

6. Ha $|\gamma_k - \gamma_{k+1}| < \epsilon$ akkor következő lépés, máskülönben következő iteráció
7. Ha $\varepsilon < 10^{-8}$ algoritmus megállítása, máskülönben következő lépés
8. Ha $|\eta(\gamma_k)| < \Theta(|\eta(\gamma_k)|)$ algoritmus megállítása, máskülönben következő iteráció

A szakirodalomban széles körben alkalmazott, annak ellenére is, hogy ismeretes azon tulajdonsága, hogy több lokális minimumhely mellett nem találja meg biztosan a globális optimumot (lásd: Ioannides (2003), Fabozzi et al. (2005))

Levenberg-Marquardt (LM) módszer A Levenberg-Marquardt módszer abban a keresési irányba indul el, amely a következő lineáris egyenletrendszernek adja a megoldását:

$$d_j(J(\gamma_j)^T J(\gamma_j) + \varphi_j I) = -J(\gamma_j)^T F(\gamma_j) \quad (27)$$

ahol φ_j skalár határozza meg a nagyságát és az irányát a változásnak d_j -nek. Amikor $\varphi_j = 0$ akkor a d_j megegyezik a Gauss-Newton módszerrel. Ahogyan φ_j végtelen felé halad, d_j értéke közelít a nulla felé, egyre kisebbeket lép a legmeredekebb irányba. Ez a módszer nem követeli meg a Hesse kiszámítását, csak a gradiensekét, így viszonylag gyors módszernek számít azonban csak egy bizonyos irányban halad így hasonlóan a BFGS-hez könnyen megreked lokális minimumhelyeken. A spanyol nemzeti bank használta ezt az eljárást 1995-2005 között. (Ramos (1995) – hivatkozva: Gimeno és Nave (2009))

4.4.2. Direct-Search (DS)

A közvetlen kereső algoritmusok számára nem szükséges a célfüggvény gradiensét kiszámolni. Az algoritmusok viselkedési mintát (*pattern*) keresnek, vagyis egy adott populációt helyez el a térben, amely azt a helyet keresi, ahol az egyik tag a lehető legkisebb értéket

veszi fel egy megadott összefüggés alapján. A direct-search algoritmusok jól használhatóak, ha a függvény nem deriválható kétszer vagy nem folytonos. Az általánosított minta keresés (*generalized pattern search* - *GPS*) minden lépésben a meglévő pontok halmazát vizsgálja meg (*mesh*), amely lépésről lépésre változik. A mesh változását a jelenlegi pont egy hozzáadott érték szorozva a vektorok halmazával (ez a minta). Ha az algoritmus jobb eredményt ér el a célfüggvényben egy ilyen művelettel, akkor az lesz az újabb mesh és így tovább. A GPS algoritmus fixált irányú vektorokat használ fel. A felhasznált kereső algoritmus motorként használható fel amelyet a Nelder-Mead Simplex módszerrel egészítettem ki.

Nelder-Mead Simplex módszer (NM) A Nelder-Mead módszer szimplex ötleten alapul, amely az általánosított formája a háromszögnek, $n \geq 2$ dimenzióban. Az algoritmus $n+1$ megoldással inicializált, amely a szimplex R_n formája. A Nelder-Mead algoritmus négy paramétert használ: reflexió (*reflection*), tágulás (*expansion*), zsugorodás (*contraction*) és összehúzódás (*shrinkage*). Ezeket megadva létrehoz egy populációt, amelyet szimplexbe sorol és valamilyen irányba nő/csökkenti a szimplexet úgy, hogy közben súlyozza a legrosszabb tagokat a populáció célfüggvényével. Amikor új, jobb célfüggvény értéket talál, akkor áthelyezi a középpontot és megismétli a műveletet. A halmaz tágulását, reflexióját (kizárási módszerét), zsugorodását és összehúzódását a megadott paraméterek szabályozzák. Részletes matematikai leírás lásd: Nelder és Mead (1965), Lagarias et al. (1998), hozamgörbére alkalmazva: Manousopoulos és Michalopoulos (2009), Bliss et al. (2011).

4.4.3. Globális optimalizáció

A globális optimalizáló algoritmusok célja, hogy megtalálják a globális minimumhelyet több lokális minimumhely létezése mellett, úgy, hogy magáról a keresési térről kevés információnk van. Előnye, hogy kevés információ mellett nagy valószínűséggel találja meg a globális minimumot, hátránya, hogy heurisztikus, nem a bizonyítottan legjobb eredményt adja, lassú és számításigényes. Mindezen hátrányok ellenére a legígéretesebb eredményeket ezen optimalizáló algoritmusok nyújtották.

Simulated Annealing (SA) A szimulált lehűlési algoritmust Kirkpatrick et al. (1983) írta le először. Ez egy valószínűségi, lokalizált kereső algoritmus, amely felhasználja a

körülötte lévő pontok információját a célfüggvény értékéről és ennek ismeretében mozog a keresési térben. A módszer alapötlete a fémmegmunkálás technikájából származik – a hőmérséklet növelése és csökkentését úgy kell alakítani, hogy a kristályok defektusát a lehető legminimálisabbra kell csökkenteni. Az SA algoritmus kicseréli az adott eredményt egy random közeli értékre, egy valószínűség szerint, amely függ a távolságtól és a körülötte lévő értékektől (az új érték környezetétől) valamint egy globális paramétertől (T) – amelyet hőmérsékletnek neveznek, és amely a folyamat során egyre csökken. A kezdőpont környezetében lévő lokalizált keresés általában egy random kezdő értékkel indul. A környezete ennek az értéknek egy megfelelő mechanizmusként generálódik egy költségfüggvény segítségével. A szomszédok kiválasztása hálózati topológia alapján történik, ahol a helyi optimumok „sekélyek” vagy hasonló mennyiségben és „mélységben” találhatóak meg. Ha csökkenés történik a költségfüggvényben az adott referenciapontok kicserélésre kerülnek, a középpontot az újabb értékkel helyettesítjük és újra kezdjük a keresést. A keresés addig folytatódik, ameddig el nem éri a kívánt hibahatárt. Ahhoz hogy ne rekedjen meg lokális minimumhelyen az algoritmus, a valószínűségi értékeket úgy adjuk meg, hogy az iteráció során az külsőleg változik, ezáltal fontos szerepe van a folyamatban T -nek.

Genetikus Algoritmus (GA) A genetikus algoritmust először Holland (1975) ismertette. Nem létezik a szakirodalomban egységesen elfogadott definíciója, azonban számos közös vonást tartalmaznak ezek a módszerek. Ezek közül három hasonlóságot emel ki Mitchell (1998): a szelekciót (*selection*), keresztezést (*cross-over*) és a mutációt (*mutation*). Ezek a paraméterek különböző megválasztása segíthetnek az optimalizáció gyors(abb) megoldásában. A hozamgörbe számításánál Gimeno és Nave (2009) alkalmazta sikeresen a real-coded típusú genetikus algoritmust. Az általam felhasznált genetikus algoritmus a következő lépéseken halad végig:

1. Kezdő paraméterek meghatározása γ_0
2. Normál eloszlásból generált kezdő populáció a kezdő értékek körül
3. A γ_j -ban lévő egyedek célfüggvény értékének kiszámítása
4. Szelekció (S) meghatározása a γ -halmazban lévőekre vonatkozóan
5. Legjobban teljesítő egyedek szerinti rendezés

6. Új paraméter populáció meghatározása S alapján
7. Az új populációhoz a szülők kiválasztása
8. A keresztezés segítségével az új egyedek létrehozása
9. A legrosszabb S értékkel rendelkezők lecserélése az újonnan létrehozott egyedekkel
10. Véletlenszerűen mutációt hajtunk végre egyedeken (kivéve a középponton)
11. Újraszámoljuk az egész célfüggvény értékét és akkor állunk meg, ha a legjobb S értékkel rendelkező egyed hibaértéke kisebb mint a meghatározott ε , vagy nem tudunk n generáció után lényeges javulást elérni

Az algoritmus gyorsaságát és eredményességét az határozza meg, hogy milyen szelekciós módszer kerül kiválasztásra, a szülők kiválasztása és a keresztezés, a cserélődési aránya az újabb egyedekre és milyen típusú mutációs eljárás kerül felhasználásra. Gimeno és Nave (2009) egy speciális beállítást alkalmaz, jelen tanulmány egy általánosabb módszert alkalmaz. (Ezt a MatLabban implementált GA fejlesztésének köszönhető.)

Particle Swarm Optimalizáció (PSO) Hasonlóan biológiai modellezésből kifejlődött, optimalizálási eljárásra is bevált Particle Swarm módszer, a madarak rajzását írja le komplex módszerrel. Először Eberhart és Kennedy (1995) írta le, majd egyre nagyobb népszerűségnek kezdett örvendeni az egyszerű és gyors(abb) heurisztikus optimalizáló képessége miatt. Bár a genetikus algoritmus jelenleg szélesebb körben elterjedt, jelenleg sokak által kutatott terület: Perez és Behdinan (2007), Bai (2010), Pedersen és Chipperfield (2010), Wang et al. (2013). A módszer lényege, hogy a keresési térbe D darab egyed (particle) kerül elhelyezésre. Ezek az egyedek mozognak a keresési térben három tényezőtől függően – milyen helyen vannak jelenleg, melyik hely volt az, amelyiken eddig a legjobb célfüggvény értékét érték el és melyik az a hely, ahol az összes tag közül valamelyik a legjobb helyen van. Legyen a paraméter-populáció vektora $\vec{\gamma}_j = (\gamma_{j,1}, \gamma_{j,2}, \dots, \gamma_{j,D}) \in Z$ ahol Z a keresési tér és a részek sebessége (*velocity*: mozgási irány+sebesség) $\vec{v}_j = (v_{j,1}, v_{j,2}, \dots, v_{j,D}) \in Z$. A j -edik egyed pozíciója, amelyben a személyes legjobb célfüggvényét elérte legyen p_b pont, Z -ben. Az összes egyedre ez a következőképp írható fel: $\vec{p}_{b,j} = (p_{b,j,1}, p_{b,j,2}, \dots, p_{b,j,D}) \in Z$. Az egész populációra tekintve a legjobb célfüggvény értékkel rendelkező egyed értéke le-

gyen p_g , amely a következőből kapható meg $\vec{p}_g = (p_{g,1}, p_{g,2}, \dots, p_{g,D}) \in Z$. Ezek ismeretében a j -edik egyed paraméter értékei és mozgása a következőképp adható meg:

$$\begin{aligned}\vec{v}_j(t+1) &= w(t)\vec{v}_j(t) + c_1 r_1 (\vec{p}_{b,j}(t) - \vec{\gamma}_j(t)) + c_2 r_2 (\vec{p}_{g,j}(t) - \vec{\gamma}_j(t)) \\ \vec{\gamma}_j(t+1) &= \vec{\gamma}_j(t) + \vec{v}_j(t+1)\end{aligned}\tag{28}$$

Ahol w a tehetetlenségi súly (*inertia weight*) c_1 a kognitív vonzás (*cognitive attraction*), c_2 a szociális vonzás (*social attraction*), r_1 és r_2 egy véletlen szám – általában 0-1 intervallumú egyenletes eloszlásból generálva. A különböző paraméterekre feltételezéssel kell élni az optimalizáláshoz sikerességéhez (Shi és Eberhart (1998), Bai (2010)). Ezek a következők:

$$0 < c_1 + c_2 < 4 \qquad w(t) = w_{max} - \frac{w_{min}t}{t-1}$$

ahol $w_{max} = 0,9$ és $w_{min} = 0,4$. Természetesen ezen beállításokra több lehetőség is van, elsősorban a konvergencia sebességére és pontosságra van hatással.

Az algoritmus lépései:

1. kezdő paraméterek (γ_0) és a populáció (D) meghatározása
2. Részecskés mozgásának elindítása, amelyet a random paraméterek biztosításával perturbálunk
3. Az egyedek célfüggvény értékeinek meghatározása
4. Ha nincsen jelentős javulás a legjobb eredményben ($\gamma = g_{b,j}$) egy adott iteráció után vagy a hibahatár kisebb mint a megadott ε akkor az algoritmus megáll.

A számítások során kevert módszert alkalmazunk, amely megfelelő trade-off-ot nyújt a hozamgörbe számítás sebesség és pontosság között:¹³

- Minden páros lépésben PSO-W algoritmus futása, vagyis a „klasszikus” PSO, amely fent bemutatásra került
- Minden páratlan lépésben PSO-G algoritmus: egyszerűsített algoritmus Pedersen és Chipperfield (2010) alapján - a c_1 paramétert 0-nak vesszük, így a mozgást csak a globális legjobb érték határozza meg

¹³Bliss et al. (2011) alkalmazta ezt hibrid kombináció gondolatát először, a tanulmány újraparametrizálva használja fel az alapgondolatot

4.5. OPTIMALIZÁLÁS TELJESÍTMÉNYÉT MÉRŐ MUTATÓK

A különböző modellek és optimalizáló algoritmusok teljesítményének mérésére a szakirodalomban két szélesen elterjedt és elfogadott mérőszámot különböztetnek meg, amely segítségével az illesztések jóságát (*goodness-of-fit*) szokás eldönteni Bliss (1997b):

1. MAE (*Mean Absolute Error*):

$$MAE = B^{-1} \sum_{b=1}^B |P_b - \hat{P}_b| \quad (29)$$

2. RMSE (*Root Mean Squared Error*):

$$RMSE = \sqrt{B^{-1} \sum_{b=1}^B (P_b - \hat{P}_b)^2} \quad (30)$$

Az RMSE-ben nagyobb értékkel szerepelnek a kiugró hibák, ezáltal jobb információt ad a durva illeszkedési hibákról, míg az MAE kevésbé érzékeny a kiugró adatokra, így egy átlagos illeszkedést kapjuk meg. A két mérőszám jól kiegészíti egymást. A matematikai összefüggést leírja a következő egyenlőtlenség (Bolder és Stréliski (1999)):

$$\frac{1}{\sqrt{B}} RMSE \leq MAE \quad (31)$$

Az egész adatsor illeszkedését aggregáló mutatószámként használható a Hubig (2013) féle átlagos MAE (AMAE):

$$AMAE = T^{-1} \sum_{t=1}^T MAE_t \quad (32)$$

A hasonlóan számolható az átlagos RMSE (ARMSE) mutató:

$$ARMSE = T^{-1} \sum_{t=1}^T RMSE_t \quad (33)$$

Másik fontos aggregált mutatószáma az illesztéseknek a hibatagokból képzett eloszlás normalitása és átlaga. A normalitást a teljes hiba populációján elvégzett Jarque-Bera nem-parametrikus tesztel vizsgáltam meg és a Jarque-Bera tesztstatisztika értékét tüntetem fel. (Ebből számolható a χ^2 -hez tartozó kritikus érték.) Az átlaggal a szisztematikus hibákra (alul vagy felülbecslés) következtethetünk. (A szórást az RMSE mutató átalakításával visszakapható, így érdemben nem ad többlet információt.) További mérőszámokat

is léteznek az illesztés jóságának megítélésére (pl: hit, cheap, rich ratio: Bolder és Stréliski (1999), kezdőértékek perturbálása, kötvények érzékenysége: Bliss et al. (2011), robosztusági mutatók: Gabrel et al. (2014), normalizált és súlyozott RMSE és MAE: Fegyveres (2014)), ezek ismertetésétől a tanulmány terjedeleme miatt eltekintünk.

5. ADATOK ÉS IMPLEMENTÁCIÓ

A hozamgörbék illesztését a MatLab program segítségével hajtottam végre, saját programkód fejlesztésével. Az illesztés során a PSO algoritmust kivéve, beépített optimalizáló algoritmusokat használtam fel, a PSO módszert Chen (2013) kódja alapján az 4.4.3. alfejeztben leírt módosításokkal használtam fel. A következőkben bemutatom a felhasznált adatokat majd az eredményeket értékelő részletes mutatószámokat a köbös Spline és a dinamikus Svensson Genetikus Algoritmust felhasználó módszertanon keresztül. A mutatószámok bemutatása reményeink szerint hozzájárul az aggregált mutatók jobb megértéséhez és így az összes módszer összehasonlításánál a megfelelő polinomok és hozzájuk tartozó algoritmusok eredményeinek kiválasztásához.

Az illesztés során a magyar állampapírok jegyzéseit használtam fel. Az ÁKK hivatalosan publikálja az állampapírok hivatalos árjegyzéseit, ahol a legjobb ajánlati és vételi árat és YTM-et is feltüntetik.¹⁴ Az adatok konvenció alapján csak a három hónapnál hosszabb lejáratú fix kamatozású, kétoldali árjegyzéssel rendelkező forintban denominált papírokat tartalmazza. A felhalmozott kamat a kuponfizetés előtti két nappal már nem átruházható, így az adatokat ennek megfelelően korrigáltuk.¹⁵ A papírok cash-flow táblázatait az ÁKK biztosította. A vizsgált időszak 2001.01.04 és 2014.07.30 közé esik. A kamatszámítási konvenció a diszkont kincstárjegyeknél (1 évnél rövidebb lejárat) actual/360, az államkötvények (1 évnél hosszabb lejárat) esetében actual/actual. Az ÁKK 2003. 01.01 előtt minden papírjára az actual/365 kamatperiódust használta. Ezeket a változásokat az illesztés során figyelembe vettem.

A különböző kibocsájtott kötvények eltérő szerkezetben kerültek bele a számításba, a kibocsájtott állampapírok lejárat szerkezete a megvizsgált években megváltozott. A 2. táblázatban lehet látni, hogy a figyelembe vett papírok mennyisége a 2009-2012-es időszakban elsősorban az IMF hitel miatt lecsökkent, a korábbi mennyiséget csak 2013-

¹⁴www.akk.hu/object.98fc9e70-5bb5-4a39-804e-8e6fe708680d.ivy

¹⁵Erre a szükséges módosításra Fegyveres György hívta fel a figyelmemet.

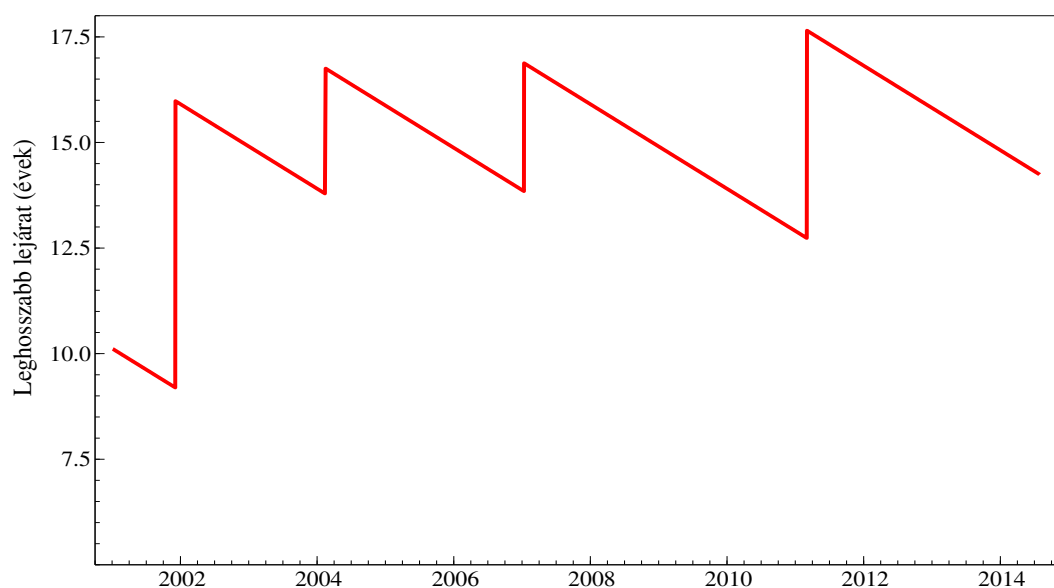
ban érte el. A lejárat szerkezet ebben az időben megváltozott, a rövid lejáratú papírok relatív és abszolút súlya is a portfólióban csökkent. Ez a hatás azonban az IMF hitelnek és nem a piaci kilátások javulásának köszönhető elsősorban.

2. táblázat. Az adott évben felhasznált kötvények lejáratuk szerint

	Σ	$\tau_i \leq 1 \text{ év}$	$1 \text{ év} < \tau_i \leq 3 \text{ év}$	$3 \text{ év} < \tau_i \leq 5 \text{ év}$	$5 \text{ év} < \tau_i \leq 10 \text{ év}$	$10 \text{ év} < \tau_i$
2001	45	24	12	5	2	2
2002	44	26	8	5	3	2
2003	43	25	7	4	4	3
2004	43	23	7	4	5	4
2005	44	24	6	6	4	4
2006	45	23	6	6	6	4
2007	45	22	8	5	6	4
2008	41	19	8	5	6	3
2009	34	16	6	4	5	3
2010	29	14	5	3	5	2
2011	29	14	4	3	5	3
2012	28	14	4	3	4	3
2013	44	26	8	5	3	2
2014*	24	10	4	4	4	2

*2014.01.01-07.30 között piacon lévő papírok

Forrás: Saját eredmény



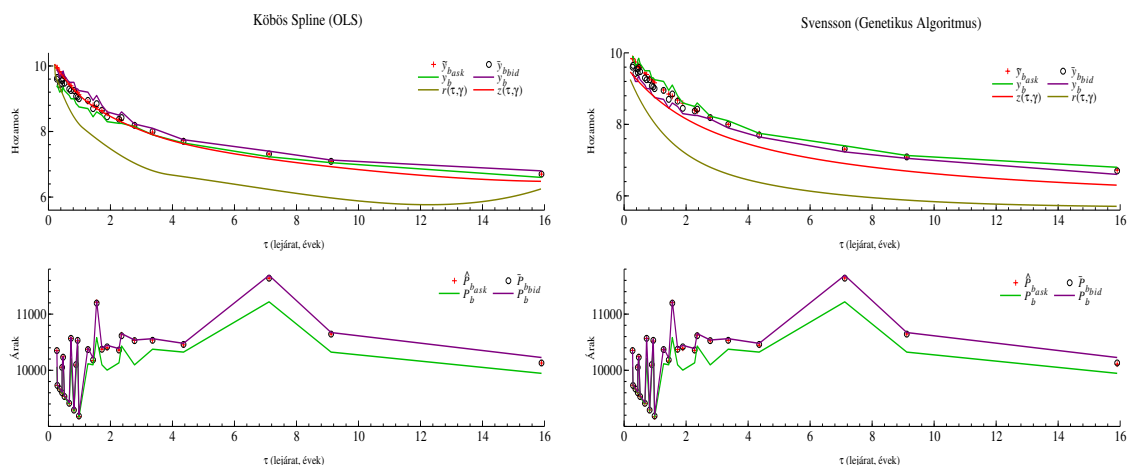
6. ábra. Az állampapírok lejáratának szerkezete 2001-2014 között

Forrás: Saját eredmény

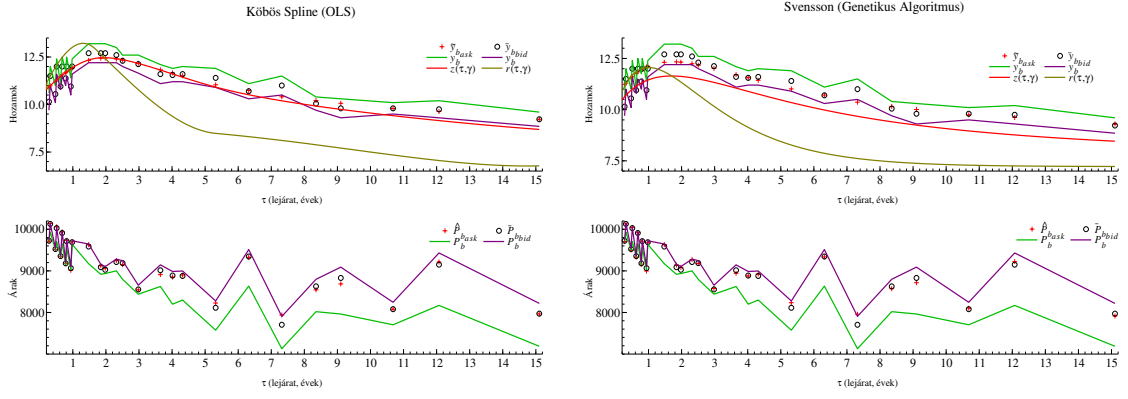
A 6. ábra az illesztésbe bevont papírok lejáratainak az alakulása az időben. Az ábrán látható recék az újonnan kibocsájtott leghosszabb lejáratú papírok lejáratának csökkenéséből keletkeznek. Az ábrán jól mutatható a 2011. 03. 02-án, az ÁKK kibocsájtotta az eddigi leghosszabb 17 éves lejáratú papírját (2028/A – A281022A11).

5.1. A HOZAMGÖRBE ILLESZTÉS EREDMÉNYEINEK RÉSZLETES BE-MUTATÁSA

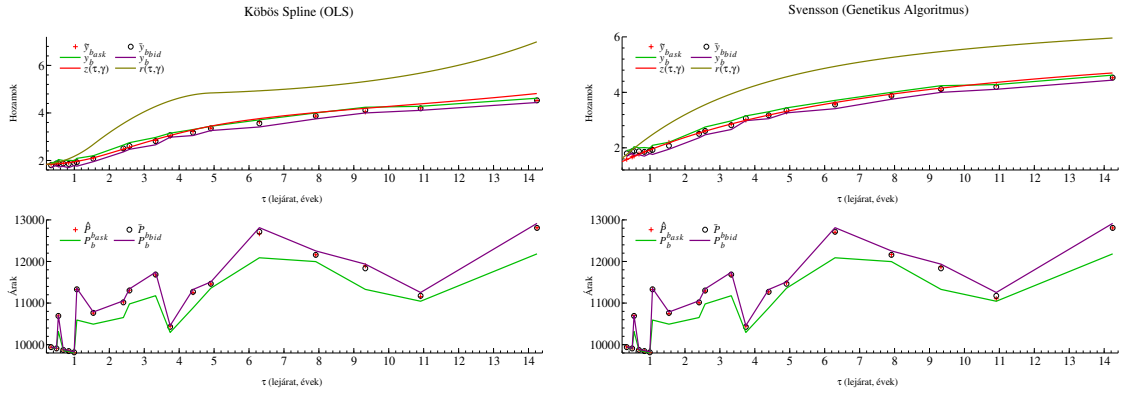
A bemutatott adatokon különböző polinomokkal és algoritmusokkal végeztem el az illesztéseket. A következőben a Spline módszert és a dinamikus Svensson genetikus algoritmus-sal számolt illesztéseket hasonlítom össze és mutatom be a különböző mérőszámokat. A két illesztési módszert bemutató jelleggel használom fel, kiválasztásuk önkényes, segítségükkel a későbbiekben található aggregált mérőszámok mögötti jelentést szeretném részletesebben feltárni. A 7, 8, 9 ábrákon három kiválasztott naphoz tartozó zero-kupon hozam ($z(\tau, \gamma)$) illesztéseket mutatom be különböző hozamgörbe lefutási típusoknál. Az ábrák, sorrendben az inverz, púpos és sima hozamgörbére adnak 1-1 példát. A legfőbb különbség az illesztett két módszer között a hozamgörbe hosszú oldalának lefutásában található. Míg a Köbös Spline „túlzottan” rugalmas a hosszú oldalon - ez a forward hozamgörbében is éles visszakanyarodást okoz - addig a Svensson az illesztett polinom tulajdonságai miatt egy hipotetikus értékhez tart a hosszú oldalon.



7. ábra. Átlagos árhoz való illesztés eredménye 2002. Január 2.-án
Forrás: Saját eredmény



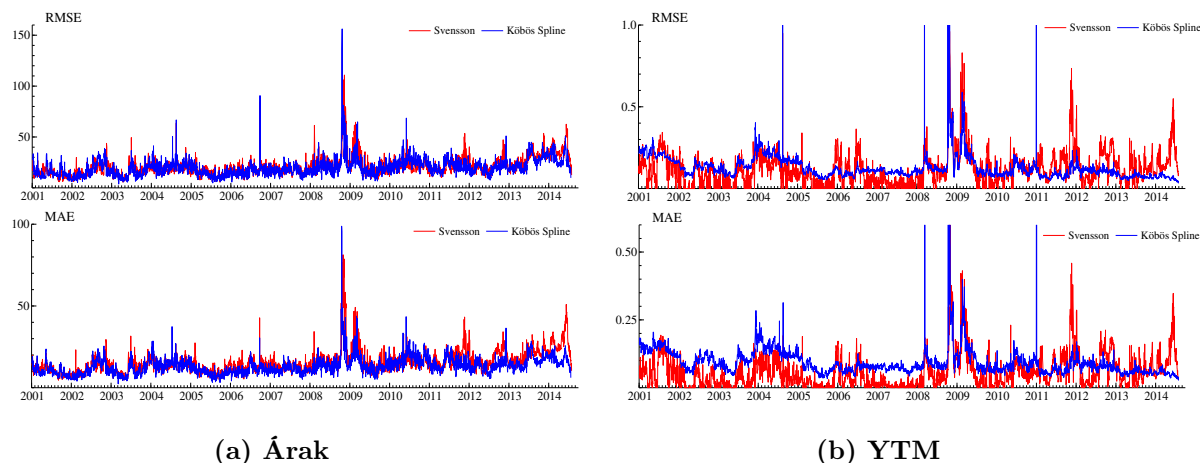
8. ábra. Átlagos árhoz való illesztés eredménye 2008. Október 20.-án
Forrás: Saját eredmény



9. ábra. Átlagos árhoz való illesztés eredménye 2014. Július 29.-én
Forrás: Saját eredmény

A becsült árak ($\hat{P}_b$) a 8. egyenlet megoldásával kapjuk. A 4. és 7. összefüggéseket felhasználva megkapjuk a vissza számolt hozamokat ($\tilde{y}_b$) és a forward hozamokat ($r(\tau, \gamma)$). Az ábrákon a piros és zöld vonallal a Bid-Ask spreadhez tartozó intervallumokat tüntettem fel. A Bid-Ask spreadből számolt átlagos árakat/hozamokat, amelyekhez az optimalizálást elvégeztem, körrel találhatók meg, az illesztés annál jobb minél közelebb vannak az empirikus átlagos ár/hozam az illesztett ár/hozamhoz. Az eltérésekből az 20. összefüggés alapján számolhatjuk a hibastatisztikákat, amennyiben illesztett ár/hozam beleesik a Bid-Ask spread intervallumba úgy a hibát 0-nak tekintjük. A módosított hibák felhasználásával a 29. és 30. egyenletek alapján megkapható az RMSE és MAE mutatók. A 10. ábrán látható RMSE statisztikák megmutatják, hogy az adott napon mennyire fordult elő extrém hibák, amikor a számított érték jelentősen eltért az átlagos értéktől. A MAE

statisztikák az abszolút átlagos hibára adnak proxyt. A két itt bemutatott módszer közül az RMSE és MAE átlagolt statisztikákban az árakra a Spline által használt illesztés, míg a hozamokra (YTM) a Svensson némileg jobb illeszkedést ért el.

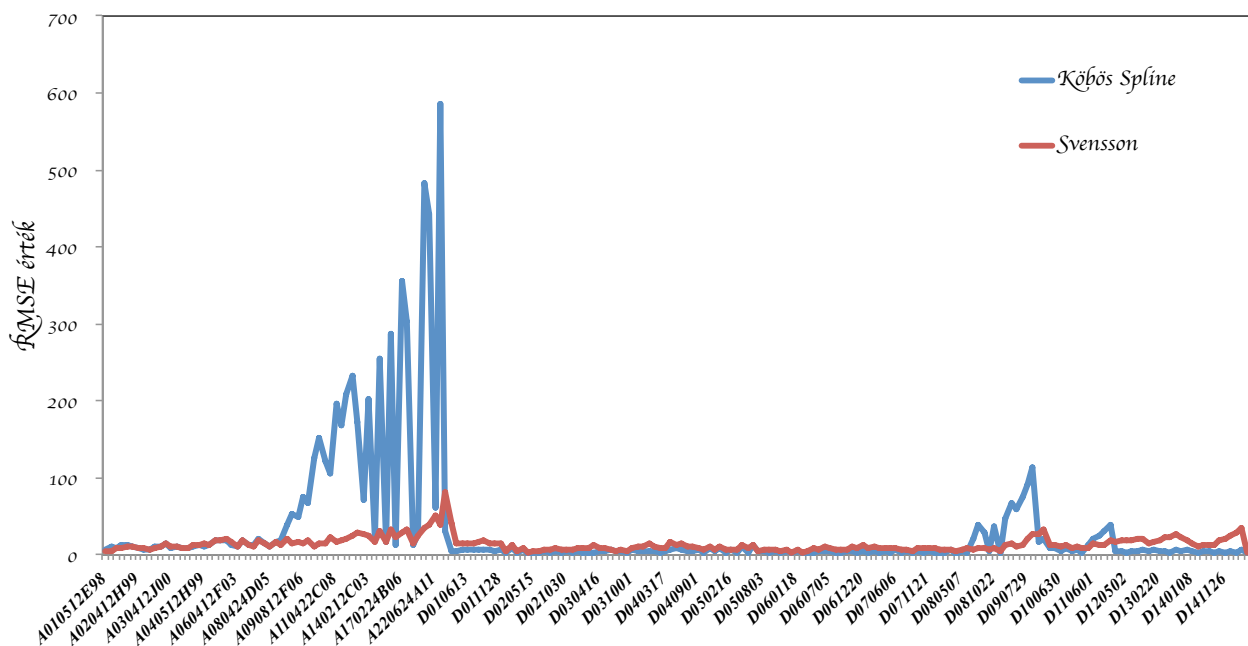


10. ábra. Napi hibastatisztikák értékei: Köbös Spline (OLS) és Svensson (GA)

Forrás: Saját eredmény

A napi értékek átlagos hibának szórásában a Köbös Spline (129,49) jobbnak bizonyult a Svenssonnál (161,35). A két módszer közötti különbség azonban elhanyagolható, mind két esetet – a szakirodalom alapján – kiváló illeszkedésnek mondhatjuk. Az RMSE és MAE mutatószámokat nem csak az egyes napokra, hanem a különböző állampapírokra is megvizsgáltam, így specifikus információhoz jutunk a (modell által) félreárazott kötvényekről. Ehhez a vizsgált időszakban előforduló kötvények számított és átlagos értékeinek eltérését kell elosztani a papír előfordulásának számával. A 11. ábra alapján két következtetésre juthattam:

- A használt módszertan eltérő (kiugró) hibastatisztikát ad a különböző papírokhoz (piac viselkedésére eltérő következtetésekre juthatunk)
- A vizsgálatba bekerült kötvények mindegyike fontos, nincsen olyan kötvény amelyet „outlierként” kellene (lehetne) kezelni.
- A súlyozás miatt a hosszú lejáratú kötvények szisztematikusan rosszabb értékekkel rendelkeznek, mint a rövid lejáratú kötvények



11. ábra. Állampapírok RMSE értékei

Forrás: Saját eredmény

Fontos az illesztésből megmaradt hibák eloszlásának vizsgálata. Az illesztés során felmerülő szisztematikus hibákat a Jarque-Bera normalitás tesztjével lehetséges tesztelni (pl.: Hendry (1995)). Az 3. táblázat az egész idősorra vett hibákra vizsgált teszt eredményeit mutatja be, míg a 12. ábra az illesztett eloszlásokat.

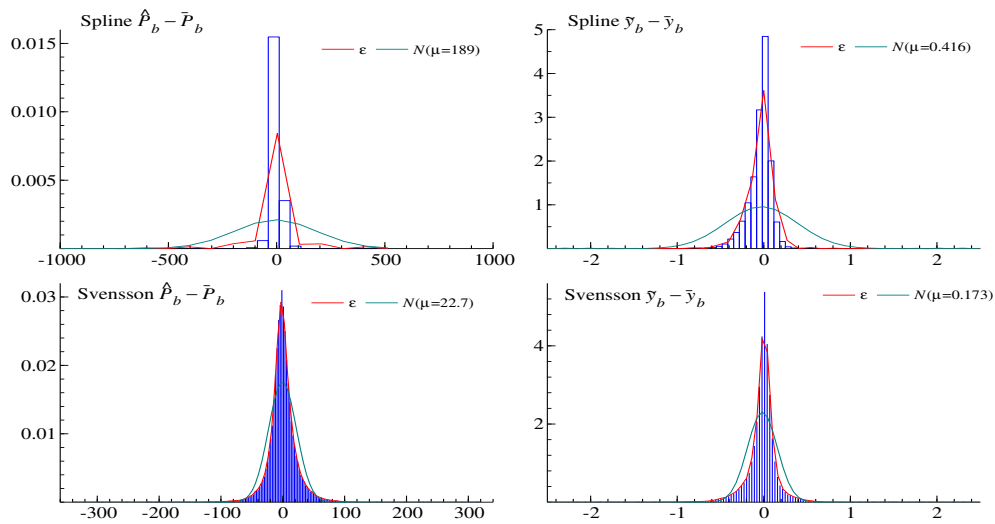
3. táblázat. Teljes idősorra vett hibák eloszlásának statisztikája és Jarque-Bera teszt értékei

	<i>Köbös Splíne</i>		<i>Svensson</i>	
	Árak	Hozamok	Árak	Hozamok
Átlag	0.57718	-0.042179	-0,5023	-0,0161
Szórás	21.2918	0,14016	22,7161	0,173
Jarque-Bera teszt*	$1,40 \times 10^6$	$5,39 \times 10^6$	$3,53 \times 10^5$	1.59×10^6

*A Jarque-Bera teszt $\mathcal{H}_0$ hipotézisét, minden esetben 1% mellett elvetjük.

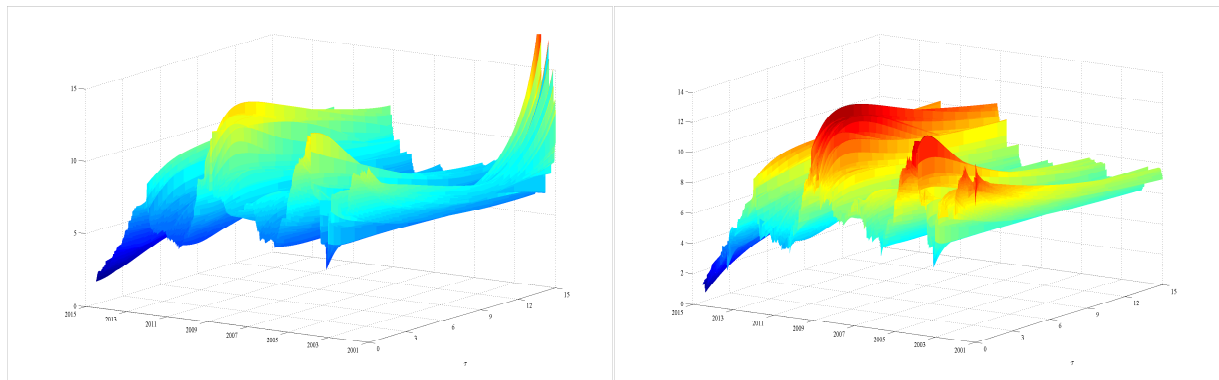
Forrás: Saját eredmény

Bár egyik illesztés esetében sem tudjuk a normalitást elfogadni (az eloszlások inkább *Student-t* eloszlás alakúak, illetve a hibák speciális számolása miatt ez nem meglepő, hogy nem normál eloszlást követnek) a 3. táblázat és 12. ábra azt sugallja, hogy a Svensson polinomot felhasználó illesztés az egész idősorra 0-hoz közelebbi átlaggal de nagyobb szórással rendelkezik, míg a köbös Splíne kisebb szórással, de rosszabb átlaggal.



12. ábra. Teljes idősorra vizsgált árakhoz és hozamokhoz tartozó hibák eloszlásai
 Forrás: Saját eredmény

Végül az illesztések eredményét az idősoros zéró-kupon hozamokat mutatom be. A 13. ábrán több tulajdonsága is megjelenik az illesztés során felhasznált polinomoknak.



(a) Kőbös Spline

(b) Svensson

13. ábra. Zéró-kupon hozamgörbék idősorai
 Forrás: Saját eredmény

A két módszer közötti illesztésbeli különbségek:

- Teljes hozamgörbe volatilitása – hirtelen változás az egyik napról a másikra
 - Kőbös Spline volatilitesebb idősora, mint a Svenssoné
- Hosszú oldalon lévő hozamok „csapkodása”
 - Spline módszertanban „elszálló” hosszú hozamok

- Rövid oldalon lévő hozamok „csapkodása”

– Svensson módszertan hajlamosabb a volatilis rövid hozamokra

Összességében, mindkét módszerrel jó illeszkedést sikerült elérni, a részletesen bemutatott teszt statisztikák segítenek a polinomok tulajdonságai által determinált hibák feltárásánál. A köbös Spline némileg jobban illeszkedett az árakra, míg a Svensson a hozamokra. A következőkben a többi algoritmussal végzett illesztések eredményeit mutatom be.

5.2. MÓDSZEREKET ÖSSZEHASONLÍTÓ MÉRŐSZÁMOK

A fenti elemzés alapján ebben a fejezetben végigtekintem a teljesítményt mérő aggregált mutatókat az összes lefuttatott polinomra és algoritmusra. A dinamikus illesztéseket saját fejlesztésű tanuló algoritmus folyamattal meghatározott kezdőértékekkel, inverz Macaulay értékkel súlyozott átlagos árakra végeztem el. Az eredményeket nem szűrtem, így a teljes RMSE értékek magasak amennyiben az algoritmus konvergenciája nem volt sikeres. (Amennyiben bizonyos megfigyelési napokat kiszűrünk, ezek az értékek javulnak.) A 5. és 5. táblázatok a teljes mintából számított RMSE és MAE mérőszámokat mutatja be az árra és hozamra vetítve a 33. és 32. egyenletek alapján. A legjobb ARMSE és AMAE a benchmarkként használt Köbös Spline módszer adta, így az ÁKK jelenlegi illesztési módszerét megalapozottnak találtam. A teljes hozamgörbe 4-6 paraméterrel rendelkező modellekbe sűrítése viszont elfogadható információvesztéssel jár, amennyiben azok idő-sorosan értelmezni lehet. Az eredmények azt mutatják, hogy a 6 paraméteres Svensson modell Simulated Annealing (SA) érte el közülük a legjobb értékeket, míg a 4 paraméteres Nelson-Siegel modell Genetikus Algoritmussal (GA) is megfelelő következtetésekre enged. A 5. táblázat emellett rámutat arra, hogy a helytelen optimalizációs eljárás használata (pl.: BFGS) a Svensson vagy Legendre polinomok esetében rossz illesztésekhez vezet.

4. táblázat. Teljes mintából az árra számított ARMSE és AMAE

	ARMSE		AMAE			
<i>Köbös Spline</i>	16.6679		13.0167			
	<i>Nelson-Siegel</i>		<i>Svensson</i>		<i>Legendre</i>	
	ARMSE	AMAE	ARMSE	AMAE	ARMSE	AMAE
<i>BFGS</i>	22.1506	16.4149	52.4244	39.0036	255.6136	193.8553
<i>LM</i>	29.9457	21.9677	38.5968	29.3058	20.6255	15.2613
<i>DS+NM</i>	22.8818	17.1503	19.9448	14.7032	80.4119	66.3581
<i>SA</i>	22.9959	17.3876	20.4759	15.1485	23.5361	17.1186
<i>GA</i>	22.8503	17.0541	21.0202	15.4397	145.618	122.3228
<i>PSO</i>	27.9816	21.6654	25.5976	19.7974	61.42	48.672
<i>Fix belső paraméter + BFGS</i>	24.7106	18.5702	20.6193	15.092	23.1187	16.6791
	$\lambda_1 = 2.5550$		$\lambda_1 = 6.4525, \lambda_2 = 1.7285$		$\lambda_1 = 0.4488$	

Forrás: Saját eredmény

A hozamokhoz számított becslésben a genetikus algoritmussal számított Svensson adta a legjobb eredményt és hasonlóan az ár-hibastatisztikákhoz, a Nelson-Siegel modell nem ad érdemileg rosszabb illeszkedést.

5. táblázat. Teljes mintából az hozamokra visszszámított ARMSE és AMAE

	ARMSE		AMAE			
<i>Köbös Spline</i>	0.094012		0.040348			
	<i>Nelson-Siegel</i>		<i>Svensson</i>		<i>Legendre</i>	
	ARMSE	AMAE	ARMSE	AMAE	ARMSE	AMAE
<i>BFGS</i>	0.13663	0.067691	0.27859	0.206	0.79496	0.72161
<i>LM</i>	0.20078	0.11454	0.20017	0.12398	0.1633	0.079797
<i>DS+NM</i>	0.15897	0.083441	0.12923	0.060898	1.1232	0.65939
<i>SA</i>	0.16155	0.084956	0.12076	0.05785	0.1447	0.071078
<i>GA</i>	0.13791	0.070088	0.12041	0.058131	2.3498	1.4657
<i>PSO</i>	0.22484	0.12907	0.20842	0.11609	0.59107	0.35107
<i>Fix belső paraméter + BFGS</i>	0.17624	0.093764	0.12535	0.060383	0.14231	0.06603

Forrás: Saját eredmény

Bár a kisebb érték, jobb illeszkedést jelent, az arányok az illeszkedésbeli pontosságról nem adnak információt. (A klasszikus magyarázhatósági módszerek (*encompassing* - pl: Hendry (1995, 14. fejezet)) nem felhasználhatók a belső λ paraméterek miatt.) A vizsgált időszak

ár hibáinak átlaga némi viszonyíthatóságot biztosít. A táblázat az összes kötvény összes napra illesztett hibáit tartalmazó leíró statisztikákat mutatja be. Az hibák átlaga interpretálható lenne - a modell valóságot leíró feltételezése mellett - a piacon lévő arbitrázs mentesség hipotézise szerint, azonban ahogyan a táblázat is bemutatja eltérő modellek eltérő illesztési módszertannal radikálisan más következtetésekre vezetne. A Jarque-Bera teszt statisztikája mindegyik esetben a teljes hiba-populáció nem-normalitására utal.

6. táblázat. Kötvények illesztésénél elkövetett összes hiba leíró statisztikája

	Átlag		Jarque-Bera			
<i>Köböcs Spline</i>	0.57718		1.40×10^6			
	<i>Nelson-Siegel</i>		<i>Svensson</i>		<i>Legendre</i>	
	Átlag	Jarque-Bera	Átlag	Jarque-Bera	Átlag	Jarque-Bera
<i>BFGS</i>	-0.68599	2.83×10^5	26.1714	5.77×10^6	-160.817	7.63×10^5
<i>LM</i>	1.0958	9.54×10^5	13.3141	2.32×10^7	1.4141	4.87×10^5
<i>DS+NM</i>	-0.19049	2.32×10^5	-0.64937	7.83×10^5	12.9982	3.47×10^5
<i>SA</i>	0.16053	2.33×10^5	-0.56095	3.65×10^5	0.66945	5.25×10^5
<i>GA</i>	-0.36939	2.48×10^5	-0.5023	3.53×10^5	-87.8709	4.13×10^5
<i>PSO</i>	2.6815	2.76×10^5	1.9519	3.50×10^5	8.2129	4.24×10^5
<i>Fix belső paraméter + BFGS</i>	0.19499	2.31×10^5	-0.34214	4.98×10^5	-0.81492	6.09×10^7

Forrás: Saját eredmény

Végül a módszertan futtatásához kapcsolódó eredményeket mutatom be. A 7. táblázat bemutatja, hogy az egyes polinom és a hozzátartozó algoritmus egy naphoz szükséges illesztésre vetítve mekkora számolási igényrel rendelkezik. Amennyiben ezt az értéket megszorozzuk a 3380 megfigyelési nappal, akkor megkapjuk a valóságos futtatáshoz szükséges időt. Ez több esetben is napokat vett igénybe. Az átlagos számítási idő mellett fontos mutató a konvergálások száma. Bizonyos esetben (pl. LM vagy BFGS) az algoritmus gyorsabban leállt, mint a konvergenciához kapcsolatos kritériumok teljesültek volna (hiba vagy célfüggvény értékének változása). Ezen esetben további kalibrálással lehetséges elérni, hogy az algoritmus konvergáljon, természetesen az átlagos számítási idő (exponenciális) növekedése fejében. A kalibrálási tapasztalatok azt mutatják, hogy a konvergencia szám hiányának növekedésével nem szükségszerűen, vagy legalábbis nem egyenesen arányos mértékben növekednek a teljesítmény mutatók értékei, főként a sztochasztikus optimalizálási módszerek esetében.

7. táblázat. Egy illesztés átlagos számítási ideje (mp) és konvergenciák hiánya (db - 3380-ból)

	Átlagos számítási idő		Konvergencia hiánya			
<i>Köbös Spline</i>	0.039822		5			
	<i>Nelson-Siegel</i>		<i>Svensson</i>		<i>Legendre</i>	
	Átlagos számítási idő	Konvergencia hiánya	Átlagos számítási idő	Konvergencia hiánya	Átlagos számítási idő	Konvergencia hiánya
<i>BFGS</i>	0.3325	3372	0.25578	3387	2.6683	70
<i>LM</i>	0.58718	3284	1.0343	3380	5.9592	0
<i>DS+NM</i>	1.3171	132	12.2258	1544	34.929	41
<i>SA</i>	14.5798	14	21.9186	14	33.9935	0
<i>GA</i>	24.813	0	28.4644	2	7.6735	715
<i>PSO</i>	9.5418	12	9.8697	28	9.364	6
<i>Fix belső paraméter + BFGS</i>	0.20559	50	0.27324	8	1.1532	772

Forrás: Saját eredmény

Összességében az itt bemutatott táblázatok a különböző modellek és optimalizáló algoritmusok illeszkedéseinek aggregált mutatószámait mutatja be. Az itt bemutatott eredmények vágási pontként alkalmazhatóak a különböző polinomok és algoritmusok közötti választásban. Az aggregált mutatók bár alkalmatlanok az egyértelmű modellezési preferenciák kialakítására, a túlzottan sok típusú lehetőség közül kizárhatóvá teszi az alkalmatlanokat. A Köbös Spline módszer a legjobban illeszkedő zéró-kupon hozamgörbét eredményezi, viszont nagy paraméter szám (8) igénye és idősorsan értelmezhetetlensége miatt jó alternatívát adnak az itt bemutatott NSS modellek. A következő fejezetben a Nelson-Siegel genetikus algoritmussal illesztett paraméter értékeit fogom idősorosan elemezni, a hozamgörbében található kockázatok feltárásához.

6. GENERAL AUTOREGRESSIVE SCORE MODELL

A kapott paramétereket pénzügyi idősoros modellek elemzésénél felhasználható módszerekkel fogjuk elemezni. A pénzügyi folyamatok legtöbbször heteroszkedasztikusak, a változók varianciában tendenciák figyelhetők meg így átlételes a zéró-kupon hozamok kockázatainak változását tudjuk vele megvizsgálni. Engle (1982) híres papírja az ARIMA

módszereket terjesztette ki a variancia modellezésére. Ennek első típusai az ARCH modellek (AutoRegressive-Conditional-Heteroskedasticity) majd az ebből kifejlődő GARCH (Bollerslev (1986)) modellek. Ezen modellek eredményei, nem az idősor szintjének előrejelzése, hanem az idősor várható kockázatának (varianciájának) előrejelzése. A következőben bemutatott általánosított autoregresszív score modell (GAS, Creal et al. (2008), Harvey és Chakravarty (2008), Laurent (2013), Harvey (2013)¹⁶) az állapottér modellek (*State Space Models* - lásd pl.: Durbin és Koopman (2012)) továbbfejlesztéséből alakultak ki, és napi adatok volatilitását hivatottak modellezni. Fontos tényező a pénzügyi modelleknél, a nem-normális, ferde és vastag farkú eloszlások, amelyeket magasabb momentumok figyelembevételével lehet kiküszöbölni. A GAS modellek ezen nem-normális eloszlásokat (tipikusan *Student-t*) a modell likelihood függvény segítségével úgy tudja kezelni, hogy az esetleges sokkok lefutását adaptálja a log-likelihood függvényben. Harvey (2013) számos pozitív tulajdonságát írja és bizonyítja be ezen modelleknek, ezzel segítve a teszt-statisztikák robusztusságának elérését. A feltételes szórás dinamikáját adott eloszlásra épülő modell likelihood függvényének minimumához kapcsolódó függvényformula segítségével - a sokkal - simítja. A likelihood függvényt a pénzügyi modell által a NS paraméterekre (ξ) illesztett szórások hibái segítségével számolva, Haavelmo-eloszlás (Hendry és Johansen (2014)) alapján a likelihood függvény:

$$p(\xi, \psi) = p(\xi_1, \psi) \prod_{t=2}^n p(\xi_t | \xi_1, \dots, \xi_{t-1}, \xi) \quad (34)$$

Ahol, ξ a GAS modell időtől függő paraméterei: $\xi_t = (f_t, \rho)$, ahol $f_t(\sigma_t)$, vagyis a feltételes szórás idő függvénye, míg ρ fix paraméterek. Célszerű a log-likelihood függvényt ($\ell(\cdot)$) venni, a a t-edik megfigyelés hozzájárulása a log-likelihood értékhez: $\ell_t = \log p(\xi_t | \xi_1, \dots, \xi_{t-1}, f_1, \dots, f_t, \rho)$. Ekkor a GAS modell szerkezete a következő (Blasques et al. (2014)):

$$\begin{aligned} \xi_t &\sim p(\xi_t | \Xi_{t-1}, f_t, \rho), & \Xi &= \xi_1, \dots, \xi_t \\ f_{t+1} &= \vartheta + Bf_t + As_t \\ s_t &= S_t \cdot \nabla_t \end{aligned} \quad (35)$$

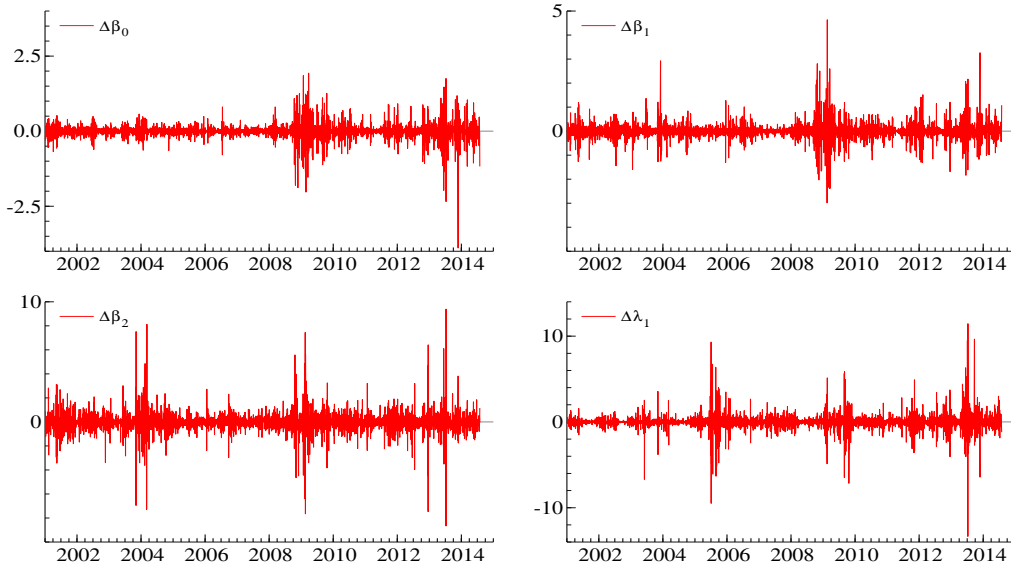
Ahol (∇_t) a score és (S_t) az Információs mátrix inverze, df szabadságfokkal rendelkező *Student-t* eloszlást feltételezve adatgeneráló folyamatnak (Data Generating Process -

¹⁶Harvey a dynamic score models (DCS) nevet hangsúlyozza, szerinte a score és nem az auto-regresszív tulajdonság a lényeges.

DGP) a ∇_t és S_t dinamikus egyenletei:

$$\begin{aligned}
\nabla_t &= \frac{\partial \ln p(\xi_t | \Xi_t - 1, f_t, \rho)}{\partial f_t} = \frac{1}{2\sigma_t^2} \left(\frac{\iota_t \xi_t^2}{\sigma_t^2} - 1 \right) \\
\iota_t &= \frac{df + 1}{(df - 2) + \xi_t^2 / \sigma_t^2} \\
S_t &= \mathcal{I}_{t-1}^{-1} = -E_{t-1} \left[\frac{\partial^2 \ln p(\xi_t | \Xi_t - 1, f_t, \rho)}{\partial f_t \partial f'_t} \right]^{-1} \\
&= \left(\frac{df}{2(v + 3)\sigma_t^4} \right)^{-1}
\end{aligned} \tag{36}$$

A modellezéshez a GARCH(2,1) modellhez hasonló összefüggést használható fel a kockázatok leírásához:¹⁷



14. ábra. Dinamikus Nelson-Siegel modell paramétereinek volatiliása

(Genetikus Algoritmusból)

Forrás: Saját eredmény

$$\begin{aligned}
\Delta\gamma_j &= \xi_t = \sigma_t v_t & v_t &\sim tID(0, 1, df) \\
\sigma_t^2 &= \varpi + \pi_1 \sigma_{t-1}^2 + \pi_2 \sigma_{t-2}^2 + \varrho s_t
\end{aligned} \tag{37}$$

A modell interpretációja hasonló, a GARCH modellekéhez, a ϱ paraméter a hosszú távú feltételes varianciának a lefutását adja meg (hosszú távú memória), míg a (π_1, π_2) a sokkokra adott válasz. A GAS modell ismeretes előnye, hogy „gyorsan” lecseng, vagyis míg a GARCH modellek egy-egy sokk után irreálisan lassan adaptálódtak az igazi piaci

¹⁷Creal et al. (2013) megmutatja, hogy a GAS modellekből visszajuthatunk a különböző GARCH modellekhez.

környezetehhez, addig a GAS modell gyorsabb reakcióra képes. A modellek illesztését az *Oxmetrics 7*, *G@RCH 7.0* programcsomag (Laurent (2013)) segítségével a hajtottam végre. Az illesztés eredményeit a 8. táblázat mutatja:

8. táblázat. GAS(2,1) modellek eredményei

$\Delta\gamma$	ϖ				π_1		π_2		ϱ		df				
	$\hat{\varpi}$	std. hiba	t -ért.	$\hat{\pi}_1$	std. hiba	t -ért.	$\hat{\pi}_2$	std. hiba	t -ért.	$\hat{\varrho}$	std. hiba	t -ért.	$\hat{df}$	std. hiba	t -ért.
$\Delta\beta_0$	0.002	0.001	2.630	0.541	0.079	6.817	0.769	0.105	7.314	0.243	0.100	2.428	3.070	0.238	12.93
$\Delta\beta_1$	0.004	0.001	3.822	0.532	0.050	10.64	0.824	0.066	12.57	0.185	0.061	3.049	3.429	0.259	13.26
$\Delta\beta_2$	0.052	0.015	3.442	0.469	0.061	7.722	0.752	0.080	9.455	0.197	0.084	2.348	3.074	0.209	14.68
$\Delta\lambda_1$	0.008	0.005	1.806	0.536	0.058	9.193	0.801	0.080	10.07	0.253	0.072	3.541	2.943	0.207	14.22

Forrás: Saját eredmény

A modell eredményei azt sugallják, hogy a hozamgörbe paraméterei csak enyhény reagálnak a hosszú távú ϱ folyamatokra (a score-ban lévő sokkokra) és jóval meghatározóbb a rövid távú folyamat, a korábbi két megfigyeléshez tartozó variancia (π_1, π_2) . A felhasznált *Student-t* eloszlás szabadságfoka 3-as érték körül található és mindegyik esetben szignifikáns, vagyis a DGP nem normális eloszlásból lett generálva. Az adatgeneráló folyamat pontos jóságának vizsgálatára Pearson féle tesztet végeztem el. (Palm és Vlaar (1997), - hivatkozza: Laurent (2013)) A következő táblázat a v_t leíró statisztikáit is be mutatja. A Pearson statisztika 40 megfigyelésre visszatekintő, hüvelykujjszabályként a megfelelően „alacsony” p-értékek mellett fogadható el az elméleti és tapasztalati eloszlások egyezését. Csak szimulációs eredményei vannak a tesztnek, aszimptotikus eloszlás alapú bizonyítása nincsen, így kellő szkepticizmussal kell kezelni a Pearson teszt eredményeit.

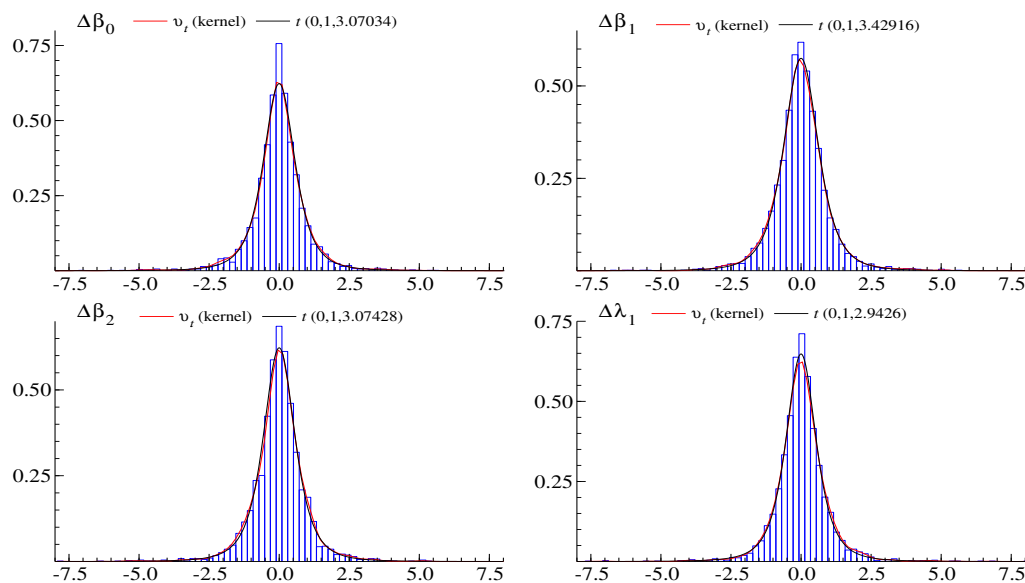
9. táblázat. GAS(2,1) modellek innovációs folyamatainak leíró statisztikái és kiszélesített Pearson tesztje

	$\Delta\beta_0$	$\Delta\beta_1$	$\Delta\beta_2$	$\Delta\lambda_1$
Log-likelihood	1540.027	137.110	-3058.684	-2511.439
Átlag	-0.002	-0.001	0.003	0.003
Variancia	0.068	0.135	0.763	0.919
Ferdeség	-1.292	0.889	0.183	0.109
Csúcsosság	30.150	22.990	26.684	40.189
Pearson stat.	72.471	33.2640	63.1900	39.9168
Pearson p-érték	0.000899	0.728348*	0.008437	0.429189*

$T = 3790$; *A $\mathcal{H}_0$ hipotézis elvethető, további vizsgálatokat érdemes folytatni.

Forrás: Saját eredmény

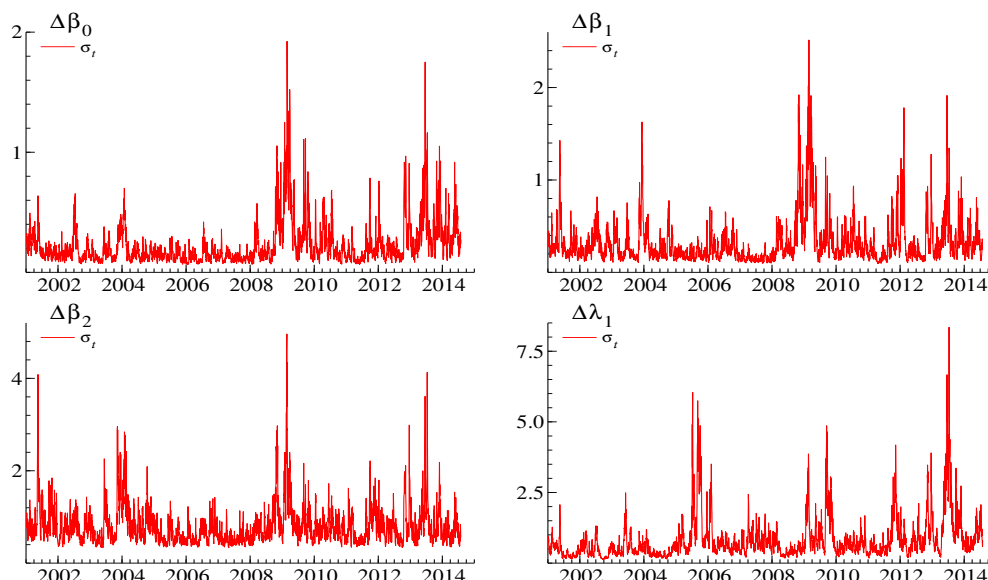
A 15. ábra a hibatagok histogramját és az elméleti *Student-t* eloszlásokat mutatja be.



15. ábra. Illesztett GAS(2,1) modell DGP elméleti és empirikus eloszlása

Forrás: Saját eredmény

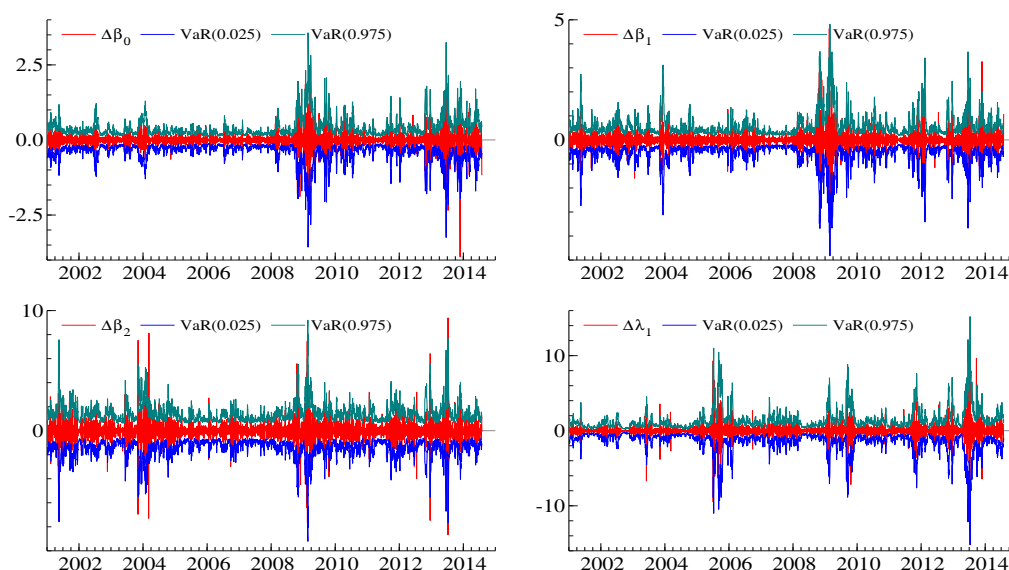
A modell segítségével proxyt kapunk a kockázatok alakulására a feltételes szórásokkal. A 16. ábra a kockázatok alakulását mutatja be. Az ábrán jól lehet látni a 2008-as válságban végbemenő kockázatok emelkedését, valamint 2013 év elején végbemenő tőkekimenekítési hullámot Magyarországról.



16. ábra. Feltételes szórások alakulása az időben

Forrás: Saját eredmény

A számított feltételes szórások és *Student-t* eloszlások segítségével könnyedén kiszámítható a 2.5% és 97.5% kvantilisek, amelyeket áttételezen a hozamgörbe VaR-jához használhatunk majd fel.

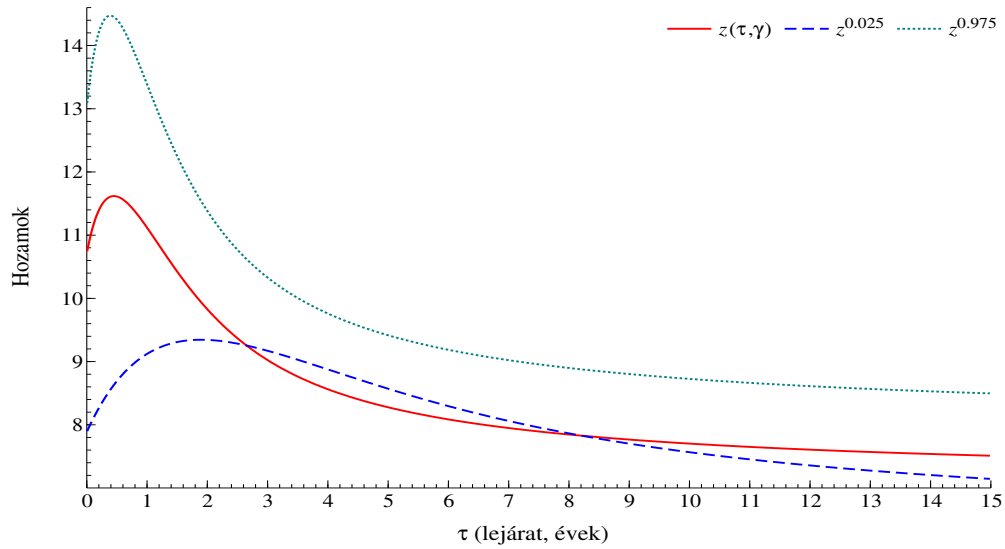


17. ábra. Paraméterek alakulásának kockázati értékei (2.5% és 97.5%)

Forrás: Saját eredmény

A kapott értékeket a 2008. Október 20.-i napra megvizsgálva előállítható az *egész hozamgörbe* VaR-ja. A módszer érdekessége, hogy mivel a λ_1 paraméterre is elvégeztük az illesztést a hozamgörbe púposága is megváltozik, így az előállított hozamgörbe rövid és hosszú oldalainak csökkenése (2, 5% kvantilishez tartozó), a közepes távon magasabb hozamokat eredményez mint a sima előállított hozamgörbe.¹⁸

¹⁸Ez a jelenség akár interpretálható lenne egy extrém piaci megnyugvási hipotézisként: egy hirtelen pozitív sokk végigvonul a hozamgörbén, viszont a kételkedő befektetők az "úgyis jön majd egy negatív hatás" stratégiát követve emelkedőleg hatnak a közepes lejáratok hozamait.



18. ábra. Nelson-Siegel hozamgörbe VaR: 2008. Október 20.

Forrás: Saját eredmény

Összessefoglalva, a bemutatott GAS(2,1) modell segítségével sikerült a Nelson-Siegel genetikus algoritmussal optimalizált koefficiensek idősoros kockázatainak elemzése. A GAS (2,1) modell gyorsan adaptálja az idősorban fellelhető sokkokat és rámutat arra, hogy a hozamgörbe paramétereinek változásából kinyert variancia, két megfigyelési napra visszatekintően rendkívül érzékeny, míg a hosszabbtávú folyamatok kevésbé dominánsak. A feltételes varianciák számításával megkapjuk a teljes hozamgörbe idősoros kockázati faktorait, amelyek rendkívül hasznosak lehetnek mind az állampapírokat kibocsájtó ÁKK számára, mind a zero-kupon hozamgörbét felhasználó befektetési döntések meghozatalánál.

7. ÖSSZEFOGLALÁS

A tanulmány a zéró-kupon hozamgörbe modellezését 22 idősoros elemzést lehetővé tevő egymással összehasonlítható illesztéssel eszközli. A bemutatott módszerek segítségével a magyar állampapírok árjegyzéseihez optimalizálva végeztem el a zéró-kupon hozamgörbe becsléseket. A 22 eljárással elkészített illesztéseket a szakirodalomban használatos szempontok felhasználásával, összehasonlítottam és értékeltem.

A hozamgörbe modellezési feladat egy nem-lineáris, több minimumhellyel rendelkező alulhatározott probléma, melynek megoldása során a kezdeti értékek megadása alapvetően befolyásolja az illesztés eredményét. A dolgozatban kidolgozott robosztus tanuló algoritmus képes figyelembe venni hosszmetzeti, idősoros szempontokat a kezdőérték meghatározásánál. Az általam implementált 22 eljárásban ezen robosztus kezdetiérték megadási módot használtam, mely segítségével jó illeszkedést és idősorosan értelmezhető polinomokhoz tartozó koefficienseket kaptam.

Az illesztési feladat megoldása során alkalmazott optimalizációs algoritmusokban a különféle szakirodalomban elterjedt függvényformulákból 4 polinomot használtam fel, amelyek a Spline, illetve Nelson-Siegel-Svensson modelcsaládokba tartoznak. Ezek matematikai tulajdonságait részletesen áttekintettem. Ezek után bemutatásra kerültek az optimalizáló algoritmusok tulajdonságai és keresési stratégiái. A fent említett nem-lineáris, több lokális helyvel rendelkező probléma megoldásában ezen stratégiák kulcsszerepet játszanak az eredményes illesztésnél.

A tanulmány végén a kapott illesztési eredményekből a Nelson-Siegel polinom Genetikus Algoritmussal illesztett paramétereken végeztem el idősoros elemzést, annak ellenőrzésére, hogy teljesül-e a kezdetben kitűzött idősoros értelmezhetőségi kritérium. Az általánosított autoregresszív score modellt (GAS) felhasználva interpretálható modellt kaptam az egész hozamgörbe idősoros kockázatainak felmérésére.

Az eredmények rámutatnak arra is, hogy a látszólag kockázatmentesnek tekintett állampapírok zéró-kupon hozamgörbéjében mind illesztési, mind idősoros kockázatok is egyaránt feltárhatóak.

HIVATKOZÁSOK

- Adams, K. J. és Van Deventer, D. R. (1994), Fitting yield curves and forward rate curves with maximum smoothness, *The Journal of Fixed Income* **4**(1), 52–62.
- Anderson, N., Breedon, F., Deacon, M., Derry, A. és Murphy, G. (1996), *Estimating and interpreting the yield curve*, Wiley Chichester.
- Anderson, N. és Sleath, J. (2001), *New estimates of the UK real and nominal yield curves*, Bank of England.
- Annaert, J., Claes, A. G., De Ceuster, M. J. és Zhang, H. (2013), Estimating the spot rate curve using the nelson–siegel model: A ridge regression approach, *International Review of Economics & Finance* **27**, 482–496.
- Bai, Q. (2010), Analysis of particle swarm optimization algorithm, *Computer and information science* **3**(1), p180.
- Blasques, F., Creal, D. D., Janus, P., Koopman, S. J., Lucas, A., Scharth, M. és Schwaab, B. (2014), *Generalized Autoregressive Score Models for Time-varying Parameters: new models and applications*, Timberlake Consultancy, Summer School in Aix-en-Provence 2014.
- Bliss, R. R. (1997a), Movements in the term structure of interest rates, *Economic Review* pp. 16–33.
- Bliss, R. R. (1997b), Testing term structure estimation methods, *Advances in Futures and Options Research* pp. 197–231.
- Bliss, R., Sener, E., Erdogan, G. és Ahi, E. (2011), Robust term structure estimation, http://www.i-rml.org/sites/default/files/Robust%20Term%20Structure%20Estimation_0.pdf, Letöltve: 2014.10.26.
- Bolder, D. és Strélski, D. (1999), Yield curve modelling at the bank of canada, *Available at SSRN 1082845*.
- Bollerslev, T. (1986), Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of econometrics* **31**(3), 307–327.

- Cairns, A. J. és Pritchard, D. J. (2001), Stability of models for the term structure of interest rates with application to german market data, *British Actuarial Journal* **7**(03), 467–507.
- Chen, S. (2013), Particle swarm optimization, Technical report, Mathworks.
<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/25986-another-particle-swarm-toolbox/content/psopt/psom>
 Letöltve: 2014.10.26.
- Cox, J. C., Ingersoll Jr, J. E. és Ross, S. A. (1985), A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica: Journal of the Econometric Society* pp. 385–407.
- Creal, D., Koopman, S. J. és Lucas, A. (2008), A general framework for observation driven time-varying parameter models, Technical report, Tinbergen Institute Discussion Paper.
- Creal, D., Koopman, S. J. és Lucas, A. (2013), Generalized autoregressive score models with applications, *Journal of Applied Econometrics* **28**(5), 777–795.
- Csajbok, A. (1998), Zero-coupon yield curve estimation from a central bank perspective, Technical report, Magyar Nemzeti Bank
- Dai, Q. és Singleton, K. J. (2000), Specification analysis of affine term structure models, *The Journal of Finance* **55**(5), 1943–1978.
- de Andrés Sánchez, J. és Terceno Gomez, A. (2004), Estimating a fuzzy term structure of interest rates using fuzzy regression techniques, *European Journal of Operational Research* **154**(3), 804–818.
- Deventer, D. v. és Imai, K. (1997), *Financial risk analytics: A term structure model approach for banking, insurance and investment management*, Irwin.
- Diebold, F. X. és Li, C. (2006), Forecasting the term structure of government bond yields, *Journal of econometrics* **130**(2), 337–364.
- Duffee, G. R. (2002), Term premia and interest rate forecasts in affine models, *The Journal of Finance* **57**(1), 405–443.
- Durbin, J. és Koopman, S. J. (2012), *Time series analysis by state space methods*, Oxford University Press.

- Eberhart, R. C. és Kennedy, J. (1995), A new optimizer using particle swarm theory, *in* Proceedings of the sixth international symposium on micro machine and human science, Vol. 1, New York, NY, pp. 39–43.
- Engle, R. F. (1982), Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation, *Econometrica: Journal of the Econometric Society* pp. 987–1007.
- Fabozzi, F. J., Martellini, L. és Priaulet, P. (2005), Predictability in the shape of the term structure of interest rates, *The Journal of Fixed Income* **15**(1), 40–53.
- Fama, E. F. és Bliss, R. R. (1987), The information in long-maturity forward rates, *The American Economic Review* pp. 680–692.
- Fegyveres, Gy. (2014), A hozamgörbe modellezésének módszertani bemutatása a spline és a nelson-siegel típusú modellek összehasonlításán keresztül, Szakdolgozat, Budapest Corvinud Egyetem and Eötvös Lóránd Tudományegyetem.
- Ferstl, R. és Hayden, J. (2010), Zero-coupon yield curve estimation with the package termstrc, *Journal of Statistical Software* **36**(1), 1–34.
- Gabrel, V., Murat, C. és Thiele, A. (2014), Recent advances in robust optimization: An overview, *European Journal of Operational Research* **235**(3), 471–483.
- Gauthier, G. és Simonato, J.-G. (2012), Linearized nelson–siegel and svensson models for the estimation of spot interest rates, *European Journal of Operational Research* **219**(2), 442–451.
- Gilli, M., Große, S. és Schumann, E. (2010), Calibrating the nelson–siegel–svensson model, Technical report, COMISEF Working Paper Series.
- Gimeno, R. és Nave, J. M. (2009), A genetic algorithm estimation of the term structure of interest rates, *Computational Statistics & Data Analysis* **53**(6), 2236–2250.
- Harvey, A. C. (2013), *Dynamic Models for Volatility and Heavy Tails*, Cambridge University Press: Econometric Society Monographs.
- Harvey, A. C. és Chakravarty, T. (2008), *Beta-t(e) garch*, University of Cambridge, Faculty of Economics.

- Heath, D., Jarrow, R. és Morton, A. (1992), Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation, *Econometrica* **60**(1), 77–105.
- Hendry, D. F. (1995), *Dynamic Econometrics*, Oxford University Press.
- Hendry, D. F. és Johansen, S. (2014), Model discovery and trygve haavelmo’s legacy, *Econometric Theory* **FirstView**, 1–22.
- Hladíková, H. és Radová, J. (2012), Term structure modelling by using nelson-siegel model, *European Financial and Accounting Journal* **2012**(2), 36–55.
- Holland, J. H. (1975), *Adaptation in natural and artificial systems: An introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence.*, U Michigan Press.
- Hubig, A. (2013), Use of orthogonal polynomials to describe the shape and dynamics of the term structure of interest rates for the purpose of government debt management, *in* Introduction of a New Conceptual Framework for Government Debt Management, Springer, pp. 73–111.
- Hull, J. és White, A. (1990), Pricing interest-rate-derivative securities, *Review of Financial Studies* **3**(4), 573–592.
- Hurn, S., Lindsay, K. és Pavlov, V. (2005), Smooth estimation of yield curves by laguerre functions.
- Ioannides, M. (2003), A comparison of yield curve estimation techniques using uk data, *Journal of Banking & Finance* **27**(1), 1–26.
- Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D., Vecchi, M. P. (1983), Optimization by simulated annealing, *science* **220**(4598), 671–680.
- Lagarias, J. C., Reeds, J. A., Wright, M. H. és Wright, P. E. (1998), Convergence properties of the nelder–mead simplex method in low dimensions, *SIAM Journal on optimization* **9**(1), 112–147.
- Laurent, S. (2013), G@rch 7, estimating and forecasting arch models, *Timberlake Consultants* .

- Manousopoulos, P. és Michalopoulos, M. (2009), Comparison of non-linear optimization algorithms for yield curve estimation, *European Journal of Operational Research* **192**(2), 594–602.
- McCulloch, J. H. (1971), Measuring the term structure of interest rates, *Journal of Business* pp. 19–31.
- Mitchell, M. (1998), *An introduction to genetic algorithms*, MIT press.
- Nelder, J. A. és Mead, R. (1965), A simplex method for function minimization, *The computer journal* **7**(4), 308–313.
- Nelson, C. R. és Siegel, A. F. (1987), Parsimonious modeling of yield curves, *Journal of business* pp. 473–489.
- Palm, F. C. és Vlaar, P. J. (1997), Simple diagnostic procedures for modeling financial time series, Technical report, Maastricht University.
- Pedersen, M. E. H. és Chipperfield, A. J. (2010), Simplifying particle swarm optimization, *Applied Soft Computing* **10**(2), 618–628.
- Perez, R. és Behdinan, K. (2007), Particle swarm approach for structural design optimization, *Computers & Structures* **85**(19), 1579–1588.
- Pooter, M. D. (2007), Examining the nelson-siegel class of term structure models, Technical report, Tinbergen Institute Discussion Paper.
- Ramos, S. N. (1995), *Estimación de la estructura temporal de los tipos de interés en España: elección entre métodos alternativos*, Banco de España.
- Reguly, Á. (2014), *A magyar állampapírok robosztus illesztésének módszertana*, Adósságkezelési Tanulmányok.
- Schich, S. (1997), Estimating the german term structure, Deutsche Bundesbanks Discussion Paper No. 4/79, <http://dx.doi.org/10.2139/ssm.871174>
- Shi, Y. és Eberhart, R. (1998), A modified particle swarm optimizer, in *Evolutionary Computation Proceedings, 1998. IEEE World Congress on Computational Intelligence.*, The 1998 IEEE International Conference on, IEEE, pp. 69–73.

- Stander, Y. S. (2005), *Yield Curve Modeling*, Palgrave MacMillan.
- Steeley, J. M. (1991), Estimating the gilt-edged term structure: Basis splines and confidence intervals, *Journal of Business Finance & Accounting* **18**(4), 513–529.
- Svensson, L. E. (1994), Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992–1994, Technical report, National Bureau of Economic Research.
- Vasicek, O. (1977), An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of financial economics* **5**(2), 177–188.
- Virmani, V. (2012), On estimability of parsimonious term structure models: an experiment with the nelson–siegel specification, *Applied Economics Letters* **19**(17), 1703–1706.
- Waggoner, D. F. (1997), Spline methods for extracting interest rate curves from coupon bond prices, *Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper* pp. 97–10.
- Wang, H., Sun, H., Li, C., Rahnamayan, S. és Pan, J.-s. (2013), Diversity enhanced particle swarm optimization with neighborhood search, *Information Sciences* **223**, 119–135.
- Wernen, R. és Ferenczi, I. (2006), *Calibration of the Svensson Model to Simulated Yield Curves*.