

TMDK-DOLGOZAT

MÁGNESES HISZTERÉZIS MÉRÉSE,
ANALÍZISE ÉS SZIMULÁCIÓJA
VÉGESELEM-MÓDSZER ÉS SKALÁR
PREISACH-MODELL SEGÍTSÉGÉVEL

Írta:

UNGER TAMÁS ISTVÁN

B.Sc. szakos villamosmérnök hallgató

Konzulens:

PROF. DR. HABIL. KUCZMANN MIKLÓS, PH.D.

tanszékvezető egyetemi tanár

Széchenyi István Egyetem
Automatizálási Tanszék
Elektromágneses Terek Laboratórium
2014

"CSAK AKKOR SZÜLETTEK NAGY DOLGOK,
HA BÁTRAK VOLTAK, AKIK MERTEK
S HA SZÁZSZOR TUDTAK BÁTRAK LENNI,
SZÁZSZOR BÁTRAK ÉS VIHARVERTEK."
/ADY ENDRE/

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés, köszönetnyilvánítás	3
2. A mágneses hiszterézis	5
2.1. Rendszerelméleti megközelítés	5
2.2. A ferromágneses hiszterézis	6
2.3. A jelenség oka	7
2.4. Skalárhiszterézis mérése	9
2.5. Mérési eredmények	10
3. A skalár Presiach-modell	12
3.1. Történeti áttekintés	12
3.2. A modell definiálása	12
3.3. A Preisach-háromszög és az Everett-függvény	13
3.4. A modell kimenetének számítása	16
3.5. A modell verifikációja	20
4. A Maxwell-egyenletek teljes rendszere	22
4.1. Bevezetés	22
4.2. A Maxwell-egyenletek	23
5. A végeselem-módszer	25
5.1. Történeti áttekintés	25
5.2. A módszer alapelve	25
5.2.1. A probléma absztrahálása, peremfeltételek	25
5.2.2. A súlyozott maradék elve, gyenge alak	26
5.2.3. A problémátér diszkretizálása	26
5.2.4. Asszemblálás, megoldás	27
5.3. Forma-függvények	28
5.4. A szimuláció lépései	29
6. Nemlinearitás implementációja végeselemes környezetben	31
6.1. Fixpontos iterációs séma	31

6.2.	A polarizációs formula	32
6.3.	Nemlineáris formalizmusok megvalósítása	33
6.3.1.	Séma a mágneses térerősségre építve	33
6.3.2.	Séma a mágneses indukcióra építve	34
7.	Egydimenziós probléma szimulációja	35
7.1.	A probléma definiálása	35
7.2.	A problémát leíró egyenletek	36
7.3.	Gyenge alak levezetése	36
7.4.	Végeselemes implementáció	37
7.4.1.	Az első integrál	38
7.4.2.	A második és harmadik integrál	38
7.5.	Gauss-kvadratúra	39
7.6.	Diszkretizálás, peremfeltételek	40
7.7.	Eredmények kiértékelése	41
8.	Kétdimenziós probléma szimulációja	44
8.1.	Vezető lemez mágneses térben	44
8.2.	Rácsgenerálás	45
8.3.	Végeselemes implementáció	45
8.4.	Numerikus integrálás háromszög felett	46
8.5.	Eredmények, kiértékelés	47
9.	Kétdimenziós szimuláció a mágneses indukcióra építve	48
9.1.	A probléma definiálása	48
9.2.	A problémát leíró egyenletek	49
9.3.	Gyenge alak levezetése	50
9.4.	Végeselemes implementáció	52
9.5.	A vizsgált geometria	54

1. fejezet

Bevezetés, köszönetnyilvánítás

Dolgozatom az alacsonyfrekvenciás elektromágneses térszimuláció témakörében íródott. A számítástechnika rohamos fejlődésének, valamint az ipari használatra fejlesztett szimulációs szoftverek térnyerésének köszönhetően napjainkban már alapvető feladat és elvárás a kutatási és fejlesztési területen a különböző anyagparaméterek jellemzőinek modellezése, szimulációja és az adott feladathoz optimalizálása. Az elmúlt évek, évtizedek során az elektromágneses terek numerikus analízise fontos, integrált részévé vált a villamosmérnöki és informatikai tudományoknak. Értekezésem ezen sokszínű és rendkívül széles tudományterületen belül a ferromágneses anyagok alacsonyfrekvenciás viselkedésének mérésével, modellezésével és szimulációjával foglalkozik végeselem-módszer segítségével.

A villamos gépek, motorok és transzformátorok tervezése során különösen fontos az adott felhasználási területhez illeszkedő (például kis veszteséggel rendelkező) vasanyag kiválasztása. Az elektromágneses szempontból értelmezett anyagparaméterek optimalizálását numerikus térszámítással, így végeselem-módszerrel is hatékonyan lehet segíteni. Dolgozatom első részében a hiszterézis elméleti áttekintését követően bemutatom a mágneses térerősség és a mágneses indukció között értelmezett skaláris hiszterézis mérésének módját, továbbá ismertetem az általam elvégzett mérések eredményeit is. A második egységben felvázolom az általam implementált, a hiszterézis modellezésére használt skalár *Preisach-modell* elméletét, működését, megvalósítását, validációját, valamint kapcsolatát a mérési eredményekkel. A harmadik részben bemutatom az elektromágneses tér jellemző mennyiségei között összefüggést teremtő Maxwell-egyenletek teljes rendszerét, kitérve a hiszterézises kapcsolatot is magában foglaló konstitúciós relációkra is. A negyedik egységben összefoglalom a végeselem-módszer elméletét, alkalmazási lehetőségeit a villamosmérnöki gyakorlatban, továbbá felvázolom az implementált Preisach-modell numerikus térszimulációval történő összekapcsolására felhasznált fixpontos technikát és polarizációs formulát is. Dolgozatom ötödik részében bemutatom a munkám során vizsgált problématereteket, valamint a hozzájuk kapcsolódó, a szimuláció során megoldásra kerülő parciális differenciálegyenleteket és levezetésüket, végül felvázolom az elvégzett szimulációkat, eredményeket.

Dolgozatomat a Széchenyi István Egyetem Automatizálási Tanszékének Elektromágneses Terek Laboratóriumában írtam, mely munkaközösségnek 2012 januárjától 2014 szeptemberéig voltam aktív tagja. Szeretném köszönetemet kifejezni Prof. Dr. habil. Kuczmann Miklósnak, az Elektromágneses Terek Laboratórium laborveze-

tőjének, konzulensemnek és mentoromnak, továbbá Budai Tamás, Friedl Gergely, Kovács Gergely, Marcsa Dániel, Pólik Zoltán és Prukner Péter kollégámnak azért a folyamatos, felbecsülhetetlen értékű szakmai és emberi támogatásért, melyet az elmúlt évek során kaptam.

Munkám a TÁMOP-4.2.2.A-11/1/KONV-2012-0012: Hibrid és elektromos járművek fejlesztését megalapozó kutatások projekt keretében, a Magyar Állam és az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg. Dolgozatomat $\text{\LaTeX}$ szövegszerkesztőben szerkesztettem.

2. fejezet

A mágneses hiszterézis

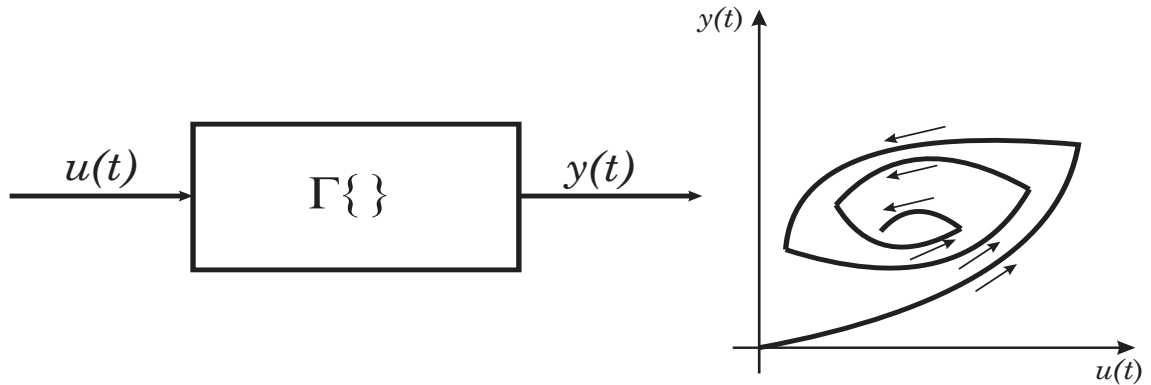
2.1. Rendszerelméleti megközelítés

A hiszterézis, mint jelenség általános megértéséhez első közelítésben érdemes absztahálni a problémát: definiáljunk egy $\Gamma\{\cdot\}$ operátorával egyértelműen jellemezhető egy bemenetű, egy kimenetű rendszert, mely a bemenetére érkező $u(t)$ folytonos idejű, folytonos értékkészletű gerjesztőjelet $y(t)$ folytonos idejű, folytonos értékkészletű válaszjellé képezi le, mely leképzés a rendszeroperátor segítségével az

$$y(t) = \Gamma\{u(t)\} \quad (2.1)$$

alakban írható fel [1]. Előfordulhat továbbá, hogy a rendszer bemenete időfüggő vektor, ebben az esetben a kimenet hasonlóképpen időfüggő vektor formájában adódik, és a gerjesztés-válasz kapcsolat vektoriális operátor segítségével fejezhető ki: $\vec{y}(t) = \vec{\Gamma}\{\vec{u}(t)\}$.

Abban az esetben, ha az operátor által végzett leképzés, tehát $u(t)$ és $y(t)$ kapcsolata nemlineáris és többértékű, továbbá $y(t)$ válaszjel értéke egy tetszőleges τ időpillanatban függ $u(t)$ és $y(t)$ $t \leq \tau$, illetve $t < \tau$ időpontbeli értékeitől, egyszerűbben fogalmazva a rendszer előéletétől, akkor hiszterézissel bíró rendszerről beszélhetünk [2]. Egy ilyen rendszer, valamint annak sematikus gerjesztés-válasz kapcsolata látható a 2.1. ábrán, ahol a feltüntetett nyilak az időt reprezentálják.



2.1. ábra. A rendszermodell és egy lehetséges gerjesztés-válasz karakterisztika

Az ilyen karakterisztikával jellemzett rendszerek memóriával rendelkeznek: úgy is mondhatjuk, hogy a válaszjel aktuális értéke döntően függ attól, hogy a rendszer

a vizsgálódás pillanatát megelőzően milyen állapotban volt. Ezen általános definíció segítségével a tudomány különböző területeinek jelenségei tárgyalhatók attól függően, hogy $u(t)$ és $y(t)$ milyen elgondolás alapján kerül megválasztásra.

A mérnöki tudományterületről elszakadt, de kiváló demonstrációs példa a közgazdaságtan által tárgyal export hiszterézissel bíró időfüggése [3]: egy ország gazdaságának áttérése az exporttermelésre időigényes és nehézkes, de ha az átállás sikerült, már nem igényel különösebb erőfeszítést az állapot fenntartása. A jelenség szerepe a villamosmérnöki gyakorlatban is kiemelkedő: a dolgozatom témájául szolgáló ferromágneses hiszterézisen túl jelentős szerepe van az elektronikában a hiszterézises komparátornak is [4].

2.2. A ferromágneses hiszterézis

Ferromágneses hiszterézisről beszélhetünk akkor, ha a tárgyalt rendszermodell bemenete általánosan $\vec{u}(t) = \vec{H}(t)$ mágneses térerősség, kimeneti pedig $\vec{y}(t) = \vec{M}(t)$ mágnesezési vektor [5]. A jelenség okának tárgyalását az anyagok mágneses tulajdonságának kialakulásától célszerű kezdeni. A mágnesesség egyik lehetséges forrása az atomok különböző energiaszinteken történő mozgása az anyagok atomi struktúrájában [6]. A fizikai atommodellekben az elektronok pályamenti mozgása és forgása értelmezhető elemi áramhurkok, valamint a hozzájuk kapcsolódó mágneses dipólus fogalmának segítségével. Az elemi áramhurok $\vec{m}_i$ mágneses momentuma definiálja az áramhurok által létrehozott mágneses mezőt [7]:

$$\vec{m}_i = I_i \cdot d\vec{s}_i, \quad (2.2)$$

ahol I_i az elemi áramhurok árama, $d\vec{s}_i$ a hurok által által körülzárt felület. Mágneses atomoknak nevezzük az olyan atomokat, melyek kompenzálatlan mágneses momentummal rendelkeznek az elektronjaik mozgásából fakadóan. Egy ilyen atom teljes mágneses momentuma az elemi áramhurkok által létrehozott momentumok vektoriális összegeként, szuperpozíciójaként számítható. Ha egy ΔV térfogat n darab mágneses atomot tartalmaz, és ezen atomok $\vec{m}_i$ momentummal rendelkeznek ($i = 1, 2, \dots, n$), akkor a vektoriális összegből adódó mágneses momentum:

$$\vec{m} = \sum_{i=1}^n \vec{m}_i. \quad (2.3)$$

Ezen mágneses momentum térfogati sűrűségét nevezzük $\vec{M}$ mágnesezettségi vektornak [6]:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^n \vec{m}_i \right). \quad (2.4)$$

$\vec{B}$ mágneses indukció hatására az $\vec{m}$ momentummal rendelkező mágneses dipólusra ható $\vec{\tau}$ forgatónyomaték az indukció és a mágneses momentum vektoriális szorzataként definiálható:

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}. \quad (2.5)$$

Ugyanezen mágneses dipólus energiája az indukció és a mágneses momentum vektoriális szorzatának mínusz egyszeresével lesz ekvivalens [6]. $\vec{B}$ mágneses indukcióvektor két összetevőre bontható: $\mu_0 \vec{H}$ a szabad tér mágneses indukciója (μ_0 a vákuum

permeabilitása, értéke $4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$), $\mu_0 \vec{M}$ a mágnesezettségi vektorból adódó indukciókomponens, amely a vizsgált anyag mágneses tulajdonságának függvénye [6]. Az indukcióvektor tehát

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (2.6)$$

alakban írható fel, ahol

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (2.7)$$

az úgynevezett mágneses térerősség. Ferromágneses anyagok esetén $\vec{M}$ és $\vec{H}$ kapcsolata egy, a 2.1.-ben tárgyalt nemlineáris, többértékű kapcsolat:

$$\vec{M} = \mathcal{H}\{\vec{H}\}. \quad (2.8)$$

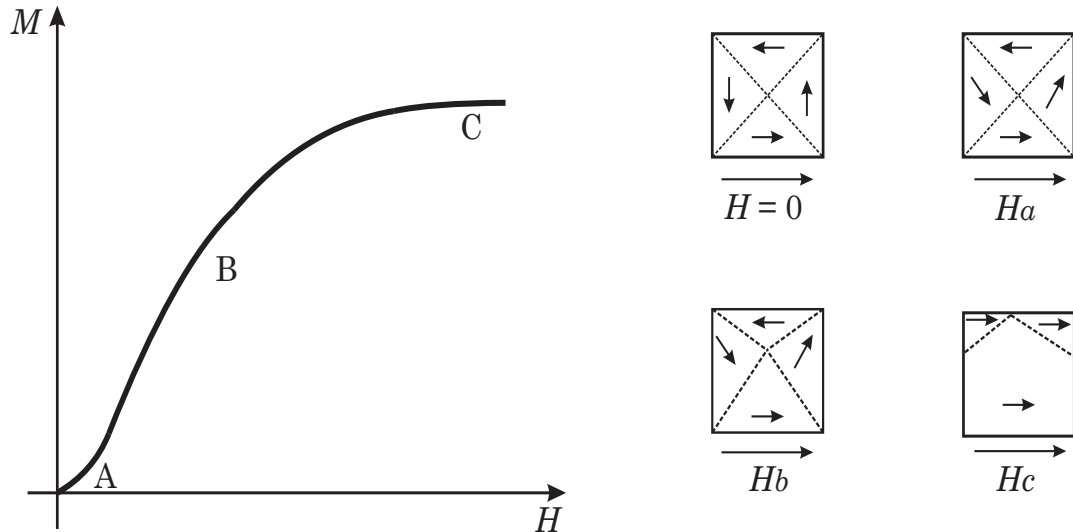
A mágneses térerősség és a mágneses indukció kapcsolatát egy másik, hasonlóan hiszterézises tulajdonságot reprezentáló operátor fejezi ki [8]:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \mathcal{H}\{\vec{H}\}), \quad (2.9)$$

$$\vec{B} = \mathcal{B}\{\vec{H}\}. \quad (2.10)$$

2.3. A jelenség oka

A ferromágneses anyagok esetén tapasztalható nemlineáris, többértékű $\vec{M}$ - $\vec{H}$ összefüggés fizikai magyarázatát mutatja be a 2.2. ábra. Az ilyen típusú anyagok ese-

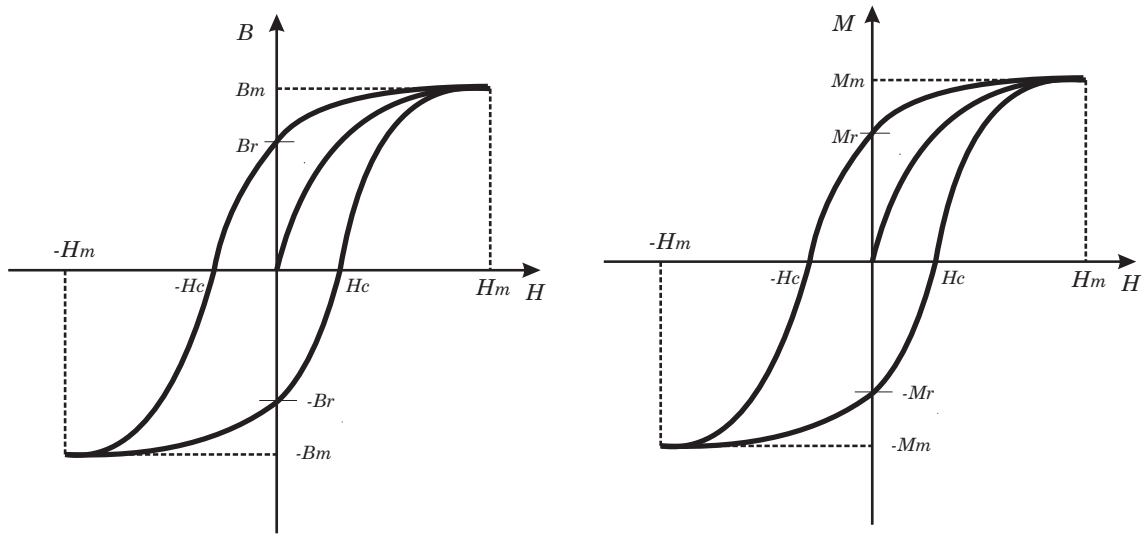


2.2. ábra. Az első mágnesezési görbe és a doménstruktúra alakulása

tén a külső elektronhéjon jelentős mennyiségű kompenzálatlan spinű elektron található, melyek egymással kölcsönhatásban állnak, úgynevezett *doméneket* hozva így létre [6]. Amennyiben az anyag nem volt még mágneses térben, úgy a mágneses erővonalak egy doméncsoporton belül záródnak [11]. Ekkor az anyag a legkisebb energiájú állapotban van, kifelé nem rendelkezik mágneses tulajdonsággal. Ha az

anyagot mágneses térbe helyezünk, azok a domének, melyek mágnesezettsége eredendően a külső tér irányába mutat, nőni kezdenek a többi domén rovására. Ezen doménfal-elmozdulások irreverzibilisek, amely irreverzibilitás megmagyarázza, hogy miért rendelkeznek az ilyen típusú anyagok mágneses szempontból memóriával.

A 2.2. ábra lényegében az eredő mágneses momentumot, vagy az ezzel arányos mágnesezettséget adja meg a mágneses térerősség függvényében. Ez az úgynevezett első mágnesezési görbe, mely három szakaszra bontható: a nemlineáris (A) szakasz a reverzibilis faleltolódásokkal, a közel lineáris (B) szakasz az irreverzibilis faleltolódásokkal, a telítési vagy szaturációs (C) szakasz pedig a momentumok elfordulásával magyarázható [6]. Ferromágneses közegben $\vec{M} \gg \vec{H}$, így $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \approx \mu_0 \vec{M}$, így a $B - H$ -görbe és az $M - H$ -görbe jó közelítéssel megegyezik. A teljes hiszterézishurok a 2.3. ábrán látható.



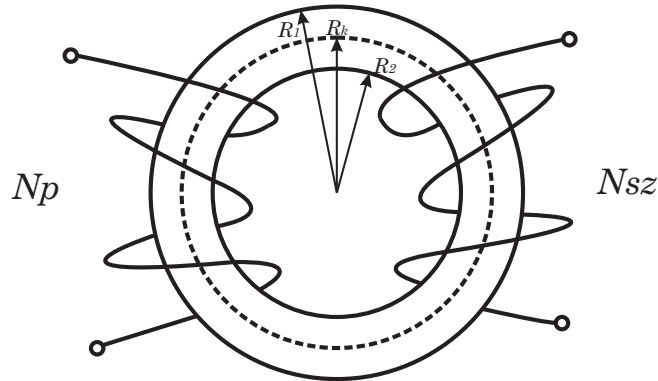
2.3. ábra. A teljes hiszterézishurok

A $\vec{H} = \vec{B} = \vec{M} = 0$ pont definiálja az úgynevezett lemágnesezett állapotot. Ha a mágneses térerősséget növeljük, az anyag mágnesezettsége (és természetesen az indukció is) nőni fog. A görbe ezen szakasza az eddig is tárgyalt első mágnesezési görbe (*szűzgörbe*). Ha a mágneses térerősséget kritikus szintig növeljük, akkor telítésbe jutunk: ettől a ponttól kezdve a növekvő térerősség ellenére sem fog változni a mágneses indukció értéke. Ezen nevezetes pont a szaturációs pont ($\vec{H}_m, \vec{M}_m, \vec{B}_m$) [12].

Az irreverzibilis faleltolódások megmagyarázzák, hogy csökkenő térerősség esetén a mágnesezettség alakulása miért nem követi a szűzgörbét. Csökkenő mágneses térerősség esetén a megváltozott doménstruktúra miatt az indukció bár csökkenni kezd, de nem az előző esetben tapasztalt függvény szerint. Zérusra csökkentett mágneses térerősség esetén nem fogunk zérus mágnesezettséget tapasztalni, maradni fog valamekkora $\vec{M}_r, \vec{B}_r$ remanencia. Az anyag lemágnesezéséhez negatív térerősséget szükséges létrehozni: ez a $-\vec{H}_c$ koercitív mágneses térerősség, ekkor $\vec{M} = \vec{B} = 0$. $\vec{H}$ csökkentése esetén negatív szaturációba kerülünk, az innen növekvő mágneses térerősség negatív remanenciát hagy, és a lemágnesezés pozitív koercitív teret igényel. A $\vec{H} = \vec{B} = \vec{M} = 0$ állapot ezen a görbén nem érhető el [9].

2.4. Skalárhiszterézis mérése

Munkám során kizárólag a skaláris hiszterézis vizsgálatával foglalkoztam, azaz a mágneses térerősségnek és a mágneses indukciónak kizárólag a hosszát, nagyságát vizsgáltam, az általuk bezárt szöget nem. Az ilyen jellegű vizsgálatok esetén ki kell kötni, hogy $\vec{H}$ és $\vec{B}$ egymással párhuzamos. A skaláris összefüggés mérésére a legelterjedtebb elrendezés a toroid transzformátoros mérés, melynek sematikus vázlatát a 2.4. ábrán látható.



2.4. ábra. Toroid transzformátor

A transzformátor elkészítéséhez egy adott típusú anyagból kör alakú próbatestet választottam, amelyet megfelelő módon feltekercseltem. A mérés során egy kiváló minőségű, kis veszteségű, villamos gépbe tervezett mágneses vasanyagot vizsgáltam. A méréshez egy primer-, valamint egy szekunder oldali tekercselést vezettem rá a próbatestre. A primer oldalt árammal gerjesztettem, mely hatására feszültség indukálódott, amit a szekunder oldali, a primer tekercseléstől gondosan elszeparált tekercselésen tudtam visszamérni. A visszamért feszültségből a mágneses indukció értéke számítható.

A 2.4. ábrán N_p jelöli a primer-, N_{sz} a szekunder oldali tekercselés menetszámát. R_1 és R_2 a külső, valamint a belső sugár, mely értékekből R_k közepes sugár értéke

$$R_k = \frac{R_1 + R_2}{2} \quad (2.11)$$

összefüggéssel számítható, amiből a próbatest közepes hossza (kerülete): $l_k = 2R_k\pi$. A méréshez szükséges alapösszefüggések a Maxwell-egyenletek segítségével levezethetők. A Maxwell-egyenletek teljes rendszerével dolgozatom külön fejezetben foglalkozik, itt csak a szükséges egyenletek alkalmazását mutatom be az adott problémával kapcsolatban.

Az ismert áramgerjesztés és a mágneses térerősség között a kvázistacionárius gerjesztési törvény, más néven az I. Maxwell-egyenlet redukált alakja teremt kapcsolatot [13]:

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}. \quad (2.12)$$

A mérési elrendezés előnyeit kihasználva az integrálok skaláris szorzattá egyszerűsödnek:

$$H(t)2R_k\pi = N_p I(t). \quad (2.13)$$

Az összefüggést a mágneses térerősségre rendezve látható, hogy a H pillanatnyi értéke a primer oldali menetszám, a pillanatnyi gerjesztőáram és a közepes sugár ismeretében számítható:

$$H(t) = \frac{N_p I(t)}{2R_k \pi}. \quad (2.14)$$

A mágneses indukció meghatározásához a Faraday-féle indukciós törvényből (II. Maxwell-egyenlet) szükséges kiindulni:

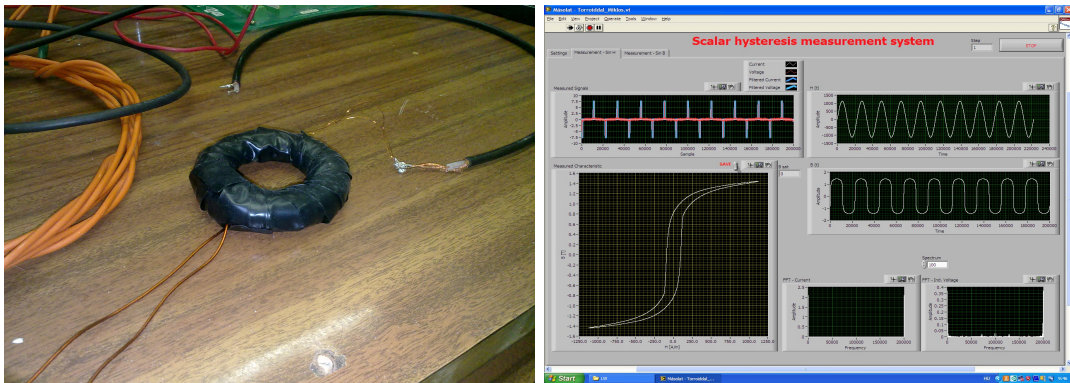
$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}. \quad (2.15)$$

Mivel a mágneses indukció felületi integrálja megadja a felületen áthaladó fluxust, illetve az elektromos térerősség vonalmenti integrálja az indukált feszültséggel lesz ekvivalens, ezért (2.15) átalakítható:

$$u_i(t) = -N_{sz} \frac{\partial}{\partial t} B(t) A, \quad (2.16)$$

$$B(t) = B_0 + \frac{1}{N_{sz} A} \int_0^t u_i(\tau) d\tau. \quad (2.17)$$

A formulában A a toroid keresztmetszete, B_0 a kezdeti értéket megadó konstans. A mérést a 2.5. ábrán látható toroid transzformátoron, LabVIEW [14] mérőrendszer segítségével végeztem el [30]. A számítógépes mérőrendszer segítségével egy áram-



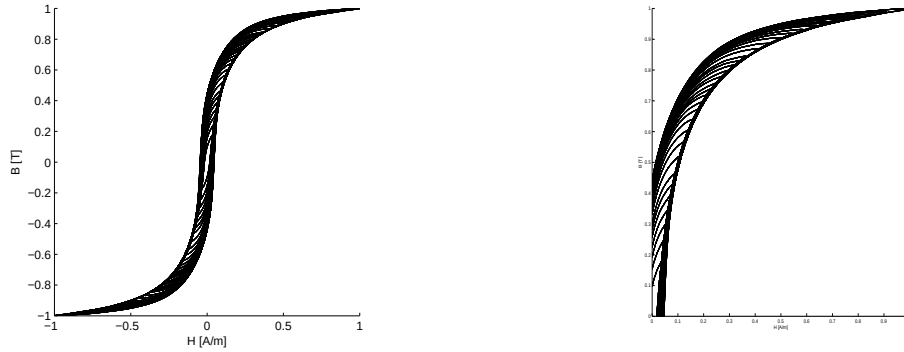
2.5. ábra. A vizsgált transzformátor és a mérőrendszer

generátort vezéltem, mely áramgenerátor a primer oldali gerjesztést szolgáltatva. A rendszer a szekunder oldali indukált feszültséget mérte vissza és dolgozta fel számítógépes úton. Az adatgyűjtés és a vezérlés egy NI-DAQ [15] adatgyűjtő kártya segítségével történt.

2.5. Mérési eredmények

Munkám során nem vizsgáltam a próbatest $B - H$ -kapcsolatának frekvenciafüggését, kizárólag a későbbiekben bemutatott Preisach-modell implementálásához szükséges koncentrikus görbéket vettem fel, amit a gerjesztőáram amplitúdójának fokozatos növelésével tettem meg. A méréshez használt toroid transzformátor paramétereit: $N_p = 197$; $N_{sz} = 139$; $R_2 = 23,5$ mm; $R_1 = 28,5$ mm; $R_k = 26$ mm; $l_k =$

163,3628 mm; $A = 10^{-5} \text{ m}^2$. A mérési eredmények a 2.6. ábrán láthatók, ahol az x -tengely a maximális mágneses térerősség értékére (H_{max}), az y -tengely a maximális mágneses indukció értékére (B_{max}) került normalizálásra ($H_{max} = 3213,8 \frac{\text{A}}{\text{m}}, B_{max} = 1,1632 \text{ T}$). A mérést 40 mA és 3 A között olyan osztásközzel végeztem el, hogy a



2.6. ábra. Mért, normalizált koncentrikus görbék

normálásra használt, a legnagyobb gerjesztőáramhoz tartozó görbe megfelelő sűrűséggel kerüljön "érintésre", "mintavételezésre" a koncentrikus görbék (H_{max}, B_{max}) pontjai által, ami a szimulációhoz használt modell felépítése során fontos kritérium, különös tekintettel arra a szakaszra, ahol a $B(H)$ -függvény deriváltja a legnagyobb.

3. fejezet

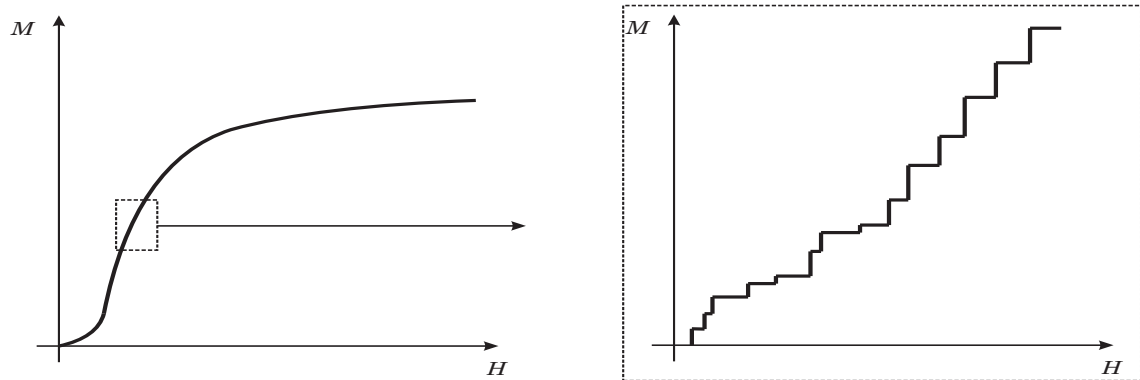
A skalár Preisach-modell

3.1. Történeti áttekintés

Preisach Ferenc (1905-1943) magyar származású villamosmérnök, a legelterjedtebb és legjelentősebb hiszterézismodell megalkotója. Diplomáját 1927-ben, a Zürichi Műszaki Egyetemen szerezte, doktorátusát H. Barkhausen [17] vezetése alatt végezte, dolgozatának címe: *A Barkhausen-jelenség vizsgálata*. 1943-ig, a nácik kikutatásáig a Siemens & Halske laboratórium, később a magyar Egyesült Izzó Kutató Laboratórium munkatársa [16]. Halála után számtalan matematikus, fizikus és villamosmérnök fejlesztette tovább a Preisach eredeti ötletét, ennek eredménye, hogy napjainkban a Preisach-modell nem kizárólag egyetlen hiszterézismodell, hanem azonos alapokon nyugvó, de egymástól többé-kevésbé eltérő hiszterézismodellek gyűjtőneve.

3.2. A modell definiálása

H. Barkhausen 1919-ben fedezte fel empirikus úton a 3.1. ábrán látható jelenséget, miszerint a mágnesezési folyamat során a mágnesezettség apró ugrások során változik, és ezzel alátámasztotta azt az elméleti elgondolást, miszerint a doménszerkezet ténylegesen létezik. Az ugrásszerű változás jelenségét a szakirodalom *Barkhausen-effektus*nak nevezi, melyet később a felfedező doktorandusza, Preisach Ferenc elemi operátorok fel- és lekapcsolásaként értelmezett. A Preisach-modell a skaláris, sta-



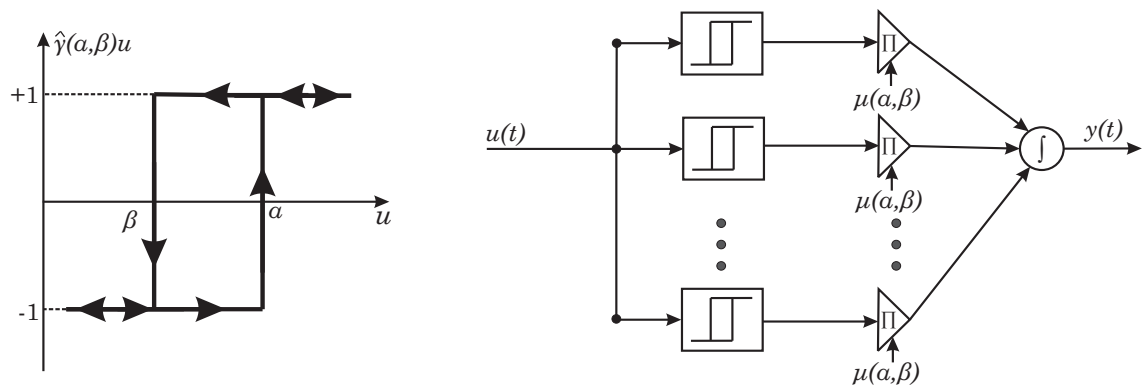
3.1. ábra. Az első mágnesezési görbe és annak egy kinagyított részlete

tikus hiszterézis jelenségét képes leírni, modellezni, ahol a hiszterézis nem függ a változás sebességétől [16].

A modell kimenete definíció szerint végtelen számú relé-típusú karakterisztikával (hiszteron) rendelkező rendszer válaszáának súlyozott szuperpozíciójaként áll elő az

$$y(t) = \Gamma\{u(t)\} = \iint_{\alpha \geq \beta} \mu(\alpha, \beta) \hat{\gamma}(\alpha, \beta) u(t) d\alpha d\beta \quad (3.1)$$

formula alapján, melyben $\Gamma\{\cdot\}$ a skaláris hiszterézist reprezentáló operátor, $\mu(\alpha, \beta)$ a mérési adatokból identifikálható, a 3.2. ábrán látható $\hat{\gamma}(\alpha, \beta)$ elemi hiszteronokat súlyozó Preisach-eloszlásfüggvény [8]. Fontos megjegyezni, hogy a modell általános



3.2. ábra. Egy hiszteron karakterisztikája és a modellt reprezentáló jelfolyam-hálózat

bemutatása során $u(t)$ gerjesztőjel ferromágneses hiszterézis vizsgálata esetén nem más, mint $H(t)$ mágneses térerősség, továbbá $y(t)$ válaszjel $M(t)$ mágnesezettséggel lesz ekvivalens.

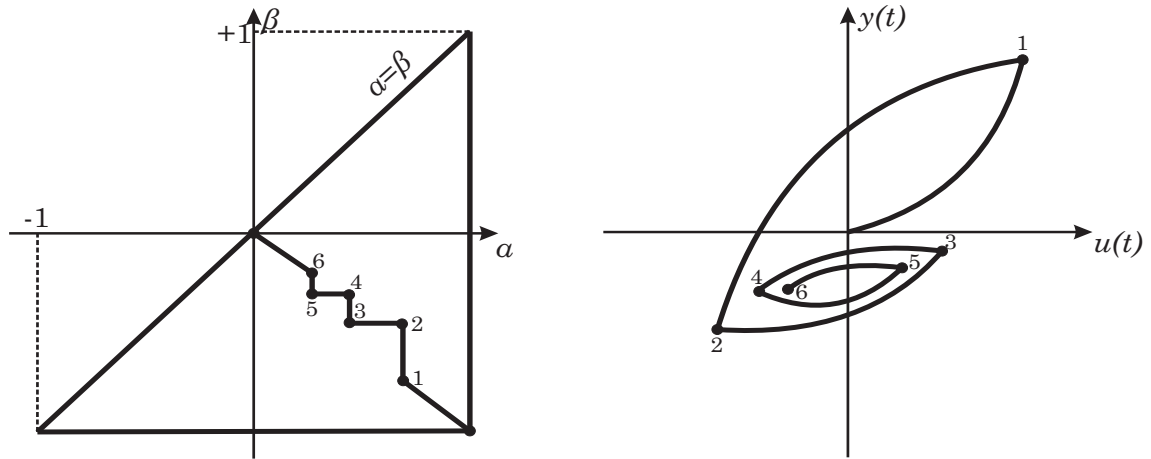
A hiszteron α értékű bemenetre kapcsolódik fel, valamint β értékű bemenetre kapcsolódik le, továbbá mindig igaz, hogy $\alpha \geq \beta$. A kimeneti függvény értékkészlete $\hat{\gamma}(\alpha, \beta) = \pm 1$. A rendszer bemenete sokszor valamilyen értékkel, például a bemeneti jel maximális értékével normalizált. A modell működését definiáló (3.1) összefüggés reprezentálható egy, a 3.2. ábrán látható, az eloszlásfüggvénnyel súlyozott elemi hiszteronok párhuzamos kapcsolásából álló jelfolyam típusú hálózattal is [18].

3.3. A Preisach-háromszög és az Everett-függvény

A jelfolyam típusú hálózat párhuzamos ágaiban az egyes hiszteronokra jellemző α és β értékek rendre máshogy alakulnak, ami egyszerűen leírható az úgynevezett Preisach-háromszög fogalmának bevezetésével [19]. A Preisach-háromszög a maximális bemeneti értékre normalizált $\alpha - \beta$ sík azon része, melyre igaz, hogy $\alpha \geq \beta$, tehát a definíciós integrál tartója, mely felett a kiértékelést el kell végezni. A Preisach-háromszögön belül a rendszer előéletét az $L(t)$ lépcsős függvény reprezentálja, mely balról jobbra mozog, ha a rendszer gerjesztése növekszik, és fentről lefelé, ha a gerjesztés csökken. A lépcsős függvény bemeneti jeltől függő időtartománybeli mozgása kapcsolja be vagy ki a háromszögön belül található elemi hiszteronokat, így határozva meg a kimenet aktuális értékét. A lépcsős függvény két tartományra bontja

fel a Preisach-háromszöget: a görbe alatti részterületen a felkapcsolt hiszteronok találhatók (itt $\hat{\gamma} = +1$), a görbe felett pedig a lekapcsolt hiszteronok foglalnak helyet ($\hat{\gamma} = -1$).

Alaphelyzetben a két résztartomány területe egyenlő, a fel- és lekapcsolt hiszteronok egyensúlyt tartanak egymással. Ekkor a lépcsős függvény egy szakasz, amely az origót az $(+1, -1)$ ponttal köti össze a síkon. A lépcsős függvény sarkait, fordulópontjait a bemenet maximumai és minimumai alakítják ki, így valósítva meg a rendszer memóriáját. A 3.3. ábrán a gerjesztés-válasz kapcsolat függvényében tanulmányozható a lépcsős görbe alakulása a Preisach-háromszögön.



3.3. ábra. A lépcsős függvény és a karakterisztika alakulása

Mivel a (3.1) kettős integrál kiértékelése bonyolult és időigényes művelet, ezért munkám során nem ezt az összefüggést, valamint nem a $\mu(\alpha, \beta)$ Preisach-eloszlást használtam, hanem a belőle származtatható $E(\alpha, \beta)$ Everett-függvényt, és az ahhoz rendelt numerikus megvalósítási lehetőséget [9]. Az Everett-függvény és a Preisach-eloszlás kapcsolata:

$$E(\alpha, \beta) = \iint_{\alpha \geq \beta} \mu(\alpha', \beta') d\alpha' d\beta' \rightarrow \mu(\alpha, \beta) = \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} E(\alpha, \beta). \quad (3.2)$$

Az Everett-függvény egyik legnagyobb előnye, hogy segítségével a modell kimenete sokkal takarékosabban előállítható. A szakirodalom [6, 8, 9, 20] az

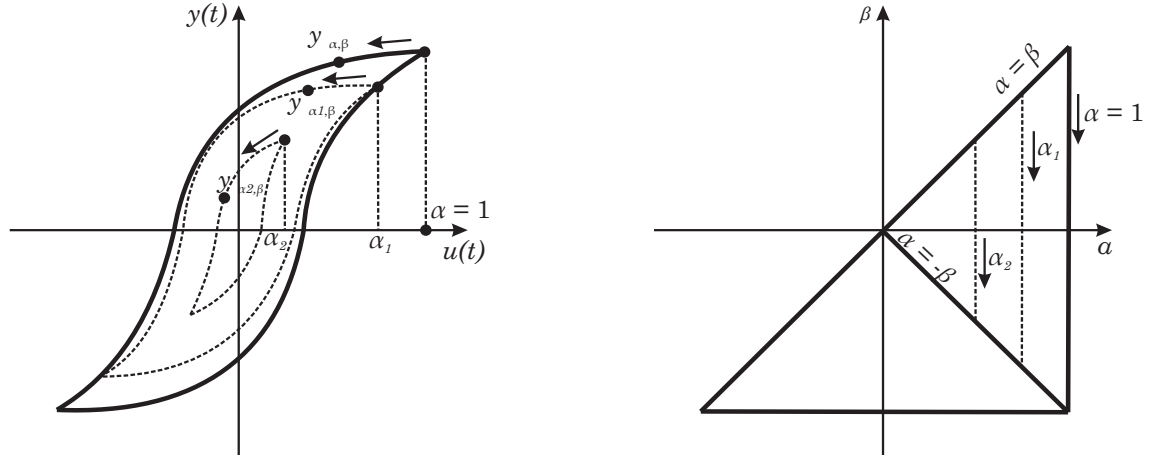
$$y(t) = -E(\alpha_0, \beta_0) + 2 \sum_{i=1}^K [E(\alpha_i, \beta_{i-1}) - E(\alpha_i, \beta_i)] \quad (3.3)$$

összefüggést definiálja (3.1) és (3.2) alapján, ahol K a lépcsős függvény fordulópontjainak száma. Az ismert összefüggést kiindulási alapként felhasználtam és kiegészítettem a modell implementációja során, így ezzel a kérdéssel dolgozatom külön részben foglalkozik.

Az Everett-függvény használatának másik legfontosabb előnye, hogy az közvetlen kapcsolatban áll a mérési eredményekkel, így kikerülhet a mért görbéken történő összetett matematikai műveletek (numerikus integrálás, differenciálás) alkalmazása,

amely minimálisan zajos függvények esetén is jelentős hibát okozna. A Preisach-háromszög felett értelmezett függvény származtatható a mért koncentrikus görbék-ből a 3.4. ábrán látható módon [8].

A függvény felépítése során a mért értékeket a legnagyobb amplitúdójú áramgerjesztéshez tartozó maximális mágneses térerősség (H_{max}), valamint a legnagyobb mágneses indukciós (B_{max}) értékére kell normalizálni. Az Everett-függvény érték-



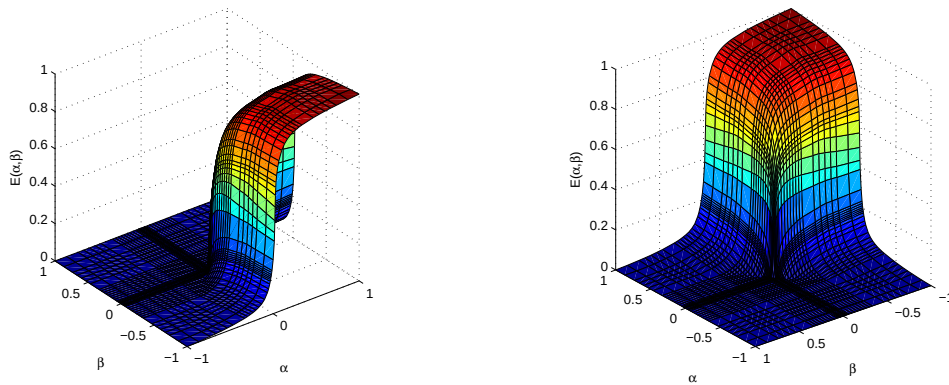
3.4. ábra. Az Everett-függvény felépítése a koncentrikus görbék-ből

készlete meghatározható az

$$E(\alpha, \beta) = \frac{y_{\alpha_i} - y_{\alpha_i \beta_j}}{2} \quad (3.4)$$

összefüggés segítségével, ahol y_{α_i} az i -edik normalizált koncentrikus görbéhez tartozó maximális indukció értéke, $y_{\alpha_i \beta_j}$ az i -edik normalizált görbe j -edik függvényértéke a csökkenő mágneses térerősséghez (csökkenő β -hoz) tartozó függvényrészén.

A koncentrikus görbék használata miatt (3.4) összefüggésével az Everett-függvény csak az $\alpha = -\beta$ -egyenes feletti értelmezési tartományon számítható közvetlen módon, az egyenes alatti tartomány a függvény $E(\alpha_i, \beta_j) = E(-\beta_j, -\alpha_i)$ tulajdonságának ismeretében adható meg. A felépített függvény a 3.5. ábrán látható.



3.5. ábra. A koncentrikus görbék-ből felépített Everett-függvény

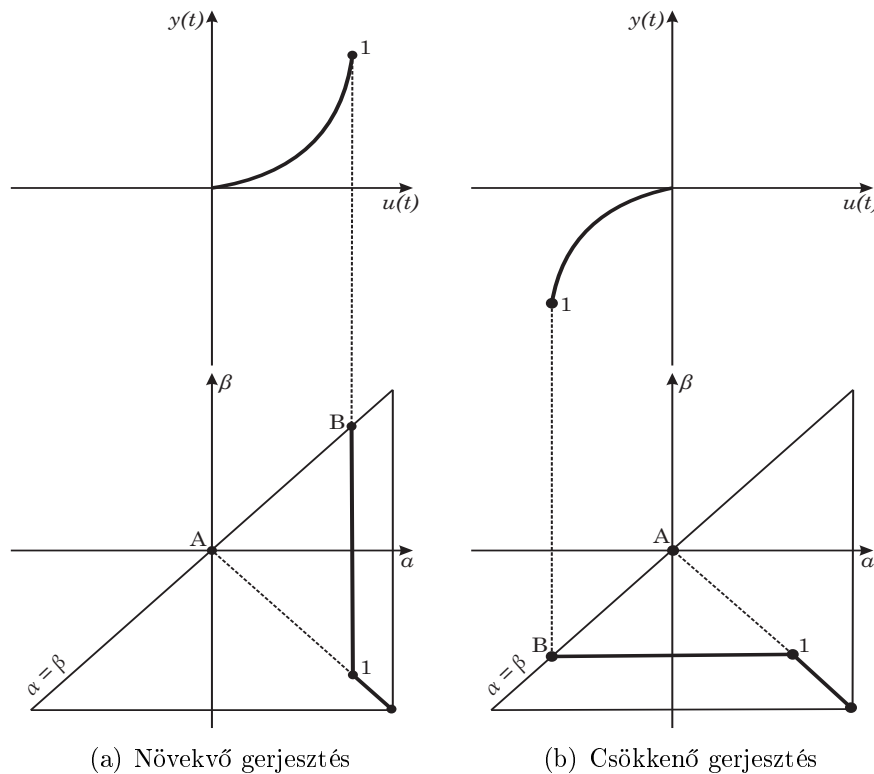
Az Everett-függvény felépítése során szem előtt kell tartani, hogy a mért koncentrikus hurkok száma közvetlenül determinálja függvény diszkrét értelmezési tartományának felosztási finomságát. Amennyiben n darab koncentrikus hurok áll rendelkezésre, úgy a függvény $(n + 1) \cdot (n + 1)$ pontban adható meg, ahol

$$\alpha, \beta \in [-1, -\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_{n-1}, 0, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_2, \alpha_1, 1], \quad (3.5)$$

így az $y_{\alpha_i \beta_j}$ -értékek is ezen diszkrét pontokban értelmezhetők.

3.4. A modell kimenetének számítása

Mint már említettem, a skalár Preisach-modell implementálása során bár a (3.3) összefüggést használtam fel kiindulási pontként, de a kimenet előállítása közelebbről nézve nem ilyen egyszerű, ezért célszerű áttekinteni, hogy milyen eseteket és hogyan szükséges kezelni a szimuláció során. Munkámban két, egymástól eltérő számítási módszert valósítottam meg attól függően, hogy kezdetben növekszik, vagy éppen csökken a gerjesztés értéke. Az első mágnesezési görbét és a hozzá tartozó lépcsős függvényt a 3.6. ábra mutatja.



3.6. ábra. Első mágnesezési görbe

A kezdeti, lemágnesezett állapotban tehát a lépcsős függvény nem más, mint az origót a $(+1, -1)$ ponttal összekötő szakasz, ekkor a felkapcsolt és a lekapcsolt histeronokat reprezentáló részháromszögek területe megegyezik, azok egyensúlyt tartanak egymással. A lépcsős függvényt leíró, a fordulópontokat tároló mátrix ($\mathbf{L}$) ekkor üres, eltárolt értéket nem tartalmaz, hiszen a rendszer még nem rendelkezik előélettel. A lemágnesezett állapotból növekvő és csökkenő gerjesztés esetén egyaránt az

első mágnesezési görbére kerülünk, a lépcsős függvényt mindkét esetben az ideiglenesen eltárolt (α_1, β_1) pont reprezentálja, ahol $\beta_1 = -\alpha_1$ ($\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ -\alpha_1 \end{bmatrix}$). Lényeges különbség, hogy míg növekvő gerjesztés esetén a lépcsős görbe balról jobbra, addig csökkenő esetben fentről lefelé mozog, így választva ketté a Preisach-háromszöget.

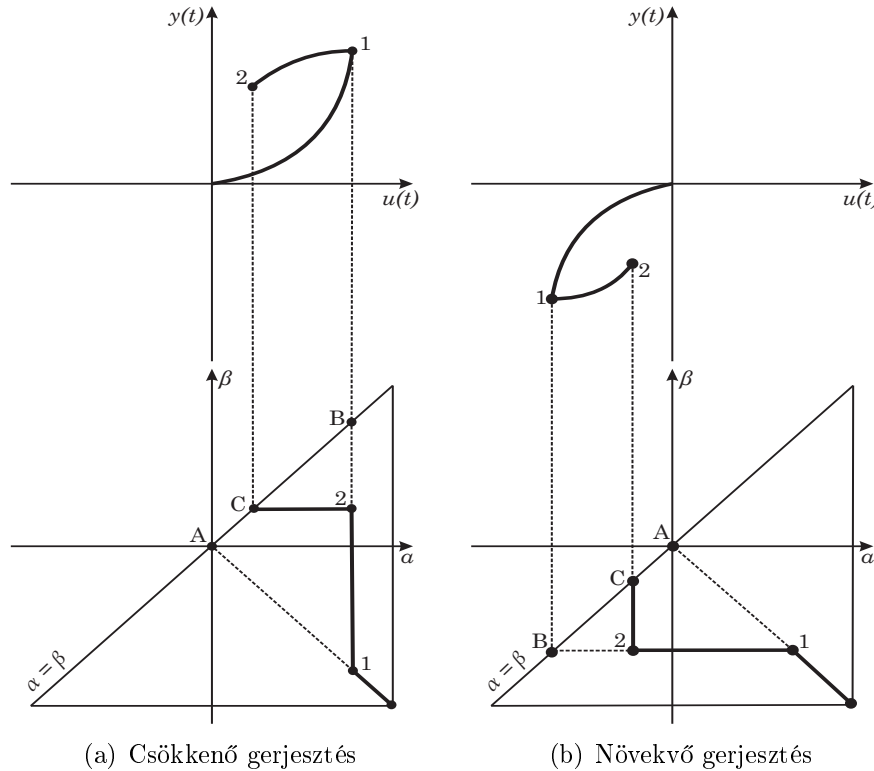
Növekvő gerjesztés esetén a modell kimenete az

$$y(t) = y_{max} E(\alpha_1, -\alpha_1), \quad (3.6)$$

csökkenő gerjesztés esetén az

$$y(t) = -y_{max} E(\alpha_1, -\alpha_1) \quad (3.7)$$

formulával számítható, ahol y_{max} a kimeneti jel maximális értéke. Mindkét összefüggés az AB1 háromszög területével van kapcsolatban, hiszen ezzel a területtel arányosan nő vagy csökken a felkapcsolt hiszteronok száma. A vizsgált (α_1, β_1) pont csak akkor kerül be ténylegesen a lépcsős görbét reprezentáló mátrixba, hogyha az valódi fordulópont, tehát abban az esetben, ha a gerjesztés iránya megváltozik. Ekkor a 3.7. ábrán látható módon a visszatérő görbére kerülünk.



3.7. ábra. Visszatérő görbe

A visszatérő görbén történő mozgás esetén az előzőekben tárgyalt (α_1, β_1) pont a lépcsős görbét reprezentáló mátrixba kerül, az ideiglenes pontot pedig az (α_2, β_2) pont fogja jelenteni. A 3.7.(a) ábrán a lépcsős görbe a csökkenő gerjesztés miatt fentről lefelé mozog, így a $\alpha_2 = \alpha_1$, míg a 3.7.(b) ábra esetében a lépcsős függvény balról jobbra változik, tehát $\beta_2 = \beta_1 = -\alpha_1$. Éppen ezért a pozitív első mágnesezési

görbéhez tartozó visszatérő ág esetén az

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & \beta_2 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

mátrix reprezentálja a lépcsős függvényt, és a modell kimenete az

$$y(t) = y_{max} \left[-E(\alpha_1, -\alpha_1) + 2(E(\alpha_1, -\alpha_1) - E(\alpha_1, \beta_2)) \right] \quad (3.9)$$

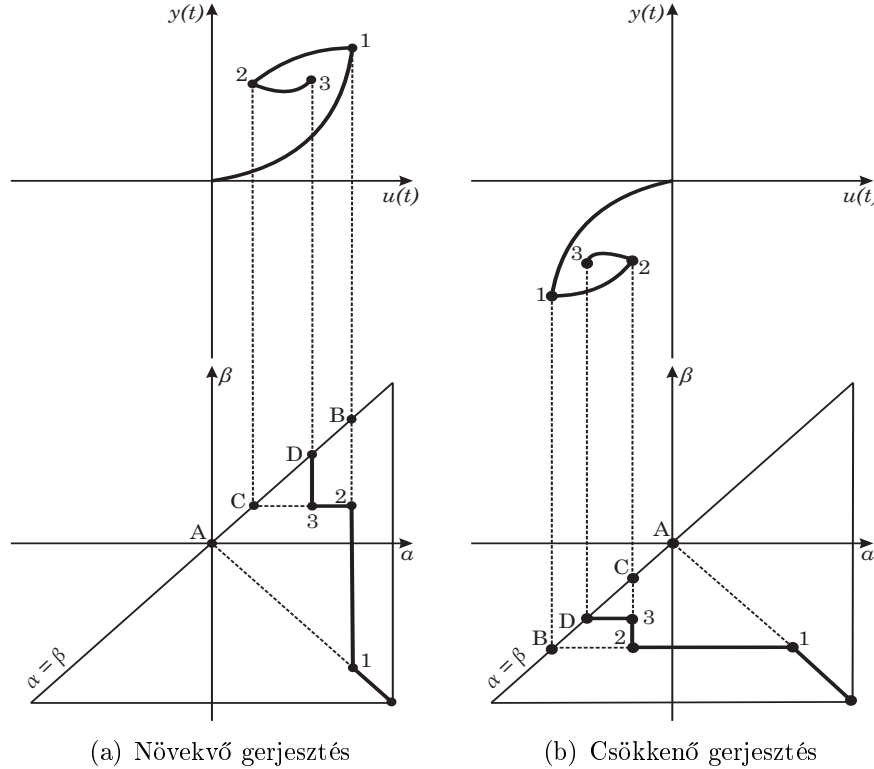
összefüggéssel számítható. A képlet tulajdonképpen az AB1 és CB2 háromszögek különbségét reprezentálja, melynek fizikai jelentéstartalma, hogy az első mágnesezési görbe számítása során felkapcsolt hiszteronok egy részét a csökkenő gerjesztés miatt le kell kapcsolni. Negatív első mágnesezési görbe esetén a fordulópontokat tároló mátrix

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ -\alpha_1 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

alakú, a modell kimenete pedig az

$$y(t) = y_{max} \left[E(\alpha_1, -\alpha_1) - 2(E(\alpha_1, -\alpha_1) - E(\alpha_2, -\alpha_1)) \right] \quad (3.11)$$

formulával adható meg, mely a felkapcsolásra kerülő hiszteronokat tartalmazó C2B háromszög pozitív területének szuperpozícióját jelenti a lekapcsolt hiszteronokat reprezentáló, negatív előjelű A1B háromszög területével. A gerjesztés irányváltozása esetén a 3.8. ábrán látható módon egy minor hurokra jutunk.



3.8. ábra. Minor hurok nyitása

A pozitív első mágnesezési görbéhez tartozó minor hurok kezelése (3.8.(a) ábra) az eddig ismertett kimenetszámítási eljárásokkal teljesen analóg, a háromszögon

belül található, a lépcsős függvény fordulópontjai által meghatározott részháromszögek segítségével könnyen megérthető. Ezúttal az A,D,3,2 és 1 pontok által meghatározott síkidom területét kell meghatározni, amely az egyensúlyi állapothoz képest növekményt jelent a felkapcsolt hiszteronok számára. Ez a részháromszögek területével kifejezve: $T_{AB1} - T_{CB2} + T_{CD3}$. A lépcsős függvényt reprezentáló mátrix

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_3 \\ -\alpha_1 & \beta_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

alakú, a modell kimenete pedig az

$$y(t) = y_{max} \left[-E(\alpha_1, -\alpha_1) + 2(E(\alpha_1, -\alpha_1) - E(\alpha_1, \beta_2) + E(\alpha_3, \beta_2)) \right] \quad (3.13)$$

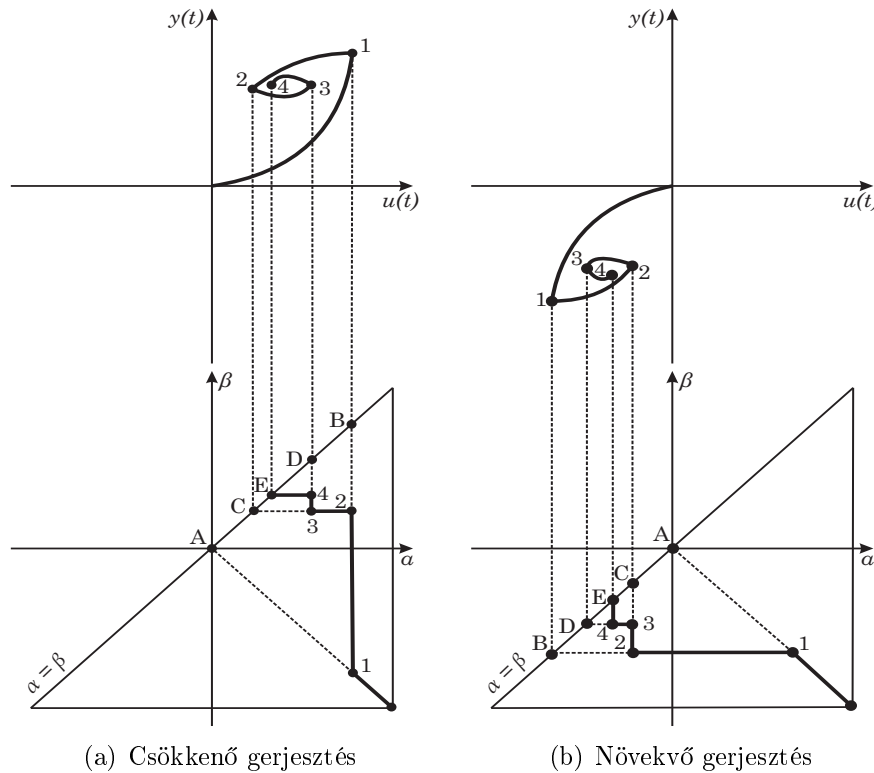
összefüggéssel határozható meg. A negatív első mágnesezési görbéhez tartozó minor hurok (3.8.(b) ábra) esetén a meghatározandó terület a részháromszögekkel felírva: $-T_{A1B} + T_{C2B} - T_{C3D}$. A lépcsős görbét leíró mátrix

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2 \\ -\alpha_1 & -\alpha_1 & \beta_3 \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

a válaszjel az

$$y(t) = y_{max} \left[E(\alpha_1, -\alpha_1) - 2(E(\alpha_1, -\alpha_1) - E(\alpha_2, -\alpha_1) + E(\alpha_2, \beta_3)) \right] \quad (3.15)$$

módon számítható. A harmadrendű minor hurok esetére a 3.9. ábra mutat példát.



3.9. ábra. Harmadrendű minor hurok nyitása

Pozitív első mágnesezési görbe esetén (3.9.(a) ábra) a meghatározandó terület a részháromszögek segítségével a

$$T_{AB1} - T_{CB2} + T_{CD3} - T_{D4E} \quad (3.16)$$

alakban írható fel, a fordulópontokból akotott mátrix

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_3 \\ -\alpha_1 & \beta_2 & \beta_2 & \beta_4 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

formában adódik, a válaszjel pedig az

$$y(t) = y_{max} \left[-E(\alpha_1, -\alpha_1) + 2(E(\alpha_1, -\alpha_1) - E(\alpha_1, \beta_2) + E(\alpha_3, \beta_2) - E(\alpha_3, \beta_4)) \right] \quad (3.18)$$

összefüggés segítségével számítható. A formulák negatív első mágnesezési görbe esetén:

$$-T_{A1B} + T_{C2B} - T_{C3D} + T_{E4D}, \quad (3.19)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_4 \\ -\alpha_1 & -\alpha_1 & \beta_3 & \beta_3 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$y(t) = y_{max} \left[E(\alpha_1, -\alpha_1) - 2(E(\alpha_1, -\alpha_1) - E(\alpha_2, -\alpha_1) + E(\alpha_2, \beta_3) - E(\alpha_4, \beta_3)) \right]. \quad (3.21)$$

A lépcsős függvény dinamikus kezelése során a görbét reprezentáló mátrixból a gerjesztés aktuális értékétől függően törölni kell bizonyos oszlopokat, tárolt fordulópontokat. Ha az n -edik lépésben a gerjesztés aktuális (normalizált) értéke u_n , akkor növekvő gerjesztés esetén azokat az oszlopokat kell törölni, melyekre igaz, hogy $u_n \geq \alpha_j$, míg csökkenő gerjesztés esetén az $u_n \leq \beta_j$ feltételnek eleget tevő oszlopokat kell eltávolítani, amennyiben az $\mathbf{L}$ mátrix k oszloppal rendelkezik, és $j \in [1, 2, \dots, k]$.

3.5. A modell verifikációja

A modell implementálása után szükséges és célszerű meggyőződni arról, hogy az megfelelően működik, kimenetként adott értékei rendre – jó közelítéssel – egyezést mutatnak a mért eredményekkel. A modell helyességének ellenőrzése verifikációval tehető meg [21]. Az ellenőrzés során azt vizsgáltam meg, hogy a néhány – véletlenszerűen kiválasztott – koncentrikus hurok esetén, azonos gerjesztés mellett vizsgálva a modell kimenete kvantitatíve egyezik-e a mért mágneses indukcióval, valamint megvizsgáltam a hiszterézis veszteség értékét is.

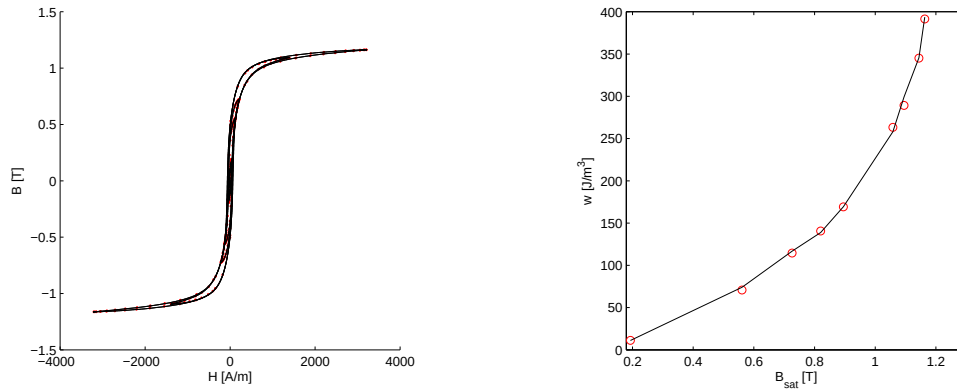
A hiszterézises tulajdonságból adódó veszteség a vizsgált hurok alatti területtel ekvivalens, értékének meghatározásához a mágneses térerősség függvényét a mágneses indukció szerint szükséges egy periódusra integrálni. Az összefüggés általános alakja:

$$w = \oint \vec{H} \cdot d\vec{B}. \quad (3.22)$$

Mivel a két függvény a szimulációs eljárás során diszkrét idejű jel formájában áll rendelkezésre, ezért az integrál a trapezoid-szabály alapján [22] a

$$w \approx \sum_{i=1}^{N-1} (B[i+1] - B[i]) \frac{H[i] + H[i+1]}{2} \quad (3.23)$$

formulával közelíthető, ahol N az egyetlen periódusban vett diszkrét minták száma. Az eredmények a 3.10. ábrán tanulmányozhatók. Látható, hogy a mért és a szimulált eredmények a modell kimenetének és a veszteség értékének tekintetében is jó közelítéssel megegyeznek, így a megvalósított modell megfelelően működik.



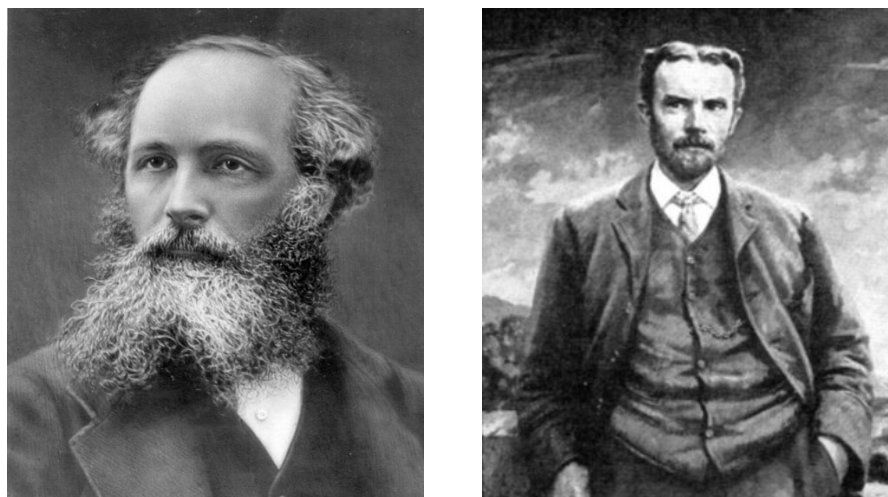
3.10. ábra. Mérés és szimuláció összevetése (mért: —, szimulált: •, ◦)

4. fejezet

A Maxwell-egyenletek teljes rendszere

4.1. Bevezetés

James Clerck Maxwell (1831-1879) a tizenkilencedik század kiváló elméleti fizikusa, matematikusa volt ("A legalaposabb és legtermékenyebb fizikus volt Newton óta." – Einstein), életének legfontosabb tevékenysége az elektromossághoz köthető. Kiemelkedő közreműködése abban áll, hogy kiterjesztette és matematikai formába öntötte a korábbi fizikusok (például *Michael Faraday* és *André-Marie Ampère*) kísérleti tapasztalatait, és egy összekapcsolódó, egységes parciális differenciálegyenlet-rendszerbe foglalta azokat. Az egyenleteket Maxwell 1861-ben publikálta először az *On Physical Lines of Force* című cikkében [23].



4.1. ábra. James Clerk Maxwell [24] és Oliver Heaviside [25]

Maxwell egyenletrendszere húsz egyenletet és húsz változó mennyiséget tartalmazott. A Maxwell-egyenletek mai formáját egy óriási formátumú, kiemelkedő, de méltatlanul elfelejtett autodidakta angol villamosmérnöknek, *Oliver Heaviside*-nak (1850-1925) köszönhetjük, aki munkája során kifejlesztette és a villamosmérnöki gyakorlatba ültette a vektoranalízist, a rotáció és a divergencia operátorok segítségével

tizenkét egyenletet átalakított, így az egyenletrendszer négy egyenletté redukálta négy változóval.

4.2. A Maxwell-egyenletek

A Maxwell-egyenletek segítségével a tér bármely pontjában bármely térjellemező (legyen az akár elektromos, akár mágneses) meghatározható. Az egyenletek tehát összefüggést teremtenek a gerjesztő mennyiségek (töltés, áram), a térintenzitások (elektromos térerősség, mágneses indukció) és a gerjesztettségi mennyiségek (elektromos eltolás, mágneses térerősség) között. A négy Maxwell-egyenlet integrális alakban:

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{A}, \quad (4.1)$$

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}, \quad (4.2)$$

$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad (4.3)$$

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_V \rho \, dV. \quad (4.4)$$

Az első Maxwell-egyenlet (4.1) az Ampère-féle gerjesztési törvény, fizikai jelentése, hogy az áram és az elektromos tér változása mágneses teret kelt (értelemszerűen a két mennyiség egyszerre is létrehozhatja a teret, de külön-külön is képesek mágneses teret keltetni). A második egyenlet (4.2) a Faraday-féle indukciós törvény, fizikai jelentése, hogy a mágneses tér változása elektromos teret kelt. A harmadik egyenlet (4.3) a mágneses Gauss-törvény, jelentése, hogy az indukcióvonalak forrásmentesek, önmagukban záródnak. A negyedik egyenlet (4.4) az elektrosztatika Gauss törvénye, jelentése, hogy a elektromos tér forrásos, erővonalai töltéseken kezdődnek, töltéseken végződnek.

A konstitúciós relációk munkám során felhasznált, ferromágneses anyagok esetén érvényes formulái:

$$\vec{B} = \mathcal{B} \{ \vec{H} \}, \quad (4.5)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad (4.6)$$

$$\vec{J} = \sigma \left(\vec{E} + \vec{E}_b \right). \quad (4.7)$$

Az egyenletek így teljesek és ellentmondásmentesek. Integrális alakjuk fizikailag szemléletes, de a numerikus számítások során ebben a formában alkalmazni őket nehéz, körülményes. Az egyenletek átírhatók differenciális alakba a Stokes-tétel:

$$\oint_l \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_A \nabla \times \vec{v} \cdot d\vec{A}, \quad (4.8)$$

és a Gauss-Osztrogradszkij-tétel segítségével [22]:

$$\oint_A \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_V \nabla \cdot \vec{v} dV, \quad (4.9)$$

ahol ∇ az úgynevezett nabla vektoroperátor, mely segítségével egy $\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{e}_x v_x(t) + \vec{e}_y v_y(t) + \vec{e}_z v_z(t)$ alakban felírható vektor rotációja és divergenciája kifejezhető Descartes-féle koordináta-rendszerben:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{v} = \text{curl}(\vec{v}) &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) - \\ &- \vec{e}_y \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (4.12)$$

A kifejezések alapján belátható, hogy a rotáció alkalmazása vektorból vektort, míg a divergencia vektoroperátor vektorból skalárt eredményez.

A Maxwell-egyenletek differenciális alakja az eddigieket felhasználva:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (4.13)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (4.14)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (4.15)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho. \quad (4.16)$$

Az összefüggésekben $\vec{H}$ a mágneses térerősséget jelöli, dimenziója $\frac{A}{m}$, $\vec{J}$ az áram-sűrűség, dimenziója $\frac{A}{m^2}$, $\vec{D}$ az elektromos eltolás, dimenziója $\frac{C}{m^2}$, $\vec{E}$ az elektromos térerősség, dimenziója $\frac{V}{m}$, $\vec{B}$ a mágneses indukció, dimenziója T , ρ a töltéssűrűség, dimenziója $\frac{C}{m^3}$. A konstitúciós relációkban μ_0 jelöli a vákuum permeabilitását, értéke és dimenziója $4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$, ϵ_0 a vákuum permittivitása, értéke és dimenziója $8,854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$, σ pedig az anyag vezetőképességét jelöli.

Az egyenletek segítségével papíron, analitikus, zárt formában csak igen kevés példa oldható meg, melyek esetében jellegükből, elrendezésükből adódóan jelentősen egyszerűsödnek az itt bemutatott összefüggések (tipikusan ilyen a toroid transzformátor esete is). Az elektrodinamika alapegyenleteiből levezetett, a későbbiek során általam is bemutatásra kerülő parciális differenciálegyenlet-rendszerek megoldása általában különböző közelítő módszerekkel, numerikus technikák segítségével történik.

5. fejezet

A végeelem-módszer

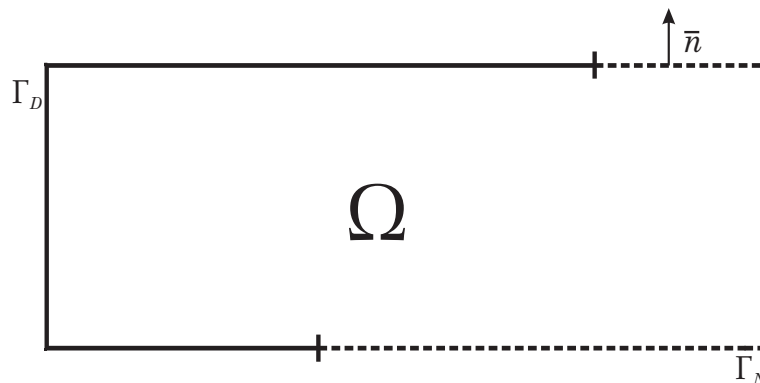
5.1. Történeti áttekintés

A végeelem-módszer (angolul *Finite Element Method*, röviden FEM) olyan numerikus módszer parciális differenciálegyenletek közelítő megoldására, amely az eredeti differenciálegyenletet algebrai egyenletrendszerre képezi le. Története egészen a múlt század elejére vezethető vissza: bár a módszer elméleti háttérének megalapozása már ekkor megtörtént, csak a század második felében, a számítógépek megjelenésével vált igazán fontossá (nagyjából az 1960-as évektől kezdve). Kezdetben mechanikai problémák megoldására alkalmazták, de később gyakorlatilag a fizika minden területén elterjedt. A következőkben általánosan igyekszem bemutatni a módszer alapjait, fontosabb lépéseit.

5.2. A módszer alapelve

5.2.1. A probléma absztrahálása, peremfeltételek

Vizsgáljunk meg egy Ω problématerületet, melyet két perem, Γ_D és Γ_N határol. Az Ω problématerületen értelmezzünk egy tetszőleges, $\langle \mathcal{PDE} \rangle$ -vel jelölt, n -ed rendű parciális differenciálegyenletet (az ismeretlen vektorfüggvény legyen $\vec{A}(\vec{r}, t)$), melynek partikuláris megoldását keressük a tartományon belül. Ezt szemlélteti az 5.1. ábra.



5.1. ábra. Egy sematikus problématerület

A megoldáshoz a kétféle peremen kétféle peremfeltételt szükséges definiálni:

$$\Gamma_d : \quad \vec{A} = \vec{A}_0, \quad (5.1)$$

$$\Gamma_N : \quad \frac{\partial \vec{A}}{\partial n} = \vec{f}(\vec{r}, t). \quad (5.2)$$

Dirichlet-peremről és peremfeltételről (Γ_D , (5.1)) beszélhetünk abban az esetben, ha a keresett $\vec{A}(\vec{r}, t)$ vektorfüggvény értékét a peremen direkt módon előírjuk, Neumann-peremről és peremfeltételről (Γ_N , (5.2)) beszélünk akkor, ha a peremen a keresett $\vec{A}(\vec{r}, t)$ vektorfüggvény normális irányú deriváltját határozzuk meg.

5.2.2. A súlyozott maradék elve, gyenge alak

A módszer alkalmazása során az eredeti $\langle \mathcal{PDE} \rangle$ helyett egy általánosabb, a kiindulási differenciálegyenletből származtatható integrálos alak kerül megoldásra. Ezt az alakot úgy kapjuk, hogy a $\langle \mathcal{PDE} \rangle$ -t nullára rendezzük, egy tetszőleges W_i súlyozófüggvénnyel megszorozzuk, majd integráljuk a teljes problématerományra [9]:

$$\int_{\Omega} \langle \mathcal{PDE} \rangle \cdot W_i \, d\Omega = 0 \quad \forall W_i \in W. \quad (5.3)$$

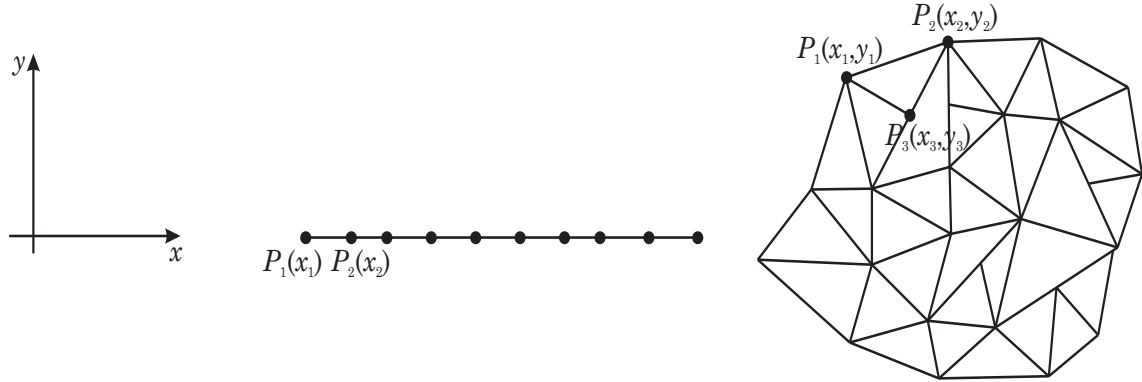
Amennyiben a keresett függvény vektorfüggvény (vektorpotenciál), úgy a súlyozásra is vektorfüggvényt használunk, míg skalárpotenciál esetén W is skalárfüggvény kell, hogy legyen. Abban az esetben, ha az integrálos alak nullát ad, úgy az eredeti differenciálegyenletnek is nullát kell adnia, így azt mondhatjuk, hogy az integrálos formula többé-kevésbé ekvivalens az eredeti $\langle \mathcal{PDE} \rangle$ -vel. Fontos megjegyezni, hogy az ekvivalencia nem teljesül Ω bizonyos részein, ahol a differenciálegyenlet operátorai nem értelmezettek. Tipikusan ilyenek a közegethatárok, ahol a térjellemzőknek ugrásuk van. Az súlyozott maradék elvének alkalmazása ezen esetekben is megoldásra vezet, ezért azt állíthatjuk, hogy az egyenlet ezen alakja jóval általánosabb. A súlyozott maradék elvének másik nagy előnye, hogy alkalmazásával kiküszöbölhetők az eredeti egyenletekben gyakran előforduló másodrendű deriváltak is [10]. A súlyozott maradék elvének segítségével felírt integrálegyenletet hívjuk – bizonyos, a következőkben tárgyalásra kerülő feltételek mellett – a parciális differenciálegyenlet úgynevezett gyenge alakjának, mely a szimuláció során ténylegesen kiszámításra kerül.

5.2.3. A problémater diszkretizálása

A végeselem-módszer alkalmazása során a vizsgált problématerományt diszkrét számú, véges nagyságú elemre kell bontani, mely elemek típusát a probléma jellegétől és a szimulációhoz használt modelltől függően kell megválasztani. Munkám során egydimenziós és kétdimenziós szimulációkat végeztem. Az első esetben szakaszokra osztottam fel a problémateret, míg kétdimenziós modellezés esetén háromszögeket alkalmaztam.

A szimulációk során csomóponti végeselemeket alkalmaztam, azaz a vektor-, illetve skalárpotenciál értékeit az elemek csomópontjaiban értelmeztem, számoltam ki. A diszkretizálás módja az 5.2. ábrán látható. Egydimenziós szakaszok esetén

egyetlen elemet kettő, kétdimenzióban egy háromszöget értelemszerűen három csomópont határoz meg. Egy csomópontot a dimenziók számától függően egy $(P_n(x_n))$, illetve kettő $(P_n(x_n, y_n))$ síkkoordináta határoz meg. A számítások során ismert és felhasználható a szakasz hossza, valamint a háromszög területe.



5.2. ábra. Diszkretizálás egy- és kétdimenzióban

Egydimenziós modell esetén kézzel végeztem el a diszkretizálást, míg kétdimenziós esetben **GMSH** [26] szoftver rácsgeneráló modulját alkalmaztam, mely segítségével gyorsan előállíthatók azok az *input* fájlok, melyek a szimulációkhoz szükségesek. Ezek: *Nodes*, *Connect*, *Dirichlet*, *Exc*. A *Nodes* nevű fájlban tároltam el a csomópontok koordinátáit. Ez egydimenziós esetben egy sorvektor, kétdimenziós esetben egy mátrix, melynek két oszlopa és annyi sora van, ahány csomópont. A *Connect* rendeli össze a csomópontokat elemmé, azok sorszámai alapján. Egydimenziós esetben definiálása felesleges, hiszen a vektor szomszédos elemei alkotnak egy-egy elemet, kétdimenzióban viszont fontos és szükséges a használata. Ekkor három oszlopa és annyi sora van, ahány elem a értelmezésre került problématerületen. A *Dirichlet* vektor azon csomópontok sorszámát tartalmazza, amelyekre a megoldás során a Dirichlet-típusú peremfeltételt alkalmazni kell. Amennyiben a feladat megkívánja, úgy azonosítani kell azon csomópontokat és/vagy elemeket, melyekre valamilyen gerjesztést kívánunk megadni. Erre szolgál az *Exc* nevű fájl.

5.2.4. Asszemblálás, megoldás

Miként azt már a bevezetőben említettem, a végelelemes szimuláció során az eredeti differenciálegyenletet algebrai egyenletrendszerre képezzük le. Megoldáskor az adott problémára érvényes gyenge alakot kell minden elemre felírni. Az egyetlen elemre felírt egyenletrendszer együtthatóit a probléma komplexitásától függően egy vagy több mátrixba kell asszemblálni, amely folyamat olyan együtthatómátrixot eredményez, melynek elemei többnyire zérusok. Az ilyen típusú mátrixot ritka mátrixnak, angolul *sparse matrix*-nak nevezzük [27]. A szimuláció során felírt egyenletrendszer általánosan a

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (5.4)$$

alakban írható fel, ahol $\mathbf{K}$ az együtthatómátrix, $\mathbf{u}$ az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor, $\mathbf{b}$ pedig a gerjesztést, a peremfeltételeket, illetve időfüggő probléma esetén az előző időlépést magában foglaló vektort jelenti. A feladat megoldása a

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{b} \quad (5.5)$$

egyenlet kiszámításával történik. A szimuláció kritikus lépése az együtthatómátrix invertálása, amely komplex, sok ismeretlent tartalmazó feladatok esetén rendkívül időigényes művelet.

5.3. Formafüggvények

A szimulációk során a keresett potenciálértéket (legyen az skalár- vagy vektorpotenciál) formafüggvények segítségével közelítjük. Mivel munkám során kizárólag vektorpotenciállal és nodális végelemekkel dolgoztam, ezért a továbbiakban csak ezen esetek bemutatására szorítkozom. Csomóponti elemekről beszélünk abban az esetben, ha a vizsgált potenciálértékek kizárólag az elemek csomópontjaiban értelmezettek. Tetszőleges $\vec{A}(\vec{r}, t)$ vektorpotenciál értéke közelíthető az

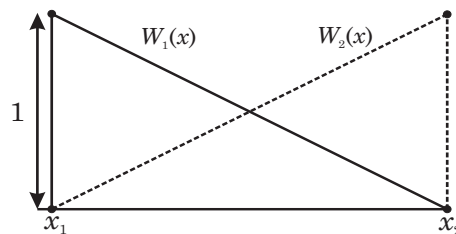
$$\vec{A} \approx \vec{A}_D + \sum_{i=1}^N \vec{W}_i A_i \quad (5.6)$$

összefüggés alapján, ahol N jelöli a csomópontok számát, és $\vec{W}_i$ a közelítésre használt formafüggvény [9]. A végelem-módszer fontos jellemzője, hogy a szimuláció során az 5.2.2. alszakaszban bevezetett W_i súlyozófüggvény és a formafüggvény megegyezik (ez az úgynevezett *Galjorkin-módszer* [28]), így a felépítendő egyenletrendszer szimmetrikus és négyzetes lesz. Ez a lépés megtehető, hiszen W_i tetszőlegesen megválasztható. Bár (5.6) vektoriális formafüggvényt jelez, de a későbbiekben bemutatott szimulációk során a gerjesztés iránya minden esetben a szimuláció síkjára merőleges, ezért elegendő a skaláris formafüggvények alkalmazása, így a továbbiakban a skaláris formafüggvények bemutatásával foglalkozom.

A szimulációk során alkalmazott skaláris, csomóponti formafüggvények általánosan a következőképpen definiálhatók:

$$W_i = \begin{cases} 1 & \text{az } i\text{-edik csomópontban,} \\ 0 & \text{az összes többiben.} \end{cases} \quad (5.7)$$

A definíció ebben a formában nem tesz kikötést a formafüggvények viselkedésére a csomópontok közötti területen. Ettől a paramétertől függően megkülönböztethetünk lineáris, valamint magasabb fokú formafüggvényeket – munkám során kizárólag lineáris függvényeket alkalmaztam. Az egydimenziós formafüggvényt az 5.3. ábra mutatja.

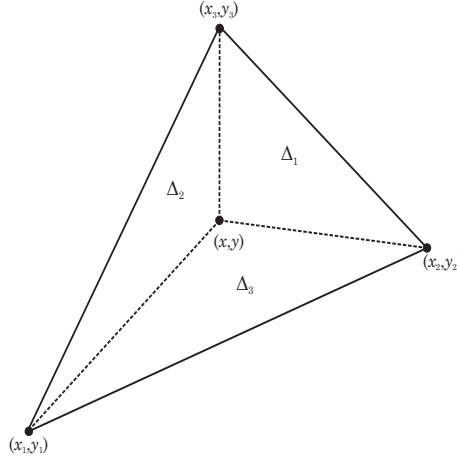


5.3. ábra. Egydimenziós, lineáris formafüggvény

Ezen formafüggvények az egyenes egyenletének segítségével felírhatók:

$$W_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad W_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (5.8)$$

A kétdimenziós szimulációk során alkalmazott skaláris, lineáris formafüggvények bevezetéséhez a baricentrikus koordináta-rendszer ismerete szükséges, mely az 5.4. ábrán látható. A háromszög csúcsainak koordinátái segítségével a síkidom területe



5.4. ábra. Baricentrikus koordináták

számítható a

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (5.9)$$

determináns segítségével, ahol (x_n, y_n) a háromszög csúcsainak koordinátái az óramutató járásával ellenkező irányban felvéve. A háromszög belsejében kijelölt tetszőleges (x, y) pont segítségével három különböző területfüggvény definiálható [8]:

$$\Delta_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix}. \quad (5.10)$$

A kétdimenziós, lineáris formafüggvényeket leíró egyenlet ezek alapján:

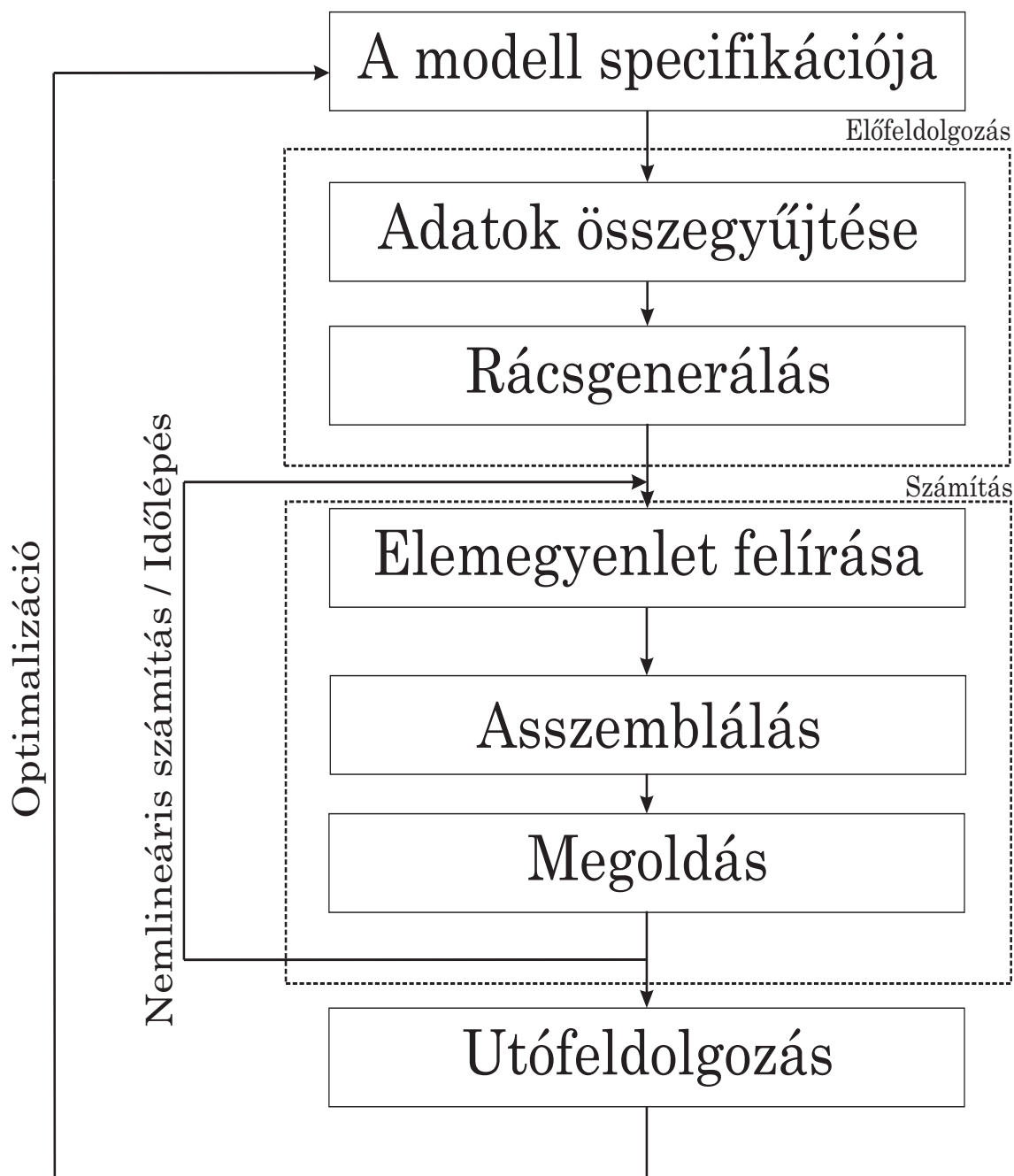
$$W_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.11)$$

5.4. A szimuláció lépései

Egy végeselemes szimuláció általános lépései az 5.5. ábrán láthatók. A modell specifikációja során át kell gondolni, hogy pontosan milyen problémát, elektromágneses jelenséget, milyen geometriai elrendezést szeretnénk vizsgálni, a jelenséget milyen parciális differenciálegyenletek írják le, a közeget határokon milyen peremfeltételeket kell kielégíteni, a térjellemező mennyiségek között milyen kapcsolat definiálható (lineáris-nemlineáris probléma), illetve érdemes már itt szem előtt tartani, hogy jelleg és nagyságrend tekintetében milyen végeredményt várunk. Az előfeldolgozás során pontosan definiálásra kerül a gerjesztés típusa (ha van) és az anyagparaméterek, majd a szimulált geometria diszkretizálása, a rácsstruktúra eltárolása következik.

A számítási fázis tartalmazza az elemegyenlet felírását a gyenge alak alapján, a $\mathbf{K}$ együtthatómátrix feltöltését és a $\mathbf{b}$ vektor aktualizálását a gerjesztés és az előző

időlépés alapján, amennyiben időfüggő a probléma. A szimuláció kritikus lépése az együtthatómátrix invertálását magában foglaló megoldó fázis. Amennyiben időfüggő a probléma, illetve nemlineáris anyagtulajdonság kerül szimulálásra, úgy a számítási lépéseket annyiszor kell elvégezni, ahány időlépés van, időlépésenként pedig annyiszor, ahányszor a későbbiek során bemutatott, nemlinearitás szimulálására használt iterációs technika megfelelő pontossággal közelíti a valós eredményt. Ezt követi az utófeldolgozás, az eredmények kiértékelése, mely során változtathatunk a kiinduláskor specifikált modellen, amennyiben szükség van rá.



5.5. ábra. Végeselemes szimuláció lépései

6. fejezet

Nemlinearitás implementációja végeselemes környezetben

Ebben a fejezetben általánosan bemutatom az implementáció során használt fixpontos iterációs sémát, illetve felvázolom a mágneses térerősség és a mágneses indukció közötti nemlineáris, hiszterézises kapcsolat megvalósítási lehetőségeit, módszereinek lépéseit a numerikus térszámításban.

6.1. Fixpontos iterációs séma

A fixpontos iterációs technika elve abban áll, hogy az

$$x = f(x) \quad (6.1)$$

alakban felírt nemlineáris egyenlet ismert $x_k (k = 0, 1, \dots, n)$ közelítő értékeinek felhasználásával további közelítő értékek sorozatát képezzük, amelyek lépésről-lépésre az egyenlet valódi gyökéhez tartanak. Ha az egyenlet (6.1) alakban adott, akkor a kézenfekvő iterációs eljárás:

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots; x_0 \text{ adott}). \quad (6.2)$$

Ezt az iterációs eljárást szukcesszív approximációnak (magyarul sorozatos közelítésnek) [22] nevezzük. Az x_n sorozat $c = f(c)$ fixponthoz, tehát az $x = f(x)$ egyenlet megoldásához konvergál, ha c -nek van olyan $\mathbb{I}$ környezete, ahol

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right| \leq K < 1 \quad (K = \text{konstans}) \quad (6.3)$$

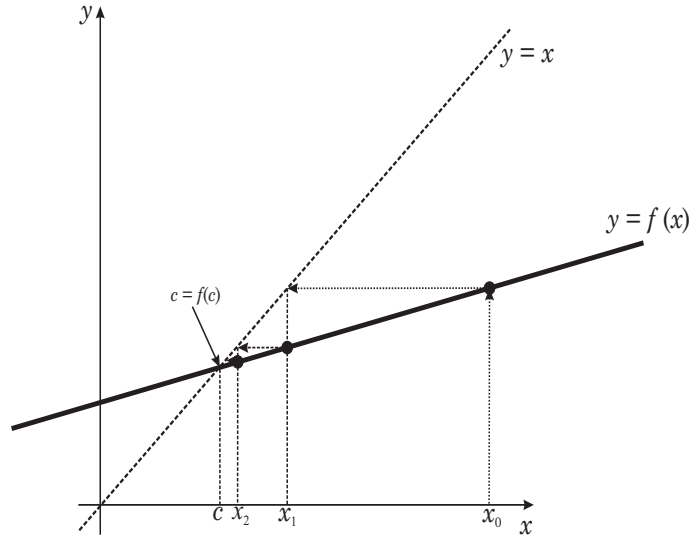
és az iteráció x_0 kezdeti értéke ebben a $\mathbb{I}$ környezetben fekszik.

Amennyiben $f(x)$ folytonosan differenciálható, úgy a megfelelő feltétel:

$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|} < 1 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{I}. \quad (6.4)$$

Ezen formula alapján megfogalmazható a kontraktív leképzés definíciója [8] is:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{I}, \quad (6.5)$$



6.1. ábra. Fixpontos iteráció kontraktív, konvergens leképezés esetén

amennyiben $0 < K < 1$. Ebben az esetben az $f(x)$ leképezést kontraktív leképezésnek hívjuk, mert csökkenti az x_1 és x_2 pontok közötti távolságot. Ez a leképezés a 6.1. ábrán látható konvergens eljárást eredményezi, mely az $x = f(x)$ egyenlet megoldásához konvergál. Ha ez a feltétel nem teljesül, úgy az iteráció divergens. Tetszőleges $F(x) = 0$ alakú egyenlet felírható $x = f(x)$ alakban a következőképpen [8]:

$$x_{n+1} = x_n - \lambda F(x_n) \equiv f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.6)$$

ahol λ paraméter megválasztásával az $f(x)$ függvény kontraktivitása biztosítható.

6.2. A polarizációs formula

A mágneses indukció ($\vec{B}$) függvénye a 6.2. ábrán látható módon két komponensre bontható fel [8]:

$$\vec{B} = \mu_o \vec{H} + \vec{R}, \quad (6.7)$$

ahol μ_o konstans, így az első tag kizárólag $\vec{H}$ mágneses térerősség lineáris függvénye, $\vec{R}$ pedig az anyagra jellemző nemlineáris komponenst jelöli. A formula felírható

$$\vec{R} = \vec{B} - \mu_o \vec{H} \quad (6.8)$$

alakban is, melyből kiindulva – direkt hiszterézis karakterisztika alkalmazásával – a következő összefüggés adódik:

$$\vec{R} = \mathcal{B} \{ \vec{H} \} - \mu_o \vec{H}. \quad (6.9)$$

Ez a leképezés kontraktív μ optimális megválasztása esetén:

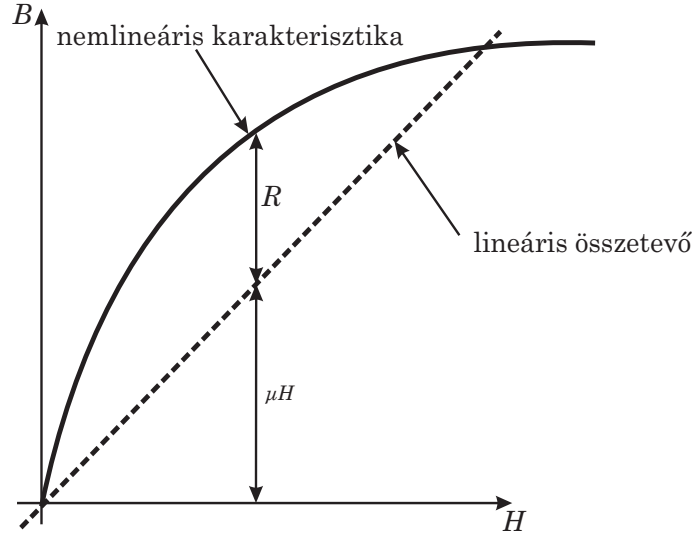
$$\mu_o = \frac{\mu_{max} + \mu_{min}}{2}. \quad (6.10)$$

Az eddigiekkel teljesen analóg módon írható fel egyenlet a mágneses térerősségre:

$$\vec{H} = \nu_o \vec{B} + \vec{I}, \quad (6.11)$$

ahol ν konstans, így $\nu_o \vec{B}$ lineáris, $\vec{I}$ pedig az adott anyagra jellemző nemlineáris reziduál:

$$\vec{I} = \vec{H} - \nu_o \vec{B}. \quad (6.12)$$



6.2. ábra. A mágneses indukció két komponensre bontása

A mágneses térerősség és a mágneses indukció közötti direkt kapcsolatot leíró karakterisztikát felhasználva

$$\vec{I} = \vec{H} - \nu_o \mathcal{B} \{ \vec{H} \} \quad (6.13)$$

adódik, mely leképzés ν_o optimális megválasztása esetén szintén kontraktív:

$$\nu_o = \frac{2 \frac{1}{\mu_{min}} \frac{1}{\mu_{min}}}{\frac{1}{\mu_{min}} + \frac{1}{\mu_{max}}}. \quad (6.14)$$

6.3. Nemlineáris formalizmusok megvalósítása

6.3.1. Séma a mágneses térerősségre építve

Az alábbiakban összefoglalom a fixpontos iteráció lépéseit abban az esetben, amelyben a megvalósított potenciálformalizmus a mágneses térerősségre kerül felírásra, tehát a szimuláció kimenete maga a $\vec{H}$ mágneses térerősségvektor [8]. Az iterációs sorozat μ optimális megválasztására épít (6.10). Az iteráció tetszőleges $\vec{R}^{(0)}$ értékből indítható. Az n -edik lépésben a következőket kell végrehajtani [8] ($T.F.H. : n > 0$):

1. $\vec{H}^{(n)}$ mágneses térerősség meghatározása $\vec{R}^{(n-1)}$ alapján a potenciálformalizmus segítségével, tehát: $\vec{H}^{(n)} = \mathcal{M} \{ \vec{R}^{(n-1)} \}$;
2. $\vec{B}^{(n)}$ mágneses indukció a direkt modell segítségével meghatározható, tehát: $\vec{B}^{(n)} = \mathcal{B} \{ \vec{H}^{(n)} \}$;

3. $\vec{R}$ nemlineáris reziduál értéke javítható:

$$\vec{R}^{(n)} = \vec{B}^{(n)} - \mu_o \vec{H}^{(n)} = \mathcal{B}\{\vec{H}^{(n)}\} - \mu_o \vec{H}^{(n)}; \quad (6.15)$$

Az előző lépéseket addig kell ismételni, amíg az eljárás nem konvergál megfelelő mértékben. A feltétel megfogalmazható:

$$\left\| \vec{R}^{(n)} - \vec{R}^{(n-1)} \right\| < \varepsilon, \quad (6.16)$$

ahol ε egy megfelelően kis küszöbindex.

6.3.2. Séma a mágneses indukcióra építve

A mágneses indukcióra épített iterációs sorozat ν optimális megválasztására épít (6.14). Az iteráció tetszőleges $\vec{I}^{(0)}$ értékből indítható. Az n -edik lépésben a következőket kell végrehajtani [8] ($T.F.H. : n > 0$):

1. $\vec{B}^{(n)}$ mágneses indukció meghatározása $\vec{I}^{(n-1)}$ alapján a potenciálformalizmus segítségével, tehát: $\vec{B}^{(n)} = \mathcal{M}\{\vec{I}^{(n-1)}\}$;
2. $\vec{H}^{(n)}$ mágneses térerősség a következő formulával becsülhető $\vec{B}^{(n)}$ alapján:

$$\vec{H}^{(n)} = \nu_o \vec{B}^{(n)} + \vec{I}^{(n-1)}; \quad (6.17)$$

3. $\vec{I}^{(n)}$ nemlineáris reziduál értéke javítható:

$$\vec{I}^{(n)} = \vec{H}^{(n)} - \nu_o \mathcal{B}\{\vec{H}^{(n)}\}; \quad (6.18)$$

Az előző lépéseket addig kell ismételni, amíg az eljárás nem konvergál megfelelő mértékben. A feltétel megfogalmazható:

$$\left\| \vec{I}^{(n)} - \vec{I}^{(n-1)} \right\| < \varepsilon, \quad (6.19)$$

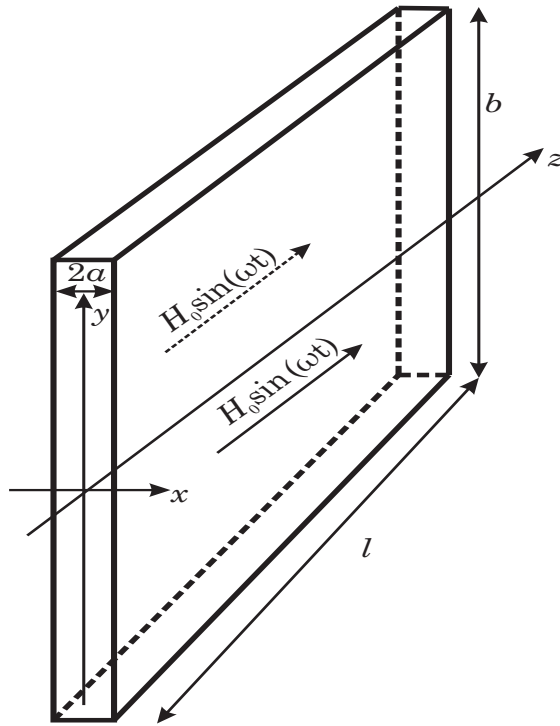
ahol ε egy megfelelően kis küszöbindex.

7. fejezet

Egydimenziós probléma szimulációja

7.1. A probléma definiálása

Klasszikus elektrodinamikai problémának tekinthető a 7.1. ábrán látható váltakozó mágneses térbe helyezett vezető lemez. A vizsgálódás tárgyát képező lemez hosszúsága sokszorosa a szélességének, ezért gyakorlati szempontból végtelenül hosszúnak tekinthető ($l \gg 2a$) [29].



7.1. ábra. Vezető lemez mágneses térben

A szimuláció során a $2a$ vastagsághoz viszonyítva végtelennek tekintett l lemez-hosszúság miatt elengedő csupán a vizsgált próbatest $x = 2a$ tartományának vizsgálata, amely a vizsgálódás mélységének megfelelően leírja a lemez belsejében kialakuló mágneses teret. A végeselemes diszkretizálás során ezt az x -irányú szakaszt osztottam egydimenziós elemekre a $[-a; +a]$ intervallumon belül.

7.2. A problémát leíró egyenletek

A szimuláció során megoldásra kerülő differenciálegyenlet levezetéséhez a Maxwell-egyenletek kvázistacionárius alakjai, illetve a hiszterézist is magukban foglaló konstitúciós relációk szükségesek [13]:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}, \quad (7.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (7.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (7.3)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{R}, \quad (7.4)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}. \quad (7.5)$$

Felhasználva (7.1) és (7.5) egyenleteket, majd az eredményt átrendezve a következő egyenlet adódik:

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma} \nabla \times \vec{H}. \quad (7.6)$$

Ezt visszahelyettesítve (7.2) egyenletbe a

$$\nabla \times \frac{1}{\sigma} \nabla \times \vec{H} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (7.7)$$

összefüggés írható fel. Felhasználva (7.4) egyenletet, illetve azt a tényt, hogy a σ anyagparamétert a vizsgált tartományon belül konstansnak tekinthetjük,

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = -\sigma \frac{\partial}{\partial t} (\mu \vec{H} + \vec{R}) \quad (7.8)$$

írható fel, melyet átrendezve a problémára felírható differenciálegyenlet végleges alakját kapjuk:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} + \mu \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\sigma \frac{\partial \vec{R}}{\partial t}. \quad (7.9)$$

7.3. Gyenge alak levezetése

Az eddigiek alapján a megoldandó gyenge alakot úgy kapjuk, hogy (7.9) összefüggését egy tetszőleges $\vec{W}$ súlyozófüggvénnyel megszorozzuk, majd integráljuk a teljes problématarományra. Így az

$$\int_{\Omega} \vec{W} \cdot \nabla \times \nabla \times \vec{H} \, d\Omega + \mu \sigma \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \, d\Omega = -\sigma \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} \, d\Omega \quad (7.10)$$

összefüggés adódik. Az egyenlőség bal oldalán másodrendű derivált található, mely kiküszöbölhető a

$$\nabla \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla \times \vec{u} - \vec{u} \cdot \nabla \times \vec{v} \quad (7.11)$$

azonosság felhasználásával, amennyiben a következő választással élünk:

$$\vec{v} = \vec{W}, \quad \vec{u} = \nabla \times \vec{H}. \quad (7.12)$$

Az összefüggés felhasználása után az integrálegyenlet az

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{H} \times \vec{W}) \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \times \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{W} \, d\Omega + \mu\sigma \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \, d\Omega = \\ & = -\sigma \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} \, d\Omega \end{aligned} \quad (7.13)$$

alakba írható át, mely egyenlet bal oldalának első tagja egy vektormező divergenziájának térfogati integrálja, mely a Gauss-Osztrogradszkij-tétel segítségével (4.9) átírható a térfogatot határoló felületre vett körintegrálra. Ezek alapján a gyenge alak:

$$\begin{aligned} & \oint_{\Gamma} \nabla \times \vec{H} \times \vec{W} \cdot \vec{n} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla \times \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{W} \, d\Omega + \mu\sigma \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \, d\Omega = \\ & = -\sigma \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} \, d\Omega. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Egy- és kétdimenziós szimulációk esetén az első körintegrál értéke zérus, így ezzel a taggal az implementáció során nem kell foglalkozni. A differenciálegyenlet gyenge alakja tehát a következő formában adódik:

$$\int_{\Omega} \nabla \times \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{W} \, d\Omega + \mu\sigma \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \, d\Omega = -\sigma \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} \, d\Omega. \quad (7.15)$$

7.4. Végeselemes implementáció

A vizsgált probléma esetén $\vec{H}$ mágneses térerősség olyan vektormennyiség, amelynek kizárólag z -irányú komponense van, de csak az x térdimenziótól függ. Így tehát

$$\vec{H} = H_z(x) \vec{e}_z = H \vec{e}_z \quad (7.16)$$

írható fel. Mivel a mágneses térerősség ezek alapján kezelhető skaláris mennyiségként, valamint az előírásra kerülő gerjesztés a szimuláció síkjára merőleges lesz, $\vec{H}$ közelítése W skaláris, egydimenziós formafüggvények segítségével történik:

$$\vec{H} = H = \sum_{i=1}^{N_p} W_i H_i. \quad (7.17)$$

Az összefüggésben N_p a vizsgált csomópontok száma. Végeselem-módszer alkalmazása esetén – a korábban tárgyaltak szerint – a gyenge alak súlyfüggvénye megegyezik a potenciál approximációjához használt formafüggvénnyel, továbbá az általános rotáció operátorok gradiensekké egyszerűsödnek, (7.15) átírható az

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla \cdot \sum_{i=1}^{N_p} W_i H_i \cdot \nabla W_j \, d\Omega + \mu\sigma \int_{\Omega} W_j \sum_{i=1}^{N_p} W_i \frac{\partial H_i}{\partial t} \, d\Omega = \\ & = -\sigma \int_{\Omega} W_j \sum_{i=1}^{N_p} W_i \frac{\partial R_i}{\partial t} \, d\Omega \quad j = 1, \dots, N_p \end{aligned} \quad (7.18)$$

összefüggésre, mely átalakítható az

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_p} \int_{\Omega} \nabla W_i \cdot \nabla W_j \, d\Omega H_i + \mu\sigma \sum_{i=1}^{N_p} \int_{\Omega} W_j W_i \, d\Omega \frac{\partial H_i}{\partial t} = \\ = -\sigma \sum_{i=1}^{N_p} \int_{\Omega} W_j W_i \, d\Omega \frac{\partial R_i}{\partial t} \quad j = 1, \dots, N_p. \end{aligned} \quad (7.19)$$

alakra. Ez a formula egyetlen elemre felírva:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ \begin{bmatrix} \nabla W_1 \\ \nabla W_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \nabla W_1 & \nabla W_2 \end{bmatrix} \right\} d\Omega \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} + \mu\sigma \int_{\Omega} \left\{ \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \end{bmatrix} \right\} d\Omega \begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial t} \\ \frac{\partial H_2}{\partial t} \end{bmatrix} = \\ = -\sigma \int_{\Omega} \left\{ \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \end{bmatrix} \right\} d\Omega \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial t} \\ \frac{\partial R_2}{\partial t} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Ez az egyetlen három integrált tartalmaz, melyek numerikus implementációját célszerű külön-külön tárgyalni.

7.4.1. Az első integrál

Az első integrál tartalmazza a csomóponti formafüggvények gradienseit és a mágneses térerősséget, mint ismeretlent. Lineáris formafüggvények mellett egy-egy végelem felett konstans gradiensek adódnak, ami lényegesen megkönnyíti az integrál kiértékelését. Egydimenziós esetben a gradiensek a

$$\begin{aligned} \nabla W_1 &= \frac{d}{dx} \left\{ \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \right\} = -\frac{1}{x_2 - x_1}, \\ \nabla W_2 &= \frac{d}{dx} \left\{ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right\} = \frac{1}{x_2 - x_1} \end{aligned} \quad (7.21)$$

alakot öltik, az Ω elemen történő integrálás pedig lényegében nem más, mint a szakasz hosszával történő szorzás, így (7.20) alapján az első integrál:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{bmatrix} \nabla W_1 \\ \nabla W_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \nabla W_1 & \nabla W_2 \end{bmatrix} \right\} (|x_2 - x_1|) \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \\ = \left\{ \begin{bmatrix} \nabla W_1 \nabla W_1 & \nabla W_1 \nabla W_2 \\ \nabla W_2 \nabla W_1 & \nabla W_2 \nabla W_2 \end{bmatrix} \right\} (|x_2 - x_1|) \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Az elemhosszal szorzott 2×2 -es mátrix elemei asszembláláskor a $\mathbf{K}$ együtthatómátrix megfelelő helyeihez adódnak hozzá, a mágneses térerősség keresett értékeit tartalmazó oszlopvektor elemeit pedig $\mathbf{u}$ megfelelő elemei reprezentálják.

7.4.2. A második és harmadik integrál

A két másik integrál kiértékelése hasonló módon zajlik, így most csak a második integrált fogom bemutatni, a harmadik, az egyenlet jobb oldalán található kifejezés kiértékelése az itt leírtakkal teljesen analóg módon tehető meg.

Fontos eltérés az eddigiekhez képest, hogy a kifejezésekben nem a formafüggvények gradiensei, hanem maguk a függvények szerepelnek, tehát nem konstans értékű függvényt kell integrálni egy-egy végelem felett. A kiértékeléshez numerikus integrálás, Gauss-kvadratura szükséges, amivel dolgozatom a későbbiek során fog foglalkozni. A másik lényeges különbség, hogy a kifejezések az ismeretlen mágneses térerősség és R reziduál idő szerinti deriváltját tartalmazzák, ami azt jelenti, hogy ezen kifejezéseket két részre kell bontani. Ehhez először be kell vezetni a numerikus differenciálás fogalmát [22]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}. \quad (7.23)$$

A második integrál ezek alapján felírható a

$$\mu\sigma \int_{\Omega} \begin{bmatrix} W_1 W_1 & W_1 W_2 \\ W_2 W_1 & W_2 W_2 \end{bmatrix} d\Omega \begin{bmatrix} \frac{H_1 - H_{1old}}{\frac{dt}{dt}} \\ \frac{H_2 - H_{2old}}{\frac{dt}{dt}} \end{bmatrix} \quad (7.24)$$

alakban. A kifejezés első tagja, a

$$\mu\sigma \int_{\Omega} \begin{bmatrix} W_1 W_1 & W_1 W_2 \\ W_2 W_1 & W_2 W_2 \end{bmatrix} d\Omega \begin{bmatrix} \frac{H_1}{\frac{dt}{dt}} \\ \frac{H_2}{\frac{dt}{dt}} \end{bmatrix} \quad (7.25)$$

tartalmazza H_1 és H_2 ismeretleneket, így ez a tag a $\mathbf{K}$ együtthatómátrix és $\mathbf{u}$ vektor részét fogja képezni, míg

$$-\mu\sigma \int_{\Omega} \begin{bmatrix} W_1 W_1 & W_1 W_2 \\ W_2 W_1 & W_2 W_2 \end{bmatrix} d\Omega \begin{bmatrix} \frac{H_{1old}}{\frac{dt}{dt}} \\ \frac{H_{2old}}{\frac{dt}{dt}} \end{bmatrix} \quad (7.26)$$

az előző időlépés H -értékeit tartalmazza, így a megoldandó lineáris algebrai egyenletrendszer másik, gerjesztési oldalára, a $\mathbf{b}_{lin}$ lineáris komponens tartalmazó vektorba fog kerülni.

A harmadik, a mágneses indukció reziduális komponensének deriváltját tartalmazó integrál értelmezése és megvalósítása az itt leírtakkal teljesen analóg. Mivel az integrál nem tartalmaz ismeretlen H potenciálértéket, ezért kizárólag a gerjesztési oldalon fog szerepni a $\mathbf{b}_{res}$ reziduális gerjesztési vektorkomponensben. A felíráshoz kerülő egyenletrendszer az eddigiek alapján:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{b}_{lin} + \mathbf{b}_{res}. \quad (7.27)$$

7.5. Gauss-kvadratura

A *Gauss-kvadratura* numerikus módszer határozott integrálok közelítő meghatározására. Abban az esetben, ha egy elemen az integrálandó függvény nem konstans, hanem a helynek valamilyen függvénye, úgy az elem felett értelmezett integrál kiszámítására közelítő módszert, Gauss-kvadraturát szükséges használni. A Gauss-típusú kvadraturaképletek középérték-formulák [22]:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{\nu=1}^n c_{\nu} y_{\nu}, \quad y_{\nu} = f(x_{g,\nu}), \quad (7.28)$$

ahol c_ν és x_ν a formula súlyai és pontjai, a számítás során mindkettő szabad paraméter, értékeiket úgy célszerű megválasztani, hogy a közelítés minél pontosabb legyen. Amennyiben az $[a; b] = [-1; 1]$ választással élünk, úgy egy elsőfokú polinom integrálja az intervallumon belül a

$$\begin{aligned} x_{g,1} &= -\frac{1}{\sqrt{3}}, & c_0 &= 1, \\ x_{g,2} &= +\frac{1}{\sqrt{3}}, & c_1 &= 1 \end{aligned} \quad (7.29)$$

súlyokkal és pontokkal közelíthető. Ebben a fejezetben kizárólag az egydimenziós esetet mutatom be, a kétdimenziós Gauss-kvadrátúrát dolgozatom a későbbiek folyamán tárgyalja. Mivel az egydimenziós formafüggvények elsőfokúak, így az itt bemutatott súlyokkal és pontokkal kiértékelhető az integrál. Mivel az integrálást nem a $[-1; 1]$ intervallumon, hanem egy végeselem $[x_1; x_2]$ intervallumán kell végrehajtani, így az

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{\nu=1}^n c_\nu f\left(\frac{b-a}{2}x_{g,\nu} + \frac{a+b}{2}\right) \quad (7.30)$$

transzformációval kell élni [22]. A kvadratura lépései egydimenziós szimuláció esetén (7.25) együtthatóján bemutatva:

$$\begin{aligned} \mu\sigma \int_{\Omega} \left\{ \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \end{bmatrix} \right\} d\Omega &= \mu\sigma \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{x_2-x}{x_2-x_1} \\ \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{x_2-x}{x_2-x_1} & \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \end{bmatrix} \right\} dx \approx \\ &\approx \mu\sigma \frac{x_2-x_1}{2} \sum_{\nu=1}^2 \left\{ \begin{bmatrix} \frac{x_2-x_{p,\nu}}{x_2-x_1} \\ \frac{x_{p,\nu}-x_1}{x_2-x_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{x_2-x_{p,\nu}}{x_2-x_1} & \frac{x_{p,\nu}-x_1}{x_2-x_1} \end{bmatrix} \right\} c_\nu = \\ &= \mu\sigma \frac{x_2-x_1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{x_2-x_{p,1}}{x_2-x_1} \\ \frac{x_{p,1}-x_1}{x_2-x_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{x_2-x_{p,1}}{x_2-x_1} & \frac{x_{p,1}-x_1}{x_2-x_1} \end{bmatrix} c_1 + \begin{bmatrix} \frac{x_2-x_{p,2}}{x_2-x_1} \\ \frac{x_{p,2}-x_1}{x_2-x_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{x_2-x_{p,2}}{x_2-x_1} & \frac{x_{p,2}-x_1}{x_2-x_1} \end{bmatrix} c_2 \right\}, \end{aligned} \quad (7.31)$$

ahol:

$$\begin{aligned} x_{p,1} &= \frac{x_2-x_1}{2}x_{g,1} + \frac{x_1+x_2}{2}, \\ x_{p,2} &= \frac{x_2-x_1}{2}x_{g,2} + \frac{x_1+x_2}{2}. \end{aligned} \quad (7.32)$$

7.6. Diszkretizálás, peremfeltételek

Miként azt már említettem, a diszkretizálást egydimenzióban, x -irányban, $[-a; a]$ -n végeztem el. Ez a lehető legegyszerűbb eset, rácsgeneráló szoftver használata nélkül, Matlab-környezetben két parancs segítségével végrehajtható:

```
N = 100;
x = [-a:(2*a)/N:a];
```

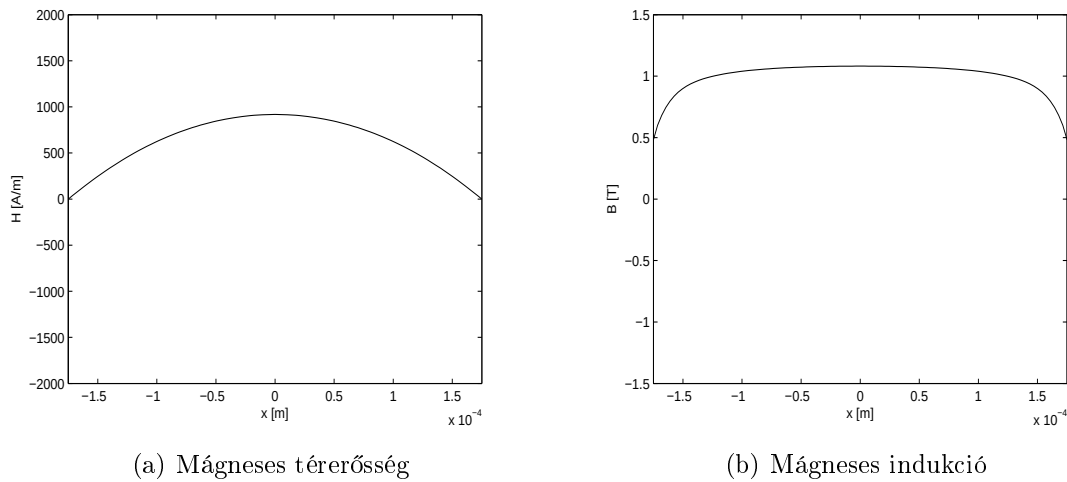
Ebben az esetben $N = 100$ végelem adódik 101 csomóponttal. A megoldáshoz a lemez két oldalára elő kell írni direkt módon a mágneses térerősség időfüggvényét. Ez ebben az esetben egy egyszerű Dirichlet-peremfeltételt jelent, ami azt jelenti, hogy az $x = -a$ és az $x = a$ csomópontok térerősség-értékét kell előírni:

$$\begin{aligned} H(x = -a, t) &= H_0 \sin(2\pi ft), \\ H(x = a, t) &= H_0 \sin(2\pi ft). \end{aligned} \quad (7.33)$$

7.7. Eredmények kiértékelése

A szimulációs eredmények bemutatása, valamint a szimuláció során alkalmazott paraméterek értékeinek pontos megadása az ?? függelékben található. Abból kifolyólag, hogy a probléma az időtartományban kerül megoldásra, a megoldó program futtatása elején egy gyorsan lecsengő tranziens jelenség figyelhető meg. Az átmeneti jelenség megszűnése után a mágneses térerősség és a mágneses indukció közötti kapcsolat az első mágnesezési görbén mozog, melynek lineáris szakaszán a két függvény kvalitatíve megegyezik egymással. A lineáris szakaszt a szaturáció követi: bár H helyfüggvénye ekkor láthatóan nemlineáris, B értéke a lemez teljes szélességében konstans, megegyezik a telítési értékkel.

A csökkenő gerjesztés következtében a lemezen belül is csökkenni kezd a mágneses térerősség értéke, ekkor a $B - H$ -kapcsolat letér az első mágnesezési görbéről, így abban az esetben, ha egy csomópont H -értéke eléri a zérust, a remanencia jelenségből kifolyólag B értéke nullától eltérő, pozitív lesz. Ez figyelhető meg a 7.2. ábrán. Az egyes csomópontok remanenciája ezen a szakaszon a modellnek meg-

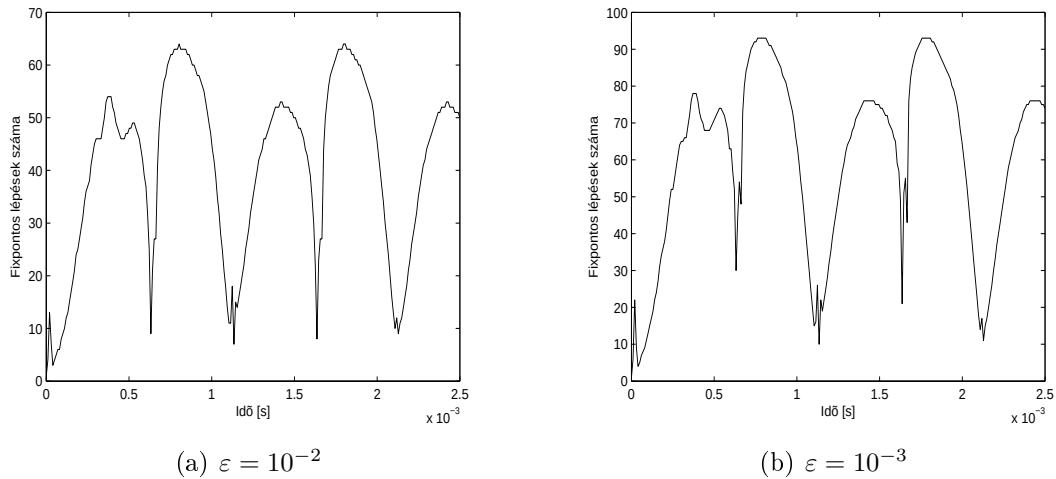


7.2. ábra. A remanencia jelensége a $t = 1$ ms időpillanatban

felelően negatív koercitív térrel szüntethető meg, majd innen a negatív szaturáció és a negatív remanencia következik. Az ?? függelékben jól nyomon követhető a gyenge alak megoldásának segítségével meghatározott mágneses térerősség idő- és helyfüggése, valamint az ebből fixpontos módszer és skalár Preisach-modell segítségével meghatározott mágneses indukció. Az analitikus megoldás [29] és a hiszterézis karakterisztika ismeretében kijelenthető, hogy mind a végelem-módszer, mind az

annak kimenetét felhasználó Preisach-modell az elvártan megfelelően működik, a valós fizikai jelenséget tükrözi.

A 7.3. ábra a konvergenciához szükséges fixpontos lépések számát ábrázolja az időlépések függvényében két eltérő ε küszöbindex esetén. Megfigyelhető, hogyha a



7.3. ábra. Fixpontos lépések száma

pontosságot tízszeresére növeljük ($\varepsilon = 10^{-2} \rightarrow \varepsilon = 10^{-3}$), úgy a fixpontos lépések száma nem arányosan tízszeresére, de mérhetően növekszik. Az egy periódusra felvett konvergenciagörbék jellegéből látható, hogy a fixpontos lépések száma bizonyos szakaszokon növekvő-, más szakaszokon csökkenő-, vagy impulzusszerűen csökkenő tendenciát mutat. A további magyarázathoz fontos megjegyezni, hogy a fixpontos iterációt időlépésenként mindig az előző időlépés kimeneti értékéből indítottam (a módszer tárgyalása során már említettem, hogy az iterációs tetszőleges kezdőértékkel is konvergens). A kezdeti rövid tranzienst leszámítva a függvény négy szakaszra bontható:

1. Az első szakasz a zérusról növekvő mágneses térerősség szakasza. Ezen a szakaszon a fixpontos lépések száma időlépésenként nő, melynek oka, hogy a modell karakterisztikája egyre határozottabban kezd elszakadni a lineáris szakasztól, a reziduál értéke jelentősen csökken, hogy a modell kimenetének megfelelően kompenzálja a lineáris komponenst. Mivel a fixpontos lépések a reziduál aktuális értékének javítását szolgálják egészen a küszöbindexig, ezért a számítás egyre több iterációs lépést igényel a megkívánt konvergenciához;
2. A maximum elérése után a lépések száma impulzusszerűen lecsökken, melynek oka, hogy a mágneses indukció eléri a szaturációs értéket, így néhány időlépésen keresztül az indukció értéke változatlan, konstans, így nincs szükség a reziduál értékének lényeges javítására;
3. A következő szakaszon a térerősség és a mágneses indukció is csökken, a modell egy, a kezdetihez hasonló lineáris szakaszra ér, mely során a reziduál értékét folyamatosan javítani kell a negatív értékektől egészen a nulláig;

4. Amennyiben a modell visszatér a lineáris szakaszra, úgy a reziduál értéke közel nulla, így nincs szükséges lényeges mennyiségű fixpontos lépésre annak javításához. Ez lényegében azt jelenti, hogy a modell kimenetét megközelítőleg a lineáris komponens határozza meg.

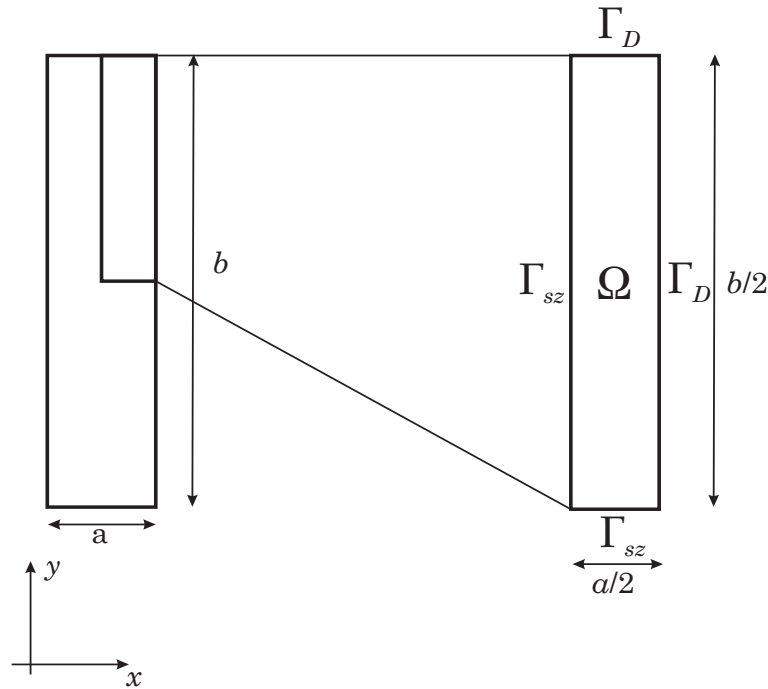
A következő szakaszok az itt leírtakkal teljesen analóg módon magyarázhatók. Elmondható tehát, hogy a következő impulzusszerű lépésszámvisszaesés a negatív saturáció konstans mágneses indukciójának, míg a kevésbé meredek visszazuhanás a kvázi-lineáris szakaszra történő áttérésnek köszönhető.

8. fejezet

Kétdimenziós probléma szimulációja

8.1. Vezető lemez mágneses térben

Az előző fejezetben bemutatott differenciálegyenlet alkalmazható kétdimenziós probléma szimulációjára is. Legyen adott egy szimmetrikus, a szélességű és b hosszúságú lemez, melynek vastagsága elhanyagolható a többi geometriai paraméteréhez képest. A szimmetriát kihasználva elegendő csupán a lemez egynegyedének vizsgálata. A

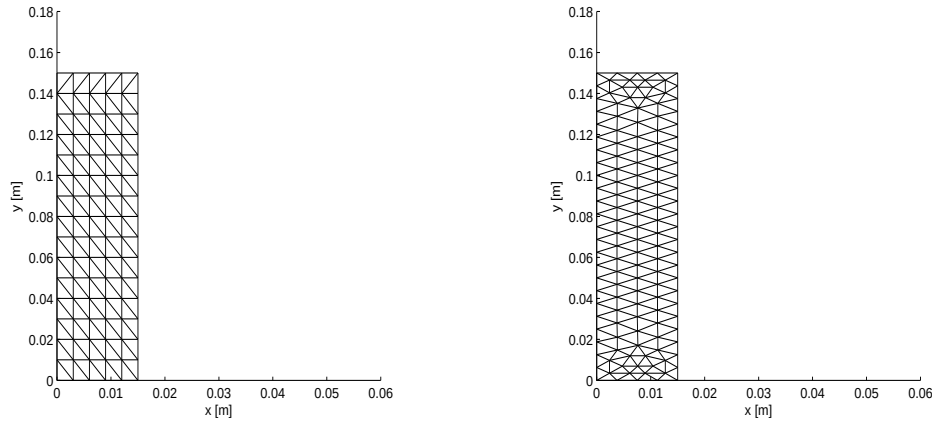


8.1. ábra. A vizsgált lemez

vizsgált Ω problémateret (8.1. ábra) Γ_D és Γ_{sz} perem határolja; előbbi az eredeti lemez valódi pereme, utóbbi pedig az egyszerűsítésből adódó szimmetriaperem. Γ_D csomópontjain Dirichlet-peremfeltételt kell előírni, hiszen a lemeznek ez a széle közvetlen kapcsolatban áll az alkalmazott külső periodikus mágneses térerősséggel. Γ_{sz} szimmetriaperem kezelése kényelmes, hiszen ezekre a csomópontokra semmilyen peremfeltételt sem kell alkalmazni.

8.2. Rácsgenerálás

Munkám során az adott geometriára két rácsot is felhasználtam: az egyiket kézzel készítettem, míg a másikat a **GMSH** [26] szoftver rácsgeneráló moduljának segítségével generáltam. Előbbi módszerrel egy szimmetrikus rácsot vettem fel, majd mátrixok formájában, manuálisan vittem be az adatokat a programkódba, utóbbival egy gyakorlatiasabb, aszimmetrikus rácsot generáltam, és az adatokat fájlból olvastam be a szimulációhoz. A 8.2. ábrán tanulmányozhatóak a lényeges különbségek.



8.2. ábra. Kézzel és GMSH-val generált rács

A konkrét példa két ráccsal történő szimulációja nem kizárólag a fizikai tartalom szempontjából fontos (elméletileg teljesen mindegy, hogy a megoldót melyik végelelem-rácson futtatom le, megegyező eredményt kell, hogy kapjak), hanem egy érdekes szimulációtechnológiai problémára is felhívja a figyelmet.

8.3. Végelelemes implementáció

Kétdimenziós probléma vizsgálata során háromszögeket használva egy elemet három csomópont definiál egyértelműen, ami azt jelenti, hogy egyetlen elem összesen három formafüggvény (W_1, W_2, W_3) értelmezett. Miként azt bemutattam, a végelelemes implementáció során szükség van a formafüggvények gradienseire is, amely kétdimenziós esetben formafüggvényenként kettő tagú, hiszen a függvény mind x -változó, mind y -változó szerint parciálisan differenciálható. Ezek (5.9) és (5.10) jelöléseit konzekvensen felhasználva:

$$\begin{aligned} \nabla W_1 &= gW_{1x} + gW_{1y} = \frac{\partial W_1}{\partial x} + \frac{\partial W_1}{\partial y} = \frac{\frac{1}{2}(y_2 - y_3)}{\Delta} + \frac{\frac{1}{2}(x_3 - x_2)}{\Delta}, \\ \nabla W_2 &= gW_{2x} + gW_{2y} = \frac{\partial W_2}{\partial x} + \frac{\partial W_2}{\partial y} = \frac{\frac{1}{2}(y_3 - y_1)}{\Delta} + \frac{\frac{1}{2}(x_1 - x_3)}{\Delta}, \\ \nabla W_3 &= gW_{3x} + gW_{3y} = \frac{\partial W_3}{\partial x} + \frac{\partial W_3}{\partial y} = \frac{\frac{1}{2}(y_1 - y_2)}{\Delta} + \frac{\frac{1}{2}(x_2 - x_1)}{\Delta}. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Az eddigiek alapján (7.19) egyetlen elemre felírva:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left\{ \begin{bmatrix} \nabla W_1 \\ \nabla W_2 \\ \nabla W_3 \end{bmatrix} \cdot [\nabla W_1 \quad \nabla W_2 \quad \nabla W_3] \right\} d\Omega \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} + \\
& + \mu\sigma \int_{\Omega} \left\{ \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix} \cdot [W_1 \quad W_2 \quad W_3] \right\} d\Omega \begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial t} \\ \frac{\partial H_2}{\partial t} \\ \frac{\partial H_3}{\partial t} \end{bmatrix} = \\
& = -\sigma \int_{\Omega} \left\{ \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix} \cdot [W_1 \quad W_2 \quad W_3] \right\} d\Omega \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial t} \\ \frac{\partial R_2}{\partial t} \\ \frac{\partial R_3}{\partial t} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{8.2}$$

Mivel az első integrál ismét konstans függvényeket tartalmaz egy-egy végeelem felett, ezért az egydimenziós példához hasonlóan az integrálás a végeelem területével való szorzássá egyszerűsödik. A kifejezést kifejtve, átírva, továbbá elvégezve a beszorzásokat

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{bmatrix} gW_{1x} \\ gW_{2x} \\ gW_{3x} \end{bmatrix} \cdot [gW_{1x} \quad gW_{2x} \quad gW_{3x}] + \begin{bmatrix} gW_{1y} \\ gW_{2y} \\ gW_{3y} \end{bmatrix} \cdot [gW_{1y} \quad gW_{2y} \quad gW_{3y}] \right\} \Delta + \\
& + \mu\sigma \int_{\Omega} \left\{ \begin{bmatrix} W_1 W_1 & W_1 W_2 & W_1 W_3 \\ W_2 W_1 & W_2 W_2 & W_2 W_3 \\ W_3 W_1 & W_3 W_2 & W_3 W_3 \end{bmatrix} \right\} d\Omega \begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial t} \\ \frac{\partial H_2}{\partial t} \\ \frac{\partial H_3}{\partial t} \end{bmatrix} = \\
& = -\sigma \int_{\Omega} \left\{ \begin{bmatrix} W_1 W_1 & W_1 W_2 & W_1 W_3 \\ W_2 W_1 & W_2 W_2 & W_2 W_3 \\ W_3 W_1 & W_3 W_2 & W_3 W_3 \end{bmatrix} \right\} d\Omega \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial t} \\ \frac{\partial R_2}{\partial t} \\ \frac{\partial R_3}{\partial t} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{8.3}$$

adódik, ahol a második és harmadik integrál kiértékeléséhez (mivel az integrandus nem konstans függvény a tartományon belül) ismét numerikus integrálási technika használata szükséges.

8.4. Numerikus integrálás háromszög felett

Egy tetszőleges kétváltozós $f(x, y)$ függvény háromszög feletti integrálja közelíthető [31]:

$$\int_{\Omega} f(x, y) d\Omega \approx \frac{\Delta}{3} \sum_{i=1}^3 f(a_1 \xi_i + b_1 \eta_i + c_1, a_2 \xi_i + b_2 \eta_i + c_2) \cdot \vartheta_i, \tag{8.4}$$

ahol ξ_i és η_i a kvadratura pontjait, ϑ_i pedig a súlyait jelöli. Megválasztásuk a pontos közelítés érdekében a következőképpen történik:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{1}{6}, & \eta_1 &= \frac{1}{6}, & \vartheta_1 &= \frac{1}{3}, \\
\xi_2 &= \frac{1}{6}, & \eta_2 &= \frac{2}{3}, & \vartheta_2 &= \frac{1}{3}, \\
\xi_3 &= \frac{2}{3}, & \eta_3 &= \frac{1}{6}, & \vartheta_3 &= \frac{1}{3}.
\end{aligned} \tag{8.5}$$

A további paraméterek a háromszög csúcsainak koordinátaiból számíthatók:

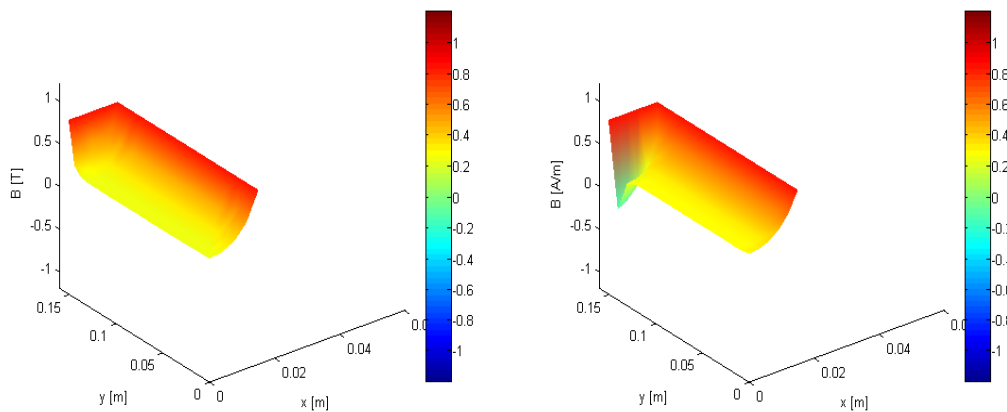
$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 - x_1, & b_1 &= x_3 - x_1, & c_1 &= x_1, \\ a_2 &= y_2 - y_1, & b_2 &= y_3 - y_1, & c_2 &= y_1. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Az eddigiek alapján a háromszög felett integrálandó formafüggvények a következőképpen írhatóak fel:

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & a_1\xi_i + b_1\eta_i + c_1 & a_2\xi_i + b_2\eta_i + c_2 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\Delta}, \\ W_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & a_1\xi_i + b_1\eta_i + c_1 & a_2\xi_i + b_2\eta_i + c_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\Delta}, \\ W_3 &= \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & a_1\xi_i + b_1\eta_i + c_1 & a_2\xi_i + b_2\eta_i + c_2 \end{vmatrix}}{\Delta}. \end{aligned} \quad (8.7)$$

8.5. Eredmények, kiértékelés

A szimulációs eredmények bemutatása, valamint a paraméterek pontos értékei a ?? függelékben található. Az eredmény jellege, a mágneses térerősség és a mágneses indukció alakulása összevethető az egydimenziós szimuláció esetén tapasztaltakkal, hiszen a kétdimenziós lemez minden x -irányú metszetén tulajdonképpen az egydimenziós, a teljes x -irányt átfogó szimulációnak a felét tanulmányozhatjuk. A kézzel rajzolt, szabályos rácson lefutattott, és a GMSH-val generált sűrűbb rácson elvégzett szimuláció közötti különbség a 8.3. ábrán tanulmányozható. A szimulációs hiba



8.3. ábra. Szimulációs hiba a ritkább, szimmetrikus rácsból adódóan

oka, hogy az anyag belsejében felvett végelem-méret összemérhető az ott terjedő elektromágneses hullám hullámhosszával és behatolási mélységével, emiatt az elemek közötti változás olyan mértékű, ami már szimulációs hibát okoz. A hiba elkerülésének érdekében célszerű tehát a végelem-hálót kellően sűrűre felvenni.

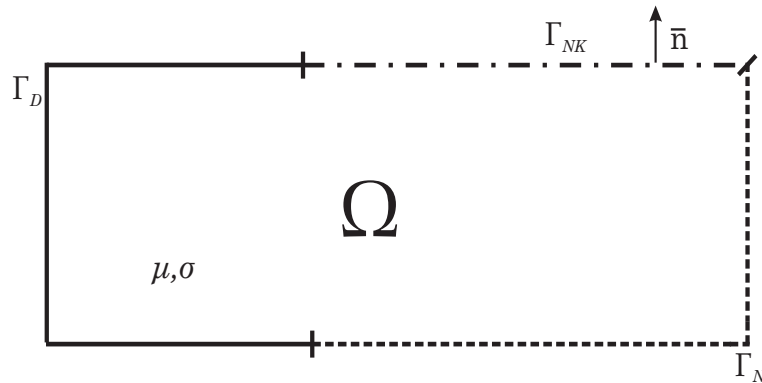
9. fejezet

Kétdimenziós szimuláció a mágneses indukcióra építve

Ebben a fejezetben bemutatom a nemlineáris, örvényáramú $\vec{A}$ -formalizmus egyenleteit, gyenge alakjának levezetését és a végelelemes implementációt egy konkrét példán keresztül.

9.1. A probléma definiálása

A formalizmus segítségével vizsgált probléma általánosítva a 9.1. ábrán látható. Az adott mágneses permeabilitásfüggvénnyel és vezetőképességgel rendelkező Ω problémateret három különböző típusú perem határolja. A Dirichlet-típusú peremen (Γ_D) a keresett $\vec{A}$ vektorpotenciál értéke direkt módon kerül előírásra, míg a Neumann-típusú peremen (Γ_N) $\vec{A}$ normális irányú deriváltja kerül meghatározásra, továbbá Γ_{NK} az a külön perem, ahol a gerjesztés, a $\vec{K}$ felületi áram kerül előírásra. Fontos megjegyezni, hogy Γ_{NK} is egy Neumann-típusú perem, pusztán a könnyebb matematikai kezelhetőség miatt kerül külön bevezetésre Γ_N mellett. Fontos megjegyezni,



9.1. ábra. A vizsgált probléma általánosítva

hogy Γ_{NK} is egy Neumann-típusú perem, pusztán a könnyebb matematikai kezelhetőség miatt kerül külön bevezetésre Γ_N mellett.

9.2. A problémát leíró egyenletek

A problémát leíró differenciálegyenlet levezetéséhez a Maxwell-egyenletek kvázistacionárius alakjai, illetve a nemlinearitást is figyelembe vevő konstitúciós relációk szükségesek:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}, \quad (9.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (9.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (9.3)$$

$$\vec{H} = \nu \vec{B} + \vec{I}, \quad (9.4)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}. \quad (9.5)$$

A problémához tartozó peremfeltétel:

$$\vec{H} \times \vec{n} = \vec{K}, \quad \Gamma_{NK-\text{n.}} \quad (9.6)$$

Mivel (9.3) alapján a mágneses indukcióvektor divergenciamentes [9], $\vec{A}$ vektorpotenciál bevezethető

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (9.7)$$

alapján, mert:

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0, \quad \forall \vec{A}(\vec{r}, t). \quad (9.8)$$

$\vec{A}$ vektormező divergenciáját is meg kell határozni, ebben az esetben a választás: $\nabla \cdot \vec{A} = 0$. Ez az úgynevezett Coulomb-mérték, ami kétdimenziós szimuláció esetén automatikusan teljesül [9]. Így tehát (9.2) átírható (9.7) segítségével:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{A}). \quad (9.9)$$

Nem mozgó koordináta-rendszerben az idő- és a hely szerinti deriválás felcserélhető, ezért (9.9) felírható

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (9.10)$$

alakban. Az $\vec{E} + \partial \vec{A} / \partial t$ rotációmentes vektormező általános esetben származtatható a V elektromos skalárpotenciálból a

$$\nabla \times \nabla V = 0, \quad \forall V(\vec{r}, t) \quad (9.11)$$

összefüggés alapján:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V. \quad (9.12)$$

Amennyiben $\nabla V = 0$ választással élünk, úgy

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (9.13)$$

adódik. A gerjesztési törvény (9.1) felírható (9.4), (9.5), (9.7) és (9.13) segítségével, így a problémát leíró egyenlet a

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A} + \vec{I}) = -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (9.14)$$

alakban adódik. A peremfeltétel (9.4) és (9.7) segítségével kifejezve:

$$(\nu \nabla \times \vec{A} + \vec{I}) \times \vec{n} = \vec{K}. \quad (9.15)$$

9.3. Gyenge alak levezetése

A levezetés első lépése (9.14) és (9.15) összeadása, megszorozása egy tetszőleges $\vec{W}$ formafüggvénnyel és integrálása a problématarományra:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \left\{ \nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A} + \vec{I}) \right\} d\Omega + \int_{\Gamma_{NK}} \vec{W} \cdot \left\{ (\nu \nabla \times \vec{A} + \vec{I}) \times \vec{n} \right\} \cdot \vec{n} d\Gamma = \\ & = -\sigma \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma_{NK}} \vec{W} \cdot \vec{K} d\vec{\Gamma}. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Felbontva az első integrandus zárójelét, továbbá átrendezve az egyenletet az

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \nabla \times \nu \nabla \times \vec{A} d\Omega + \sigma \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_{NK}} \vec{W} \cdot \left\{ (\nu \nabla \times \vec{A} + \vec{I}) \times \vec{n} \right\} \cdot \vec{n} d\Gamma = - \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \nabla \times \vec{I} d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_{NK}} \vec{W} \cdot \vec{K} d\vec{\Gamma} \end{aligned} \quad (9.17)$$

formula adódik. Az egyenlet mindkét oldalának első integrandusa a

$$\nabla \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla \times \vec{u} - \vec{u} \cdot \nabla \times \vec{v} \quad (9.18)$$

azonosságot felhasználva felbontható a bal oldalon $\vec{v} = \vec{W}$, $\vec{u} = \nu \nabla \times \vec{A}$, a jobb oldalon $\vec{v} = \vec{W}$, $\vec{u} = \vec{I}$ megválasztással. A felbontás elvégzése után a következő egyenlet írható fel:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nu \nabla \times \vec{A} \times \vec{W}) d\Omega + \int_{\Omega} \nu \nabla \times \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{W} d\Omega + \sigma \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_{NK}} \vec{W} \cdot \left\{ (\nu \nabla \times \vec{A} + \vec{I}) \times \vec{n} \right\} \cdot \vec{n} d\Gamma = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\vec{I} \times \vec{W}) d\Omega - \\ & - \int_{\Omega} \vec{I} \cdot \nabla \times \vec{W} d\Omega + \int_{\Gamma_{NK}} \vec{W} \cdot \vec{K} d\vec{\Gamma}. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Egy vektormező divergenciájának teljes problématerre vett integrálja (4.9) értelmében átírható a térfogatot határoló felületre vett körintegrálra, így a következő formula adódik:

$$\begin{aligned} & \oint_{\Gamma_D \cup \Gamma_N} \left(\nu \nabla \times \vec{A} \times \vec{W} \right) \cdot \vec{n} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \nu \nabla \times \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{W} \, d\Omega + \sigma \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \, d\Omega + \\ & \int_{\Gamma_{NK}} \vec{W} \cdot \left\{ \left(\nu \nabla \times \vec{A} + \vec{I} \right) \times \vec{n} \right\} \cdot \vec{n} \, d\Gamma = - \oint_{\Gamma_D \cup \Gamma_N} \vec{I} \times \vec{W} \cdot \vec{n} \, d\Gamma - \\ & - \int_{\Omega} \vec{I} \cdot \nabla \times \vec{W} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{NK}} \vec{W} \cdot \vec{K} \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (9.20)$$

A vegyes szorzat

$$\left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \vec{c} = \left(\vec{c} \times \vec{a} \right) \cdot \vec{b} = \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) \cdot \vec{a}, \quad \forall \vec{a}(\vec{r}, t), \vec{b}(\vec{r}, t), \vec{c}(\vec{r}, t) \quad (9.21)$$

tulajdonságát felhasználva az egyenlet bal oldalának első integrálja felbontható:

$$\begin{aligned} & \oint_{\Gamma_D \cup \Gamma_N} \left(\nu \nabla \times \vec{A} \times \vec{W} \right) \cdot \vec{n} \, d\Gamma = \oint_{\Gamma_D} \left(\vec{W} \times \vec{n} \right) \cdot \nu \nabla \times \vec{A} \, d\Gamma + \\ & + \oint_{\Gamma_N} \left(\vec{n} \times \nu \nabla \times \vec{A} \right) \cdot \vec{W} \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (9.22)$$

Mivel Γ_D -n a vektorpotenciál közelítése a

$$\vec{A} \approx \vec{A}_D + \sum_i \vec{W}_i A_i \quad (9.23)$$

formula segítségével úgy történik, hogy $\vec{W}_i = 0$, ezért az első tag zérus, kiesik, és a Neumann-perem integrálja átírható:

$$\oint_{\Gamma_N} \left\{ \vec{n} \times \left(\vec{H} - \vec{I} \right) \right\} \cdot \vec{W} \, d\Gamma = \oint_{\Gamma_N} \left(\vec{n} \times \vec{H} \right) \cdot \vec{W} \, d\Gamma - \oint_{\Gamma_N} \left(\vec{n} \times \vec{I} \right) \cdot \vec{W} \, d\Gamma. \quad (9.24)$$

Mivel Γ_N peremen nem folyik áram, a kifejezés első tagja kiesik, (9.20) jobb oldalának első integrálja az előzőekkel teljesen analóg módon felbontható:

$$- \oint_{\Gamma_D \cup \Gamma_N} \vec{I} \times \vec{W} \cdot \vec{n} \, d\Gamma = - \oint_{\Gamma_D} \left(\vec{W} \times \vec{n} \right) \cdot \vec{I} \, d\Gamma - \oint_{\Gamma_N} \left(\vec{n} \times \vec{I} \right) \cdot \vec{W} \, d\Gamma, \quad (9.25)$$

valamint (9.20) bal oldalának negyedik integrálja átírható a

$$\int_{\Gamma_{NK}} \vec{W} \cdot (\vec{n} \times \vec{n}) \cdot \left(\nu \nabla \times \vec{A} + \vec{I} \right) \, d\Gamma \quad (9.26)$$

alakba, ami $\vec{n} \times \vec{n}$ miatt zérus, kiesik. Az eddigiek alapján (9.20) a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nu \nabla \times \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{W} \, d\Omega + \sigma \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \, d\Omega - \oint_{\Gamma_N} (\vec{n} \times \vec{I}) \cdot \vec{W} \, d\Gamma = \\ & = \oint_{\Gamma_N} (\vec{n} \times \vec{I}) \cdot \vec{W} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \vec{I} \cdot \nabla \times \vec{W} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{NK}} \vec{W} \cdot \vec{K} \, d\vec{\Gamma}. \end{aligned} \quad (9.27)$$

A Γ_N -re vett körintegrál kiesik, hiszen mindkét oldalon egyformán szerepel, így adódik a ténylegesen implementálásra kerülő gyenge alak:

$$\int_{\Omega} \nu \nabla \times \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{W} \, d\Omega + \sigma \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \, d\Omega = - \int_{\Omega} \vec{I} \cdot \nabla \times \vec{W} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{NK}} \vec{W} \cdot \vec{K} \, d\vec{\Gamma}. \quad (9.28)$$

9.4. Végeselemes implementáció

A mágneses vektorpotenciál a vizsgált példában olyan vektormennyiség, amelynek csak z -irányú komponense van, de kizárólag (x, y) -térdimenzióktól és az időtől függ:

$$\vec{A} = A_z(x, y) \cdot \vec{e}_z = A \cdot \vec{e}_z. \quad (9.29)$$

A vektorpotenciál emiatt automatikusan kielégíti a Coulomb-mértéket, hiszen:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A}{\partial z} = 0. \quad (9.30)$$

A vektorpotenciál közelítése W skaláris, lineáris formafüggvények segítségével történik:

$$A \approx \sum_{i=1}^{N_p} W_i A_i. \quad (9.31)$$

Az implementáció alapjait tekintve megegyezik az eddig tárgyaltakkal, ezért a részletes bemutatástól ezúttal eltekintek, csupán az eddigiektől eltérő gerjesztés megvalósítását és a megoldás mechanizmusát, lépéseit kívánom bemutatni. A továbbiakban n jelöli a kétdimenziós diszkretizálás során létrejött csomópontok számát, m pedig az elemek számát. A szimuláció során a $\mathbf{K}$ együtthatómátrix $(n \times n)$ méretű, $\mathbf{u}$ és $\mathbf{b}$ ismeretleneket és a peremfeltételeket tartalmazó oszlopvektor n -méretű. A szimuláció lépései a következők:

1. $\mathbf{K}$ együtthatómátrix asszemblálása (9.28) első és második integráljának együtthatói alapján $(n \times n)$;
2. $\mathbf{B}$ együtthatómátrix asszemblálása (9.28) második integrálja alapján, hiszen ez a tag az ismeretlen vektorpotenciál idő szerinti deriváltját tartalmazza, így valamilyen módon elő kell állítani $\mathbf{a}_{\text{old}}$ együtthatóit is $(n \times n)$;

3. $\mathbf{b}$ oszlopvektor $\mathbf{b}_{\text{exc}}$ -komponensének előállítása (9.28) negyedik integrálja alapján. Az előállítás során egy dimenziót vissza kell lépni, hiszen ez a tag egy felületi integrál, a felület pedig szakaszokkal diszkretizálható. Ez egyetlen elemre:

$$\int_{\Gamma_{NK}} \vec{\mathbf{W}} \cdot \vec{\mathbf{K}} \, d\vec{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot K \cdot \frac{dl}{2}, \quad (9.32)$$

ahol dl a szakasz hosszát jelöli. $\mathbf{b}_{\text{exc}}$ ($n \times 1$) méretű;

4. $\mathbf{b}$ oszlopvektor $\mathbf{b}_{\text{Adt}}$ -komponensének előállítása $\mathbf{B}$ együtthatómátrix és $\mathbf{a}_{\text{old}}$ alapján:

$$\mathbf{b}_{\text{Adt}} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_{\text{old}}, \quad (9.33)$$

$\mathbf{b}_{\text{Adt}}$ ($n \times 1$) méretű;

5. Fixpontos iteráció indítása addig, amíg ε küszöbindex kellően kis értékűre csökken. Az első lépésnél $\mathbf{b}_{\text{Ix}}$ és $\mathbf{b}_{\text{Iy}}$ oszlopvektorok kinullázásra kerülnek, méretük ($n \times 1$)-es. Egyetlen fixpontos lépésben a következőket kell végrehajtani:

- (a) $\mathbf{b}$ ($n \times 1$) előállítása:

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_{\text{exc}} + \mathbf{b}_{\text{Adt}} - (\mathbf{b}_{\text{Ix}} + \mathbf{b}_{\text{Iy}}); \quad (9.34)$$

- (b) Dirichlet-peremfeltétel érvényesítése, tehát $\mathbf{K}$ és $\mathbf{b}$ megfelelő elemeinek explicit értékadása;

- (c) $\mathbf{a}$ kiszámítása:

$$\mathbf{a} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{b}, \quad (9.35)$$

$\mathbf{a}$ ebben az esetben a vektorpotenciál értékeit tartalmazza. Mivel csomóponti végeselemekkel dolgoztam, ezért a kiszámítás után minden csomópontban rendelkezésre áll egy-egy vektorpotenciál-érték;

- (d) $\vec{\mathbf{B}} = \nabla \times \vec{\mathbf{A}}$ kiszámítása. Ez azt jelenti, hogy minden egyes végeselemre ki kell számítani az elemet alkotó csomópontokban rendelkezésre álló vektorpotenciál-értékekből egy B_x és egy B_y indukcióértéket. Így jön létre két ($m \times 1$) méretű vektor, $\mathbf{B}_x$ és $\mathbf{B}_y$;

- (e) H_x és H_y approximálása:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_x &= \nu \mathbf{B}_x + \mathbf{I}_{x\text{old}}, \\ \mathbf{H}_y &= \nu \mathbf{B}_y + \mathbf{I}_{y\text{old}}, \end{aligned} \quad (9.36)$$

$\mathbf{H}_x$ és $\mathbf{H}_y$ ($m \times 1$)-méretű vektorok;

- (f) I_x és I_y számítása:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_x &= \mathbf{H}_x - \nu \mathcal{B}\{\mathbf{H}_x\}, \\ \mathbf{I}_y &= \mathbf{H}_y - \nu \mathcal{B}\{\mathbf{H}_y\}, \end{aligned} \quad (9.37)$$

$\mathbf{I}_x$ és $\mathbf{I}_y$ ($m \times 1$)-méretű vektorok;

- (g) $\mathbf{b}_{\text{Ix}}$ és $\mathbf{b}_{\text{Iy}}$ feltöltése (9.28) harmadik integrálja szerint;

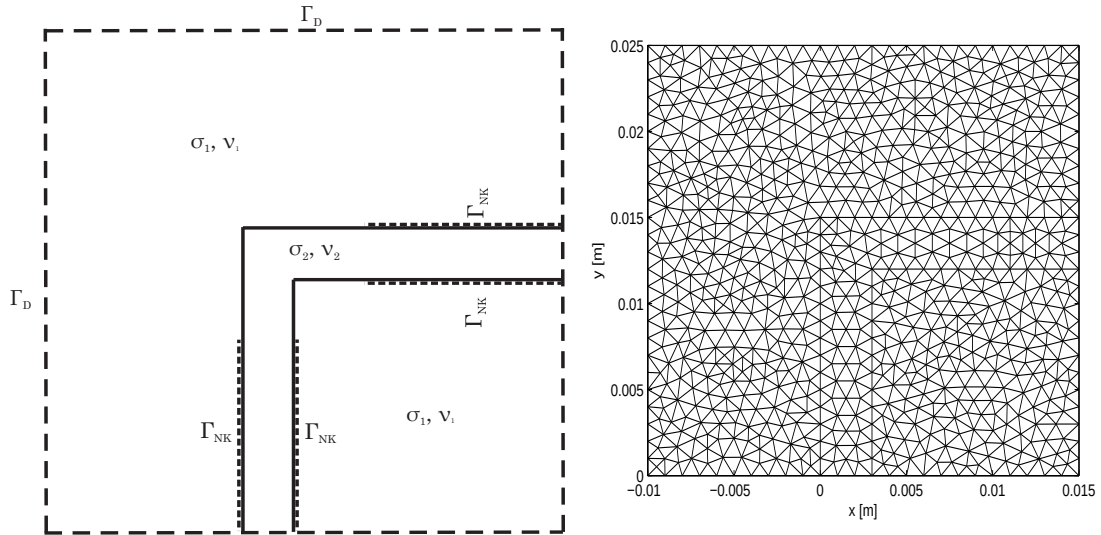
$$(h) \quad \varepsilon = \|\mathbf{I} - \mathbf{I}_{old}\|; \quad (9.38)$$

$$(i) \quad \mathbf{I}_{xold} = \mathbf{I}_x, \quad \mathbf{I}_{yold} = \mathbf{I}_y; \quad (9.39)$$

$$6. \quad \mathbf{a}_{old} = \mathbf{a}. \quad (9.40)$$

9.5. A vizsgált geometria

A szimulált geometriai elrendezést a 9.2. ábra mutatja. Az adott ν_2 reciprok permeabilitásfüggvénnyel és σ_2 vezetőképességgel rendelkező vasanyagon a szaggatott vonallal jelölt szakaszon áramjárta vezetőt feltételezünk, ami a lemezek teljes keresztmetszetére van feltekercselve. A feltekercselt vasanyagot ν_1 és σ_1 paraméterekkel rendelkező levegő veszi körül. A szimuláció során Γ_{NK} peremen az áramjárta



9.2. ábra. A szimulált geometriai elrendezés

vezetőt reprezentáló $\vec{K}$ felületi áramsűrűséget szükséges előírni, ami a tekercselés irányából adódóan a lemez egyik oldalán pozitív, a másik oldalán negatív előjellel kerül előírásra. Γ_D Dirichlet-peremen a csomóponti potenciálértékek kinullázásra kerülnek, hiszen ez a vizsgálódás tényleges határfelülete. Az eredmények a ?? függelékben tanulmányozhatók.

Konklúzió, jövőbeli tervek

Dolgozatomban bemutattam a ferromágneses hiszterézis fizikai magyarázatát, okát, ismertettem a mágneses térerősség és a mágneses indukció között definiálható nemlineáris, többértékű kapcsolat mérésének elvét, valamint az elvégzett mérési eredményeket. Felvázoltam a skaláris hiszterézis modellezésére alkalmazható skalár Preisach-modell működésének elvét, kimenetének numerikus meghatározását, továbbá az Everett-függvény mérési eredményekből történő identifikációjának segítségével ismerttem a modell illesztésének módját, érintve a modell verifikációját is. Bemutattam a Maxwell-egyenletek teljes rendszerét, ismerttem a végeselem-módszer alapelvét, legfontosabb jellemzőit.

Betekintést adtam azokba az eljárásokba, amelyek a nemlineáris anyagtulajdonságok implementálásához szükségesek végeselem-módszer esetén. Ismerttem a polarizációs formulát, továbbá az iterációs lépéseket két különböző formalizmus esetére. Felvázoltam a mágneses térerősségre épülő formalizmus alapegyenleteit, levezettem a problémát leíró differenciálegyenletet, a gyenge alakot, valamint annak megvalósítását végeselem-módszer segítségével. Az eredmények alapján látható, hogy a direkt $\vec{H}$ -ra épülő formalizmus eredménye jól kezelhető, fixpontos megoldás mellett is viszonylag gyorsan konvergál, hátránya viszont, hogy peremfeltételek megadása esetén direkt módon a mágneses térerősséget kell előírni, ami kevésbé gyakorlatias megoldás.

Egy általános és egy konkrét problémán keresztül bemutattam az örvényáramú, nemlineáris $\vec{A}$ -formalizmus alapegyenleteit, levezettem a megoldásra kerülő differenciálegyenletet, bemutattam a peremfeltételeket, levezettem a gyenge alakot, felvázoltam a megoldás során asszemblálásra kerülő mátrixokat és vektorokat, valamint az iterációs lépések sorrendjét, a megoldás mechanizmusát, végül ismerttem az eredményeket. Az eredmények alapján megfogalmazható, hogy az $\vec{A}$ -formalizmus implementálása összetettebb, komplexebb feladat, a direkt modell illesztése a szimulációhoz nehezebb, a fixpontos iteráció konvergenciája bár itt is biztosított, de sokkal lassabb, mint a mágneses térerősségre épülő feladat esetén. A módszer nagy előnye, hogy sokkal gyakorlatiasabb, hiszen a felületi áram peremfeltételként előírható, mint gerjesztés.

Legfontosabb jövőbeli tervem, hogy az itt bemutatott, Matlab script formájában implementált megoldókat kereskedelmi forgalomban is kapható, az iparban is alkalmazott szimulációs szoftverrel, szoftverekkel ellenőrizsem. A jövőben foglalkozni kívánok a megoldók futási idejének csökkentésével is, melynek részeként célom azok implementálása gépközi programozási nyelvben, de a független részek párhuzamosítása is fontos, izgalmas kérdés lehet. A fixpontos módszeren kívül célom megismerkedni egyéb algoritmusokkal is a nemlineáris egyenletrendszerek megoldásával kapcsolatban.

Irodalomjegyzék

- [1] Fodor Gy. *Jelek és Rendszerek*. Műegyetemi Kiadó, 2006.
- [2] Della Torre E. *Magnetic Hysteresis*. IEEE Press, New York, 1999.
- [3] Irarrazabal Alfonso A., Opromolla L. D. *Hysteresis in Export Markets*. New York University, 2006.
- [4] Borbély G. *Elektronika I-II*. Széchenyi István Egyetem, HEFOP, Győr, 2006.
- [5] Chikazumi S. *Physics of Magnetism*. Oxford University Press, 1997.
- [6] Iványi A. *Hysteresis Models In Electromagnetic Computation*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1997.
- [7] Bertotti G., Mayergoyz I. *The Science of Hysteresis*. Academic Press, 2006.
- [8] Dr. Kuczmann M., Ph.D. *A hiszterézis karakterisztikával jellemzett rendszerek és a numerikus térszámítás kapcsolata*. Széchenyi István Egyetem, 2010.
- [9] Kuczmann M., Iványi A. *The Finite Element Method in Magnetism*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 2008.
- [10] Iványi A. *Folytonos és Diszkrét Szimulációk az Elektrodinamikában*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 2003.
- [11] Fodor Gy., *Elméleti Elektrotechnika III*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1992.
- [12] Marcsa D. *A Preisach-modell és alkalmazása a villamosmérnöki gyakorlatban*. TMDK-dolgozat, Győr, 2009.
- [13] Dr. Zombory L. *Elektromágneses Terek*. Műszaki Kiadó, Budapest, 2008.
- [14] <http://hungary.ni.com/labview> (utolsó látogatás: 2014. július 20).
- [15] <http://www.ni.com/data-acquisition/> (utolsó látogatás: 2014. július 20).
- [16] Szabó Zs. *A Preisach-hiszterézismodell*. Híradástechnika, LVIII. évfolyam, Budapest, 2003.
- [17] http://en.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Barkhausen (utolsó látogatás: 2014. július 20).
- [18] Kuczmann M. *Jelek és Rendszerek*. Universitas-Győr, Győr, 2005.

- [19] Gyimóthy Sz., Iványi A. *Implementation and Application of the 2D Vectorical Preisach Model for Field Calculation with the Finite Element Method*. Proceedings of the 6th International IGTE Symposium on Numerical Field Calculation in Electrical Engineering, Graz, 1994.
- [20] Hong S-K., Kim H-K., Jung H-K. *Analytical Formulation for the Everett-function*. Journal of Magnetism, Korea, 1997.
- [21] Lencse G., *Számítógép-hálózatok*. Universitas-Győr, Győr, 2008.
- [22] Bronstein I. N., Szemengyaljev K. A. *Matematikai kézikönyv*. TypoTeX kiadó, Budapest, 2009.
- [23] Maxwell J. C. *On Physical Lines of Force*. Philosophical Magazine and Journal of Science, London, 1861.
- [24] <http://www.st-andrews.ac.uk/~ulf/perfectmaxwell.jpg> (utolsó látogatás: 2014. szeptember 3).
- [25] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/8/8a/Oliver_Heaviside2.jpg/200px-Oliver_Heaviside2.jpg (utolsó látogatás: 2014. szeptember 3).
- [26] <http://geuz.org/gmsh/> (utolsó látogatás: 2014. szeptember 9).
- [27] Gilbert J. R., Moler C., Schreiber R. *Sparse matrices in Matlab: design and implementation*. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, Philadelphia, USA, 1992.
- [28] Jin J., *The Finite Element Method in Electromagnetics*. John Wiley and Sons, New York, 2002.
- [29] Dr. Simonyi K., Dr. Fodor Gy., Dr. Vágó I., *Elméleti villamosságtan példatár*. Tankönyvkiadó Vállalat, Budapest, 1980.
- [30] Pólik Z., Kuczmann M. *Measuring and control the hysteresis loop by using analog and digital integrators*. Journal of Optoelectronics and Advanced Materials, Romania, 2008.
- [31] Dolezel I., Karban P., Solin P., *Integral Methods in Low-Frequency Electromagnetics*. John Wiley & Sons, Canada, 2009.