

Tudományos Diákköri Konferencia

Mándoki Réka, Ther Péter Pál, Tomasovszky Péter
III. éves építész hallgatók

CSONKOLÁSOK, CSILLAGOK

Konzulens:
Dr. Domokos Gábor
egyetemi tanár
a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagja

A dolgozat elkészítését az OTKA 104601-es kutatási témája támogatta.



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
SZILÁRDSÁGTANI ÉS TARTÓSZERKEZETI TANSZÉK

2014.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	3
Háromszögek vizsgálata	4
<i>Háromszögek egyensúlyi helyzetei</i>	<i>5</i>
<i>Háromszögek csonkolása</i>	<i>7</i>
Derékszögű háromszögek	7
Tompaszögű háromszögek.....	10
Négyszögek csonkolása	13
<i>Téglalapok</i>	<i>13</i>
<i>Rombuszok.....</i>	<i>15</i>
„Szabályos” sokszögek csonkolása	17
<i>Szabályos konvex sokszögek.....</i>	<i>17</i>
<i>Szabályos konkáv-konvex sokszögek (Csillagok)</i>	<i>19</i>
A feladatok programozásáról.....	22
Összefoglalás.....	23
Irodalomjegyzék.....	23

Bevezetés

Dolgozatunkban egyparaméteres $S(\lambda)$ sokszögcsaládot vágunk ketté súlyponton átmenő, meghatározott iránnyal δ szöget bezáró egyenesekkel, majd darabjait homogén, merev testnek tekintve egyensúlyi helyzeteik N számát vizsgáljuk. Kiértékelésként a kapott $N(\lambda, \delta)$ eredményeket a λ - δ síkon ábrázoljuk.

Az egyensúlyi helyzetek N száma a síkidom stabil pontjainak összege.

Az $S(\lambda)$ sokszög egy λ paramétertől függő, zárt törtvonal által határolt homogén, merev testnek tekintett sokszögcsalád. $S(\lambda)$ lehet háromszög, rombusz, téglalap, szabályos sokszög és csillag is.

A λ - δ sík a λ és δ paraméterek által meghatározott koordináta sík, ahol az $N(\lambda, \delta)$ egész értékű függvényt $(\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^+)$ ábrázolva az egyes pontok $S(\lambda, \delta)$ síkidomokat jellemeznek egyensúlyi helyzeteik N számával.

Az $N(\lambda, \delta)$ függvény N érték ugrásai görbék határoznak meg. Ezen görbék ábrázolásával lehetőség nyílik arra, hogy $N(\lambda, \delta)$ függvényt leképezzük a λ - δ síkra különböző N értékű tartományokat ábrázolva. Ahol a görbék metszik egymást, ún. bifurkációs pontok jönnek létre. Ezen pontok kis környezetében a ponthoz tartozó síkidomok geometriája végtelenül érzékenyvé válik.

A háromszögek vizsgálata során meghatároztuk, hogy hogyan függ egyensúlyi helyzeteik száma az oldalak arányától, valamint a derékszögű háromszögeket csonkolva megfigyelhetjük, hogy számunkra váratlan módon e háromszögek λ - δ diagramja (egyensúlyi térképe) periodicitást mutat.

A téglalapok sokszögcsaládját csonkolva már elágazások (ún. bifurkációs pontok) jelennek meg az egyensúlyi térképen, a nagyobb csúcsszámmal rendelkező síkidomok esetében pedig egyre sűrűbb elágazásrendszert figyelhetünk meg. Ezen pontok kis környezetének modellezése, vizsgálata, sokat segíthet statikai-geometriai intuíciónk fejlesztésében, kibontakoztatásában.

A fenti egyensúly-elágazásokkal analóg jelenséggel találkoztunk mechanikai tanulmányainkban, amikor a rugalmas stabilitásvesztés jelenségét vizsgáltuk. Itt azt mutatjuk be, hogy matematikailag és mechanikailag is szorosan kapcsolódó jelenséggel ennél sokkal egyszerűbb feladatokban is találkozhatunk. Reményeink szerint ez közelebb vihet a rugalmas stabilitás jobb megértéséhez.

A dolgozatunkban bemutatott egyensúly-elágazások abban is segíthetnek, hogy közelebbről megérthessük a természetben zajló fizikai alakfejlődés folyamatait, melyek során hasonló jelenségek játszódnak le.

A különböző problémák tanulmányozáshoz saját magunk által írt programokat használtunk fel.
Háromszögek vizsgálata

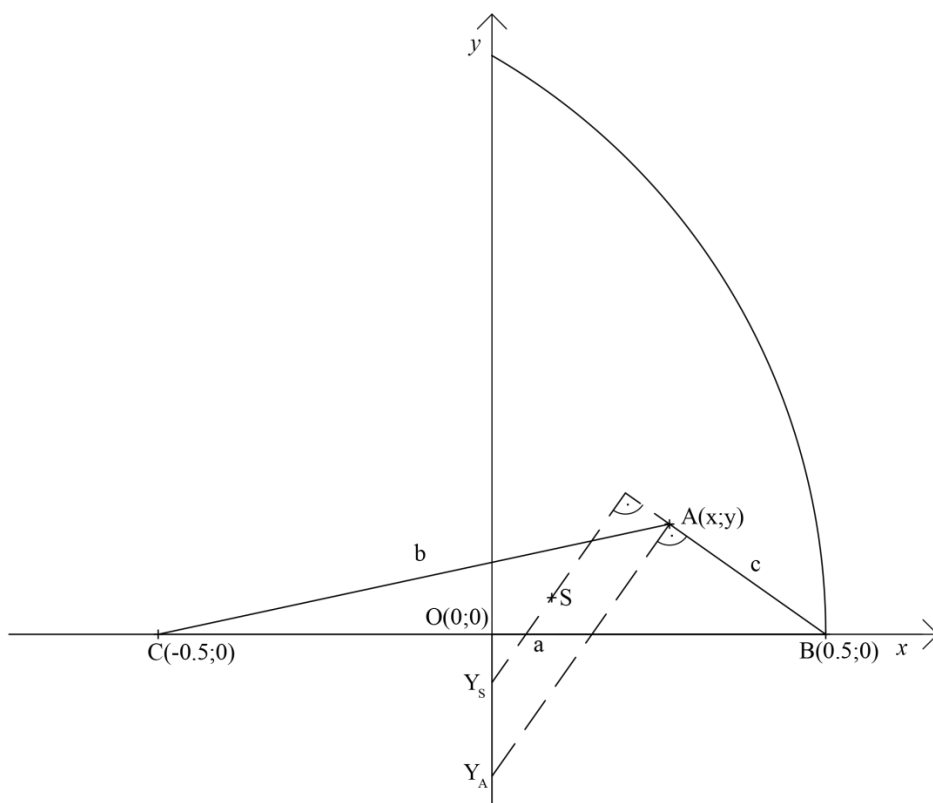
Háromszögek esetében kétféle eljárást is alkalmazunk. Egyrészt megvizsgáljuk a háromszögek teljes családját egyensúlyi helyzeteik száma szerint, másrészt csonkolással generálunk háromszögekből különböző három-, illetve négyszögeket.

Az előbbi vizsgálat algebrai úton történik, utóbbit az általunk írt programokkal végezzük el. Alapvetően mindkét vizsgálat a háromszögek bizonyos csoportosítását mutatja, de míg az egyik az összes háromszöget osztályozza, addig a másik - egy más szempont alapján – csak a háromszögek egy bizonyos csoportját.

Háromszögek egyensúlyi helyzetei

A háromszögek teljes családját vizsgálva belátható, hogy egy háromszögnek 2 vagy 3 egyensúlyi helyzete van. Az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy a háromszög a, b, c oldalaira teljesül $a = 1 \geq b \geq c$, továbbá az a oldal C, B végpontjainak (x, y) koordinátái rendre $(+0,5; 0)$, $(-0,5; 0)$ (1.ábra). Így az x és y tengelyek pozitív része egyértelműen határolja azt a tartományt, ahova A csúcs kerülhet.

Ha a a leghosszabb oldal és b a második leghosszabb, a tartomány újabb határoló görbéje az $(x+0,5)^2+y^2=1$ egyenletű körív. Ezen belül bármely $(A_x;A_y)$ -t felvéve különböző háromszöget kapunk.



1. ábra: A vizsgált háromszögek elhelyezkedése az (xy) koordináta-rendszerben:

Az összes háromszöget ábrázolva „B”, „C” csúcsok koordinátái rendre $(+0.5, 0)$, $(-0.5, 0)$ míg „A” csúcs a pozitív x és y tengelyek, valamint a $(x+0.5)^2+y^2=1$ egyenletű körív által határolt tartományba esik.

Ezek alapján mindig c lesz a legrövidebb oldal, tehát csak e mentén dőlhet el a háromszög. Ezt az értelmezési tartományt és értékkészletet használva felállíthatunk egy egyenletrendszert, mely megmutatja a 2 illetve 3 egyensúlyi helyzettel rendelkező háromszögek csoportját.

A háromszög súlypontja a következőképpen kapható meg:

$$S_x = \frac{A_x + B_x + C_x}{3} = \frac{x + \frac{1}{2} + (-\frac{1}{2})}{3} = \frac{x}{3} \quad (1)$$

$$S_y = \frac{A_y + B_y + C_y}{3} = \frac{y + 0 + 0}{3} = \frac{y}{3} \quad (2)$$

Mivel a két tartomány határvonalát akarjuk meghatározni belátható, hogy az S pont merőleges vetületét keressük a c oldal egyenesén. Ha ez egybeesik A -val, akkor határhelyzetben vagyunk. Ezzel egyenértékű az is, hogy A illetve S pontokon átmenő, c oldalra merőleges egyenesek metszéspontját keressük az y tengellyel (Y_A, Y_S).

$$\begin{cases} Y_A = \frac{(\frac{1}{2} - A_x) * (-A_x)}{A_y} + A_y = \frac{(\frac{1}{2} - x) * (-x)}{y} + y & (3) \\ Y_S = \frac{(\frac{1}{2} - A_x) * (-S_x)}{A_y} + S_y = \frac{(\frac{1}{2} - x) * (-\frac{x}{3})}{x} + \frac{y}{3} & (4) \end{cases}$$

$$Y_A = Y_S \quad (5)$$

Az egyenletrendszer megoldása:

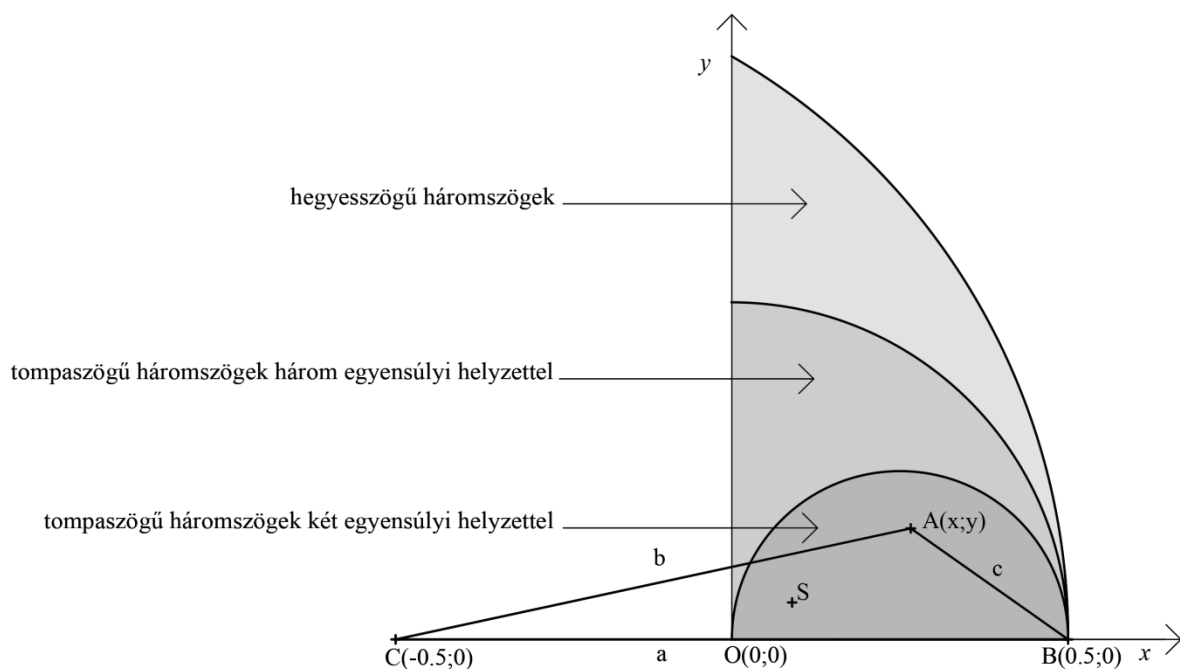
$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \quad (6)$$

Tehát a fentiekben meghatározott értelmezési tartományon belül a 2 és 3 egyensúlyi helyzettel rendelkező háromszögek közti határvonal a $(0,25; 0)$ középpontú $0,25$ egység sugarú félkör.

Első tétel:

Amennyiben a háromszögek teljes családját vizsgáljuk, és a háromszögek egyik oldala fix és egységnyi, belátható, hogy a nem fix csúcs csak az oldal, az oldalfelező merőleges, és az egyik fix csúcsból húzott egységnyi sugarú körív által határolt tartományba eshet. A tartományon belül a hegyes-, és tompaszögű háromszögek területét a *Thalesz*-negyedkör határolja (sugara fél egységnyi). Továbbá bizonyítható, hogy a tartományon belül a három és két egyensúlyi helyzettel rendelkező háromszögek területét a fix oldal negyedelő

pontjából húzott negyed egység sugarú félkör határolja. Mind a három körív középpontja a fix oldalra esik, és egyetlen pontban érintik egymást (2. ábra).



2. ábra: Az első tétel illusztrációja:

kör határolja a fent bemutatott 3 tartományt, mely körök középpontja az „a” oldalra esik, és egy pontban érintik egymást (0,5; 0).

A fenti feladatot egy kicsit máshogy vizsgálva kiolvasható, hogy mekkora részt kell eltávolítani egy bizonyos háromszögből, hogy az egyensúlyi helyzete csökkenjen eggyel. Ezzel foglalkozik az irodalomjegyzékben feltüntetett cikk is. [1]

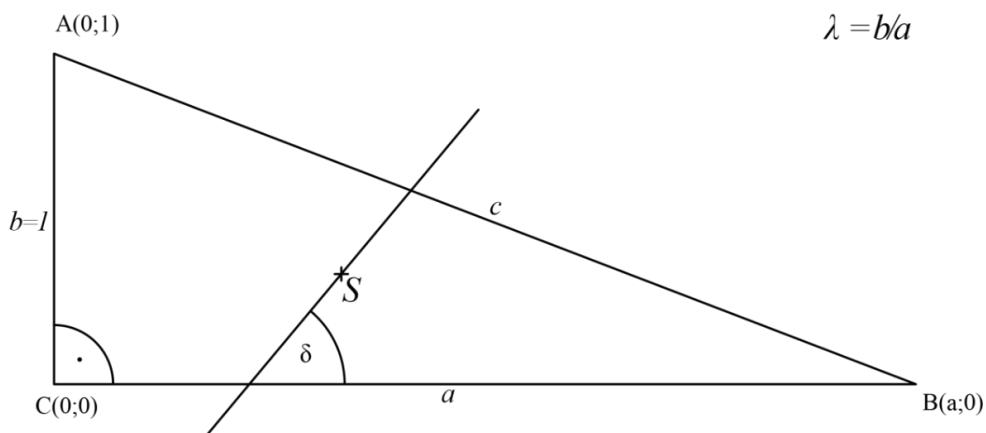
Háromszögek csonkolása

A továbbiakban csonkolással hozunk létre síkidomokat, melyeket a bevezetőben említett módon vizsgálhatunk.

Derékszögű háromszögek

Az $S(\lambda)$ sokszögcsalád itt a derékszögű háromszögek halmaza. A feltételezhetjük, hogy a derékszögű háromszög a, b, c oldalaira teljesül a $a^2 + b^2 = c^2$, továbbá $b = 1 \leq a \leq c$, így a -t növelve a az összes derékszögű háromszög megkapható. Paraméterünk tehát $0 < \lambda = b/a \leq 1$. A háromszöget a súlyponton átmenő, a oldallal δ szöget bezáró egyenessel csonkoljuk. A csonkolás után mindkét létrejött $S(\lambda, \delta)$ sokszöget vizsgáljuk.

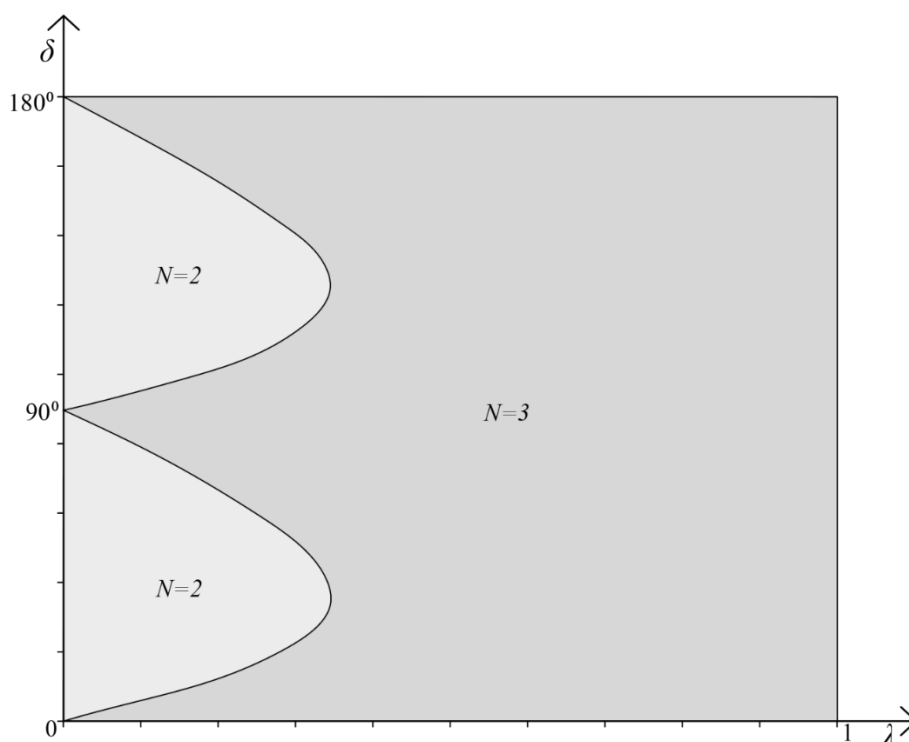
A λ - δ diagramot $\lambda = 1$ -ig ábrázoljuk, ugyanis 1-től a térkép csak ismétli önmagát, mert minden rögzített λ értékhez ugyanazok a δ tartományok tartoznak, mint ami $1 / \lambda$ értékhez, valamint $0^\circ \leq \delta \leq 180^\circ$, mert a térkép tükrös $\delta = 180^\circ$ -ra.



3. ábra: Derékszögű háromszögek csonkolása:

Az összes derékszögű háromszöget ábrázolva $a^2 + b^2 = c^2$, továbbá $b = 1 \leq a \leq c$.

Az „a” oldalt növelve $0 < \lambda = b/a \leq 1$, a súlyponton át metsző egyenes pedig δ szöget zár be „a” oldallal



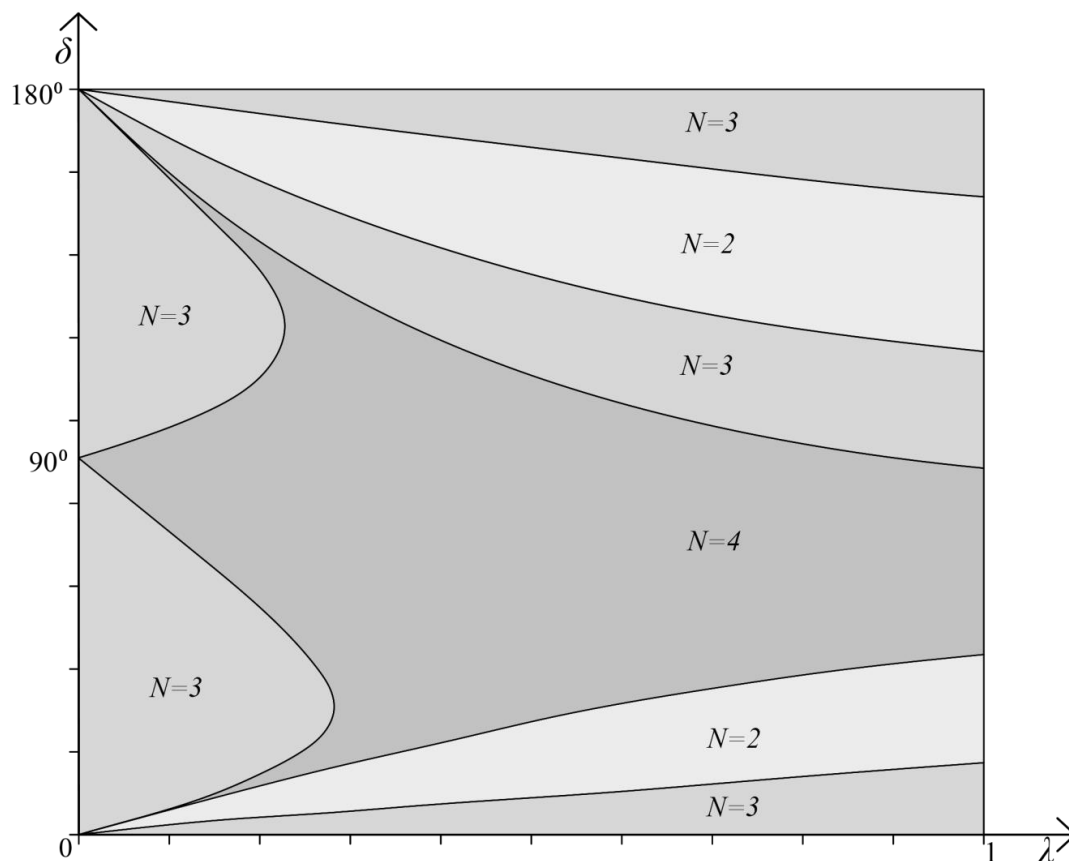
4. ábra: Derékszögű háromszögek csonkolásával kapott háromszögek egyensúlyi térképe.

A csonkolás során három-, illetve négyszögek jönnek létre.

Háromszögek esetén az egyensúlyi helyzetek száma 2 illetve 3 lehet.

Első sejtés:

Derékszögű háromszögek csonkolásánál a referencia iránnyal δ szöget bezáró súlyponton átmenő metsző egyenes, és a $\delta + \pi/2$ szögű metsző egyenes esetén a keletkezett háromszögek azonos N számú egyensúlyi helyzettel rendelkeznek.



5. ábra: derékszögű háromszögek csonkolásával kapott négyszögek egyensúlyi térképe.

Négyszögek esetén az egyensúlyi helyzetek száma 2, 3 és 4 is lehet.

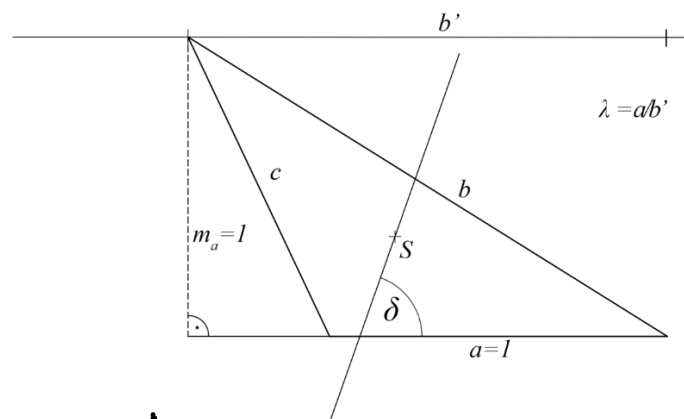
- A térkép vizsgálata során számunkra váratlan alakot mutatott az $N = 4$ egyensúlyi helyzettel rendelkező síkidomok tartománya, ugyanis ez a terület két különálló $N = 3$ egyensúlyi helyzettel rendelkező tartományt is körülvesz.
- Továbbá $\lambda = 0$ közelében mindegyik tartomány vesz fel 0° , vagy 180° körüli δ értéket (a két szög a csonkolás szempontjából egy és ugyanaz, ugyanis a metsző egyenes mindkét esetben párhuzamos a -val)

- A háromszögek esetén is hasonló alakú parabolyszerű görbe határolta a különböző egyensúlyi helyzeteket megjelölő tartományokat. Ebből arra következtethetünk, hogy az egyensúlyi helyzetek változását jobban befolyásolják a kezdeti feltételek, mint a keletkezett síkidom oldalszáma.

Tompaszögű háromszögek

Az $S(\lambda)$ sokszögcsalád itt a bizonyos¹ tompaszögű háromszögek halmaza. Ezen háromszögekre igaz, hogy $a = 1 \leq c < b$, $\beta \geq 90^\circ$ valamint $m_a = 1$. Paraméterünk b oldal növelésével $0 < \lambda = a/b' \leq 1$, ahol b' a b oldal a -val párhuzamos vetülete. A háromszöget súlyponton átmenő, a oldallal δ szöget bezáró egyenessel csonkoljuk. A csonkolás után csak a létrejött $S(\lambda, \delta)$ háromszögeket vizsgáljuk.

A λ - δ diagramot $\lambda = 1$ -ig ábrázoljuk, ugyanis 1-től a térkép már hegyesszögű $S(\lambda)$ háromszögeket is mutat, – tehát nem teljesülne a $\beta \geq 90^\circ$ feltétel – valamint $0^\circ \leq \delta \leq 180^\circ$, mert a térkép tükrös $\delta = 180^\circ$ -ra.



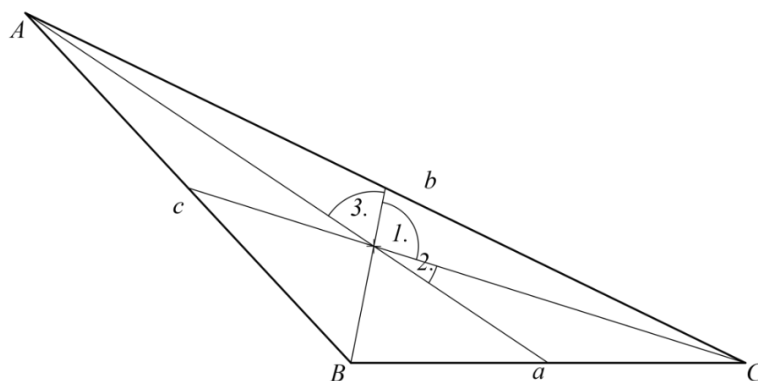
6. ábra: Hegyesszögű háromszögek csonkolása:

Hegyesszögű háromszögek azonos területű csoportját ábrázolva $a = 1 \leq c < b$, $\beta \geq 90^\circ$ valamint $m_a = 1$. A „ b ” oldalt növelve $0 < \lambda = a/b' \leq 1$, ahol b' a b oldal a -val párhuzamos vetülete, a súlyponton át metsző egyenes pedig δ szöget zár be „ a ” oldallal

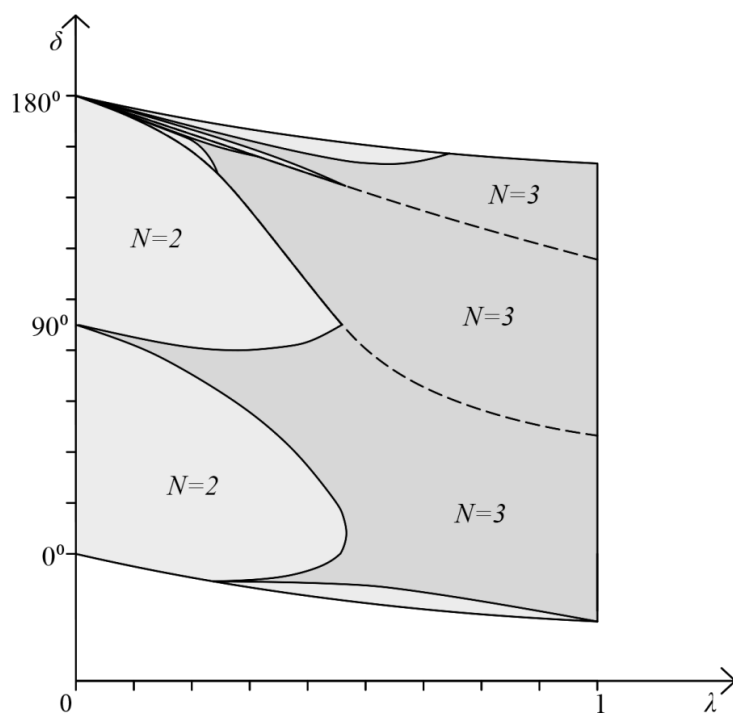
A csonkolás során tehát három- és négyszögek jönnek létre.

¹ A vizsgált tartomány nem fedi le az összes tompaszögű háromszöget.

A létrejött **háromszögek** egyensúlyi helyzeteinek száma 2 illetve 3 lehet. A létrejött háromszögek egyik csúcsa mindig az eredeti háromszög egyik csúcsa. Ennek megfelelően nevezzük el a létrejött tartományokat, mely a különböző háromszögekre vonatkozik. Az 1. tartomány A-hoz, a 2. tartomány B-hez és a 3. tartomány C-hez tartozik, e tartományok váltása a diagramon szaggatott vonallal jelenik meg. Az átláthatóság kedvéért a diagramon az A csúcshoz tartozó tartományt egy helyre vontuk össze.



7. ábra: A létrejött háromszögek szögtartományai



8. ábra: Azonos területű tompaszögű háromszögek csonkolásával létrejött háromszögek egyensúlyi térképe

A diagramot elemezve az alábbi következtetéseket vontuk le:

- a különböző csúcsokhoz tartozó tartományhatárok függetlenek egymástól
- az A csúcshoz tartozó háromszögek esetében van olyan rögzített λ , ahol a háromszög δ függvényében nem csak kétszer, hanem négyszer vált egyensúlyi helyzetet (pl.: $\lambda = 0,4$)
- B és C csúcshoz tartozó háromszögek esetében ez nem igaz
- ahogy $\lambda \rightarrow 0$ a B és C csúcshoz tartozó háromszögek csak 180° körüli δ mellett jelennek meg

Második tétel:

Ha A, B, C háromszög tompaszögű, és az a oldal, valamint az ahhoz tartozó m_a magasság egységnyi (tehát a háromszög területe állandó), és a háromszöget a $\lambda = a/b'$ oldalarány jellemzi, ahol b' a b oldal a -val párhuzamos vetülete, akkor súlyponton átmenő, a oldallal δ szöget bezáró metsző egyenessel $\lambda \rightarrow 0$ esetén csak akkor kaphatunk A csúcshoz tartozó 3 egyensúlyi helyzettel rendelkező háromszöget, ha δ merőleges S_a -ra, az a oldalhoz tartozó súlyvonalra.

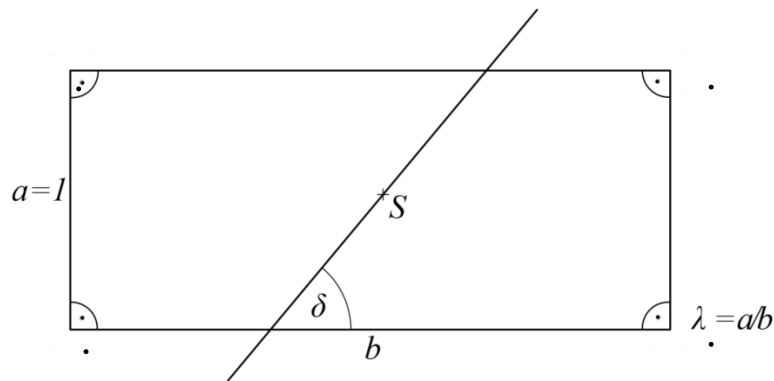
Ha $\lambda \rightarrow 0$, akkor $b' \rightarrow \infty$, tehát b a végtelenben metszi az a -val párhuzamos, attól m_a távolságra lévő egyenest, így párhuzamossá válik az a -val. A háromszög S_a súlyvonala is párhuzamos lesz a -val, az arra merőleges metsző egyenes egyenlőszárú, A csúcshoz tartozó háromszöget hoz létre. Egyenlőszárú háromszögeknek pedig minden esetben 3 egyensúlyi oldala van.

Négyszögek csonkolása

Téglalapok

Az $S(\lambda)$ sokszögcsalád itt a téglalapok halmaza. Az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy a téglalap minden belső szöge derékszög, a és b oldalaira teljesül, hogy $a = 1 \leq b$, így b -t növelve az összes téglalap megkapható. Paraméterünk tehát $0 < \lambda = a/b \leq 1$. A téglalapot a súlyponton átmenő, b oldallal δ szöget bezáró egyenessel csonkoljuk. A csonkolás után csak az egyik létrejött $S(\lambda, \delta)$ síkidomot vizsgáljuk az egybevágóság miatt.

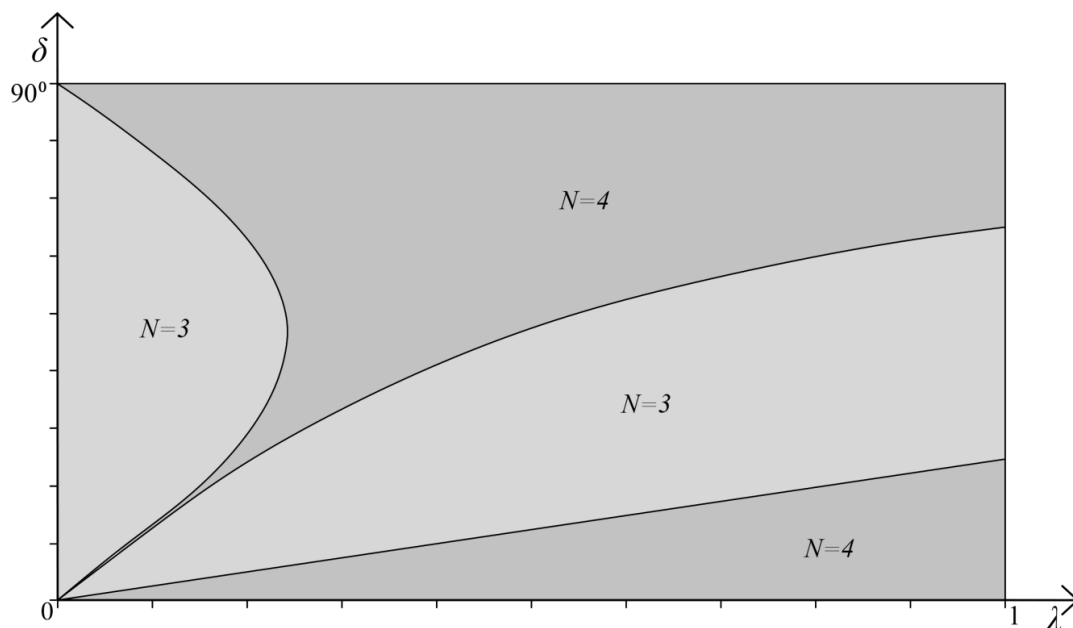
A λ - δ diagramot $\lambda = 1$ -ig ábrázoljuk, ugyanis 1-től a térkép csak ismétli önmagát, mert minden rögzített λ értékhez ugyanazok a δ tartományok tartoznak, mint ami $1/\lambda$ értékhez, valamint $0^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$, mert a térkép tükrös $\delta = 90^\circ$ -ra.



9. ábra: Téglalapok csonkolása:

Az összes téglalapot ábrázolva az oldalakra igaz, hogy $a = 1 \leq b$, valamint minden belső szög 90° . A „ b ” oldalt növelve $0 < \lambda = a/b \leq 1$, a súlyponton át metsző egyenes pedig δ szöget zár be „ b ” oldallal.

Mivel a csonkolás után derékszögű háromszögek, vagy -trapézok keletkeznek, az egyensúlyi helyzeteik száma 3 és 4 lehet.



10. ábra: Téglalapok csonkolásával létrehozott trapézok egyensúlyi térképe.

A diagramokat elemezve az alábbiakat tapasztalhatunk:

- van olyan rögzített λ arány, ahol δ szög függvényében az egyensúlyi helyzetek száma nem csak kétszer, hanem négyszer is változik (pl.: $\lambda=0,2$)
- ahogy $\lambda \rightarrow 0$ a létrejött síkidomnak már csak 0° és 90° foknál lesz 4 egyensúlyi helyzete

Egy rögzített λ esetén létrejövő különböző síkidomokat vizsgálva első ránézésre nem könnyű megállapítani egyensúlyi helyzeteinek számát (11. ábra).



11. ábra: Rögzített $0 < \lambda \leq 0,24$ esetén létrejövő síkidomok a δ szög függvényében.

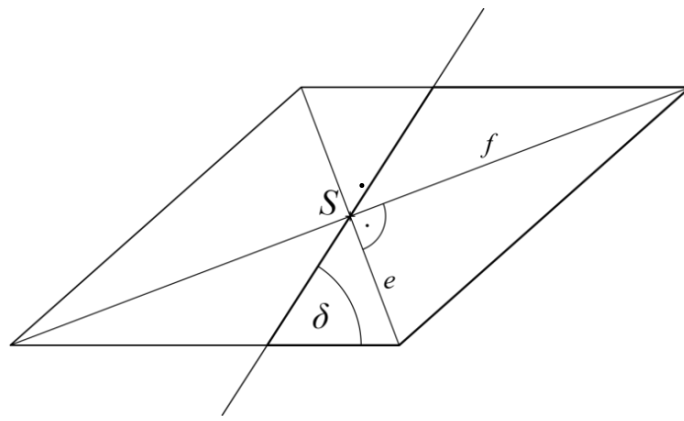
Harmadik sejtés:

A $\lambda \approx 0,24$ -nél lezáruló tartomány határoló görbéje parabola. A parabola paramétere $\approx 1,55$.

Rombuszok

Az $S(\lambda)$ sokszögcsalád itt a rombuszok halmaza. Az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy a rombusz e és f átlói derékszögben felezik egymást, valamint $e = 1 \leq f$, így f átlót növelve az összes rombusz megkapható. Paraméterünk tehát $0 < \lambda = e/f \leq 1$. A rombuszt súlyponton átmenő egyik rombuszoldallal δ szöget bezáró egyenessel csonkoljuk.

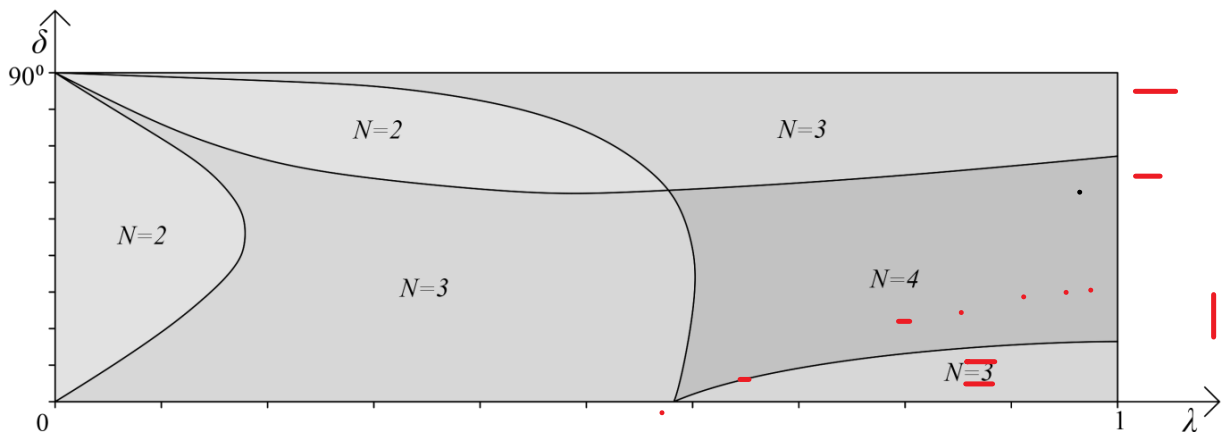
A λ - δ diagramot $\lambda = 1$ -ig ábrázoljuk, ugyanis 1-től a térkép csak ismétli önmagát, mert minden rögzített λ értékhez ugyanazok a δ tartományok tartoznak, mint ami $1/\lambda$ értékhez, valamint $0^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$, mert a térkép tükrös $\delta = 90^\circ$ -ra.



12. ábra: Rombuszok csonkolása:

Az összes rombuszt ábrázolva „ e ” és „ f ” átlók derékszögben felezik egymást, valamint $e = 1 \leq f$. Az „ f ” átlót növelve $0 < \lambda = e/f \leq 1$, a súlyponton át metsző egyenes pedig δ szöget zár be az egyik oldallal.

Mivel a csonkolás után egyenlőszárú háromszögek, vagy trapézok keletkeznek, az egyensúlyi helyzetek száma 2, 3 illetve 4 lehet.



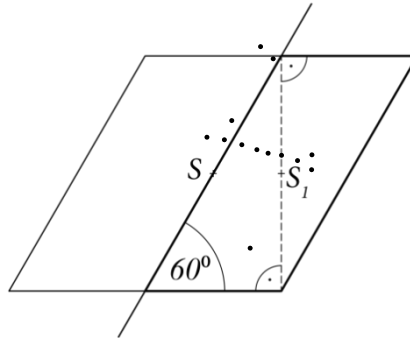
13. ábra: Rombuszok csonkolásával létrehozott síkidomok egyensúlyi térképe



14. ábra: a bifurkációs pont környezetében található síkidomok, és azok egyensúlyi helyzetei

A $N(\lambda, \delta)$ már valódi bifurkációt mutat, ahol mindhárom tartomány 1 pontban érinti egymást.

- Ez az első olyan elágazás amely valódi hasonlóságokat mutat az *Euler*-féle stabilitásvesztési (kihajlási) görbével.
- Ebben a pontban ugyanúgy nem értelmezhető a síkidom stabilitása, ahogy a határvonal egyetlen pontján sem, viszont tudjuk, hogy mi van a pontban. $S(\lambda, \delta)$ egy paralelogramma, melynek szögei 60° illetve 120° -osak. Belátható, hogy a súlypont rövidebb oldalakra vonatkoztatott vetülete pont csúcsokra esik. Fizikailag végtelenül instabil a test (szimmetria miatt), de mégis megáll mind a 4 oldalán. Ez az az ellentét, amit az $N(\lambda, \delta)$ függvény nem tud kezelni (15. ábra).



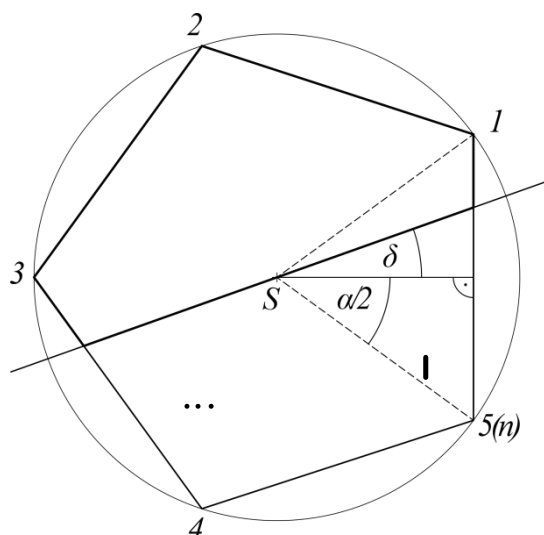
15. ábra: A bifurkációs pontban létrejövő trapéz

„Szabályos” sokszögek csonkolása

Szabályos sokszögeknek tekintünk dolgozatunkban minden olyan n csúcús sokszöget, melynek minden oldala egyenlő, minimum $n/2$ szimmetriatengelye van, és csúcsaik maximum két koncentrikus súlyponti középpontú körön helyezkednek el felváltva.

Szabályos konvex sokszögek

Szabályos sokszögek csúcsai egyetlen körön helyezkednek el. Az $S(\lambda)$ sokszögek λ paramétere tehát a csúcsok n száma. A metsző egyenes δ szöge 0° , ha egy oldal felezőpontján megy át, és az α oldalhoz tartozó középponti szög függvényében $0 \leq \delta \leq \alpha/2$ (ismétlődés elkerülése). A csonkolás után páros λ esetén csak az egyik síkidomot vizsgáltuk (szimmetria), páratlan λ esetén pedig mindkettőt.



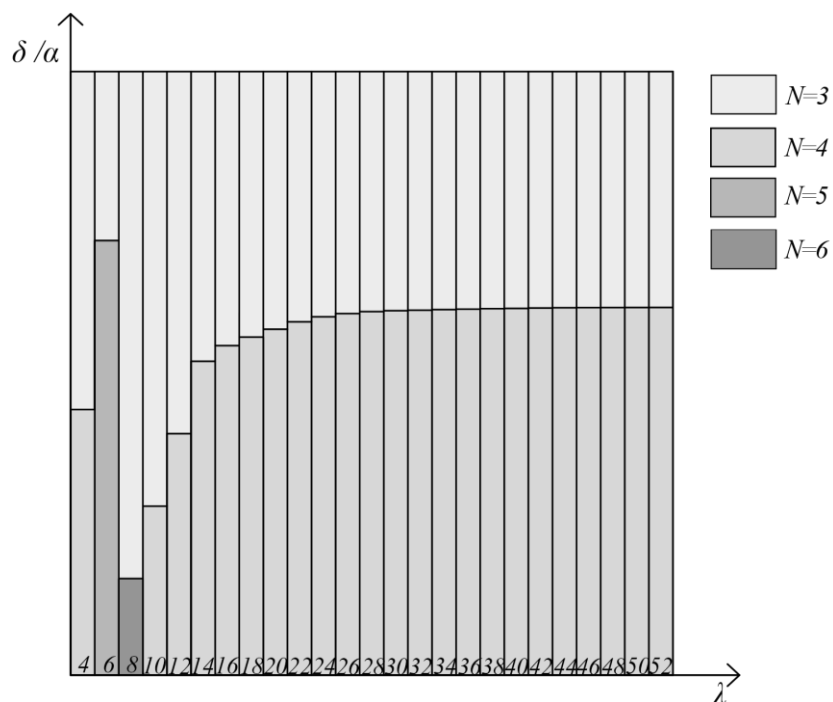
16. ábra: Szabályos konvex sokszög:

„ n ” darab csúcsa egy körön helyezkedik el, oldalai egyenlők, egy oldalhoz tartozó középponti szög α . Az „ n ” csúcsszámot növelve $\lambda = n$, a súlyponton át metsző egyenes pedig δ szöget zár be az egyik oldalfelező merőlegessel.

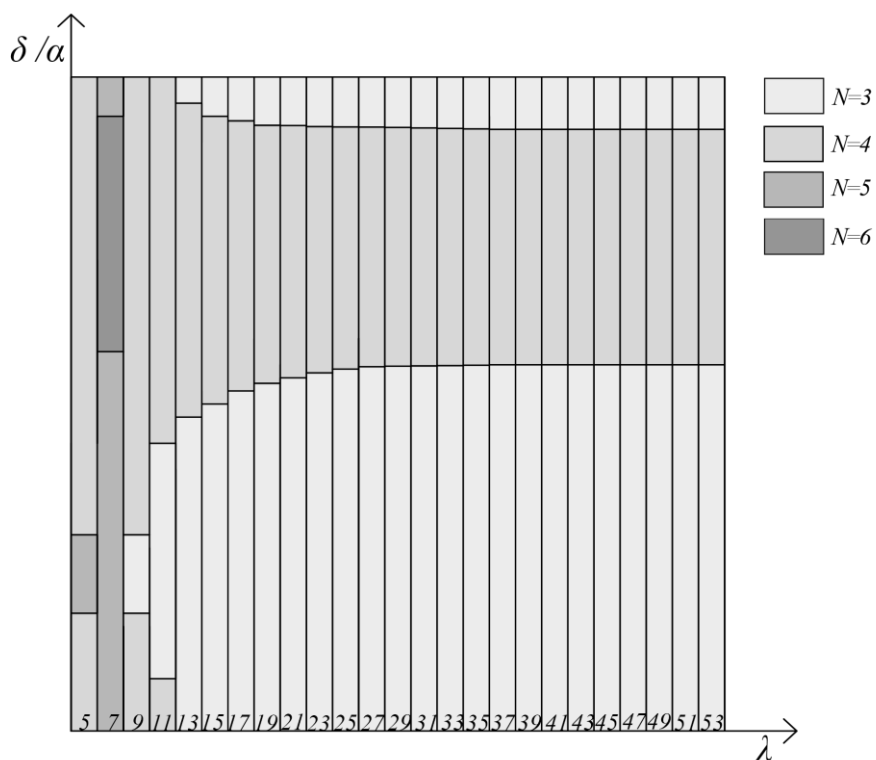
Ebben az esetben sem λ , sem δ nem úgy viselkedik, ahogy az előzőekben. Előbbi csak és kizárólag egész értékeket vehet fel (csúcsszám), utóbbi pedig egyre kisebb maximális értékeket vehet csak föl, mert a csúcsszám növekedésével csökken a középponti szög, ezért az egyensúlyi térképen δ helyett a δ/α arányt vizsgáljuk.

A kezdeti diagramon megfigyelt oszcillálást figyeltünk meg, ugyanis az, hogy honnan mérjük a metsző egyenes szögét az egyensúlyi helyzetek száma különböző tartományokban változik,

viszont aránya a középponti szöghöz képest λ növelésével folytonosan növekszik. A páros és páratlan eseteket külön vettük.



17. ábra: Szabályos konvex sokszögek csonkolásával létrejött egyensúlyi altérkép, ahol λ páros

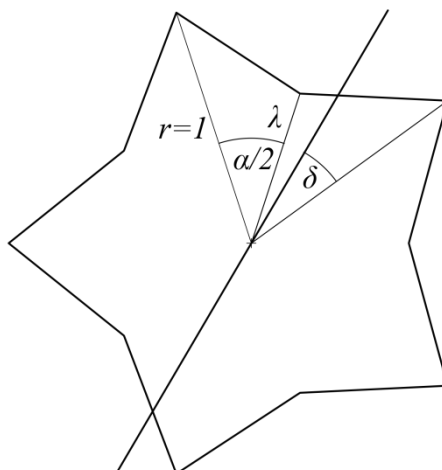


18. ábra: Szabályos konvex sokszögek csonkolásával létrejött egyensúlyi altérkép, ahol λ páratlan.

Szabályos konkáv-konvex sokszögek (Csillagok)

Konkáv-konkáv sokszögeket két n csúcú, koncentrikus, az α középponti szög felével egymáshoz képest elforgatott szabályos konvex sokszögből képzünk úgy, hogy minden külső csúcsot, a hozzá legközelebb eső 2 belső csúcshoz kötünk. Így minden létrejövő síkidomra igaz, hogy oldalaik egyenlők. Ha a külső kör r sugara egységnyi, a belső kör λ sugarát növelve $0 \leq \lambda \leq 1$. A sokszöget súlyponton átmenő, súlyponton, és egy csúcson átmenő egyenessel δ szöget bezáró egyenes metszi. A csonkolás után csak az egyik létrejött $S(\lambda, \delta)$ sokszöget vizsgáljuk, mert az mindkét fél alakját felveszi δ függvényében.

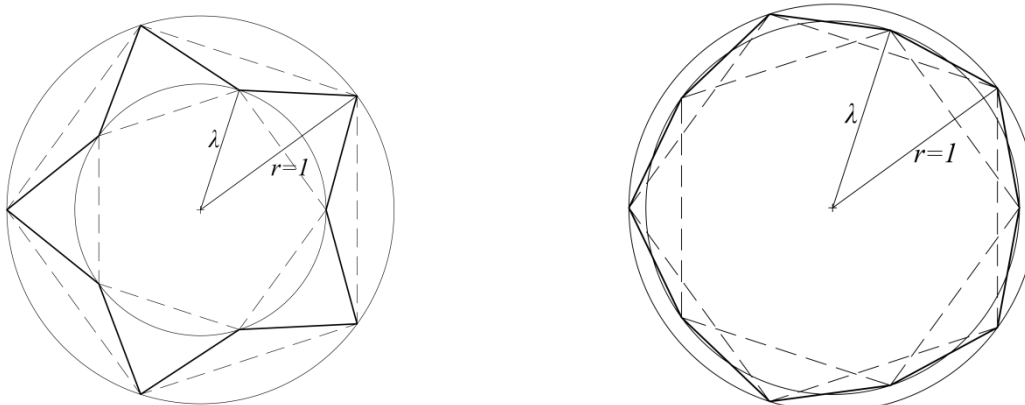
A λ - δ diagramot $\lambda = 1$ -ig ábrázoljuk, ugyanis 1-től a térkép csak ismétli önmagát, mert minden rögzített λ értékhez ugyanazok a δ tartományok tartoznak, mint ami $1/\lambda$ értékhez, valamint $0^0 \leq \delta \leq \alpha$, mert a térkép tükrös $\delta = \alpha$ -ra.



19. ábra: Szabályos konvex-konkáv sokszög:

2n darab csúcsa két koncentrikus körön helyezkedik el, kisebbik kör sugara „ λ ”, nagyobbik kör sugara $r = 1$, oldalai egyenlők, két oldalhoz tartozó középponti szöge α . Az „ λ ” sugarat növelve $0 < \lambda \leq 1$, a súlyponton át metsző egyenes pedig δ szöget zár be egy csúcsot és súlyponton összekötő egyenessel.

Az $S(\lambda)$ sokszögek tehát egy-egy csillag halmazt jellemeznek a kiinduló sokszög n csúcsszáma alapján, a λ paraméter változtatásával a síkidom először konkáv, aztán konvex sokszög lesz (pl.: ötszög esetén: konkáv tízszög $\rightarrow$ szabályos ötszög $\rightarrow$ konvex tízszög $\rightarrow$ szabályos konvex tízszög). (20. ábra)

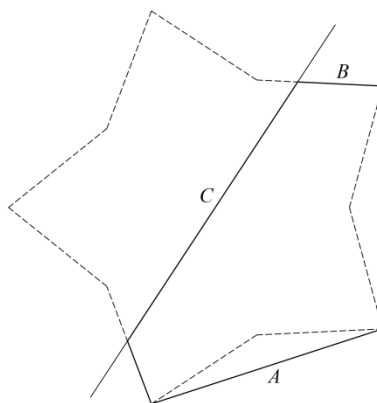


20. ábra: Konkáv és konvex csillagok

A konkáv csillagok, csonkolt darabjaik is konkávok sokszögek lesznek. Stabilitási szempontból azonban a konvex burkot vesszük figyelembe, így egyensúlyi helyzeteik csak két külső csúcson támaszkodva, vagy a metszésben résztvevő élek mentén jöhetnek létre.

A metszés után keletkezett konvex buroknak 3 típusú oldala lehet:

- A. Konvex burkot létrehozó, két, nem szomszédos csúcsot összekötő oldal
- B. Eredeti oldal, vagy annak metszett szakasza
- C. A metsző egyenes által létrehozott oldal



21. ábra: Konkáv csillag csonkolásánál létrejött oldaltípusok:

A – konkáv burkot konvexsége oldal

B – elmetszett eredeti oldal

C – metsző egyenes által létrehozott oldal

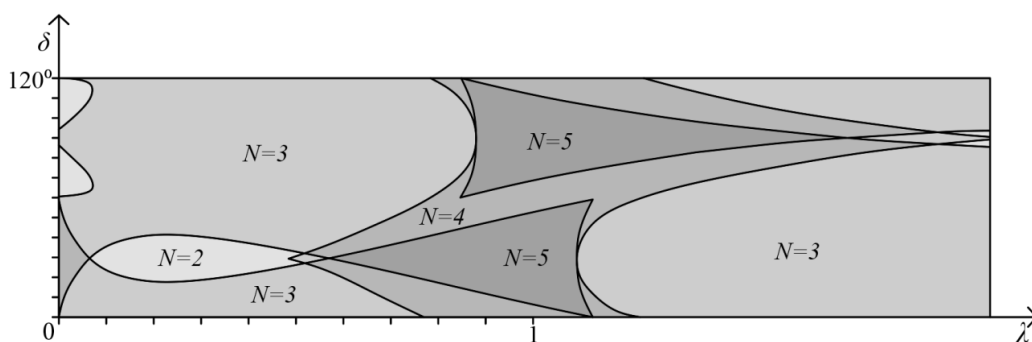
Ha n páros B és C típusú oldalakkól 1-1 keletkezik. Ha n osztható négygyel, A típusú oldalakkól páros-, ha nem, páratlan sok keletkezik.

Ötödik sejtés:

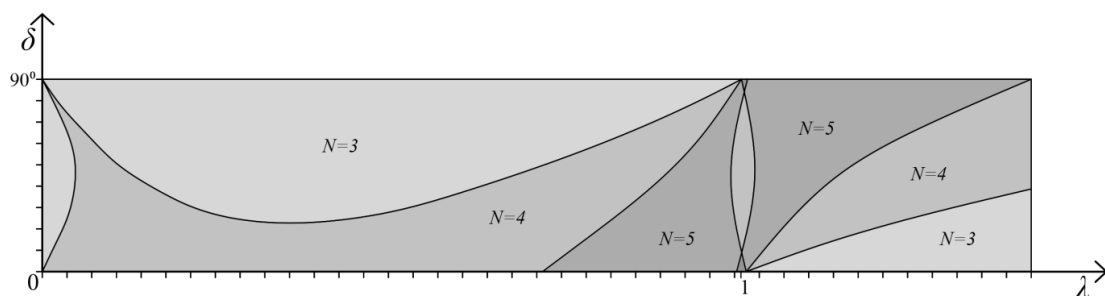
Ha λ páros és tart a végtelenhez, a λ - δ diagram 2 féle eloszláshoz konvergál. Az egyik eloszlás a négygel osztható, a másik pedig a négygel nem osztható λ -k esete.

Ha n páratlan, C típusú oldalból 1, B típusúból 0, vagy 2 (50-50%), A típusú oldalból páros és páratlan (50-50%) is keletkezhet. A létrejött síkidomok λ - δ diagramjai hasonlóságot mutatnak az $n-1$ $n+1$ síkidomok diagramjaival az A oldalak paritásának függvényében. Belátható az is, hogy a keletkezett síkidomok konvex csúcsszáma n illetve $n-1$.

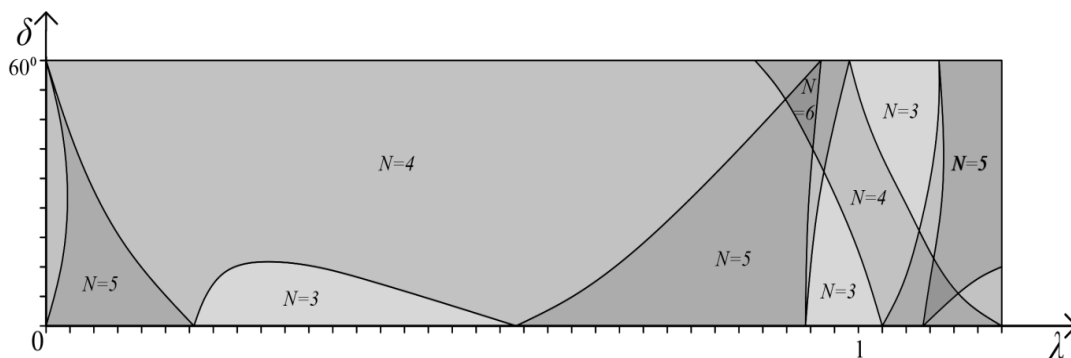
Az egyes $S(\lambda, \delta)$ sokszögeket n -enként vizsgálva a következő diagramokat kaptuk:



22. ábra: Három ágú csillag ($n = 3$)



23. ábra: Négy ágú csillag ($n = 4$)



24. ábra: Hat ágú csillag ($n=6$)

A feladatok programozásáról

A feladatokat külön programokkal vizsgáltuk. A kevésbé összetett feladatokat Excel Makrók segítségével, az összetetteket C++ programnyelv használatával.

A program menete általában a következő volt:

1. Az $S(\lambda)$ sokszög geometriájának meghatározása a koordinátarendszerben.
2. Az $S(\lambda)$ sokszög súlypontjának meghatározása.
3. A λ és δ változók definiálása.
4. A metsző egyenes által létrehozott síkidom geometriájának meghatározása.
5. A metsző egyenes által létrehozott síkidom súlypontjának kiszámolása.
6. A súlypont oldalakra merőleges vetületeinek meghatározása
7. Az eredmény kiértékelése (az oldal egyensúlyi oldal-e vagy nem)
8. Újabb δ választása, amíg a tartomány végére nem érünk
9. Újabb λ választása, amíg a tartomány végére nem érünk
10. A kapott adatok ábrázolása

Összefoglalás

Dolgozatunkban sokféle síkidomot generáltunk és vizsgáltunk. A generálás két fő eszköze volt a hasonló síkidomok bizonyos arányainak folyamatos változtatása, valamint kettévágásuk különböző beesési szögű, súlyponton átmenő egyenesekkel. Ezek segítségével 2 dimenziós térképeket alkottunk. A 2 dimenzió oka az imént felsorolt két módszer, valamint az ábrázolhatóság. Az utóbbi szempontot főleg ott kellett figyelembe venni, ahol kézenfekvő lett volna egy harmadik paraméter változtatása is (pl.: tompaszögű háromszögek).

A térképeken különféle bifurkációs pontok keletkeztek már igen egyszerű modellek esetén is. Ez azonban távol áll mindenfajta természetben előforduló bifurkációtól, ugyanis mind a paramétereket, mind a kezdeti feltételeket teljesen önkényesen választottuk.

A vizsgálatok során több *sejtést* és *tételt* fogalmaztunk meg. A *tételeket* algebrai vagy könnyen belátható geometriai módon bizonyítottuk, a *sejtéseket* közelítő mérések, szerkesztések, geometriai megfontolások alapján fogalmaztuk meg.

A dolgozat a természetben zajló aprózódás egy lehetséges geometriai útját mutatja be 2 dimenzióban.

Irodalomjegyzék

[1] Domokos G., Langi Z. : THE ROBUSTNESS OF EQUILIBRIA ON CONVEX SOLIDS.
Mathematika / Volume 60 / Issue 01 / January 2014, pp 237-256 (Forrás:
<http://arxiv.org/abs/1301.4031>)

[2] Domokos G. , Várkonyi P. L. : SYMETRY, OPTIMA AND BIFURCATIONS IN
STRUCTURAL DESIGN:

Nonlinear Dynamics / Volume 43 / 2006, pp 47-58 (Forrás:
<http://mit.bme.hu/~vpeter/pubs/2006-optimisation.pdf>)