

Diszkrét alakfejlődési modell affinitások mentén

TDK dolgozat

Szerző:

Mezei Márk

Konzulensek:

Dr. Domokos Gábor

egyetemi tanár

Dr. Lángi Zsolt

egyetemi docens



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Építészmérnöki Kar - Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék

Budapest

2014.

A dolgozat elkészítését az OTKA 104601-es kutatási témája támogatta.

Absztrakt

A különböző szilárd testek alakfejlődésével már régóta foglalkozik a tudomány. Ezen folyamatok leírására térben és időben folytonos, geometriai parciális differenciál-egyenleteket használnak. Ezek közös tulajdonsága, hogy a hosszú alakfejlődés után megfigyelhető, aszimptotikusan kialakuló formák a kezdeti alaktól nem, vagy csak igen gyengén függenek. Ezzel szemben a természetben igen gazdag formavilágot figyelhetünk meg. Dolgozatomban az alakfejlődés egy egyszerű diszkrét modelljét vizsgálom: konvex poligonok alakjának fejlődését figyelem, affinitások sorozata mentén. A transzformáció paraméterét és irányát a sokszög befoglaló téglalapjai közül a legextrémebb oldalarányú jelöli ki. A transzformációt végtelen sokszor végrehajthatjuk a síkidomon, így egy a poligon oldalszámától függő dimenziójú dinamikai rendszert kapunk. Ennek a rendszernek aszimptotikus viselkedését kívánom elemezni. A síkidomok közül először a háromszögek viselkedésével foglalkozom, a dolgozat végén pedig a nagyobb oldalszámú síkidomokra is kitekintek. A munkám célja, hogy megmutassa: ilyen egyszerű rendszerben, egyszerű alakzatok mellett is sokféle, a kezdeti alaktól erősen függő aszimptotikus alakot lehet megfigyelni. A modell ezen tulajdonsága alapján remélhető, hogy a természetben előforduló rendkívüli formagazdagság megértéséhez is közelebb vihet.

1. Bevezetés

Számos cikk született már, mely a kavicsok alakfejlődésével foglalkozik. Ennek a jelenségnek az elméleti vizsgálatait jelentősen megkönnyíti, hogy a kavicsok jó közelítéssel modellezhetők homogén, konvex, merev testeknek. A kavicsok alakjának időbeni változását ütközések és súrlódás hatása határozza meg. (Domokos-Gibbons 2012) Ennek megfelelően a koptatás algoritmus is meghatározható, attól függően milyen hatásoknak van kitéve a kopó test: milyen méretű és milyen keménységű testekkel való kölcsönhatást vizsgálunk. Az alkalmazott modelltől, és így a modellt leíró differenciálegyenletektől függ, hogy mi lesz az az alakzat, amihez aszimptotikusan tart a kopó test. Bloore (1977) és Firey (1974) cikkeiben, a véges méretű testekkel való ütközéses kopás nyomán a testek a gömbhöz konvergálnak. Ha a kopást végtelenül kis testek idézik elő, akkor három jellemző forma jöhet létre: lapos lemez, 3-élű „szivar” és tetraéder (Domokos et al. 2009). Ezekben a munkákban bemutatott modellek és egyenletek csak kevés végleges alakzatot engednek meg.

Ebben a dolgozatban egy olyan diszkrét alakfejlődési algoritmust alkalmaztam, mely - mint a vizsgálatok során kiderült - többféle végleges forma létrejöttét is megengedi. Ez kicsit közelebb áll a természetben jelenleg megfigyelhető, igen változatos formavilághoz, hiszen kevés szabályos, vagy egyforma kavicsot találni egy helyen.

Az általam alkalmazott modell diszkrét, egy meghatározott algoritmus sorozatos ismétléséből áll. Az alakfejlődési algoritmust egyszer végrehajtva egy alakzaton, egy új formát kapunk, melyre az algoritmus ismét alkalmazható, és így tovább: ez sorozat alkotja a diszkrét dinamikai rendszert. Síkidomok esetén az algoritmus két lépésből áll: először megállapításra kerül egy extrémális oldalárányú befoglaló téglalap, majd a kiválasztott téglalaptól függően egy speciális affín transzformációval, egy merőleges affinitással képezzük az új alakzatot a régiből. Ezen fogalmak pontos definíciói szerepelnek a 2. fejezetben. A rendszer vizsgálatát, viselkedését a legegyszerűbb síkbeli alakzatokkal, háromszögekkel kezdem, a 3. fejezetben az algoritmus egy speciális változatát alkalmazva. Ebben az esetben minden alakzat ugyanahhoz a formához konvergál, a rendszer különlegessége még nem figyelhető meg. A 4. fejezetben foglalkozom az alakfejlődés általános esetével, ekkor már meg lehet különböztetni olyan eseteket, mikor a kezdeti alak befolyásolja azt, milyen végeredményre vezet az alakfejlődés algoritmus. Az általános esethez készíthető egy összesítő ábra, mely mutatja, milyen kiinduló paraméterek esetén hogyan fog konvergálni az alakzat. Az 5. fejezetben a nagyobb oldalszámú alakzatok esetével foglalkozom, a jellemző eltéréseket és hasonlóságokat kiemelve. A dolgozat végén, az összefoglaló fejezetben összegzem az eredményeket.

2. Az alakfejlődés algoritmusáról

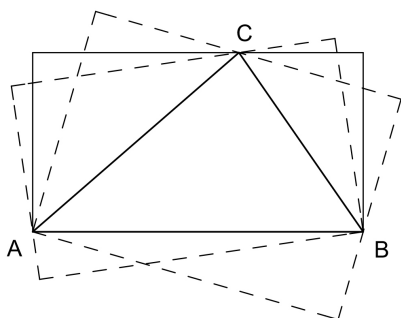
A dolgozatban csak kétdimenziós, konvex poligonokkal foglalkozom. Ezen alakzatok fejlődését egy két lépésből álló algoritmus sorozatos ismétlésével modellezem. Az algoritmus bevezetéséhez néhány fogalmat rögzíteni kell.

Egy poligon *befoglaló téglalapjának* azt a téglalapot nevezem, mely élei a poligon csúcsaira vagy éleire illeszkednek, és ezen téglalap oldalai nem tolhatóak el önmagukkal párhuzamosan úgy, hogy egy kisebb területű, de a poligonba még bele nem metsző új téglalapot kapjunk. Látható, hogy ilyen definíció mellett egy poligonhoz végtelen sok ilyen befoglaló téglalap létezik, hiszen a síkban egy tetszőleges irányt meghatározva rajzolható a sokszöghöz egy az iránnyal párhuzamos illetve az irányra merőleges oldalakkal rendelkező befoglaló téglalap. Vegyük észre, hogy ez az eljárás a poligon adott irányú, és arra merőleges irányú szélességét határozza meg. Ezen szélességek értékeit a befoglaló téglalap különböző oldalainak hossza mutatja.

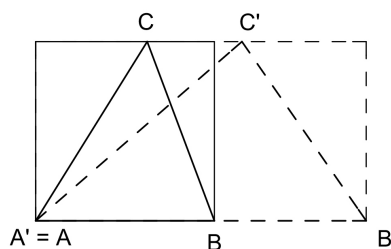
Nevezzük *extremális téglalapnak* az adott poligonhoz tartozó befoglaló téglalapok közül azt, melynek rövidebbik és hosszabbik oldalának hányadosa a legkisebb. Látható, hogy az extrémális téglalap sem egyértelmű minden poligon esetén, előfordulhat, hogy több, vagy akár végtelen sok ilyen létezik.

A két fenti fogalom segítségével már definiálható az algoritmus:

1. Megkeresünk a sokszög extrémális téglalapját. Ha több ilyen is van, akkor véletlenszerűen választunk egyet közülük. (1. ábra)
2. A síkidomon a kiválasztott extrémális téglalappal együtt egy merőleges affinitást hajtunk végre úgy, hogy a téglalabból egy adott arányú új téglalap jöjjön létre. (2. ábra)



1. ábra. Adott ABC háromszög esetén néhány lehetséges befoglaló téglalap (szaggatottal jelölve), valamint az extrémális téglalap (folytonos vonallal).



2. ábra. Az ABC háromszög, transzformáció előtt (szaggatottal), és transzformáció után (folytonos vonallal).

Mivel az eljárás célja az alakfejlődés vizsgálata, ezért a síkidomok abszolút méreteivel nem kell foglalkoznunk. Láthatjuk, hogy ez az algoritmus két hasonló síkidomból hasonlóakat képez, amennyiben az extrémális téglalap mindkét esetben ugyanúgy lett kiválasztva. Tehát az egymáshoz hasonló alakzatok között nem kell különbséget tennünk. Ennek megfelelően az algoritmushoz egy harmadik lépést hozzá lehet fűzni, melyben valamilyen szempont szerint normáljuk a második lépésben kapott síkidomot. A normálás során egy hasonlósági transzformációval alakítjuk a poligont, hiszen ez ami szempontunkból nem befolyásolja az alakot. A transzformációt pedig úgy választhatjuk meg, hogy a síkidom területe, vagy az egyik adott oldala legyen egységnyi hosszúságú. Ezzel a módszerrel mind a számítógépes vizsgálatok, mind pedig az analitikus számítások során célszerű élni.

Az így felállított rendszerről néhány megállapítást lehet tenni. A használt transzformációk - merőleges affinitás, hasonlósági transzformációk - mindegyike konvex alakzatból konvexet képez. Így nem fordulhat elő, hogy egy lépésben konkáv alakzatot kapjunk, melyek vizsgálatával nem foglalkozom. Továbbá ezek a transzformációk a síkidomot a saját affín osztályán belül tartják. Két síkidom ugyanis akkor tartozik egy affín osztályba, ha létezik olyan tetszőleges affín transzformáció, mely az egyik alakzatot a másikba viszi. Ennek megfelelően lehet látni, hogy háromszögek esetén egyetlen ilyen osztály létezik, míg nagyobb csúcsszámú poligonok esetén végtelen sok osztály van.

Az algoritmus sorozatos ismétlésének háromféle kimenetele elképzelhető:

1. Az alakformálás véges sok lépésben véget ér: az egyik lépés után az extrémális téglalapról extrémális téglalap keletkezik, és ezentúl a művelet a sokszöget mindig önmagába viszi át, az affinitás aránya 1 lesz (vagyis a leképezés identikus).
2. Az algoritmus végtelen sokáig ismételhető, minden lépésben egy új alakzatot kapunk, azonban a változtatás mértéke egyre csökken, és így a sokszög egy adott formához tart.
3. Az algoritmus végtelen sokáig megy, és az alakzat nem konvergál semmilyen formához.

A vizsgálatok során minden esetben - véges vagy végtelen lépésben - az algoritmus adott alakhoz vezetett, nem találtam olyan esetet, mikor ne konvergált volna a rendszer. Az elért alak függött a kiindulási alakzattól, és a transzformációk során használt affinitás paraméterétől. Előfordult olyan is, hogy egy adott paraméterű affinitást használata esetén bizonyos formákból kiindulva végtelen sok lépés kellett a fix alak eléréséhez, más formákat véve alapul pedig az iteráció véges sok lépésben ért véget. A háromszögek esetén analitikusan is bizonyításra került, miszerint az algoritmus mindig konvergál.

3. Speciális eset

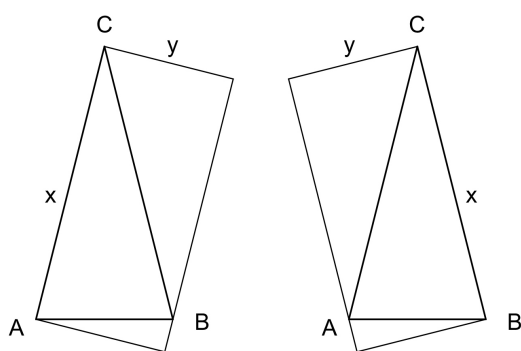
Legelőször a háromszögek esetével foglalkoztam, ezen belül pedig azzal a speciális kikötéssel, hogy az affinitás az extrémális téglalapból minden lépésben 1:1 oldalarányú téglalapot, azaz négyzetet csinál. Józan ésszel végiggondolva azt várhattuk volna, hogy ha konvergál a folyamat, akkor tetszőleges háromszögből egy szabályos háromszög keletkezik. Ezt úgy lehetne indokolni, hogy a transzformáció a nagyon „kilógó” részeket összenyomja egy négyzet területére, így nem lesz kiemelt csúcsa, iránya az alakzatnak. A rendszer érdekességét mutatta már ez a nagyon egyszerű felállítás is: a végeredmény ilyenkor egy olyan háromszög lett, mely nemhogy nem szabályos, hanem euklideszileg nem is szerkeszthető.

Az alakfejlődési algoritmus első lépésében meg kell keresni az adott háromszöghöz tartozó extrémális téglalapot. Ez az eljárás minden háromszög esetében azonos, a transzformáció során használt affinitás aránya itt nem kap szerepet. Ekkor:

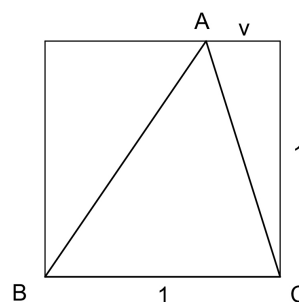
1. lemma: A háromszögek esetében az extrémális téglalap egyik hosszabb éle a háromszög leghosszabb oldalával azonos, rövidebbik élei pedig a háromszög legkisebb magasságával azonos hosszúságúak.

Látszik, hogy az extrémális téglalap csak akkor nem egyértelmű a háromszögek esetén, ha a háromszögnek nincs egyetlen leghosszabb oldala, azaz egyenlő szárú, vagy egyenlő oldalú háromszögről beszélünk. Ebben az esetben teljesen mindegy, melyik oldalra illesztve vesszük fel az extrémális téglalapot, mivel az esetek hasonlósági transzformációkkal átvihetők az esetek egymásba, és így - a fentiek alapján - nem teszünk különbséget ezek között. (3. ábra.)

Az algoritmus következő lépése az affinitás. Az affinitás irányát az 1. lemmában leírt módon kiválasztott extrémális téglalap oldalainak iránya jelöli ki. Az affinitás paraméterét pedig



3. ábra. Egyenlő szárú háromszögek esetén két extrémális téglalap is adódik, azonban a két eset tükörszimmetrikus, a téglalapok oldalainak aránya y/x mindkét esetben.



4. ábra. Legalább egy transzformáció után így rajzolható fel a háromszög, v paraméter az egyetlen, ami szükséges a jellemzéséhez.

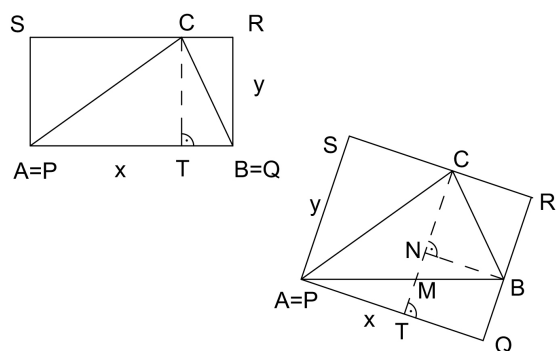
pontosan az extrémális arány adja meg: egy y/x oldalarányú téglalpból a hosszabbik oldallal párhuzamos irányban y/x arányú affinitással kaphatunk négyzetet. Ha már legalább egyszer végrehajtottuk a alakfejlődés egy lépését a háromszögon, akkor az alábbi módon egy négyzetbe rajzolható lesz a háromszög. (4. ábra.) Az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy a befoglaló négyzet élhossza 1. Ekkor a háromszögünk egyetlen paraméterrel jellemezhető lesz: legyen most ez az ábrán v -vel jelölt távolság, mely a befoglaló négyzet háromszöggel közös oldalával átellenes élén mutatja a háromszög csúcsának helyzetét. Elég foglalkozni azokkal az esetekkel, mikor $v \leq 0,5$, hiszen a $v' = 1 - v$ esetek tükörszimmetrikusak, és a transzformációk során ugyanúgy viselkednek, a szimmetriájukat minden lépésben megtartva. Az így kizárt esetek az alakfejlődést tekintve nem szolgálnak új információval. Ekkor:

2. lemma: A v paraméter egy transzformációs lépés végrehajtása után v^* -ra változik, ez a rekurzív összefüggés egyértelműen felírható $v^*(v) = \frac{1-v}{1+(1-v)^2}$.

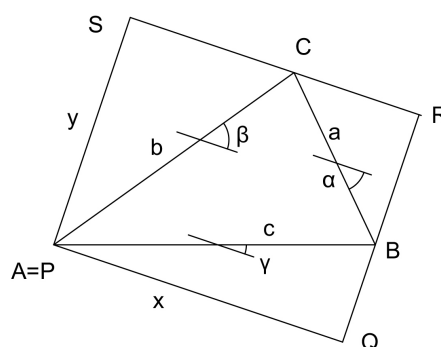
A 2. lemmában kapott kifejezéséből állapítható meg az, létezik-e fix alakzata a transzformációnak, illetve fog-e a sokszög konvergálni ehhez a fix formához. Ennek bizonyítása a 2. lemma bizonyítása után szerepel.

Bizonyítások:

1. Lemma: Legyen ABC háromszög köré írva $PQRS$ téglalap! A háromszög oldalai legyenek a, b, c , a téglalap hosszabbik és rövidebbik oldala legyen rendre x és y ! Ekkor két esetet különböztethetünk meg: a téglalpnak vagy van közös éle a háromszöggel, vagy nincs. (5. ábra, 6. ábra) Ha van közös él, akkor a téglalap területe a háromszög területének pontosan kétszerese. Ha nincs közös él, akkor a 6. ábrán látható felosztás megmutatja, hogy a



5. ábra. A két lehetséges elrendezés: a befoglaló téglalpnak vagy van, vagy nincs közös éle a háromszöggel. Az első esetben a területük aránya 1:2, a második esetben ennél kisebb.

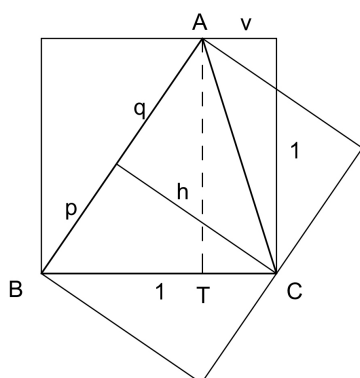


6. ábra. A befoglaló téglalap hosszabbik oldalát az a, b, c oldalak adott irányú vetületi hosszainak maximuma adja.

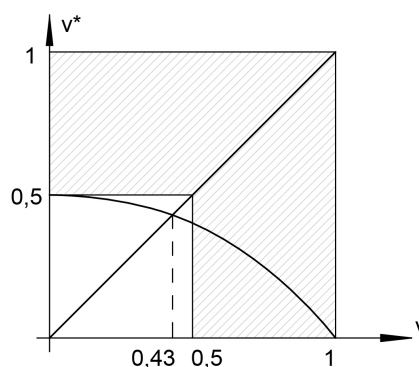
téglalap területe határozottan nagyobb a háromszög területének kétszeresénél. Ekkor ugyanis NBC háromszög területe $NBRC$ téglalapnak pontosan a fele, míg NMB háromszög területe kisebb, mint $NTQB$ téglalap fele, és MCA háromszög területe kisebb, mint $ATCS$ téglalap fele, hiszen $\overline{NM} < \overline{NT}$ és $\overline{CM} < \overline{CT}$.

Tehát $x \cdot y$ értéke akkor minimális, ha a befoglaló téglalap éle illeszkedik a háromszög egyik élére. A befoglaló téglalap leghosszabb oldalát a $\max\{a \cdot \cos \alpha; b \cdot \cos \beta; c \cdot \cos \gamma\}$ kifejezés adja minden esetben, ahol az α, β, γ szögek a háromszög oldalainak a téglalap élével bezárt szögét jelzik. Nyilvánvalóan ezek közül a legnagyobb értéket akkor kaphatjuk, ha a leghosszabb oldalt vesszük, és a $\cos$ értéke 1, azaz a téglalap oldala párhuzamos a háromszög leghosszabb élével. Ha több leghosszabb él is van, akkor mindegy melyiket választjuk. Ekkor tehát x maximális, és az előbb belátottakkal egybevéve $x \cdot y$ minimális, melyekből következik, hogy y/x minimális. Tehát valóban a megadott módon felvett befoglaló téglalap lesz az extrémális téglalap.

2. *Lemma:* Tegyük fel, hogy az előző alakfejlődési lépés előtt a háromszög oldalai a', b', c' voltak, melyből a transzformáció rendre az a, b, c oldalakat csinálta. A fent meghatározott tulajdonságok miatt az $a < b < c$ arány áll fenn a háromszög oldalai közt. Az affinitás előtt tudjuk, hogy az a' oldal volt a leghosszabb, hiszen erre feküdt fel az extrémális befoglaló téglalap, amiből a négyzettel közös oldal képződött. Ugyanígy tudjuk, hogy a $b' < c'$ egyenlőtlenség fennáll, hiszen az affinitás nem változtatta meg ezen oldalak hosszai közötti relációt. Tehát a transzformáció előtt $b' < c' < a'$ volt a háromszög oldalai között az összefüggés. Ezekből láthatjuk, hogy az oldalak „szerepei” felcserélődtek egy lépés során. Ennek megfelelően lehet felírni, hogy egy transzformáció hogyan változtatja meg a v paramétert. Az ábra mutatja, hogy



7. ábra. A háromszög előző extrémális téglalapjából képzett négyzet, és a következő lépés extrémális téglalapja. A következő transzformáció során a $p/(p+q)$ érték nem változik, hiszen párhuzamos szakaszokról van szó; ez a hányados fogja adni v^* -ot.



8. ábra. A görbe mutatja a $v^*(v)$ összefüggést. A sraffozott területet nem szükséges figyelembe venni, hiszen $v < 0,5$.

a következő lépésben melyik lesz az extrémális téglalap. (7. ábra) A használt jelölésekkel felírható, hogy a következő affinitás után $v^* = p/(p + q)$ lesz. Geometriai összefüggések alapján felírható, hogy $(p + q) \cdot h = 1$, $p = \sqrt{1 - h^2}$, $(p + q) = \sqrt{1 + (1 - v)^2}$. Ezek alapján a $v^* = \frac{1-v}{1+(1-v)^2}$ rekurzív összefüggés írja le a v paraméter változását a rendszerben.

A fenti képletből $v^* = v$ feltételezéssel élve lehet megállapítani a transzformációra invariáns alakzat v paraméterét. (8. ábra) Ez a $0 = v^3 - 2v^2 + 3v - 1$ harmadfokú egyenletre vezet. Ennek egyetlen valós megoldása $v_{fix} = \frac{1}{3}(2 - 5\sqrt[3]{\frac{2}{3\sqrt{69}-11}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}(3\sqrt{69}-11)}) \approx 0,43016$. Látható tehát, hogy az rekurciónak van fixpontja. A $v^*(v)$ összefüggés deriváltja $(v^*)' = \frac{-2v+v^2}{(1+(1-v)^2)^2}$, mely a $v = [0; 0,5]$ tartományon $-0,48$ és 0 közé esik, így az rekurzió konvergálni fog, méghozzá oszcillálva, a fent megadott fix ponthoz. (Dringó 1991)

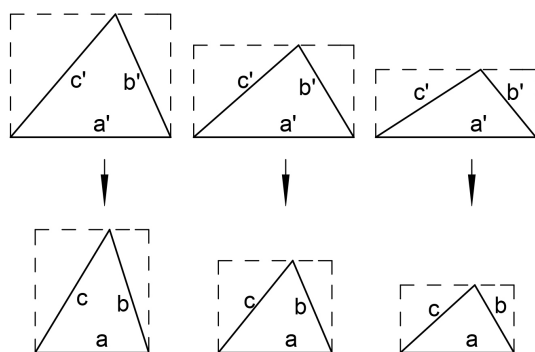
Az így kapott fix háromszög szögei közelítőleg $66,724^\circ$, $60,324^\circ$ és $52,952^\circ$ nagyságúak. Látható, hogy ez nincs közel a szabályos háromszöghöz. Mivel a háromszög szögeit meghatározó v értéket egy általános harmadfokú egyenletből kaptuk, így a háromszög nem speciális alakja nem meglepő.

4. Első általánosítás

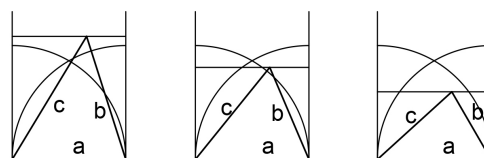
A fentiek tükrében érdemes megvizsgálni, mi történik akkor, ha az affinitással nem négyzetet, hanem előre rögzített arányú téglalapot csinálunk a háromszög befoglaló téglalapjából. Legyen ez az arányszám f ! Ekkor az extrémális téglalap kiválasztása a speciális esettel teljesen megegyező módon történik. Az eltérést az affinitás előtti és utáni alakzat közti „megfeleltetés” adja. Láthattuk, hogy a speciális esetben a háromszög oldalainak szerepe felcserélődik, a leghosszabb oldal az affinitás után a legrövidebbé válik. E szerint a szempont szerint három esetet különböztethetünk meg (9. ábra, 10. ábra):

- A: Mindhárom oldal szerepe változik, azaz a háromszög „forog”. A leghosszabb oldalból a legrövidebb, a legrövidebből a középső, és a középsőből a leghosszabb oldal keletkezik az affinitás során. Erre láthattunk példát a speciális esetben.
- B: Két oldal szerepe változik csak, azaz a háromszög „tükröződik”. A leghosszabb oldalból a középső, a középső oldalból pedig a leghosszabb lesz, a legrövidebb oldal az affinitás után is a legrövidebb marad.
- C: Nem változik semelyik oldal szerepe, azaz a háromszög „helyben marad”. A leghosszabb oldalnak a leghosszabb, a középsőnek a középső, és a legrövidebbnek továbbra is a legrövidebb oldal fog megfelelni a transzformáció után.

Ennek a három esetnek az előfordulása az f értékétől függ, az alábbi módon. (11. ábra) A fenti vizsgálathoz hasonlóan itt is a már legalább egy transzformáción átesett alakzatokkal

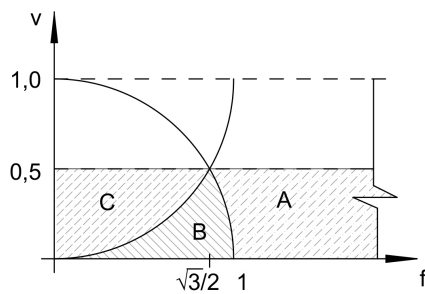


9. ábra. Az A-B-C esetek között az eltérést a háromszög oldalhosszának transzformáció előtti és utáni sorrendje adja, hiszen ez mondja meg, hiszen ettől függ, hogyan lehet v^* -ot meghatározni.



10. ábra. Látszik, f paramétertől függően az oldalhosszakban milyen sorrend állítható fel: a három esetben rendre $a < b < c$, $b < a < c$ és $b < c < a$ áll fenn.

11. ábra. f és v függvényében az előforduló viselkedések. A tartományok határát a geometriai feltételekből származó negyedkörívek alkotják.



foglalkozom, ekkor a keletkezett befoglaló téglalap egység hosszú élének két sarokpontjából kiinduló negyedkörívek mutatják meg, mely esetek fordulhatnak elő, és hozzájuk milyen v paraméterű háromszögek tartoznak.

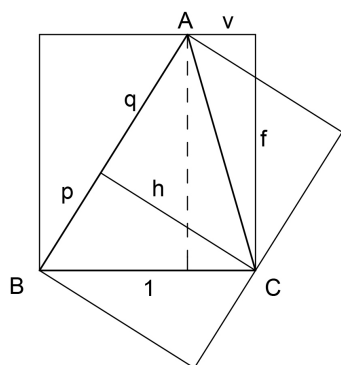
- 1: $1 < f$ Csakis A esetei fordulhatnak elő.
- 2: $f = 1$ Ha $v > 0$, akkor A esete áll fenn,
- 3: $\sqrt{3}/2 < f < 1$ akkor $\sqrt{1 - f^2} < v < 0,5$ értékeire A esete jön elő, míg $v < \sqrt{1 - f^2}$ értékek esetén B esete áll fenn.
- 4: $\sqrt{3}/2 = f$ Csak B esete fordulhat elő, kivéve, ha $v = 0,5$
- 5: $0 < f < \sqrt{3}/2$ ha $1 - \sqrt{1 - f^2} < v < 0,5$, akkor C eset áll fenn, ha pedig $v < 1 - \sqrt{1 - f^2}$ akkor B esetét figyelhetjük meg.

Az A eset a fent vázolt speciális esetből vezethető le, az összefüggések ugyanúgy írhatóak fel, azonban megjelenik az f paraméter. Az alábbi ábrán látható egy adott elrendezés A esetére. (12. ábra) Legyenek a háromszög oldalai ismét $a < b < c$ az ábrán látható módon. Az iteráció következő lépésében a v^* értékének az $p/(p+q)$ érték fog megfelelni. Hasonlóan a speciális esethez, geometriai megfontolások alapján írhatóak fel az alábbi egyenletek: $h = f/(p+q)$, $p = \sqrt{1-h^2}$, $p+q = \sqrt{f^2 + (1-v)^2}$. Ezekből levezethető, hogy $v^* = \frac{1-v}{(1-v)^2 + f^2}$. Természetesen $f = 1$ -et helyettesítve visszakapjuk a speciális esetre adódó értéket.

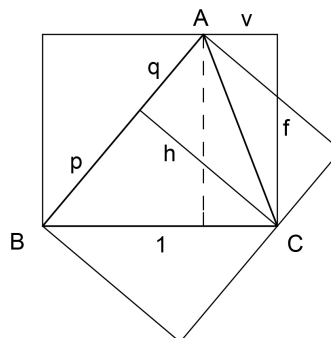
B esetben az összefüggés egy kicsit módosul, hiszen ekkor más az összefüggés a transzformáció előtti és utáni háromszög oldalai között. (13. ábra) Ekkor tehát a $v^* = q/(p+q)$ összefüggés lesz érvényben, vagy az ennek megfelelő $v^* = 1 - p/(p+q)$. Ebből látszik, hogy az előző, és jelenleg is érvényes azonosságokat felhasználva a $v^* = 1 - \frac{1-v}{(1-v)^2 + f^2}$ kifejezésre jutunk.

A C eset a fenti kettőtől jelentősen eltér, ebben a helyzetben a háromszögön a transzformáció már nem tud változtatni, hiszen az extrémális téglalap az affinitás előtt és után is ugyanaz marad, mivel a leghosszabb oldalból a leghosszabb képződik.

Ha szeretnénk egy átfogóbb képet kapni arról, mely háromszög-alakok milyenné fejlődnek a rendszerben, érdemes az 1-5 esetek szerint végigmenni a lehetséges A-C viselkedési formákon. Az ez után közölt értékek, állítások matematikailag mind levezethetők, a dolgozatban ezek bizonyítását nem közlöm.



12. ábra. Ha az A esetet kívánjuk leírni, a fenti elrendezés használható.



13. ábra. Ha a B esetet kívánjuk leírni, a fenti látható elrendezés adott.

1. eset (14. ábra):

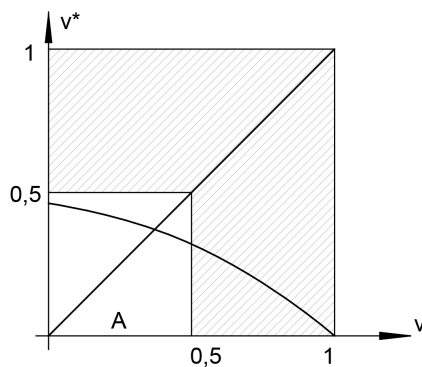
Ebben az esetben csak A-jellegű viselkedést figyelhetünk meg. $1 < f$ figyelembevételével a $v^*(v)$ függvény képét a 14. ábra mutatja. A függvény deriváltja $\frac{(1-v)^2 - f^2}{((1-v)^2 + f^2)^2}$. Ennek segítségével néhány fontos következtetést levonhatunk az ábráról, és így a rendszer viselkedéséről. A függvény értéke 0-ban $\frac{1}{1+f^2}$, ami a megadott f -ekre 0,5-nél kisebb, de pozitív; 1-ben pedig a függvényérték mindig 0. A derivált előjele is mindig negatív, ebből is látható, hogy a függvény monoton csökken. Ennek megfelelően a függvény monoton csökken. Így a fent bemutatott speciális esethez hasonlóan itt is egyetlen fix pont adódik, egy metszéspont lesz a $v^* = v$ egyenessel. Ennek a pontos értéke: $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{4(-3f^2-6)^3+729}-27}}{3\sqrt[3]{2}} - \frac{\sqrt[3]{2}(-3f^2-6)}{3\sqrt[3]{\sqrt{4(-3f^2-6)^3+729}-27}}$ A derivált negativitása miatt oszcillálva fog a v érték konvergálni ehhez a fix ponthoz.

2. eset (15. ábra):

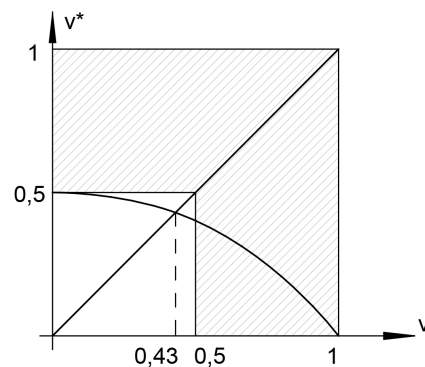
Ezt az esetet vizsgáltuk a speciális esetben: $f = 1$. Az alesetben szintén csak A-jellegű viselkedést láthatunk, azonban ez a pont mutatja azt a határhelyzetet, aminél ha tovább csökkentjük f értékét, megjelenik a B típusú viselkedés is. A felírható összefüggések azonosak az 1. esettel, de a $v^*(v)$ függvény grafikonján néhány jellegzetesség látható: A függvény értéke 0-ban $1/2$, deriváltja pedig 0. $v = 0,5$ -ben a derivált $-12/25$. $v = 1$ -ben a derivált -1 . Ilyen feltételek mellett a stabil pont a már fent említett $v \approx 0,43016$ -ra adódik.

3. eset (16. ábra):

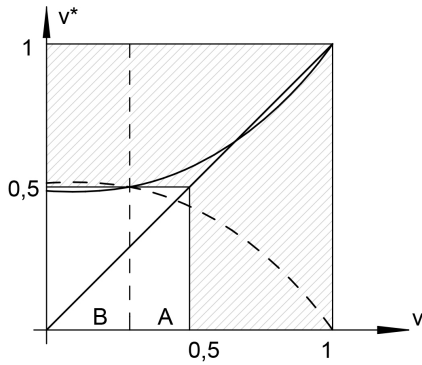
Ebben az esetben A és B viselkedésekkel kell foglalkozni. A kettő közötti határ a $v = \sqrt{1-f^2}$, tehát ennél nagyobb v értékekre a $v^* = \frac{1-v}{(1-v)^2+f^2}$ képlet, míg ennél kisebb értékekre a $v^* = 1 - \frac{1-v}{(1-v)^2+f^2}$ képlet használható. Látszik, hogy a B viselkedés görbéje ilyen f értékek mellett $0,5 > v$ helyen metszi a $v^* = v$ egyenest, tehát ezen a részen a B-ből induló háromszögek elkezdenek konvergálni efelé az érték felé, azonban véges sok lépés után átérnek az A részbe, ahol már annak szabályai szerint fognak konvergálni. Az A jellegű görbe és a $v^* = v$



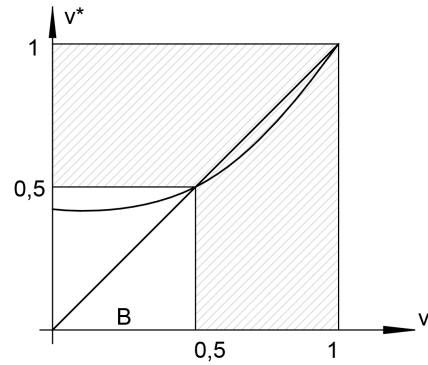
14. ábra. A $v^* = \frac{1-v}{(1-v)^2+f^2}$ függvény jellege $1 < f$ értékekre.



15. ábra. A $v^* = \frac{1-v}{(1-v)^2+f^2}$ függvény jellege $f = 1$ értékekre.



16. ábra. A $v^* = 1 - \frac{1-v}{(1-v)^2+f^2}$ függvény jellege $\frac{\sqrt{3}}{2} < f < 1$ értékekre.



17. ábra. A $v^* = 1 - \frac{1-v}{(1-v)^2+f^2}$ függvény jellege $\frac{\sqrt{3}}{2} = f$ értékekre.

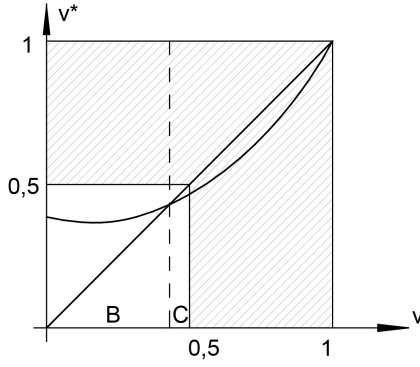
egyenes metszéspontja mindig a megfelelő intervallumba fog esni, és a derivált abszolútértéke is megfelelően kicsi ahhoz, hogy a konvergálás végtelen lépésben, oszcillálva a fix alakzathoz vezessen.

4. eset (17. ábra):

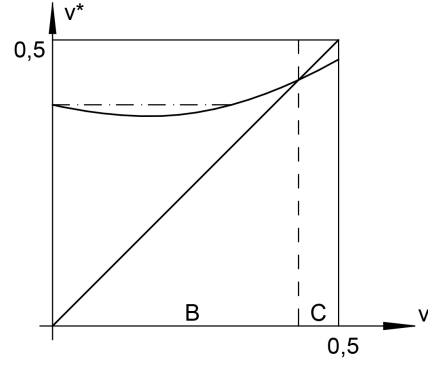
Ez az eset ismét egy határhelyzet, A viselkedés már nem figyelhető meg, C pedig még nem. A B-hez tartozó összefüggés grafikonja ebben az esetben is elég speciális. A $v^* = v$ görbével való metszéspont a $v = 0,5$ -ben van. Ez azt jelenti, hogy a B eljárás konvergálni fog, méghozzá végtelen lépésben, v -re nézve monotonon, a $v = 0,5$ -ös értékhez. Vegyük észre, hogy ez a helyzet testesíti meg a szabályos háromszöget: a csúcs a szemközti oldal oldalfelező merőlegesén van, és a háromszög magassága $\sqrt{3}/2$ az egységnyi alap mellett. Tehát a kezdeti várakozással ellentétben, miszerint az $f = 1$ adná ki ezt az alakzatot, láthatjuk, hogy $f = \sqrt{3}/2$ lesz a szükséges paraméter.

5. eset (18. ábra):

Ezekben az esetekben B és C jellegű viselkedést tapasztalhatunk. A határvonal a két eset között a $v = 1 - \sqrt{1-f^2}$ lesz, ennél nagyobb v -k esetén C lesz megfigyelhető, azaz minden háromszög fix. Az adott v -nél kisebb értékekre B szerint viselkednek az alakzatok. A 3-as esethez hasonlóan a B viselkedés nem zárt a B-hez tartozó tartományra nézve, ezért itt további esetszétválasztásra van szükség! Mivel B görbéje pontosan $v = 1 - \sqrt{1-f^2}$ -nál, azaz a B és C esetek közötti határnál metszi a $v^* = v$ egyenest, ezért f -től függően néhány kezdeti v -ről a háromszög belép egyetlen lépéssel a C tartományba, és ott az alakfejlődés megáll, más esetekben pedig B-ben maradva, végtelen lépésben konvergál a fix alakzathoz, ami jelen esetben a C határa, $v = 1 - \sqrt{1-f^2}$.



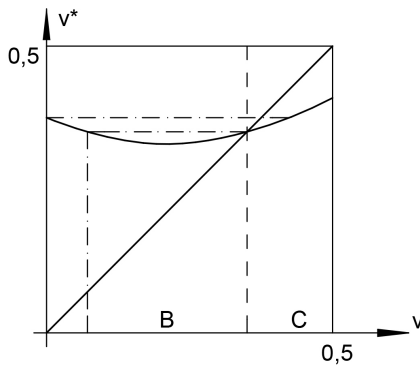
18. ábra. A $v^* = 1 - \frac{1-v}{(1-v)^2 + f^2}$ függvény jellege $f < \frac{\sqrt{3}}{2}$ értékekre.



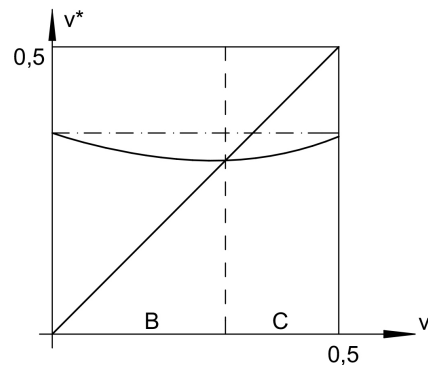
19. ábra. A $v^* = 1 - \frac{1-v}{(1-v)^2 + f^2}$ függvény jellege $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} < f < \frac{\sqrt{3}}{2}$ értékekre.

Az ezekhez tartozó határszámok: $f = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$, és $f = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Az első határ jelöli azt, amikor a v^* összefüggés értékkészletének van legalább akkora eleme, mint az értelmezési tartományának felső határa. A második határ pedig ahhoz az esethez tartozik, mikor ugyanezen összefüggés értékkészletének valamennyi tagja legalább akkora, mint az értelmezési tartományának felső határa. Ezeknek megfelelően a viselkedés:

- $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} < f < \sqrt{3}/2$ Ekkor minden B-be tartozó háromszög konvergál (19. ábra).
- $\sqrt{\frac{1}{2}} < f < \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ Ekkor a $1 - \frac{f^2}{\sqrt{1-f^2}}$ v értékeknél kisebbekre a háromszög egy lépésben bekerül C-be, míg a nagyobb v -k konvergálnak (20. ábra).
- $f < \sqrt{\frac{1}{2}}$ Ekkor pedig valamennyi B-be tartozó háromszög azonnal átkerül C-be (21. ábra).

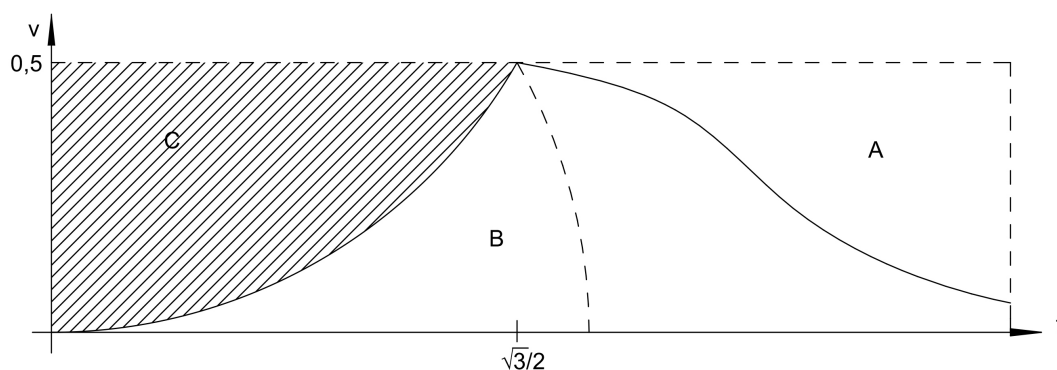


20. ábra. A $v^* = 1 - \frac{1-v}{(1-v)^2 + f^2}$ függvény jellege $\sqrt{\frac{1}{2}} < f < \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ értékekre.

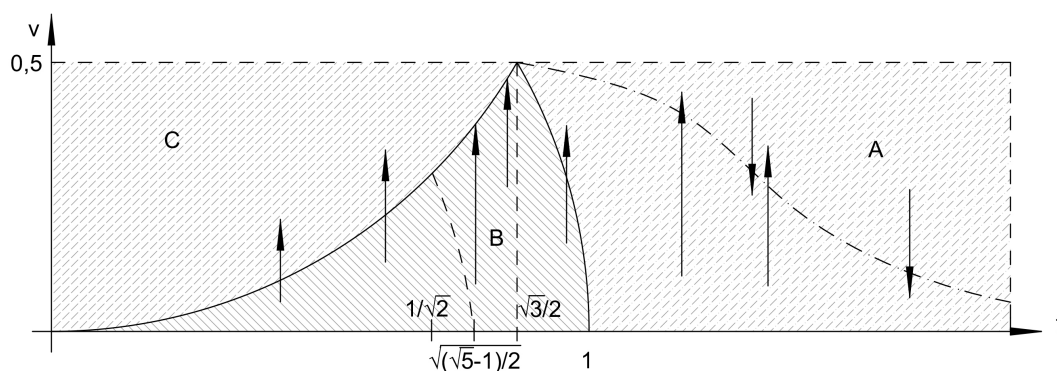


21. ábra. A $v^* = 1 - \frac{1-v}{(1-v)^2 + f^2}$ függvény jellege $f < \sqrt{\frac{1}{2}}$ értékekre.

A fent leírtak alapján készíthetők a fenti ábrákat összefoglaló képek. A 22. ábrán látható, mely f értékekhez milyen fix v értékek tartoznak. A teljes C tartomány ide fog tartozni, a B tartománnyal közös határát is beleértve. Ezen kívül lesznek még fix alakzatok A-n belül, minden egyes f értékhez egyetlen v , ezek az ábrán jelölt görbe mentén helyezkednek el. A 23. ábra mutatja, hogy az adott tartományokon belül milyen módon konvergál az alakzat a fix forma felé. Tudjuk, hogy A-n belül v értéke oszcillál a v_{fix} értéke körül. B-ben pedig f -től, és a kezdeti v -től függ az, hogy a transzformációk során kilép-e az alakzat a tartományból, vagy azon belül marad, és annak határához konvergál. C-n belül pedig minden pont fix, ahogy már az korábban látható volt.



22. ábra. A fix pontokat tartalmazó ábra. A sraffozott terület, valamint a folytonos vonalak jelölik az ábrán azokat az f - v értékpárokat, melyekre az alakzat nem változik a transzformáció során. A szaggatott vonal A és B viselkedések határát jelöli.



23. ábra. A konvergálás milyenségét mutató ábra. A-ban oszcillálva, B-ben monotonon változik v értéke a transzformáció sorozatos ismétlése során. B-ben elkülöníthető több rész, attól függően, B-ben marad-e a transzformációk során az alakzat.

5. Nagyobb élszámú alakzatok

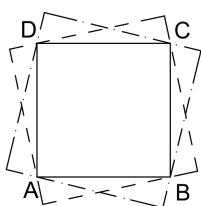
A háromszögek nagy előnyére szolgált, hogy a rendszerben egyetlen paraméterrel, a v értékkel jellemezhetőek voltak, így a számolások nagyban leegyszerűsödtek. Már négyszögek esetén is az alakzat három szabadsági fokú lesz, aminek fejlődését követni jóval nehezebb. A csúcsok számának növelésével lineárisan nő a szabadsági fok: egy n csúcú alakzat a rendszerben $2n - 5$ szabadságfokú lesz, hiszen két csúcs helyzetét szabadon meg lehet választani, az általánosság megszorítása nélkül, és a befoglaló téglalap aránya egy további csúcsnak az egyik irányú helyzetét megszabja. Az ilyen bonyolultságú alakzatok vizsgálatainak megkönnyítésére egy egyszerű program állt a rendelkezésemre, azonban néhány alapvető állítást analitikusan is be lehet látni.

Az első kérdés természetesen az, hogyan lehet megállapítani az extrémális téglalapot. Ha csak a négyszögek között vizsgálódunk, akkor két megállapítást lehet tenni:

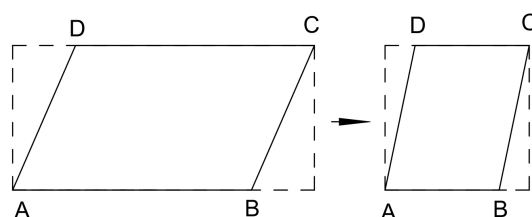
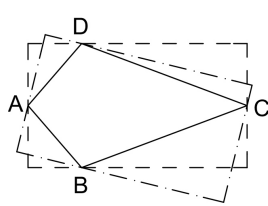
3. *Lemma*: Létezik olyan eset, mikor nem véges sok extrémális téglalap adódik, és

4. *Lemma*: Az extrémális téglalap megállapítására nincs olyan triviális módszer, mint a háromszögek esetén: sem a leghosszabb oldallal, sem pedig a legtávolabb eső csúcsokra eső ponttal párhuzamos oldalú befoglaló téglalap nem feltétlenül extrémális.

Az első lemma első állítása egy példával jól szemléltethető. (24. ábra) A négyzet esetében valamennyi befoglaló téglalap oldalaránya 1, akármilyen szöget zár be a téglalap oldala a négyzetével. Ugyan a négyzet esetében mindegy, melyik befoglaló téglalapot választjuk, azonban kevésbé speciális esetben előfordulhat, hogy a választott affinitási irány befolyásolja a kapott alakzatot. Egy deltoid esetében a szimmetriatengellyel párhuzamos affinitás után kapott alakzat is deltoid lesz, azonban a másféle irányú affinitásokra ez már nem igaz. Tehát erre az esetre



24. ábra. Azonos oldalarányú befoglaló téglalapok, melyek extrémális téglalapok is egyben, négyzet, illetve rombusz esetén.



25. ábra. A paralelogramma a transzformáció egy lépésében így alakul: a hegyesszöge nő, a tompaszöge pedig csökken, mindkettő tart a 90 fokhoz.

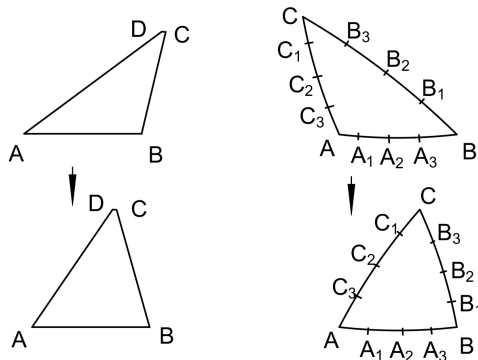
nincs elég jól definiálva az alakfejlődési algoritmusunk.

Az extrémális téglalap problematikája után az alakzatok fejlődésével is foglalkozni kell. Az egyszerűség kedvéért vegyük az $f = 1$ -hez tartozó transzformációkat. Nyilvánvalóan létezik ekkor állandó alak: méghozzá ez maga a négyzet. Ennek minden befoglaló téglalapja extrémális téglalap, viszont a hozzá rendelhető affinitás aránya 1, így minden lépésben önmagát adja vissza az alakzat, a felvett extrémális téglalaptól függetlenül. Létezik olyan alakzat, mely véges sok lépésben érnek el a fix alakzathoz: egy téglalap például így viselkedik. A transzformáció extrémális téglalapként megtalálja önmagát az alakzatot, és egy lépésben beviszi a fix négyzetbe. Ugyanígy található végtelen lépésben konvergáló forma is: ha kiindulásnak egy paralelogrammát veszünk. (25. ábra) Itt az extrémális téglalap mindig a hosszabbik oldalra felfekvő lesz. A paralelogramma hegyesszőge minden lépésben egyre közelebb kerül a derékszöghöz, azonban azt sosem érheti el, hiszen az affinitás mindig valamelyik oldallal párhuzamos, az alakfejlődési folyamat a végtelenségig folytatódik.

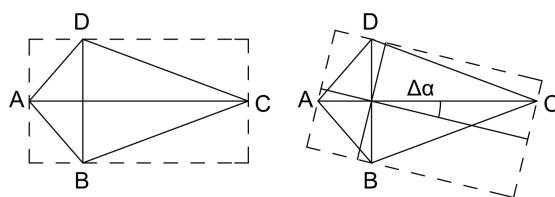
Egy másik jelentős ellentét kiemelhető a háromszögekkel szemben: a négyszögek - valamint az összes ennél nagyobb oldalszámú síkidom - esetén, adott f paraméterhez biztos, hogy nem csak egyetlen fix alakzat létezik. Ez arra vezethető vissza, hogy a háromszögek egyetlen affin csoportot alkotnak, míg a nagyobb oldalszámú alakzatok végtelen különböző affin csoportba sorolhatóak. A fent említett három példa, a négyzet, a téglalap és a paralelogramma mind egy affin csoport részét képezik, ezért nem meglepő, hogy mindhárom alakzat a négyzethez konvergál. Azonban általános esetben nem határozható meg a fix alakzat.

Négyszögek esetén egy érdekes eset az, mikor az egyik oldal elegendően kicsiny a többihez képest. (26. ábra) Ekkor, a szimuláció szerint, az alakzat úgy viselkedik mint egy háromszög. A legrövidebb oldal két végpontja az affinitások során közel marad egymáshoz, hiszen nem tud kilépni az affin osztályából a sokszög, és ennek megfelelően az $f = 1$ -nél megállapított háromszög fix alakzatához közelít a négyszög is. Hasonló viselkedést mutatott a háromszöget sokkal több csúccsal közelítő alakzat is. (26. ábra) Ebben az esetben, hogy a konvexitását a síkidom megtartsa, a háromszög oldalai enyhén „kidomborodtak”, és ezek mentén lettek felvéve az oldalakat egyenletesen felosztó további csúcspontok. A szimuláció végén a háromszög eredeti „csúcsaiból” álló ponthármas az $f = 1$ esetén bemutatott fix háromszög alakjához közeli helyzetben volt, és a teljes alakzat hasonlított a kiindulási, ívelt oldalú háromszögre.

A sok csúcsú alakzatok esetén érdekes probléma lehet a fix alakzatok keresése is. Nyilvánvalóan az $f = 1$ arányú transzformációkra a $4n$ oldalú szabályos sokszögek fix alakzatok lesznek. Azonban a néggyel nem osztható oldalszámú szabályos alakzatok fejlődésének menete nem triviális, még ha a 1 közeli is valamennyi befoglaló téglalapjuk oldalaránya.



26. ábra. Háromszögre hasonlító, vagy azt közelítő alakzatok esetén a rendszer a háromszögeknél megszokott formához közelít ad vissza.



27. ábra. Ha a négyszög átlói merőlegesek, látható, hogy egy kis $\Delta\alpha$ szöggel elforgatott befoglaló téglalap esetén is ugyanannyi az odalarány.

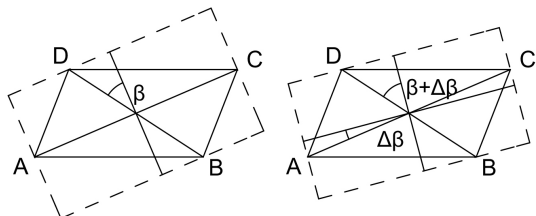
Bizonyítások:

3. *Lemma:* Vegyünk egy négyszöget, melynek az átlói merőlegesek egymásra. Ezt az alábbi ábrán látható elrendezés mutatja. (27. ábra) Ha a befoglaló téglalapot úgy vesszük fel, hogy élei párhuzamosak legyenek a négyszög átlóival, akkor a téglalap oldalaránya pontosan az átlók hosszának arányának fog megfelelni, azaz $\frac{y}{x} = \frac{AC}{BD}$. Ebben az elrendezésben a befoglaló téglalap minden oldalára pontosan egy csúcsa fekszik fel a négyszögnek. Ha ezután azt a befoglaló téglalapot vesszük, mely oldalai az előzővel egy kis $\Delta\alpha$ szöget zárnak be, hogy továbbra is minden téglalapoldalra egy csúcsa kerüljön a négyszögnek, akkor az így kapott téglalap oldalaránya ugyanúgy $\frac{y'}{x'} = \frac{AC \cdot \cos \Delta\alpha}{BD \cdot \cos \Delta\alpha} = \frac{AC}{BD}$ lesz. Ha az eredeti befoglaló téglalap extrémális volt, akkor akármilyen megfelelően kicsiny $\Delta\alpha$ felvétele esetén az elforgatott befoglaló téglalap is ugyanúgy extrémális arányú lesz, így végtelen sok extrémális téglalap található.

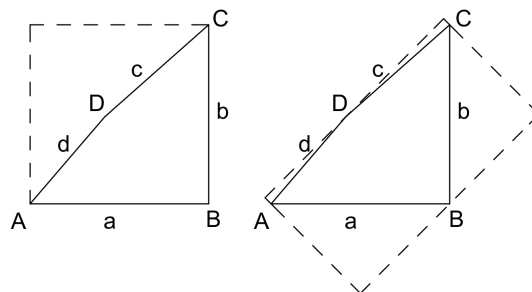
4. *Lemma:* A legtávolabb eső pontpárra illeszkedő egyenessel párhuzamos befoglaló téglalap nem feltétlenül extrémális. (28. ábra) A négyszögünk átlói zárjanak be az ábrán látható módon $90 - \beta$ szöget. Ekkor a befoglaló téglalap, ha a háromszögeknél alkalmazott módszerhez hasonlóan a legmesszebb levő pontpárt összekötő egyenessel - jelen esetben a hosszabbik átlóval - párhuzamos élű, akkor az oldalaránya $\frac{y}{x} = \frac{AC}{BD \cdot \cos \beta}$. Ha a fenti példához hasonlóan, egy kis $\Delta\beta$ szöggel megfelelően elforgatott iránnyal párhuzamos élű befoglaló téglalapot vizsgálunk, azaz a négyszög csúcsai továbbra is a befoglaló téglalap külön-külön élein fekszenek fel, akkor az új arány $\frac{y'}{x'} = \frac{AC \cdot \cos \Delta\beta}{BD \cdot \cos(\beta + \Delta\beta)}$ lesz. Erről az értékről pedig a $\cos$ függvény tulajdonságai miatt tudjuk, hogy határozottan kisebb lesz, mint a $\frac{AC}{BD \cdot \cos \beta}$ érték.

A leghosszabb oldalra illesztett befoglaló téglalap sem mindig extrémális. (29. ábra) Az alábbi elrendezésben az a él a leghosszabb, b egy kicsivel rövidebb nála, s derékszöget zár be vele, c és d pedig közel egy egyenesre esnek. (ábra) Ekkor az a oldalra felfekvően felvett

befoglaló téglalap oldalaránya közel 1. Ennél sokkal kisebb arányút lehet kapni, ha c vagy d oldalakra felfekvő befoglaló téglalapot vizsgálunk. Az arány ekkor közelítőleg $\frac{1}{\sqrt{2}}$ lesz.



28. ábra. Paralelogramma esetén a két átló nem derékszöget zár be egymással. Ekkor a hosszabbik átlóval párhuzamos oldalú befoglaló téglalap nem extrémális.



29. ábra. Egy derékszögű háromszöghöz közeli négyszög esetén a leghosszabb oldallal párhuzamos oldalú befoglaló téglalap nem lesz extrémális.

6. Összefoglalás

A dolgozatban konvex síkidomok alakfejlődésével foglalkoztam. Először definiáltam az extrémális téglalap fogalmát, mely egy síkidom esetén azt a befoglaló téglalapot jelöli, melynek oldalaránya a lehető legszélsőségebb. Ennek a fogalomnak a segítségével már fel tudtam állítani egy diszkrét alakfejlődési rendszert: ennek az algoritmusának minden lépésben megkeresi a síkidom extrémális téglalapját, és ennek oldalalaival párhuzamosan egy merőleges affinitást hajt végre a síkidomon úgy, hogy az extrémális téglalapból egy előre rögzített f oldalarányú téglalap keletkezzen.

Először a háromszögek esetével foglalkoztam, ezen belül azzal, mikor $f = 1$. Bebizonyítottam, hogy az extrémális téglalap mindig a háromszög leghosszabb élére fekszik fel. Ez után megállapításra került egy rekurzív összefüggés, mely a háromszöget jellemző v paraméter változását írja le a transzformáció egyetlen lépése során. Végeredményül azt kaptam, hogy tetszőleges alakzatból kiindulva, a transzformációt végtelen sokszor megismételve, mindig egy adott háromszöghöz konvergál a síkidom. Ez a végleges alakzat egy $66,724 - 60,324 - 52,952$ fokos háromszög.

Ezt követően általános f értékekre vizsgáltam a háromszögeket. Ekkor A, B, C eseteket kellett megkülönböztetni, attól függően, hogy a transzformáció hogyan formálja a síkidomot. Meg lehetett állapítani, hogy A eset csak $\sqrt{3}/2 < f$, B eset $0 < f < 1$ és C eset csak $0 < f < \sqrt{3}/2$ esetén fordulhat elő. Mindhárom esetben meg lehetett állapítani a fix alakzatot, f függvényében. Azt is bemutattam, hogy tetszőleges kiindulási háromszöget felvéve, a transzformációk sorozata fix alakzathoz viszi a síkidomot. A kiindulási háromszög alakja azt határozta meg, hogy milyen módon tart az alakzat a végleges formához. Láthattunk példát oszcilláló (A eset), monoton (B eset) konvergálásra, valamint arra is, hogy véges sok lépésben éri el az alakzat a fix formát (C eset).

A négy- és többcsúcsú síkidomok vizsgálatánál néhány jellemző hasonlóság és eltérés volt felfedezhető a háromszögek esetével. Fontos különbség volt, hogy a négyszögek esetén már az $f = 1$ esetre is végtelen sokféle különböző fix alakzat adódott. Emellett lehetett látni, nincs olyan jól meghatározható mód az extrémális téglalap felvételére, mint ami a háromszögeknél adódott. A leglényegesebb hasonlóság pedig az volt, hogy a háromszöghöz közeli, ám annál több csúcsú formák a háromszögeknél már látott módon viselkedtek, azaz a háromszögek esetén megfigyelhető fix alakzathoz közeli formához konvergáltak.

Összegzőként elmondható, hogy egy igen érdekes viselkedésű rendszert sikerült létrehozni egy egészen egyszerű geometriai transzformációval. A rendszerben az alakzatok fejlődése nem triviális, már háromszögek esetén sem.

A kutatás folytatásaként több célt is ki lehet tűzni. Az egyik a nagyobb csúcsszámú, vagy

sima síkidomok részletesebb vizsgálata, ezeket a dolgot csak nagyon felszínesen, vagy egyáltalán nem érintette. Másik cél lehet a modell diszkrét rendszerből folytonos rendszerbe való átültetése, és az így létrejövő, vagy eltűnő fix alakzatok figyelése. Harmadik pont pedig a három dimenziós általánosítás lehet, mellyel a valósághoz közelebbi modellt kapunk. Reményeim szerint a jövőben mindhárom témában el fogok tudni jobban merülni.

Felhasznált irodalom

Bloore, F. (1977) The shape of pebbles, *Mathematical Geology*, 9, 113-122

Domokos, G., Gibbons, G. W. (2012) The evolution of pebble size and shape in space and time, *Proceedings of the Royal Society*, 468, 3059-3079, London

Domokos, G., Sipos, A. Á., Szabó, Gy. M., Várkonyi, P. L. (2009) Formation of sharp edges and planar areas of asteroids by polyhedral abrasion, *The Astrophysical Journal Letters*, 699

Dringó, L. (1991) *Numerikus analízis I-II*, Tankönyvkiadó Vállalat, Budapest

Firey, W. J. (1974) The shape of worn stones, *Mathmetika*, 21, 1-11