



XXXII. Országos Tudományos Diákköri Konferencia
Műszaki Tudományi Szekció - Óbudai Egyetem

Ragasztott erősítéssel készülő húzott kapcsolatok **működésének elméleti vizsgálata**

Szerző:

Karádi Dániel Tamás építészmérnök hallgató (BSC képzés)

Konzulens:

Dr. Sajtos István egyetemi docens, tanszékvezető, BME Építészmérnöki kar, Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Építészmérnöki kar

Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék

2015.

Absztrakt

Ragasszunk egy rövid cellulux darabot az asztal szélére, és síkjában lassan kezdjük el húzni. Azt vehetjük észre, hogy a ragasztószalag másik vége elkezd "lehámozódni" az asztalról. Mi ennek az oka? Tanulmányomban erre is választ adok.

A kutatásom során ragasztott fa-, acél- vagy kompozit lemezzel erősített fa, illetve beton (vasbeton) anyagú húzott rudak kapcsolatait vizsgáltam, lineárisan rugalmas anyagmodellrel feltételezve.

Dolgozatom elején egy tanulmány [1] modelljét általánosítom, alkalmassá téve azt véges hosszúságú, ragasztással erősített húzott rúd kapcsolatának vizsgálatára. A fenti probléma mechanikai modelljéhez tartozó differenciálegyenlet rendszer megoldásait, a differenciálegyenletek mátrixelméletének segítségével, analitikusan határoztam meg. Ezt követően adott hosszúságú és különböző anyagú ragasztott kapcsolatokat vizsgállok és hasonlítok össze, nagy hangsúlyt helyezve a rúd és az erősítés közötti ragasztásban fellépő feszültségekre. Végezetül kitérek a kutatás gyakorlati hasznosságára, illetve a további vizsgálati irányokra.

[1] D.Ferretti, Marco Savoia: Serviceability behaviour of R/C Tensile members strengthened by FRP plates, Studi e Ricerche (Studies and Researches; Politecnico di Milano) Vol. 21., 2000, pp. 95-123.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés.....	4
2. A vizsgált szerkezet és kérdései	5
3. A modellalakítás.....	5
3.1. A felhasznált modell [1]	5
3.2. Anyag egyenletek az egyes anyagok kapcsolatára	8
3.3. Egyensúlyi egyenletek	8
3.4. Geometriai egyenletek	9
4. Repedés és toldás közötti különbség	9
5. A matematikai modell megadása	10
5.1. Homogén Megoldás.....	10
5.2. Inhomogén megoldás.....	10
5.3. Peremfeltételek megadása:	11
5.3.1. A végteleneset [1]	11
5.3.2. A véges ragasztási hossz:	12
6. A program	13
7. Vizsgálat.....	14
7.1. Vizsgálati módszer	14
7.2. Szerkezeti és geometriai tulajdonságok:.....	14
7.3. A ragasztás hosszának változása	15
7.4. Lemezvastagság változtatása	22
7.5. Ragasztás típusának változtatása	27
7.6. Konklúziók	33
8. Gyakorlati alkalmazási lehetőségek a kutatás további lehetőségei	34
9. Köszönetnyilvánítás	34
10. Függelék:.....	35
11. Felhasznált irodalom, források:.....	36

1. Bevezetés

„...A mérnöki teljesítmény nem akkor éri el a csúcát, amikor az utolsó lehetséges elemmel is kiegészítetted a szerkezetet, hanem épp ellenkezőleg, amikor az utolsó felesleges elemet is eltávolítottad róla...” A sorokat még a XX. század végén élt és alkotott építőmérnöktől Peter Rice-től idéztem (szabad fordításban) [2]-ből. Ez a gondolat véleményem szerint jól tükrözi, hogy milyen módon kell, a szerkezeteket, legyenek akár járműben, hídban vagy épületben megtervezni úgy, hogy biztonsági, esztétikai és gazdasági szempontból is kielégítsék az igényeinket. Ma nem csak az újfajta tartószerkezeti formák, anyagtakarékosság miatt, hanem akár régi szerkezeteink megerősítése miatt is fontossá válnak az olyan kapcsolati kialakítások, amelyekkel minél pontosabban teljesíthetők a teherbírási és használhatósági követelmények a lehető legkevesebb anyagfelhasználás és így költség mellett. Az utóbbi fél évszázadban kezdtek el teret hódítani a szintetikus ragasztó anyagok mind a háztartásokban mind az építőiparban. A csavarozott, szegecselt vagy hegesztett kapcsolatokkal szemben a ragasztott megerősítés számos új lehetőséget vetett fel a tartószerkezeti kialakítás szempontjából, elsősorban különböző anyagok között létrehozható kapcsolatok és terhelés egyenletesebb megoszlása (fáradás kiküszöbölése) okán.

Fontos különbséget kell tennünk a mérnöki alkalmazásban a ragasztószer és a ragasztó között. Előbbi a folyékony hordozóközegének elpárolgása után csak az összeillesztett felületekhez tapad hozzá, így létesítve kötést. Ugyanakkor a műszaki alkalmazásban erősebb kapcsolatokat kell létrehozni, ezt pedig a ragasztók adhéziós kapcsolatával érhetjük el. Ilyenkor a kötőerőt az alkotórészek kémiai átalakulása biztosítja. Ennek köszönhetően tudunk a mai gyakorlatban fát, betont, acélt akár fával, acéllal vagy más újfajta kompozit anyagokkal megerősíteni, összetett szerkezeteket alkotni, például rétegelt-ragasztott fatartókat. Ezeknek a kapcsolatoknak számos előnyös tulajdonsága mellett ugyanakkor hátrányaik is vannak. Az adhéziós kapcsolat fény és hőhatására könnyen megszűnhet, fizikai terhelés során pedig igen nagy nyíró igénybevételek érik a kapcsolatot, amelyre feltétlenül méretezni kell a szerkezetet. Az első ismert tanulmányban [6], ami a húzott kapcsolatok nyírásra történő tönkremenetelét, annak számítási módszerét vizsgálta Volkersen (1938) ismertette. Ezt követve pedig egyre több vizsgálat és kutatás látott napvilágot a témában pl.: Goland & Reisser (1944) [7]; Hart-Smith (1973) [8].

Az én dolgozatom is ennek a témának egy kis szeletébe kíván betekintést nyújtani, méghozzá olyan módon, hogy egy elméleti modell segítségével megvizsgálom, hogy a ragasztási módok, ragasztási hosszak és a kapcsolatokhoz használt anyagok tulajdonságai

hogyan befolyásolják a ragasztással erősített rúd teherbírását, tönkremeneteli módját. Az eredményeket MATLAB szoftver segítségével számított grafikonokon fogom bemutatni.

2. A vizsgált szerkezet és kérdései

A kutatásomhoz egy olyan szerkezetet választottam, amelynél egyértelműen meghatározhatóak, hogy hol kell egy megfelelően kiválasztott ragasztott erősítést alkalmazni a tönkremenetel elkerüléséhez. Ez olyan húzott rudat jelent, amelyben vagy tudjuk, hogy hol van egy repedés/szakadás helye, vagy ismerjük a tervezett toldás elhelyezkedését. Ilyen szerkezet egy rácsostartó rácsrúdja, vagy ha még konkrétabb példát keresünk, ilyen kapcsolatot találhatunk egy hagyományos fa fedélszék bizonyos rúdjai esetében is. Ilyen húzott toldások esetében keresem a következő kérdésekre a lehetséges válaszokat:

- Milyen hosszúságon érdemes a megerősítést kialakítani, hogy azzal a maximális dolgozó felületet érjük el?
- A ragasztó anyagot teljes felületen vagy annak csak adott helyein érdemes-e elhelyezni?
- Mi történik a ragasztással és a hevederrel a toldás és a ragasztási véghelyén?

Ezekre keresem a választ fa-, acél- vagy kompozit anyagú hevederrel ellátott fa vagy beton anyagú rudak esetében, amelyeket a kapcsolatba beragasztott acélrúddal is megerősítek.

3. A modellalakítás

3.1. A felhasznált modell

A következőekben bemutatom a számítási modellt, amellyel a kiválasztott szerkezetet vizsgálom. A modell végtelen hosszúságú toldott szakaszt vizsgál [1], én a dolgozatban véges hosszúságú toldást vizsgállok.

Ahhoz, hogy a szerkezet matematikai modelljét felírjuk szükségünk van bizonyos kikötésekre. Ezek alapvetően egyszerűsítik a valóságot, de kellő információt adhatnak speciális esetekre.

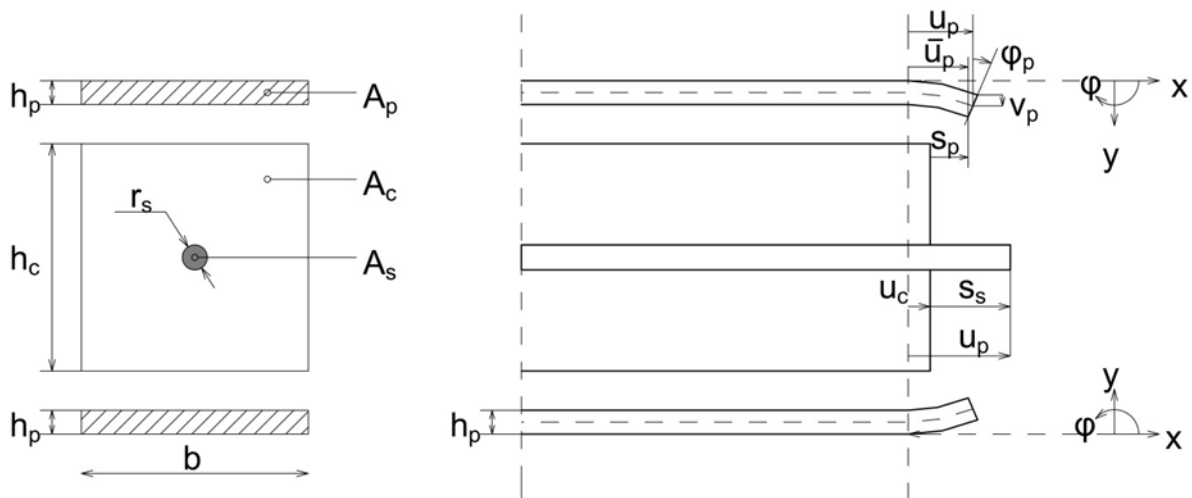
Feltételek:

- (1) A rúd keresztmetszetei az igénybevételek hatására bekövetkező deformációk során továbbra is síkok maradnak, azaz érvényes a rúdra a Bernoullie-Navier hipotézis.

- (2) A kapcsolat szimmetriája miatt az acélrúdban és a toldott rúdban nyomaték nem keletkezik. Azt feltételezzük, hogy az acélrúd és a toldott rúd nyomatéki ellenállása elhanyagolhatóan kicsi, így hajlító igénybevételek nem keletkeznek ezekben.
- (3) A toldott rúdra kizárólag központos húzóerőt működtetünk, amely kezdetben csak az acélrúdban okoz igénybevételt, innen továbbtődik a szerkezet többi elemére.
- (4) A repedés a rúd és a ragasztás közepénél alakul ki.
- (5) Lineárisan rugalmas kapcsolatot feltételezünk a szerkezeti elemek között és a ragasztó lineárisan rugalmasan viselkedik nyírásra és normálfeszültségekre is.

A heveder elfordulásból származó vízszintes elmozdulásának számításakor egyszerűsítésképpen a szög és sinusa egyezzen meg.

A modell egy kompozit lemezzel erősített vasbeton rúdban kialakuló repedésekkel foglalkozik, de a következő kezdeti összefüggések számunkra tökéletesek. A továbbiakban az alábbi 1. és 2. ábrákon szemléltetem, hogy a mechanikai modellhez Ferreti és Savoia milyen jelöléseket használt [1].



1. ábra
Geometriai adatok [1] alapján

Vegyünk egy 'L' hosszúságú rudat. Ennek hosszával párhuzamos koordináta irányát jelöljük x-nek, és y-nak a függőleges sík függőleges koordinátáját. A keletkező relatív elmozdulásokat a már elmozdult betonhoz viszonyítjuk. Az erősített rúd méretei és az igénybevétel hatására bekövetkező elmozdulásai a következők:

Toldott/berepedt rúd:

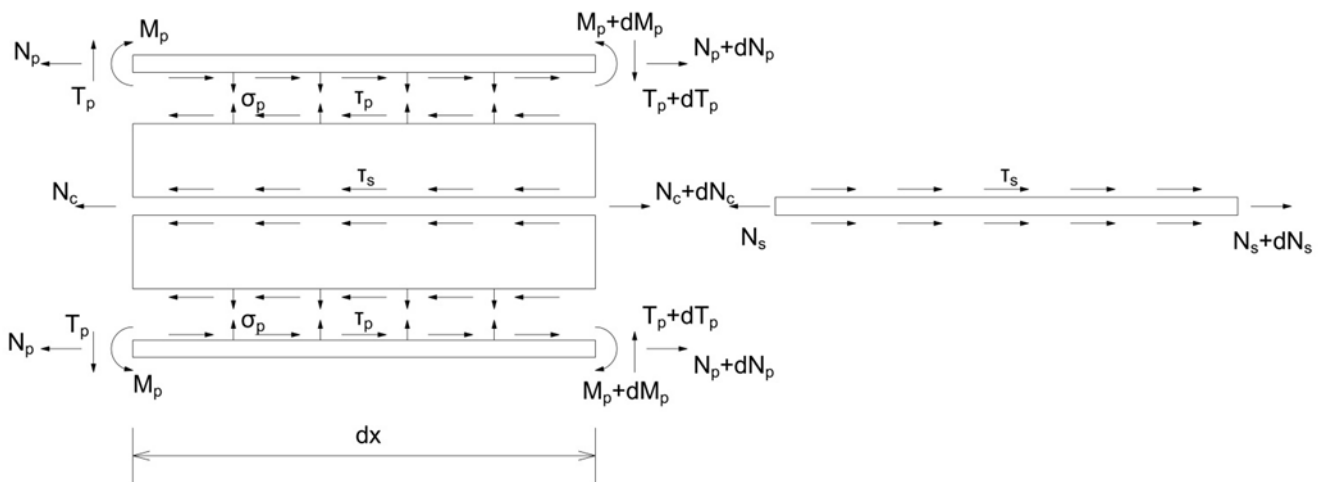
Szélesség: b_c (mm), magasság: h_c (mm), keresztmetszet területe: $A_c = b_c * h_c$ (mm²), elmozdulása: u_c (mm).

Acél

Átmérője: $d = 2r$ (mm), területe: $A_s = \frac{d^2 * \pi}{4}$ (mm²), abszolút elmozdulása: u_s (mm),relatív elmozdulása: s_s (mm).

Heveder

Szélessége: $b_m = b_p$ (mm), magassága: h_p (mm), keresztmetszet területe: $A_p = b_p * h_p$ (mm²), súlyvonal menti vízszintes elmozdulása: u_p (mm), alsó szélének elmozdulása: $\bar{u}_p$ (mm), maghoz viszonyított relatív elmozdulása: s_p (mm), függőleges irányban: v_p (mm) szögelfordulása pedig ϕ_p



2. ábra
Egy elemi egység [1] alapján

Vegyünk a szerkezetünk egy elemi dx hosszúságú szakaszát és vizsgáljuk meg a benne kialakuló igénybevételeket! (2. ábra.) Ahol az N_c N_p N_s a szerkezeti elemek egyik végén az N húzóerőből létrejövő normál erők, T_p M_p a lemezben a hajlítás következtében kialakuló nyíróerő és hajlító nyomaték. A dx szakasz másik végén ugyanezen igénybevételek kicsit megváltozott értékei működnek. Tudjuk, hogy szerkezet egy pontjának alakváltozásai és feszültségi állapotai között összefüggések vannak, amelyeket az anyag egyenletekkel jellemezhetünk. Ez alapján a kialakuló feszültségek a megfelelő elmozdulások függvényei lesznek az egyes anyagok kapcsolatában! Így tehát:

Beton és acél kapcsolata: $\tau_s = -f_s(s_s)$;

Beton és lemez kapcsolata: $\tau_p = -f_t(s_p, v_p)$;

$\sigma_p = -f_n(s_p, v_p)$;

Írjuk fel a szerkezetre az anyag-, egyensúlyi, geometria egyenleteket!

3.2. Anyagegyenletek az egyes anyagok kapcsolatára

(1) $\tau_s = -k_s s_s$

k_s az acél és a mag anyagára jellemző nyírási felületi merevségi állandó.

(2) $\tau_p = -k_{pu} s_p$

k_{pu} a ragasztott lemez és mag kapcsolatára jellemző nyírási felületi merevségi állandó.

(3) $\sigma_v = -k_{pv} s_p$

k_{pv} a ragasztott lemez és mag kapcsolatára jellemző hámozási felületi merevségi állandó.

Az elemi szakasz egyensúlyi egyenleteihez 2. ábra alapján először is határozzuk meg az egyes elemek tengelyirányú és arra merőleges elmozdulását. Acél esetén: $s_s = u_s - u_c$ különbség, lemez esetében a tengelyre merőleges elmozdulás maga v_p , viszont a tengelyirányú ennél bonyolultabb: $s_p = \bar{u}_p - u_c = u_p - \phi_p \frac{h_p}{2} - u_c$ (6) feltétel alapján.

3.3. Egyensúlyi egyenletek

Heveder:

(1) $\frac{dN_p}{dx} = -b_p \tau_p = b_p k_{pu} s_p = K_{pu} s_p$

(2) $\frac{dT_p}{dx} = -b_p \sigma_p = b_p k_{pv} v_p = K_{pv} v_p$

(3) $\frac{dM_p}{dx} = T_p - \tau_p \frac{h_p}{2} b_p = T_p + \frac{h_p}{2} K_{pu} s_p$

Acél:

(4) $\frac{dN_s}{dx} = -\pi d \tau_s = \pi d k_s s_s = K_s s_s$

Beton:

$$(5) \quad N_c = N - N_s - 2N_p$$

3.4. Geometriai egyenletek

$\varepsilon = ay + b, \sigma = E\varepsilon$, és anyagegyenletekből

Mag elem:

$$(6) \quad \frac{du_c}{dx} = \frac{N_c}{E_c A_c}$$

Lemez:

$$(7) \quad \frac{du_p}{dx} = \frac{N_p}{E_p A_p} - \frac{M_p h_p}{2E_p I_p}$$

$$(8) \quad \frac{dv_p}{dx} = \varphi_p$$

$$(9) \quad \frac{d\varphi_p}{dx} = -\frac{M_p}{E_p I_p}$$

$$(10) \quad \frac{ds_p}{dx} = \frac{N_p}{E_p A_p} - \frac{N - 2N_p - N_s}{E_c A_c} - \frac{M_p h_p}{2E_p I_p}$$

Acél:

$$(11) \quad \frac{ds_s}{dx} = \frac{N_s}{E_s A_s} - \frac{N - 2N_p - N_s}{N_c A_c}$$

4. Repedés és toldás közötti különbség

A matematikai modellezhetőség előtt szükséges a toldás és a repedés közötti különbségről néhány szót ejteni. A repedés alapvetően egy fizikailag összefüggő szerkezet tönkremenetelének egy módja, amikor egy adott pontban az igénybevételek hatására kialakuló feszültségek elérik az anyag szilárdsági értékét. A repedés nem feltétlenül egy síkban megy végbe. Továbbá, általában fokozatosan történik a szétválás az anyagban. A toldás ennél egyszerűbb, hiszen ekkor két azonos (különböző) anyagú rúd egy-egy felületét érintjük egymással össze és ekkor nincs anyagi (kötési) kapcsolat. Azért hogy ne kelljen egy toldás és egy repedésre külön modellt alkotnunk az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy vizsgálat során a repedés egy a rúdtengely irányra merőleges sík. Már teljesen kialakult, azaz megszűnt az anyagi kapcsolat a rúd két része között.

5. A matematikai modell megadása

A 3. pontban megállapított differenciálegyenletekről elmondhatjuk, hogy egy közös, inhomogén, lineáris, elsőrendű, állandó-együtthatós, differenciál egyenletrendszer elemei. Ezek megoldásait,

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{q}$$

mátrix differenciál egyenletrendszer alakjában írhatjuk fel a legkönnyebben. Az $\mathbf{y}=[N_p, N_s, s_p, s_s, T_p, M_p, v_p, \varphi_p]$ vektor tartalmazza az egyenletrendszer ismeretlen függvényeit. $\mathbf{A}$ legyen az egyenletrendszer együtthatóiból képzett kvadrátikus mátrix, $\mathbf{q}$ vektor tartalmazza az N erővel kapcsolatban álló mechanikai és geometriai alkotóelemeket a differenciálegyenletekben. A differenciál egyenletrendszer megoldását az $\bar{\mathbf{y}}$ homogén megoldás és az $\tilde{\mathbf{y}}$ inhomogén partikuláris megoldás összegeként keressük, $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}} + \tilde{\mathbf{y}}$. Nézzük meg, hogy az egyes megoldások mit takarnak mechanikailag! A homogén egyenlet a ragasztás szélén és a toldás környezetében határozza meg az értékeket, míg a partikuláris egyenlet ott ahol nincs változás a rúdban, tehát a megnyúlások állandóak, azaz $\mathbf{y}' = 0$. A megoldás menetét a legtöbb lineáris algebra- vagy differenciálegyenletekről szóló könyv (segédlet) tartalmazza [3],[4].

5.1. Homogén Megoldás

A homogén megoldás meghatározásához szükségesek a 8×8 -as méretű $\mathbf{A}$ mátrixunk sajátértékei λ_i és saját vektorai $\mathbf{h}_i$, melyeket az $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{h}_i = 0$ összefüggésből kapunk meg. A homogén megoldást az $\bar{\mathbf{y}} = \Psi * \mathbf{c}_i$ alakban keressük ahol $\Psi = \sum_{i=1}^n \mathbf{h}_i e^{\lambda_i * x}$ alaprendszert értjük. Mivel feltesszük, hogy az egyenletek száma megegyezik az ismeretlenek számával, így $n=8$. A $\mathbf{c}_i$ a lineáris egyenletrendszer megoldásainak állandója, amelyeket majd a peremfeltételekből kaphatunk meg, erről később lesz szó. Az x az adott pont vízszintes koordinátája. Így a homogén egyenlet megoldásait a $\bar{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{c}_i \mathbf{h}_i e^{\lambda_i * x}$ alakban keressük.

5.2. Inhomogén megoldás

Az inhomogén megoldás a fentebb említett $\mathbf{y}' = 0$ esetben számítható ki könnyen. A differenciál egyenletrendszerünket a következő alakra alakíthatjuk át: $\tilde{\mathbf{y}} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{q}$. Fontos leszögezni, hogy az $\mathbf{A}$ mátrixunk invertálható legyen, különben nem vezet eredményre az egyenlet. Az inhomogén megoldást megkaphatjuk mechanikai megfontolások alapján, mivel

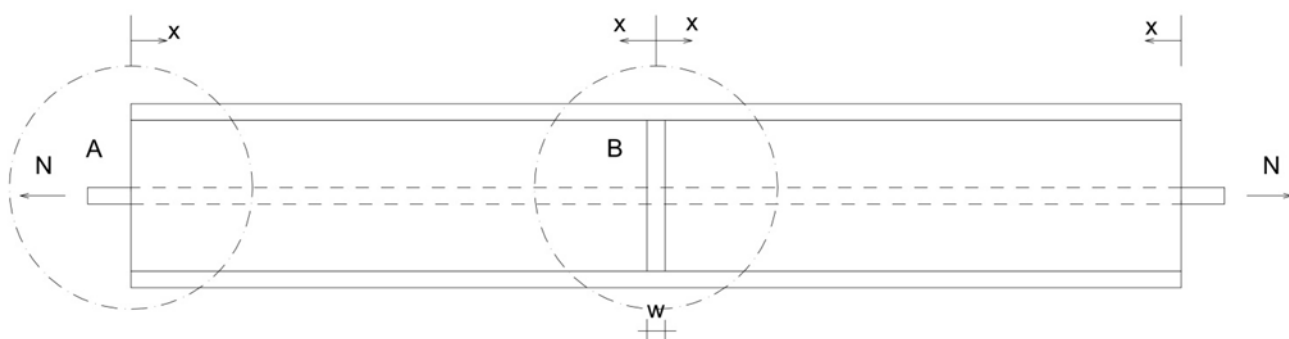
ebben az esetben a tengelyirányú N erő konstans, a megnyúlások állandóak lesznek a megcsúszások eltűnésével. Így igazak a következő összefüggések:

$$\tilde{N}_c = \varepsilon E_c A_c, \quad \tilde{N}_s = \varepsilon E_s A_s, \quad \tilde{N}_p = \varepsilon E_p A_p, \quad \text{ahol } \varepsilon = \frac{N}{(E_c A_c + E_s A_s + 2E_p A_p)}.$$

Összegezve a megoldásokat a $y = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{h}_i e^{\lambda_i x} - (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{q})_i$ mátrix egyenlet foglalja magába.

5.3. Peremfeltételek megadása

5.3.1. A végteleneset [1]



3. ábra
A végteleneset koordináta rendszerei [1] alapján

A modell esetén a saját vektorokat és a hozzájuk tartozó sajátértékeket két részre bontja, $-\lambda_1 \lambda_1 \dots, -\lambda_{n/2} \lambda_{n/2}$ mivel a $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{h}_i$ determinánsa a λ^2 függvénye. Mivel $\mathbf{A}$ egy nem szimmetrikus mátrix valós együtthatókkal, a saját értékei és sajátvektorai ebben az esetben viszont lehetnek valósak vagy komplexek is. A komplex esetben a valós végeredmény eléréséhez szükségünk van a komplex sajátérték párok konjugáltjaira. Ezt a $\bar{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^{n/2} c_{1i} \mathbf{h}_{1i} e^{-\lambda_i x} + \sum_{i=1}^{n/2} c_{2i} \mathbf{h}_{2i} e^{\lambda_i x}$ -ra bontásban, a homogén megoldás esetén, c_i elégti majd ki. Ezt követően írjuk fel a ragasztás végére és a toldásra külön-külön 4-4 perem feltételt

A) Ragasztás vége:

$$N_p(0) = 0, N_s(0) = N, T_p(0) = 0, M_p(0) = 0$$

$$N_p(\infty) = 0, N_s(\infty) = N, T_p(\infty) = 0, M_p(\infty) = 0.$$

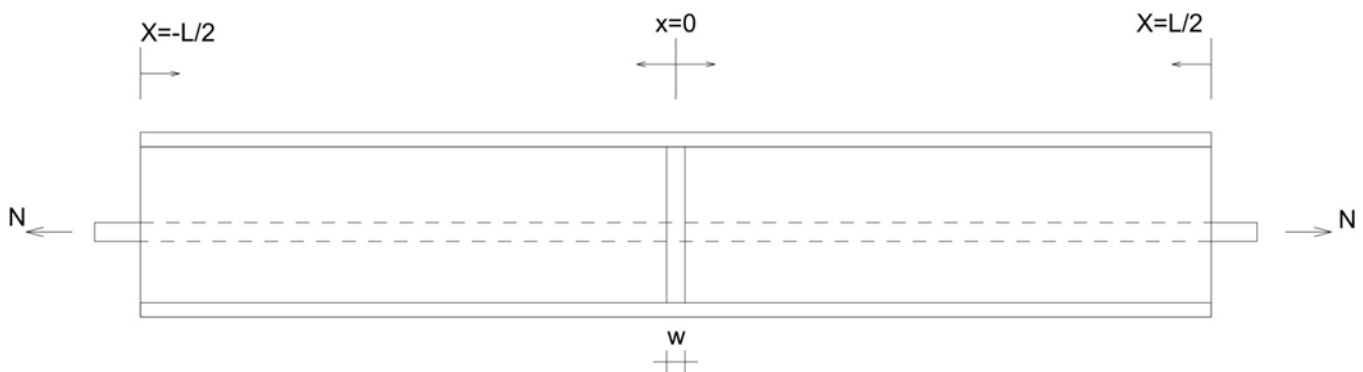
B) Repedés: w a repedés tágassága, melyet iterációval határozzunk meg.

$$T_p(0) = 0, s_p(0) = -\frac{w}{2}, s_s(0) = -\frac{w}{2}, \varphi(0) = 0$$

$$T_p(\infty) = 0, s_p(\infty) = -\frac{w}{2}, s_s(\infty) = -\frac{w}{2}, \varphi(\infty) = 0.$$

Ha $\bar{y}$ minden értéke véges, akkor $x=\infty$ helyű peremfeltételek esetén az $\bar{y} = \sum_{i=1}^{n/2} c_{1i} \mathbf{h}_{1i} e^{-\lambda_i x} + \sum_{i=1}^{n/2} c_{2i} \mathbf{h}_{2i} e^{\lambda_i x}$ összeg csak akkor lehet valós ha $c_{2i} = 0$ tehát egy 4 ismeretlenes 4 egyenletet tartalmazó összefüggést nyerünk, amelyből már egyértelműen például Gauss-eliminációval kinyerhetők a megoldásaink.

5.3.2. A véges ragasztási hossz:



4. ábra
A végeseset koordináta rendszere

A megoldás menete hasonlít a fentiekhez. Ahhoz hogy megkapjuk a megoldást még szükségünk van a c_i differenciál egyenletrendszer együtthatóinak ismeretére. Mivel $n=8$ így 8 db ismeretlenünk van, rendre $c_1, c_2, \dots, c_8$, amelyek meghatározásához 8 db peremfeltételre van szükségünk. Ehhez vegyük a ragasztás szakaszának két pontján a toldás/repedés helyét, amely legyen a koordináta rendszerünk $x=0$ pontja és a ragasztás szélét, ami pedig x irányban $\pm \frac{L}{2}$ koordinátákkal rendelkezzen (L alatt a teljes ragasztási hosszt értsük). (Lásd 4. ábrát.)

Toldás esetén legyen a repedés nagysága w , $+\frac{w}{2}$ és $-\frac{w}{2}$ a két különböző irányba.

Ekkor elmondhatjuk, hogy a mag anyagában megszűnik a kapcsolat, így nem alakulhat ki sem erő, sem feszültség ezen a helyen. Azaz a teljes erőt az acélrúd és a két lemez/heveder veszi fel így:

$$2N_p(w) + N_s(w) = N.$$

Felírhatjuk a következő összefüggéseket peremfeltételként a toldás környezetében:

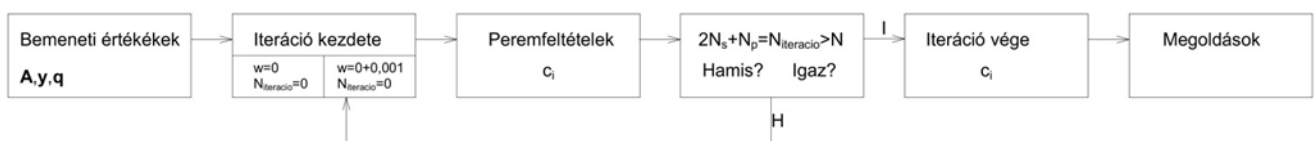
$$T_p(0) = 0, s_p(0) = -\frac{w}{2}, s_s(0) = -\frac{w}{2}, \varphi(0) = 0.$$

Mivel implicit alakban nem tudjuk megadni a megoldást (repedés w szélessége alapvetően ismeretlen) ezért a megoldás során iterációs eljárást dolgozunk ki, amikor kiszámoljuk $w=0$ -ra és megnézzük teljesül-e az $2N_p(w) + N_s(w) = N$ feltétel, ha nem növeljük w értékét és kezdjük előről a számítást. A ragasztás szélén egyszerűbb a dolgunk, hiszen az N erő közvetlenül csak az acélra hat, így a felírható peremfeltételek a következők: $N_p(\pm \frac{L}{2}) = 0, N_s(\pm \frac{L}{2}) = N, T_p(\pm \frac{L}{2}) = 0, M_p(\pm \frac{L}{2}) = 0$. Ezekből a 8 feltételből már egyértelműen meghatározhatjuk az differenciál egyenletrendszer együtthatóit a homogén megoldáshoz, majd az inhomogén megoldással együtt az y -ban rögzített ismeretleneket.

6. A program

A Matlabban megírt program alapvetően a fent említett összefüggéseken lépked végig, illetve mivel a dolgozatnak nem a program részletes bemutatása a célja, csak nagy vonalakban ismertetem ennek működését.

1. Megadjuk a bemeneti adatainkat, azaz az ismert geometriai és anyagi tulajdonságait a szerkezetnek.
2. Egy mátrixba rendezzük a peremfeltételeknél megadott differenciálegyenleteket
3. Az adatokból egy iterációs folyamat során ($w=0$ értéktől kezdve) megvizsgálja a megadott peremfeltételeknek megfelelően a c_i együtthatók alapján a $2N_p(w) + N_s(w) = N_{\text{iteralt}} < N$ egyenlőtlenséget.
 - a. Ha a bal oldali érték kisebb, visszaugrik az előző pont az iterációs eljáráshoz és változtatja a toldás (repedés) w bemeneti értékét.
 - b. ha nagyobb, akkor a kapott együtthatókat megjegyzi.
4. A megjegyzett értékekből adott $x=[0, L/2]$ intervallumon kiszámolja és kirajzolja a kikért függvényeket. Szemléletesen az 5. ábrán:



5. ábra
A Matlab program elvi működése

7. Vizsgálat

7.1. Vizsgálati módszer

A következőekben a numerikusan megkapott grafikonokon ábrázolt eredmények értékelését olvashatjuk, ahol elsősorban a grafikonok vonalainak esése és alakjainak összehasonlítására törekedtem. Az összehasonlítás alapjául minden esetben egy-egy, legfeljebb két geometriai vagy anyagi jellemző megváltoztatását vettem, törekedve arra, hogy a lehető legtöbb információt kapjam a lemez- ragasztó-mag kapcsolatáról. Ezek alapján 4 főbb vizsgálati irányt jelöltem meg, melyek közül kettőnek a geometria tulajdonsága, egynek pedig az anyagi tulajdonsága változik:

- 1) A ragasztás hosszának változtatása.
- 2) A lemez vastagságának változtatása.
- 3) A ragasztó anyag kicserélése illetve

Ezek mellett törekedtem a könnyebb összevethetőség szempontjából arra, hogy a maradék, értékek azonosak maradjanak különböző anyagok esetén is (pl 1-2-3 m hosszú, de mindig 5 mm vastag kompozit acél vagy fa lemez.) Természetesen a szerkezeti józan ész határán belül.

7.2. Szerkezeti és geometriai tulajdonságok:

A vizsgált ragasztási hosszt 50mm-500mm-ig terjedő intervallumra korlátoztam, továbbá az ábrázolás a grafikonok esetén a normált értékek alapján történik a könnyebb összehasonlítás miatt. A normált hossz alatt a ragasztás vizsgált pontja és az origó távolságának a ragasztás fél hosszával vett hányadosát értem. Egyéb vizsgált anyagok keresett karakterisztikus értékeit [5]-ből vettem.

	Osztály	b (mm)	h (mm)	E_{0c}	G_{0c}
Fa	C22	150	300	10000	630
Beton	C20/25	150	300	30000	12500

1. táblázat

Toldott/berepedt rúd általános jellemzői

	Osztály	b (mm)	h (mm)	E0c
Fa	C24	150	változó /(10)	11000
Acél	S230	150	változó/(10)	210000
Kompozit	Szálerősített	150	változó/(10)	108380

2. táblázat

Lemezek/Hevederek tulajdonságai

	Osztály	d(mm)	E0c	E0c(kicsi)
Acél	S230	10	210000	1

3. táblázat

Acél megerősítés tulajdonságai

	E_g	G_g	Poisson tényező	Szín
Epoxy 5.	1000	370	0,35	Kék

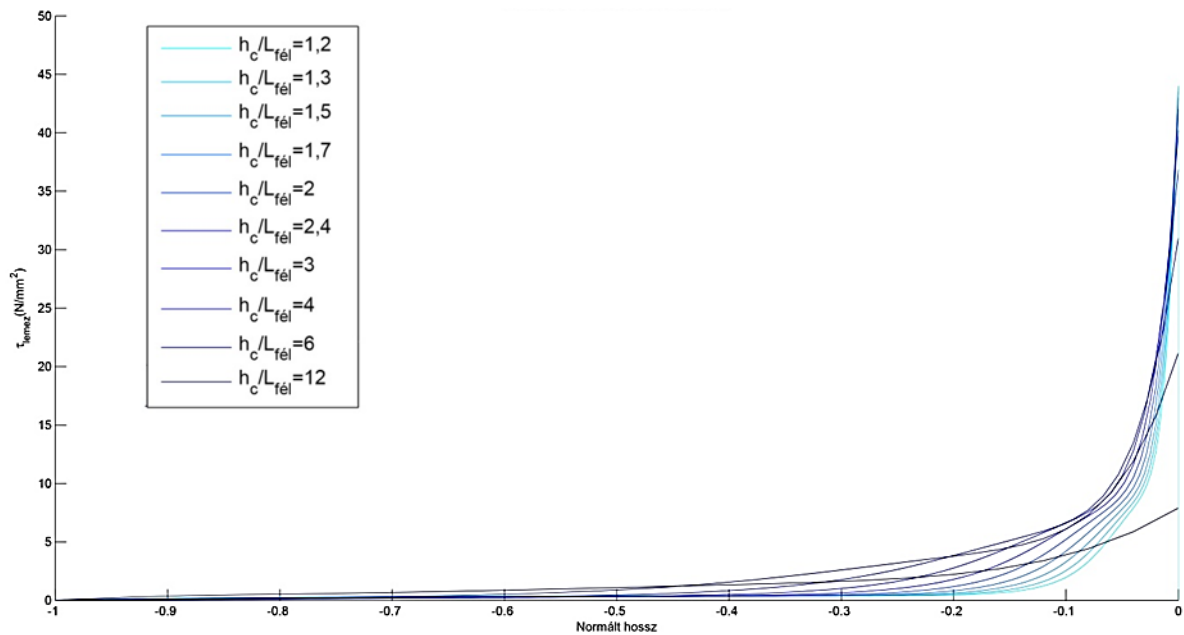
4. táblázat

Általánosan vizsgált ragasztó típus

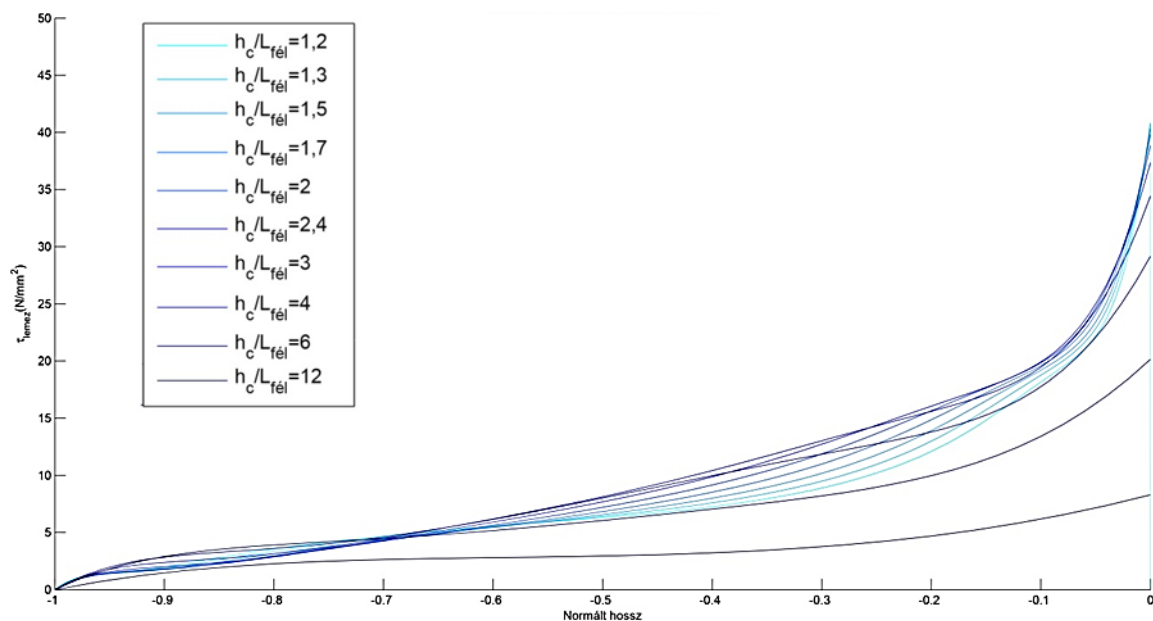
A ragasztó anyagokról részletesebben a külön nekik szánt résznél írok. A fenti táblázatokból a geometria tulajdonságok vizsgálatához a ragasztóanyagok közül az epoxy típusút használom [9]-ből. (Ez az a ragasztó típus, amellyel mindegyik ragasztást ki lehet vitelezni.)

7.3. A ragasztás hosszának változása

Értelemszerűen egy toldás vagy repedés helyén a ragasztott lemezeknek és az acélnak kell a teljes erőt továbbítania, így ezt figyelembe véve azt feltételezhetjük, nem mindegy az, hogy mekkora az a felület (állandó szélesség mellett így a hossz) amelyen keresztül közvetítődnek a terhek. Ha globálisan megvizsgáljuk a kapott grafikonjainkat észrevehetjük, hogy a ragasztásban ébredő nyírófeszültség eloszlása a különböző anyagi minőségű lemezek esetében nagyon is más.



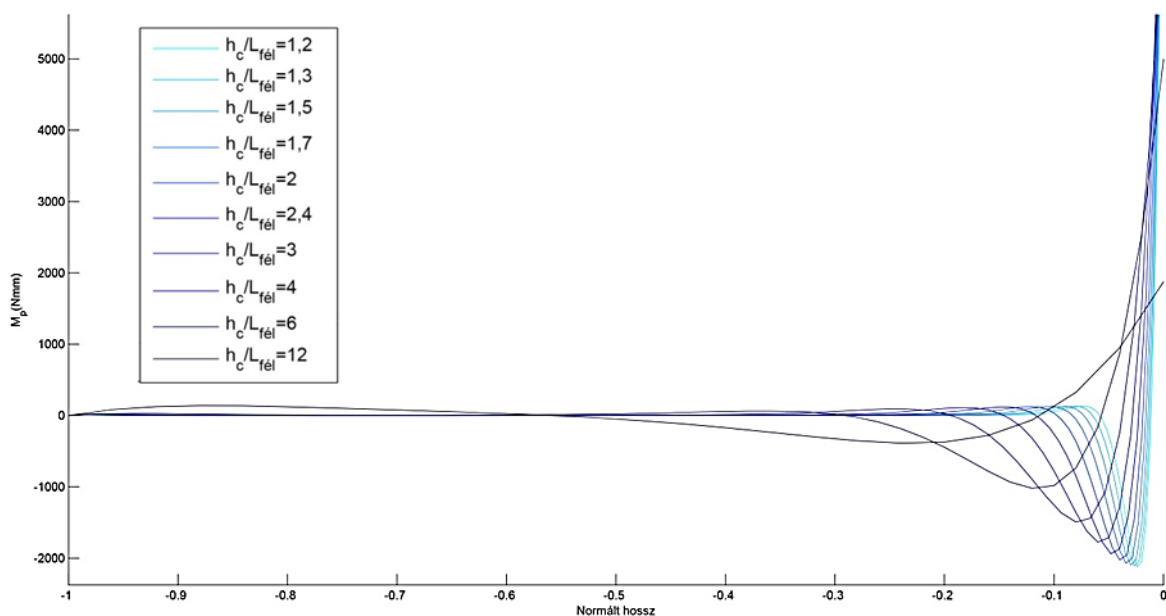
6. ábra
Nyírófeszültség fahevederrel erősített vasbeton rúd esetén, hosszváltoztatás során



7. ábra
Nyírófeszültség acéllemezzel erősített vasbeton rúd esetén, hosszváltoztatás során

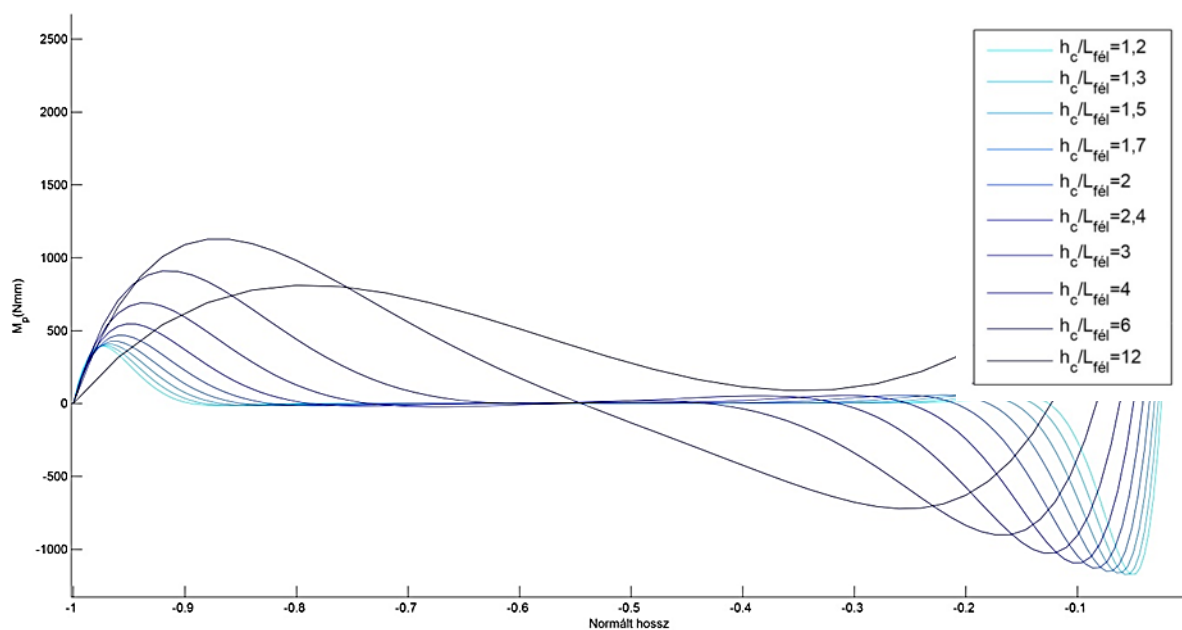
Falemez esetében a feszültségek a toldás környezete felé torlódnak, és a ragasztás másik végétől vett viszonylag hosszú szakaszon szinte nulla az értéke. Ez nem igaz sem az acél sem a kompozit lemez esetében, ahol már a ragasztás kezdetétől „működik” a ragasztott erősítés, még hozzá a lemez szélénél egy hirtelen ugrással kezdődik. Ábra 6. és 7. (a könnyebb szemléltetés céljából a nyírófeszültség grafikonjait abszolút értékeivel a vízszintes tengelyre tükrözve rajzoltuk ki.) Ennek magyarázata a nyomaték ábrákban gyökerezik (8. 9. ábra), ahol a fa lemezerősítéssel szemben a kompozit és az acél anyagnál egy viszonylag nagy nyomatéki

maximum keletkezik, amely után lesz csak zérus az érték, mint a falemezekben a ragasztás környezetében, ahol egy nagyobb nyomaték jelenik meg.



8. ábra

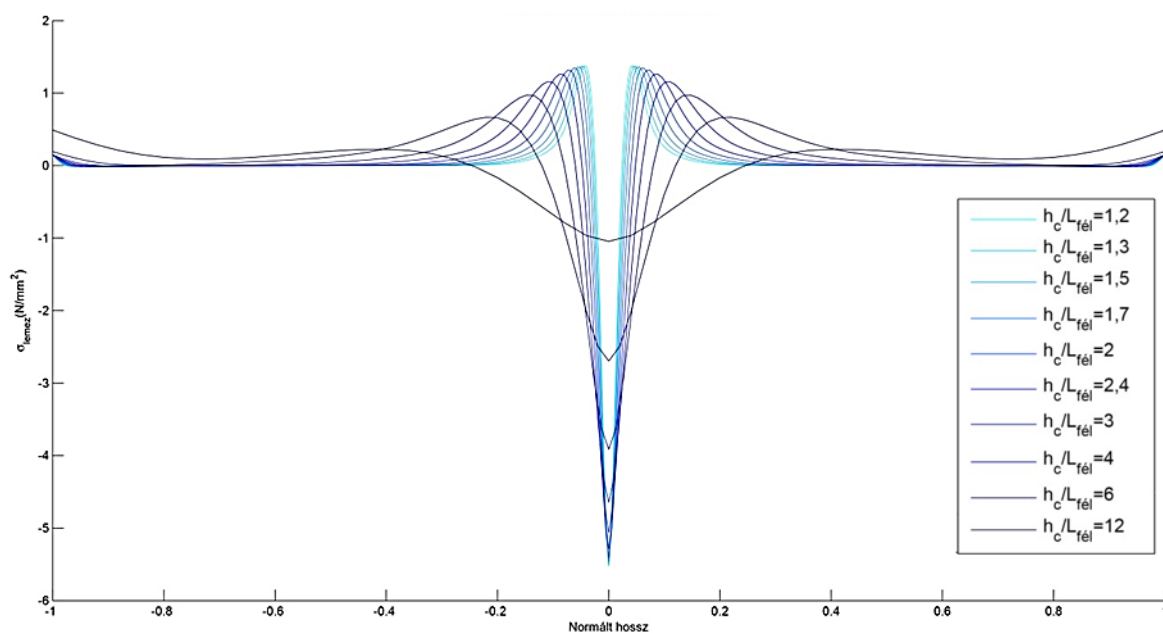
Nyomatéki ábra a fahevederrel megerősített vasbeton rúd esetén, a hosszváltoztatásnál



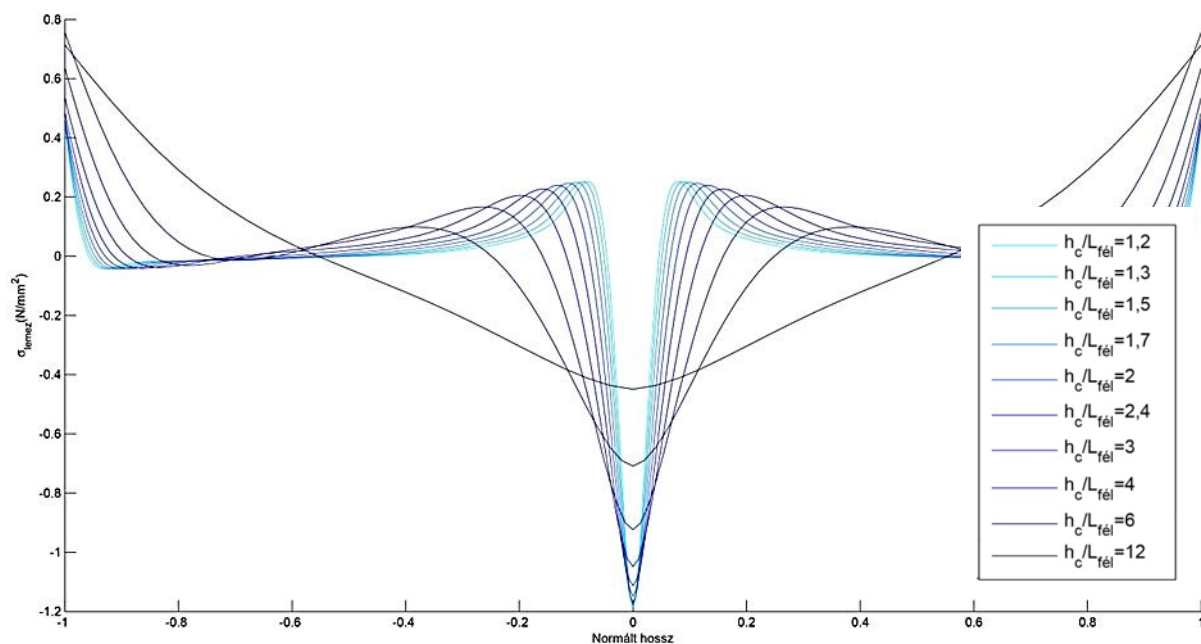
9. ábra

Nyomatéki ábra a fahevederrel megerősített vasbeton rúd esetén, a hosszváltoztatásnál

A feszültségek eloszlása azért is érdekes, mert látszólag az azonos hosszúságú kapcsolatokhoz tartozó különböző anyagok toldásánál jelenlevő, nyírófeszültségek ugyanakkorák. Az eddigiek alapján azt feltételezhetjük, hogy a lemez viselkedését a ragasztás hosszán belül három részre bonthatjuk. Ehhez vizsgáljuk meg lokálisan a toldás, a lemezvég és a kettő közötti szakaszt! A lemez végénél a ragasztás felületére merőleges normál feszültség kap meghatározó szerepet (10-11 ábra).

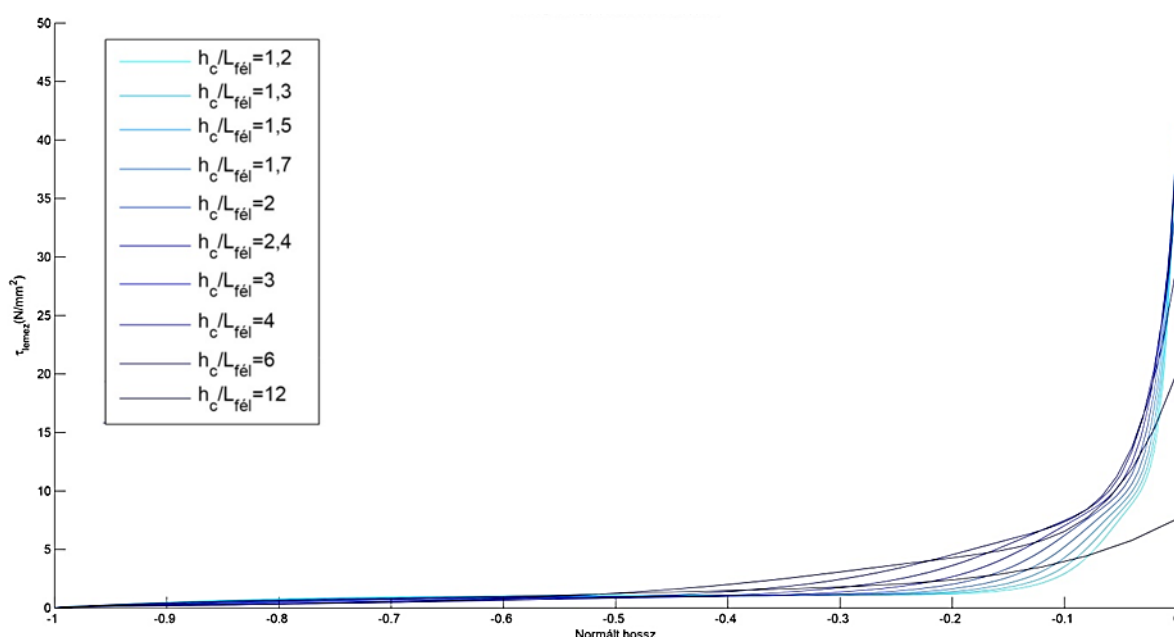


10. ábra
Hámozó feszültség fahevederrel ellátott és acélrúddal erősített farúdnál, hosszváltoztatásnál

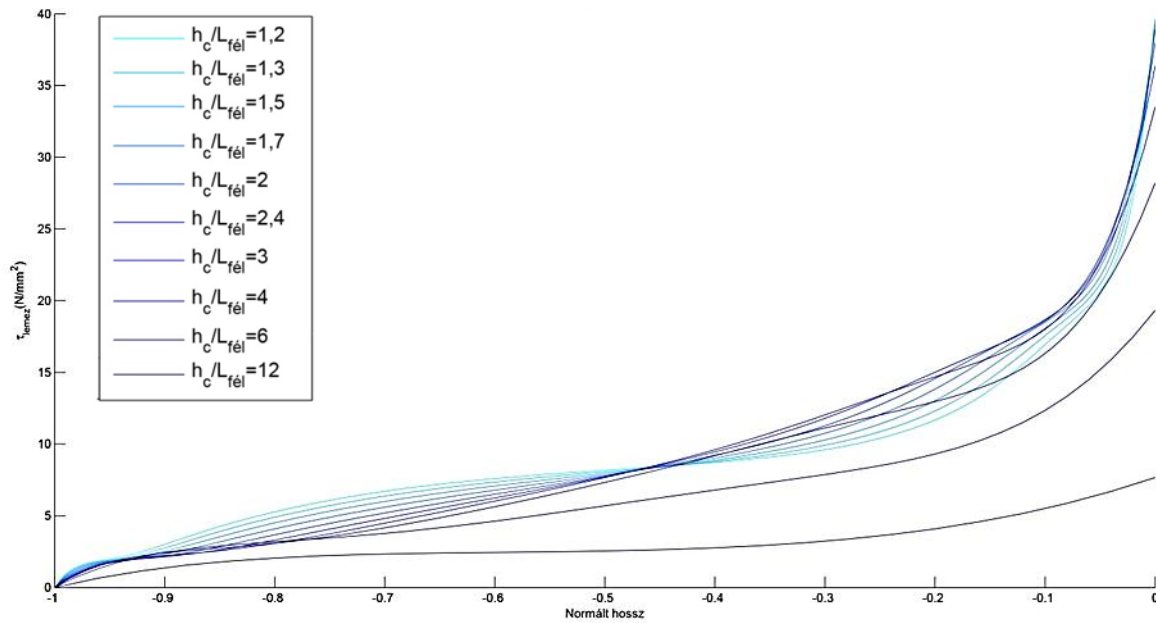


11. ábra
Hámozó feszültség kompozit lemezzel ellátott és acélrúddal erősített farúdnál, hosszváltoztatásnál

Ha megnézzük, lemezanyagtól függetlenül, egy viszonylag nagy pozitív értéket kapunk. Ennek magyarázata a következő: a ragasztás egy kiválasztott pontjában a ragasztási síkban keletkező nyírófeszültség miatt a felületre merőleges feszültségek is keletkeznek (nyírófeszültségek dualitás tétele). Ezért a normál feszültségek miatt jön létre hajlítás és nyírás a lemezben, amely a lemezvégeknél annak lehámozódását okozza (a pozitív hámozó feszültség.) Ez a magyarázat az absztraktom elején leírt celux-szal elvégzett kísérletre. Ahol, ha meg húzzuk a ragasztószalagot a ragasztási vég elkezd felemelkedni és leválni az asztalról. A ragasztási hossz nagyságának változása alapvetően a közbülső vizsgálati szakaszban mutatkozik meg leginkább. Az összes lemeznél elmondhatjuk, hogy egy bizonyos hosszcsökkenésig a keletkező nyírófeszültségek növekednek, viszont egy adott ponton hirtelen esés figyelhető meg. A jelenséget tovább bonyolítja, hogy acél és kompozit anyag esetén a középső szakasz két részre bomlik. Egy részén a ragasztás csökkenésével nő, más részén pedig csökken a nyírófeszültség. (12-14. ábrák) (Ez a jelenség főleg fa rudak toldásakor készült szerkezeteknél jelentkezik).

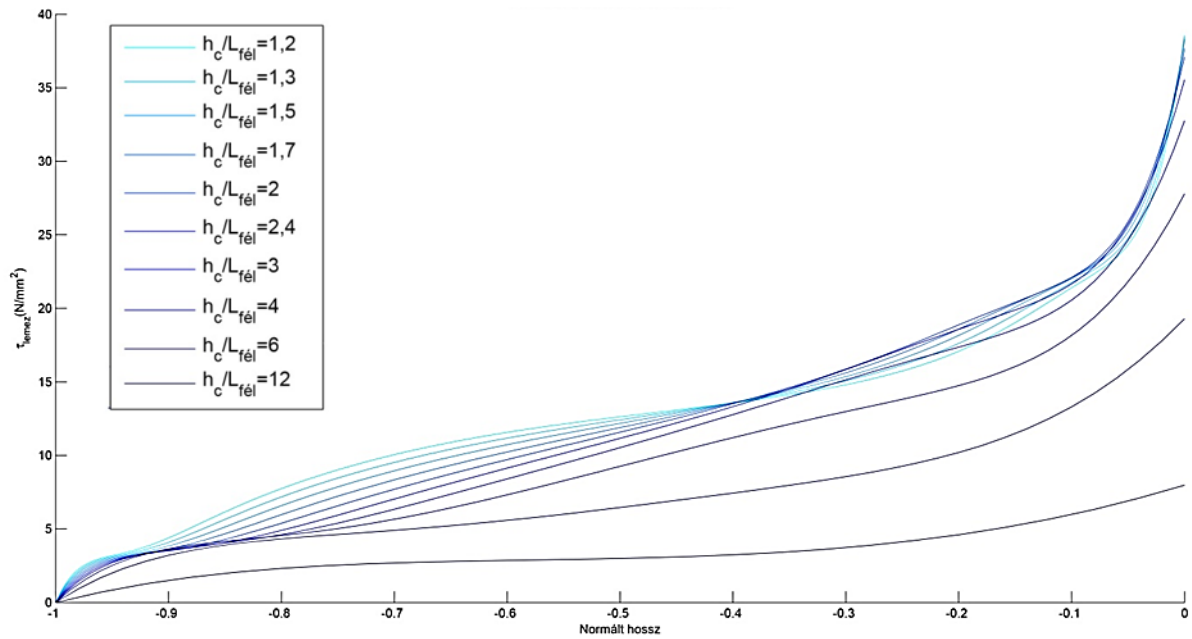


12. ábra
Nyírófeszültség fa hevederrel ellátott és acélrúddal erősített farúdnál, hosszváltoztatáskor



13. ábra

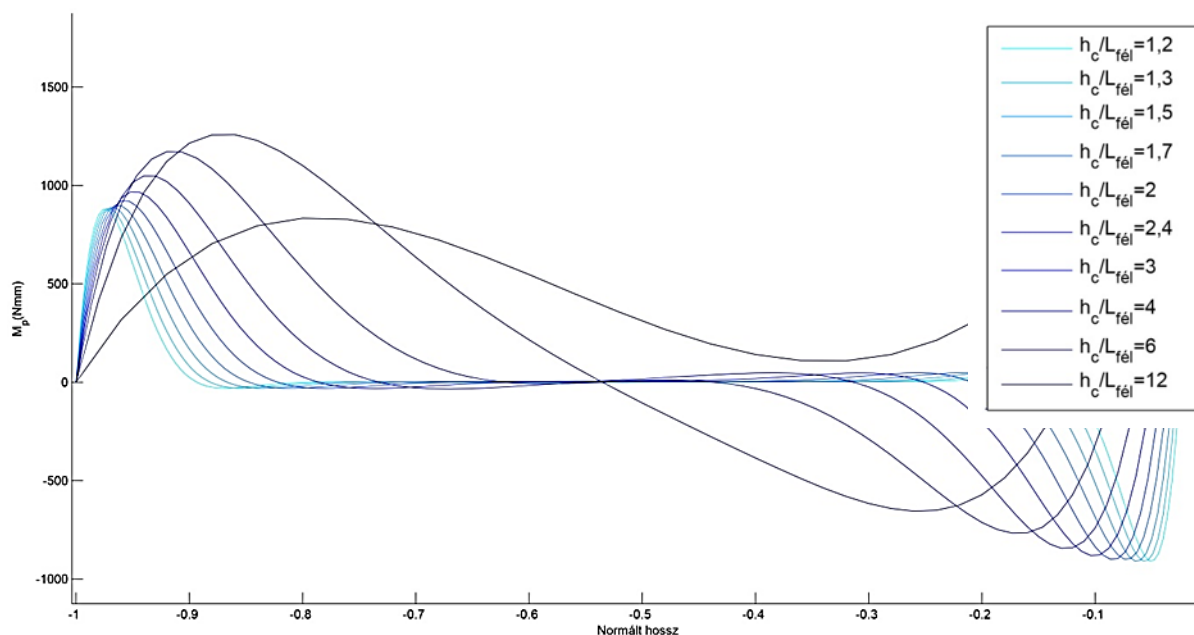
Nyírófeszültség kompozit lemezzel és acélrúddal erősített farudak toldásánál, a hossz változtatásakor



14. ábra

Nyírófeszültség acéllemezzel és acélrúddal erősített farudak toldásánál, a hossz változtatásakor

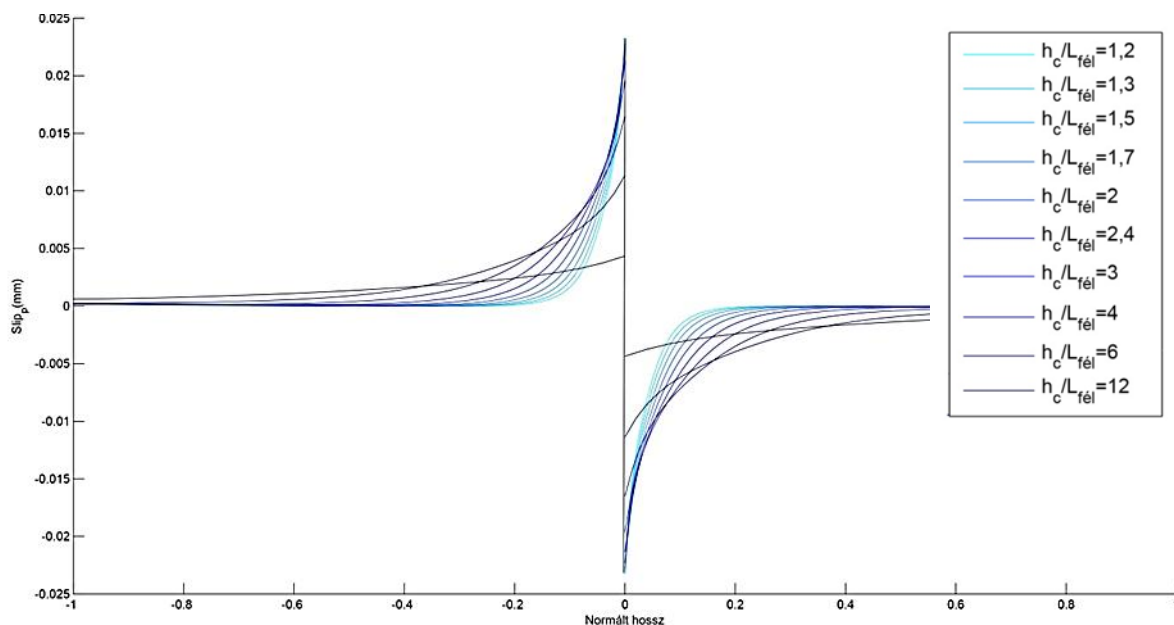
Ennek oka megint a nyomatéki függvényben keresendő, ahol látszik, a rúd közbelső szakaszán inflexiós pont található. Így míg az egyik szakaszon a feszültséget növeli, másik szakaszon csökkenti a nyomatékból kialakuló igénybevétel. (Jól szemlélteti ez a 15. ábra).



15. ábra

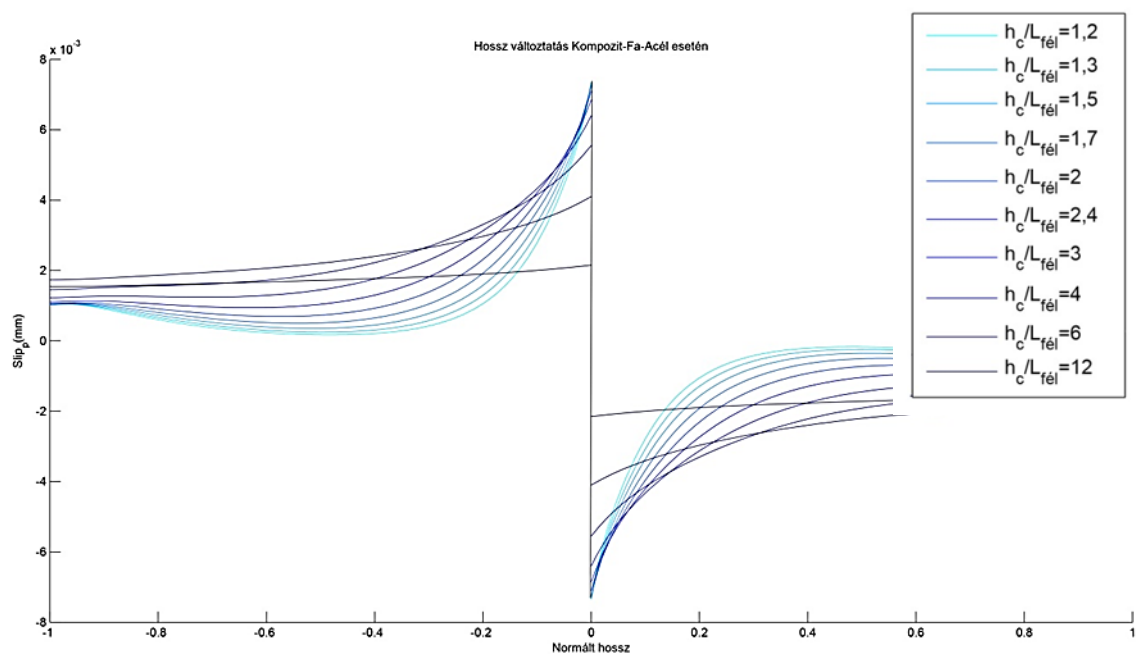
Nyomatéki ábra acéllemezzel és acélrúddal erősített farudak toldásánál, a hossz változtatásakor

A toldás környezetében a ragasztási hossz 10%-án (50-30 mm) játszódnak le még érdekes jelenségek. A nyírófeszültség meredeksége drasztikusan megnő mindegyik megerősítésnél (12-14. ábra), ami azt takarja, hogy a ragasztás (anyagtól függően) az összes feszültségemelkedés 40-70%-át itt veszi fel. A fa esetében a legrosszabb ez az érték, míg az acélnál a legjobb. E mögött az állhat, ha megnézzük, a lemezek megnyúlásait, a fa nagyságrendekkel nagyobb elmozdulást produkál (jóval kisebb merevségű anyag) mint a két választott társa (16-18. ábrák). A hámozó feszültség alakjára a következő részben térek ki.

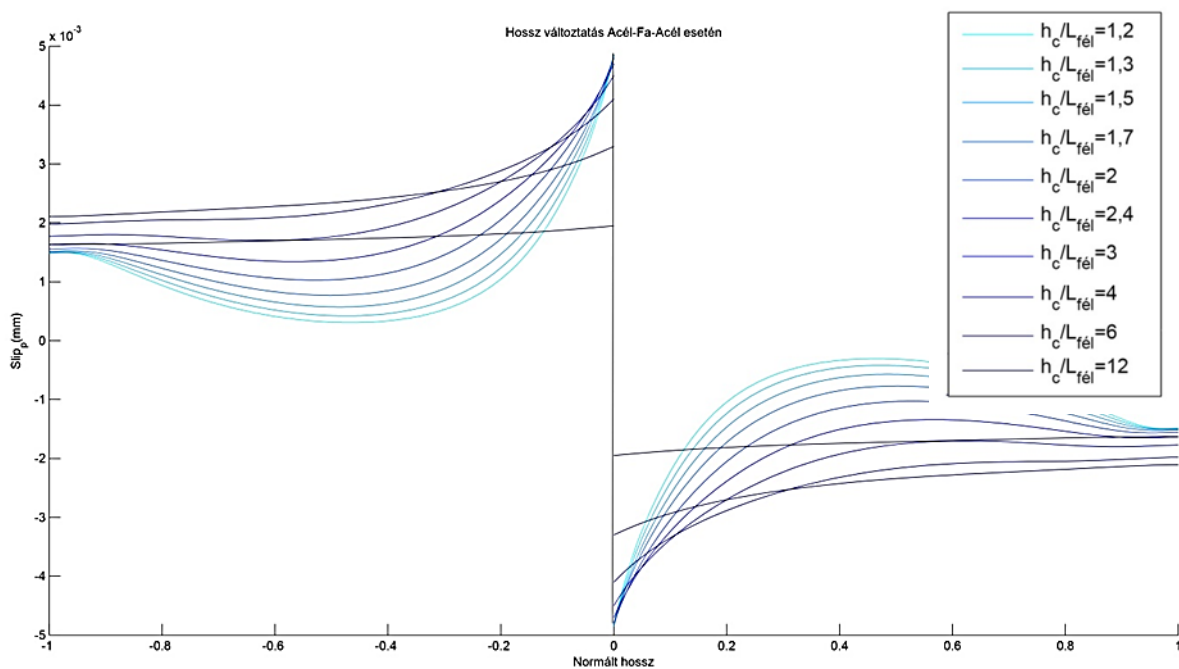


16. ábra

Megnyúlások fahevederrel és acélrúddal erősített fatoldásnál, a hossz változtatásakor



17. ábra
Megnyúlások kompozit lemezzel és acélrúddal erősített fatoldásnál, a hossz változtatásakor

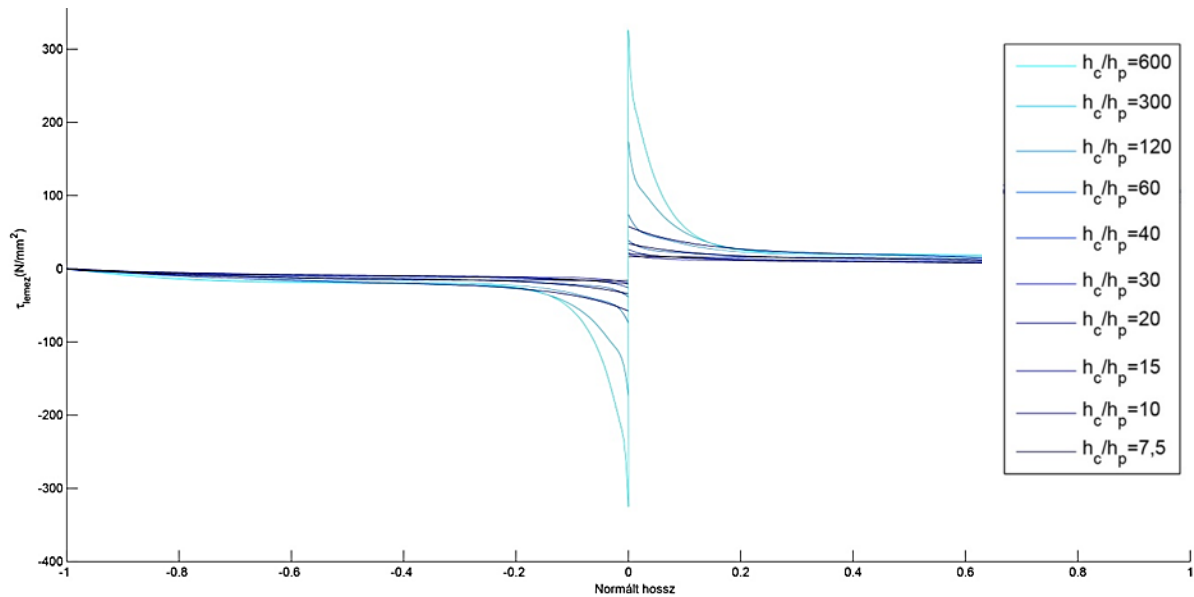


18. ábra
Megnyúlások acéllemezzel és acélrúddal erősített fatoldásnál, a hossz változtatásakor

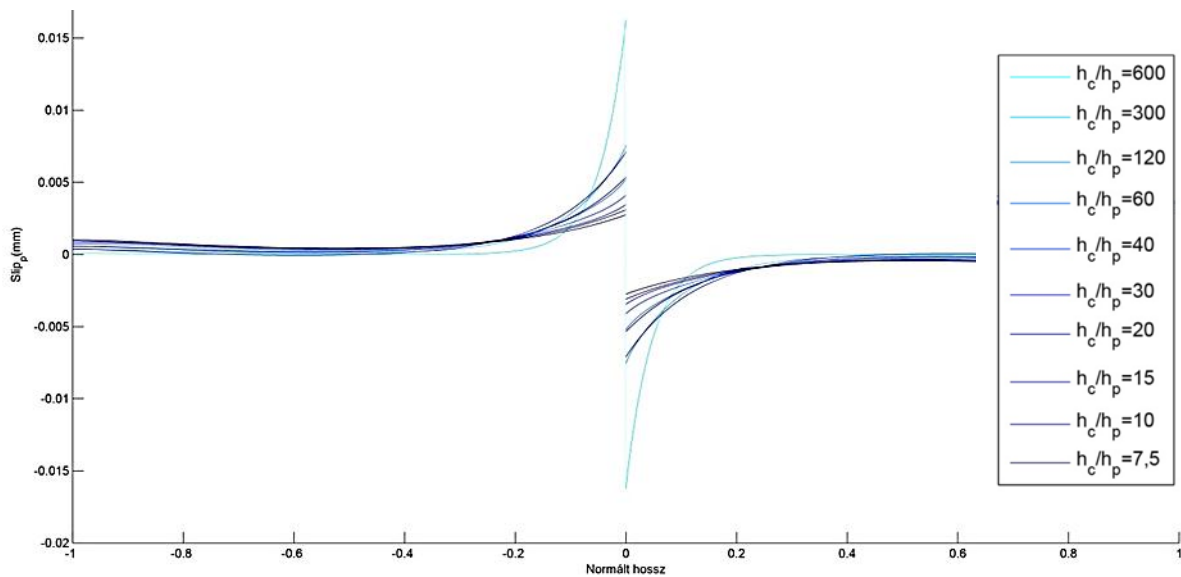
7.4. Lemezvastagság változtatása

A vizsgálat során 0.5, 1, 2.5, 5, 7.5, 10, 15, 20, 30 és 40 mm vastag lemezeket vizsgáltam. Ugyan az acél és a kompozit lemezeket főleg a kisebb (anyagtakarékoság) míg a fákat inkább a nagyobb tartományban alkalmazzuk, az összehasonlíthatóság miatt nem tettem ilyen szempontból különbséget. A vastagság változtatásának célja az, hogy a már látott

igénybevételeket nemcsak a hosszról függően, de az anyag keresztmetszeti tulajdonságainak figyelembevételével is megpróbáljuk optimalizálni. Továbbra is az igénybevételeket a nyíró feszültség fogja közvetíteni, míg a normál feszültség csak egy következmény lesz. Ugyanakkor láthatjuk majd, a vastagság változtatásával épp az utóbbi feszültség típus függ leginkább változni. $\frac{dN_p}{dx} = -b_p \tau_p = b_p k_{pu} s_p = K_{pu} s_p$ összefüggést átrendezve láthatjuk, hogy ha s_p csökkenésével a nyírófeszültség is csökkeni fog. Ezt a grafikonokon szemléltetve (19-20 ábra).

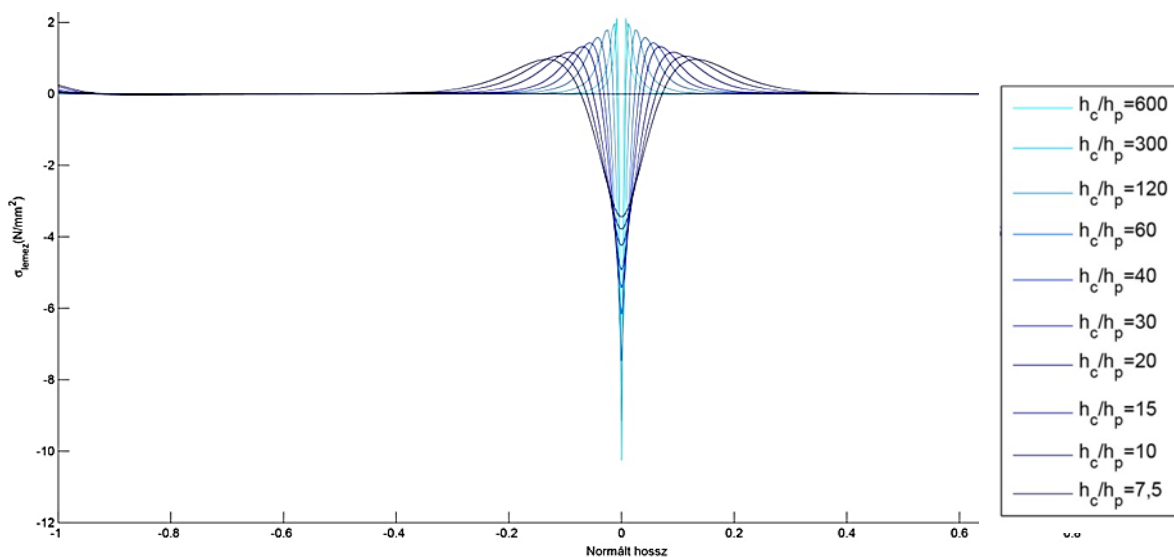


19. ábra
Nyírófeszültség acéllemezrel erősített vasbetonrúdban, lemezvastagság változtatásakor



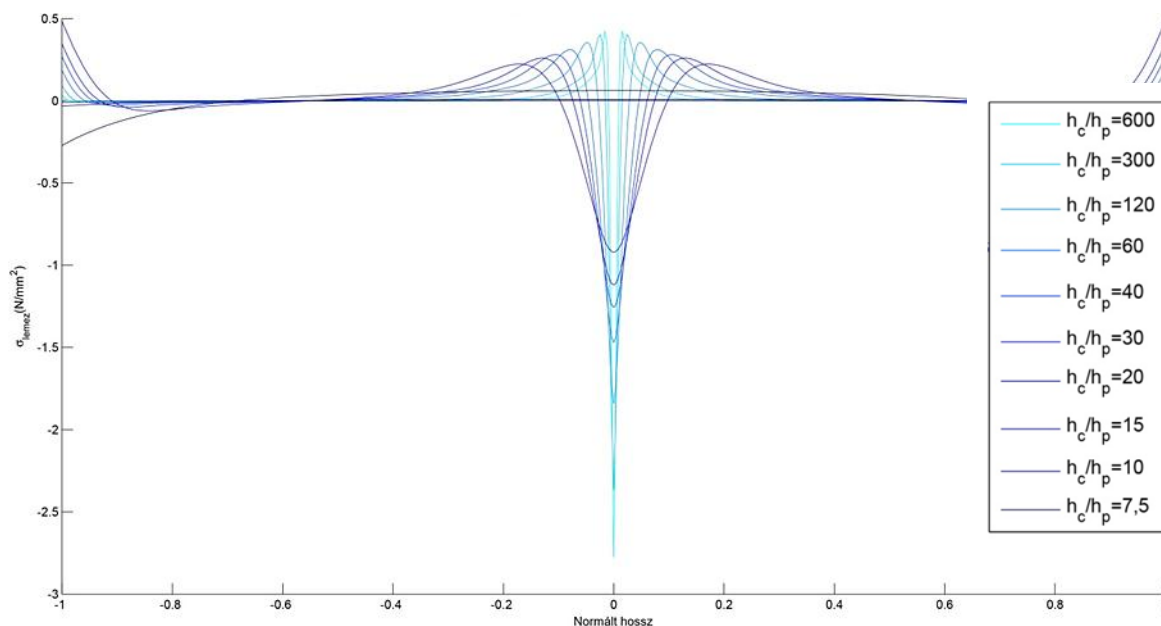
20. ábra
A lemez megcsúszása acéllemezrel erősített vasbetonrúdban, a lemezvastagság változtatásakor

A normálfeszültség ábrák: (21-22.). Érdekes képet kapunk minden esetben a toldás környezetében, ahol egy ideig a pozitív és növekvő normálfeszültség egy adott pontban a ragasztásnál hirtelen zuhan egyet, és ezzel együtt ellentétes irányú lesz. Fizikailag ezt úgy értelmezhetjük, hogy ugyan megjelenik, a környéken a lemezvégénél látott lehámozódást előidéző feszültség, de a toldás fölötti negatív feszültség érték már pont rányomja majd a lemezt a toldott (berepedt) anyagra. Ez a jelenség igen vékony 0.5-2.5 mm –es intervallumon a ragasztási hossz 20%-án játszódik le, viszont tovább növekedve a görbék kezdenek ellaposodni, hiszen a vastagság növekedésével nő az inercia. Tehát, minél vastagabb az anyag, annál ellenállóbbá válik a keresztirányú elmozdulásokra!



21. ábra

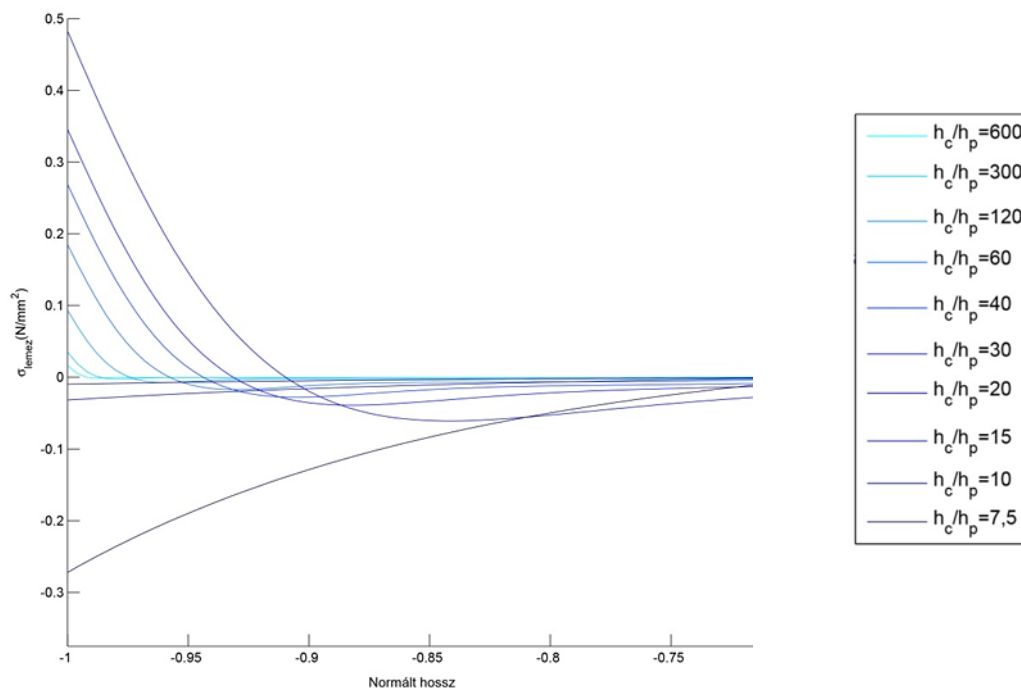
Hámozó feszültség fahevederrel erősített vasbeton szerkezetben, a lemezvastagság változtatása során



22. ábra

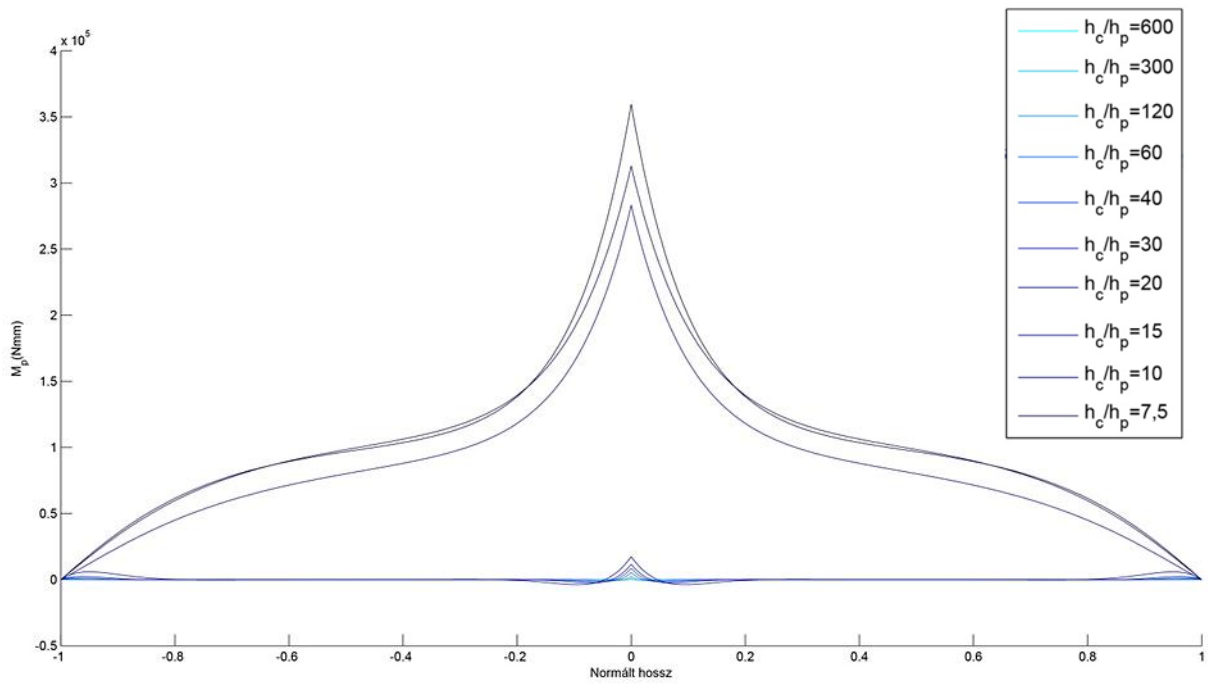
Hámozó feszültség acéllemezrel erősített vasbeton szerkezetben, a lemezvastagság változtatásakor

Azt is megfigyelhetjük, hogy az egyes vastagságok, de különböző anyagi tulajdonságú lemezek feszültségének minimuma milyen viszonyban van egymással. Láthatjuk, hogy tízszer, hússzor nagyobb merevségű anyag esetén a keletkező feszültségek közel 3,5-szer; 6-szor kisebbek lesznek.

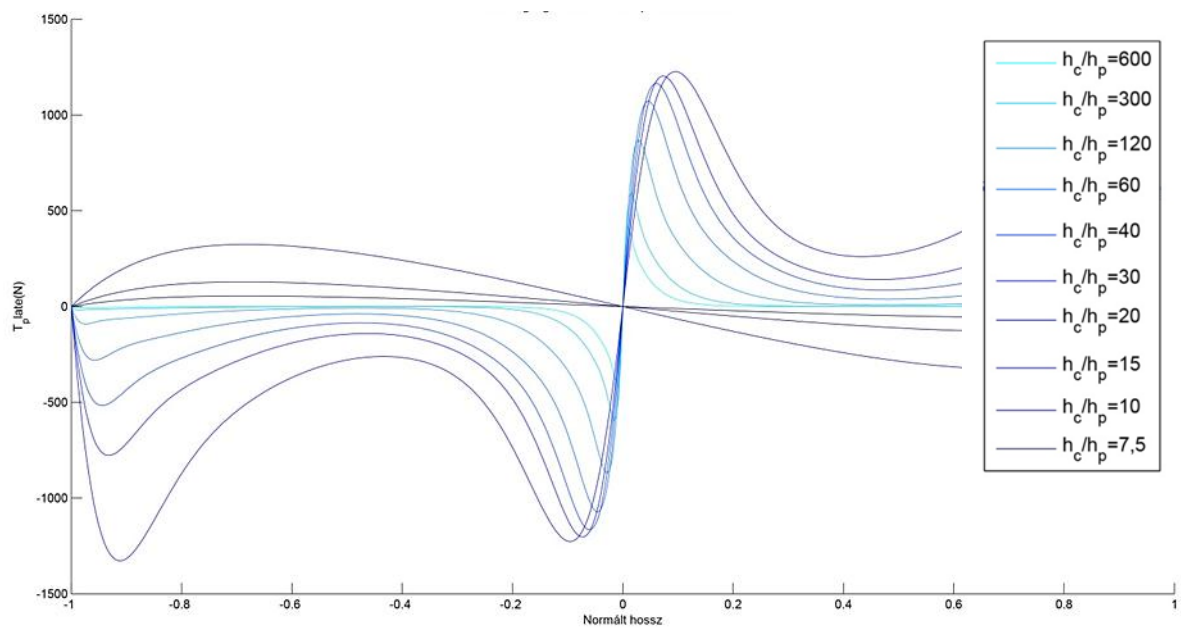


23. ábra
Kompozit lemezzel erősített betonrúd végén fellépő hámozó feszültségek

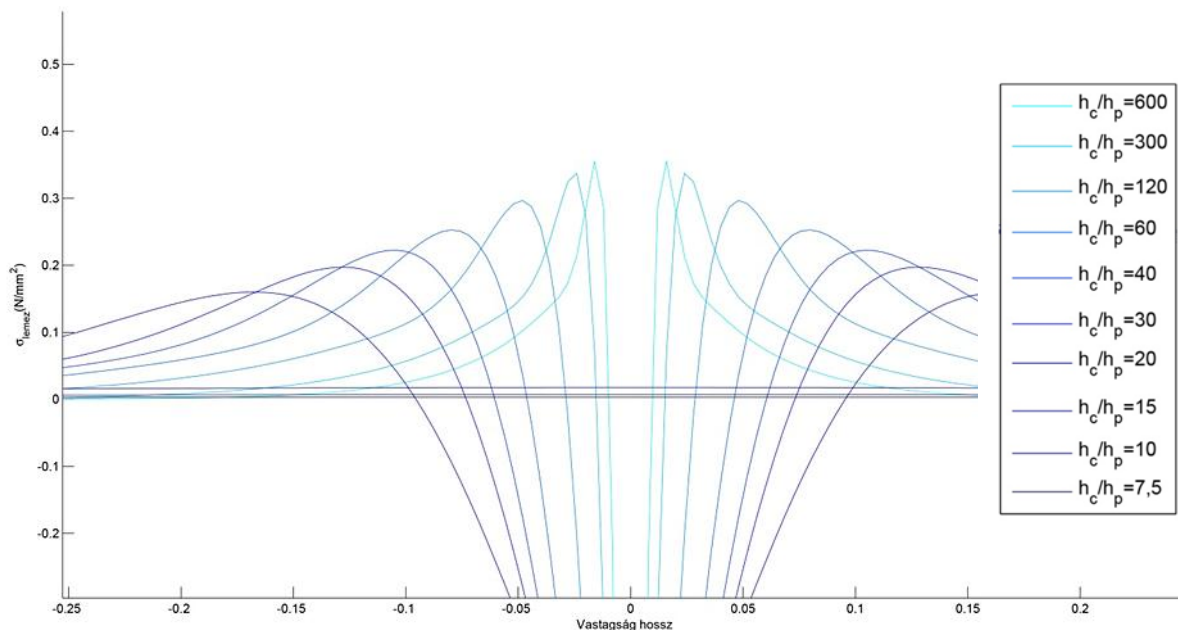
A lemez másik végén azt tapasztaljuk, hogy a vastagság növekedésével nő a hámozó feszültség (23. ábra). Erre a jelenségre megfelelő fizikai magyarázatot még nem találtam, mivel inkább épp a csökkenést feltételeztem volna. Végül a 20mm-nél vastag lemez esetében a grafikonok lefutása számottevően megváltozik. Eltűnik a toldás helyén a normálfeszültség ugrása, továbbá a hámozó feszültség előjelet vált. Ez az átalakulás megfigyelhető mind a nyomaték (óriási növekedés) mind a nyíróerő ábrákon (a nyíróerő is előjelet vált a szokásoshoz képest). Azt feltételeztem, hogy egy adott vastagságnál átvenné a betonacél szerepét, de erre egyértelmű bizonyítékot nem találtam (24-26. ábra sötét értékei).



24. ábra
Nyomaték ábra kompozit lemez erősítésű farúd toldása esetén



25. ábra
Nyíróerő ábra kompozit lemez erősítésű farúd toldása esetén



26. ábra
Hámozó feszültség ábra kompozit lemezzel erősített fa kapcsolat esetén

7.5. Ragasztás típusának változtatása

Alapvetően a szerkezet viselkedését nemcsak a geometriai tulajdonságok, hanem a ragasztás típusa határozza meg. Mivel a ragasztóanyag az, ami a kötést, azaz a kapcsolatot létrehozza, szükségesnek találtam megvizsgálni a szerkezet működését különféle ragasztóanyagokkal. Ezen anyagok esetében fontos volt a húzási és a nyírási rugalmassági modulus értéke, amelyekből tovább következtetni lehetett a felületek kapcsolati tulajdonságaira. A ragasztás során minden esetben azt feltételeztem, hogy nagyjából 0.5mm vastag a ragasztó és 0.2 mm vastagságban tölti ki a mag anyagát. Ekkor a $k_{pu} = \frac{1}{\frac{h_g}{G_g} + \frac{h_m}{G_m}}$,

$k_{pv} = \frac{1}{\frac{h_g}{E_g} + \frac{h_m}{E_m}}$, ahol h_g és h_m az előbb említett vastagságok, míg E_g, G_g, E_h, G_h pedig a Young és a nyíró modulusa az anyagoknak. A ragasztó anyagok ezen értékeit [9][10][11][12]-ből nyertem ki, és a következő ragasztókat választottam ki:

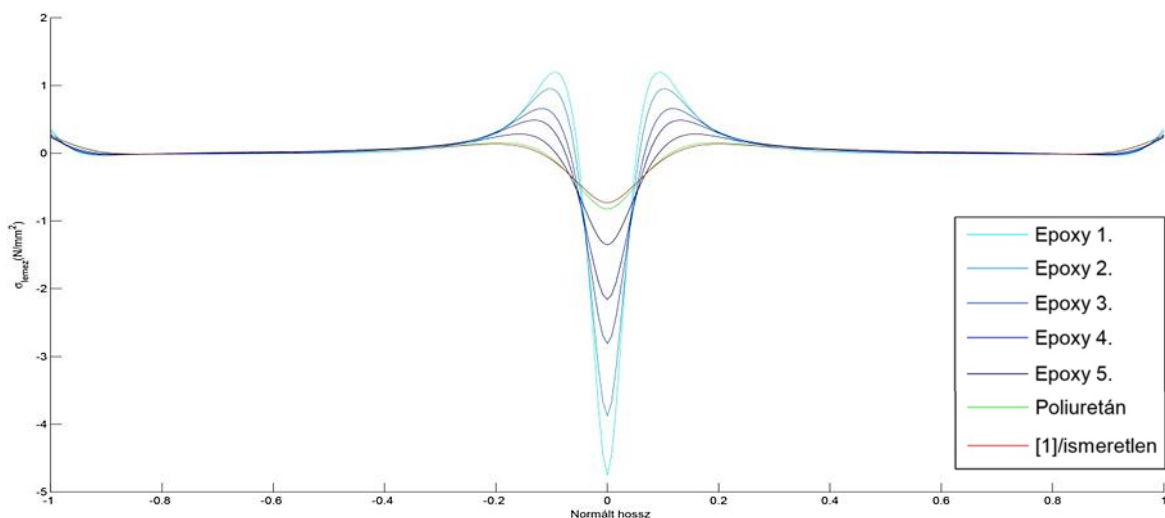
	E_g	G_g	Poisson tényező	jel
Epoxy 1.	7000	2600	2,6	Kék -
Epoxy 2.	5000	1900	1,9	Kék --
Epoxy 3.	3000	1100	1,1	Kék -.
Epoxy 4.	2000	7000	0,7	Kék ..
Epoxy 5.	1000	370	0,35	Kék
Poliuretán	500	200	0,2	zöld
Alapforrás	406	156	0.3	piros

5. táblázat

Ragasztó anyagok

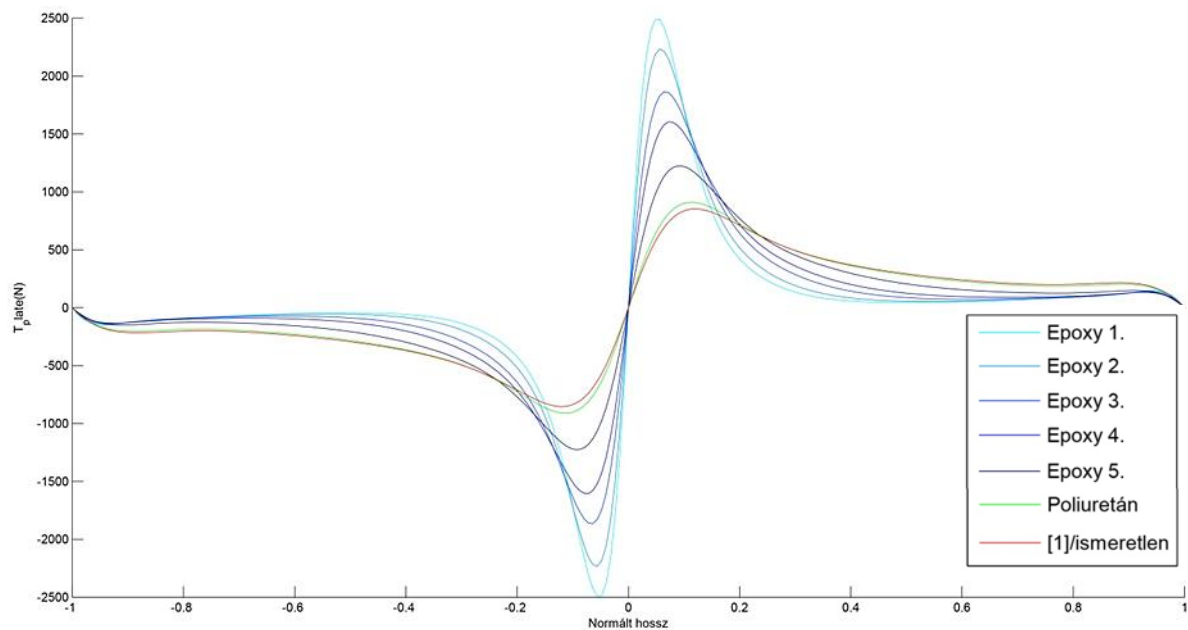
Fontos kijelenteni, hogy alapvetően az epoxy típusú ragasztót használhatjuk mindezen anyagok kapcsolatához. De jelenleg, a ragasztás során a ragasztóanyagokban bekövetkező változásokra vagyunk kíváncsiak, így előbbi tényezőtől eltekintünk.

Ezek ismeretében csökkenő értékekben vizsgáltam a programból megkapható normál- és nyírófeszültség és nyíróerő és nyomaték grafikonokat. Jogosan várjuk el azt, hogy minél puhább egy ragasztó annál kevésbé fog feszültségeket, erőket felvenni a lemez. Ez az elvárás teljesül véleményem szerint, hiszen ha végignézzük az ábrákat a hámozást előidéző feszültségek, nyomaték és nyíróerő ábrák mind ellaposodnak, a nullához simulnak, azaz gyakorlatilag „eltűnnek” a szerkezetből a kapcsolatok a toldás helyén.(27-29. ábrák)



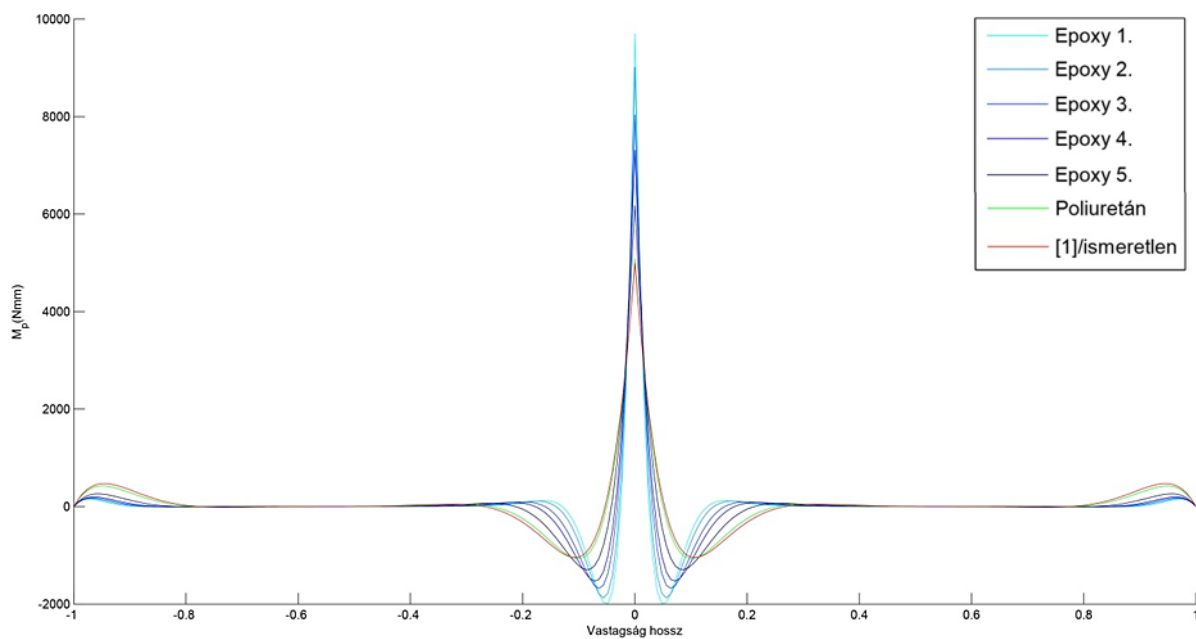
27. ábra

Normálfeszültség ábra kompozit lemezerősítéssel ellátott vasbeton rúdban, ragasztóanyag vizsgálatakor



28. ábra

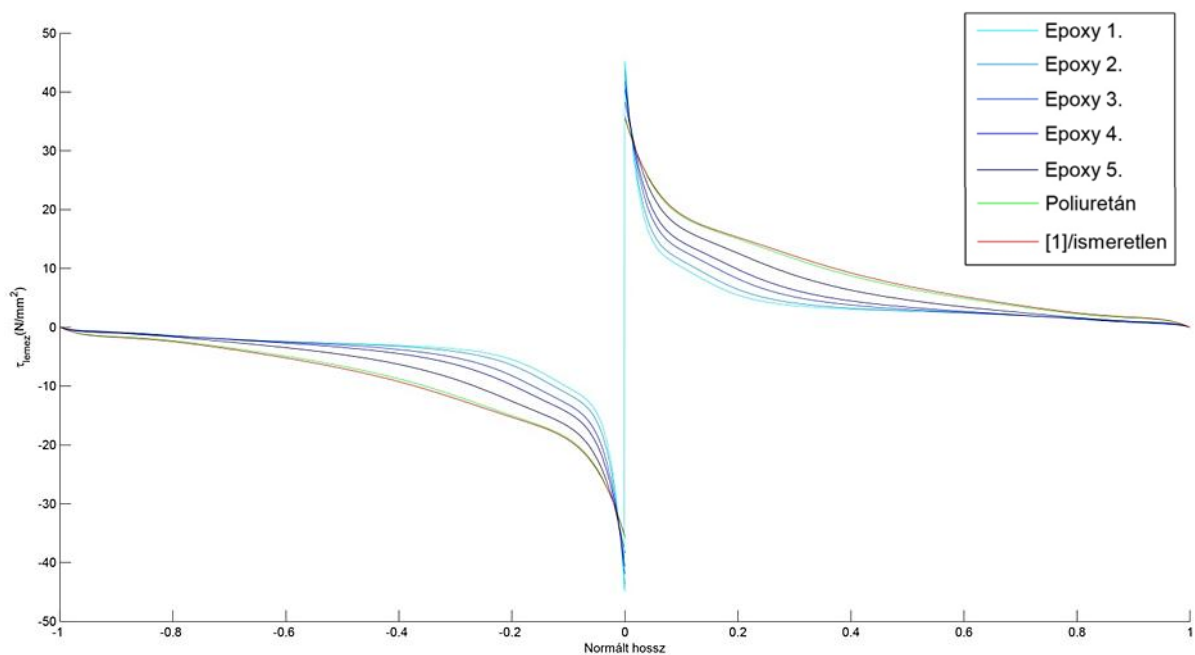
Nyíróerő ábra kompozit lemezerősítéssel ellátott vasbeton rúdban, ragasztóanyag vizsgálatokor



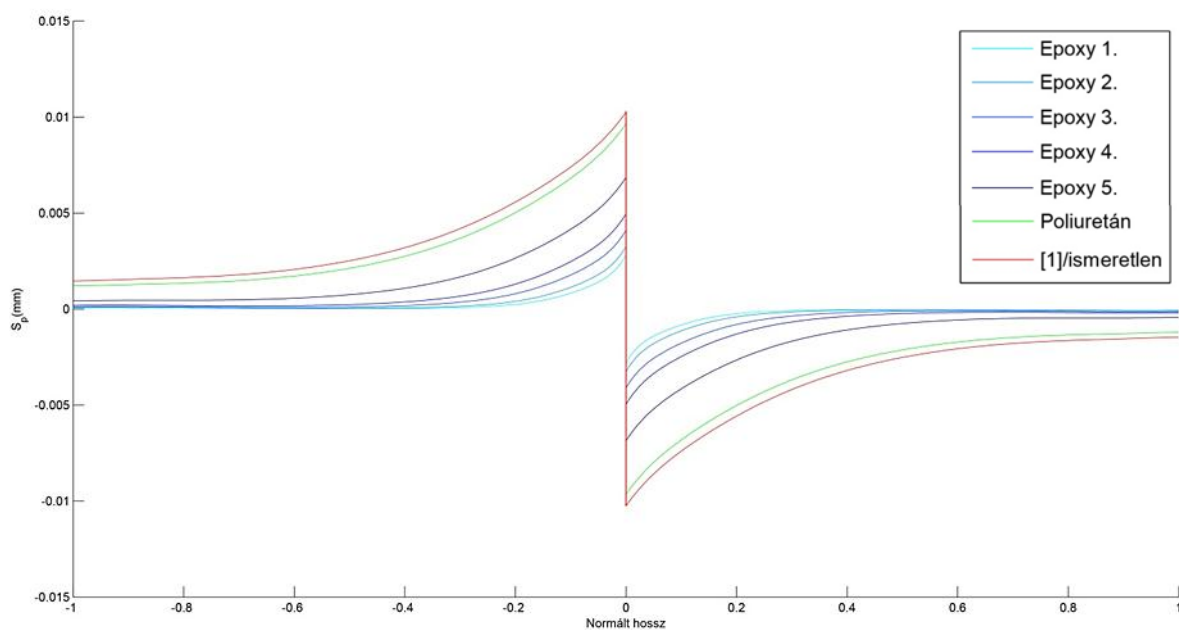
29. ábra

Nyomaték ábra kompozit lemezerősítéssel ellátott vasbeton rúdban, ragasztóanyag vizsgálatokor

A nyírófeszültségek esetében nem igaz a feltevésünk, hogy ott a ragasztási hossz nagy hányadában növekszik a feszültség értéke. Ez egyértelmű, hisz a puhább ragasztó megnyúlása lesz, amiktől függ a feszültség. (30,31. ábra)

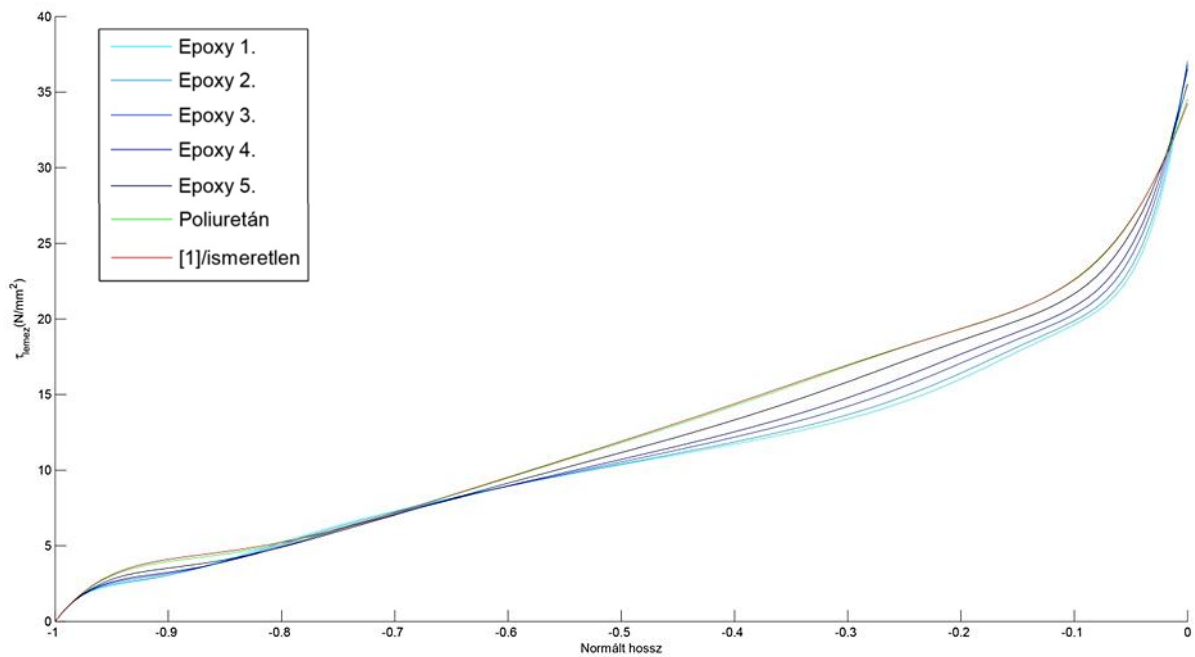


30. ábra
Nyírófeszültségek kompozit lemezerősítéssel ellátott vasbeton rúdban, ragasztóanyag vizsgálata

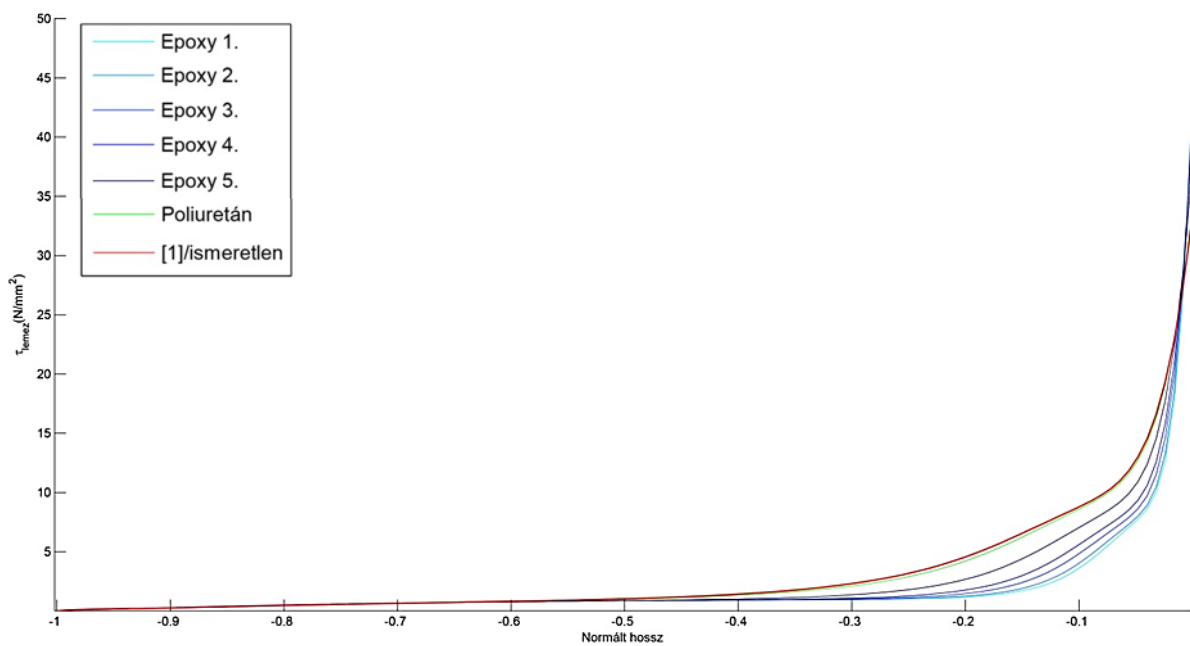


31. ábra
Lemez megcsúszása kompozit lemezerősítéssel ellátott vasbeton rúdban, ragasztóanyag vizsgálata

A lemez hosszának változtatásához hasonlóan, a lemez és a mag közötti nyíró feszültség eloszlása függ, hogy milyen anyagú lemezt használunk. A fa esetében a legmerevebb ragasztónál a hossz 10%-án veszi fel a maximális feszültség legnagyobb hányadát, míg a kompozit és acél esetében ez a szám a 100%-ot, azaz a teljes hosszt takarja.



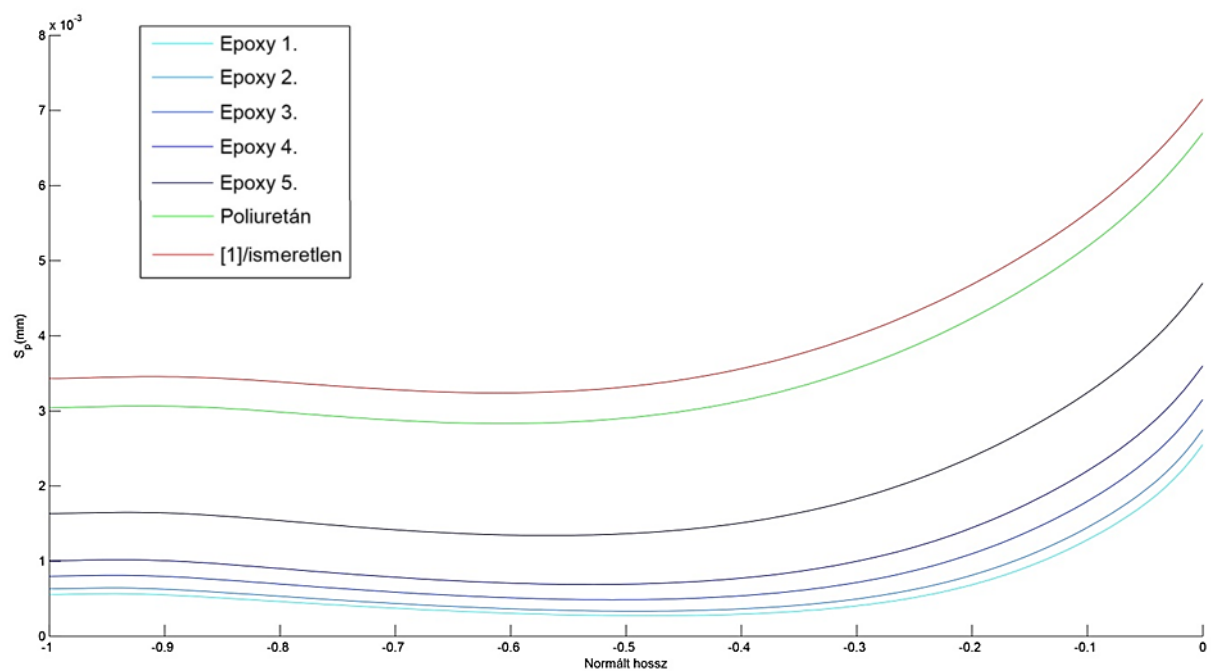
32. ábra
Nyírófeszültség ábra acéllemezzel erősített fatoldás esetén, ragasztóanyag vizsgálat



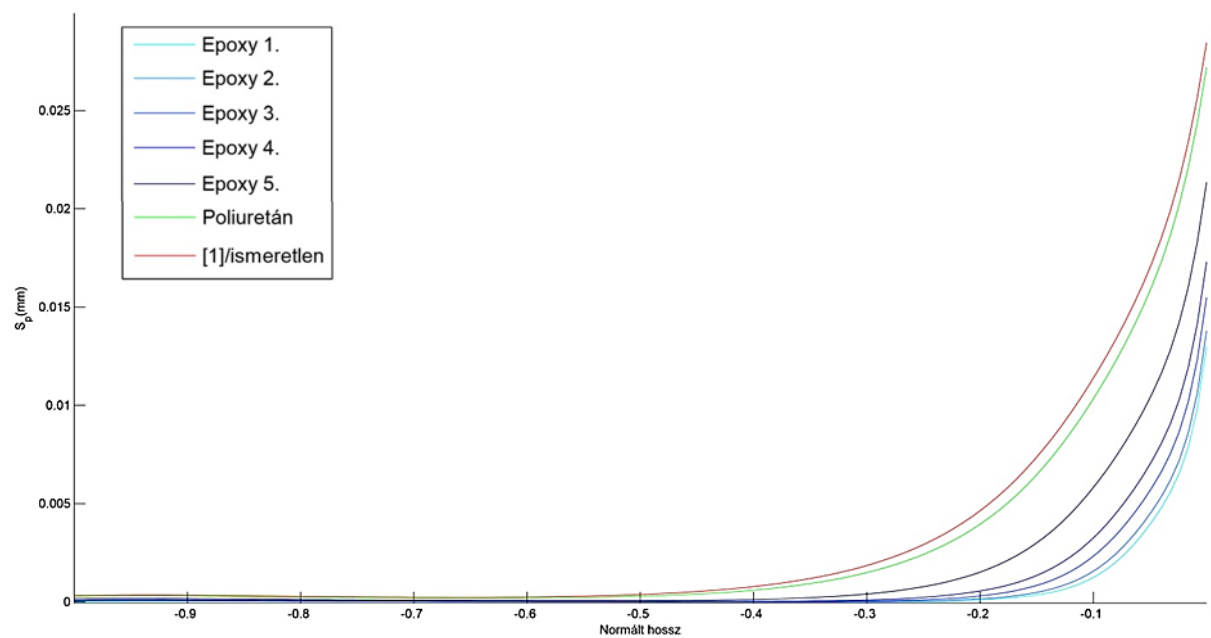
33. ábra
Nyírófeszültség ábra fahevederrel erősített fa toldás esetén, ragasztó összehasonlítás

Ez a különbség egyértelműen meg is látszik az elmozdulás grafikonokon, ahol a fa esetében a hossz nagy részén szinte nulla, majd a toldás helyén kezdenek elmozdulni a pontok. Ezzel szemben az acél és kompozit estében már a ragasztási végeknél van egy kezdeti megnyúlás. Megjegyezendő, hogy a ragasztó anyag változtatásával az elmozdulás grafikonok

y tengely irányába eltolódnak, és nem egy adott szakaszon szétnyílnak, mint a korábbiak esetében.

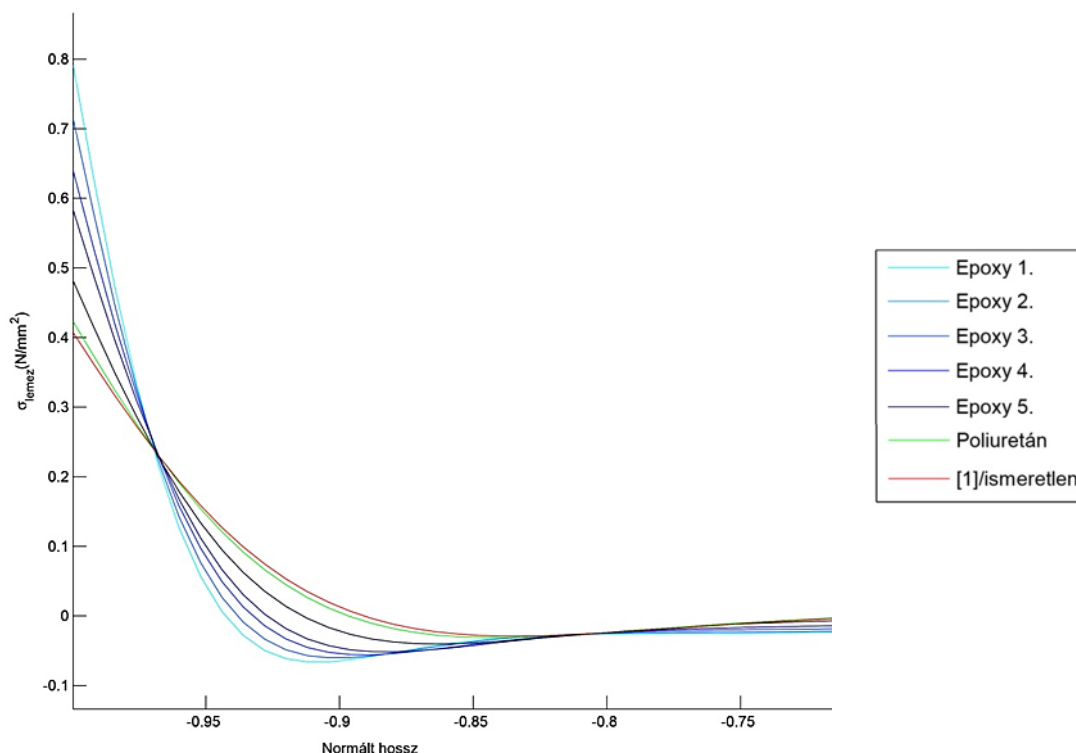


34. ábra
Lemez elmozdulás ábrája acéllemezrel erősített fa toldás esetén, ragasztó vizsgálat



35. ábra
Lemez elmozdulás ábrája fa hevederrel erősített fa toldás esetén, ragasztó vizsgálat

A ragasztó anyag típusának megválasztásával tudjuk kis mértékben ugyan, de a lemez végénél kialakuló hámozó feszültséget csökkenteni. Az elmozdulás grafikonok között a fa lemezerősítés görbe a következő



36. ábra
Normál feszültség változás kompozit lemezzel erősített vasbeton rúdvégén, ragasztó vizsgálat

7.6. Konklúziók

Az előbbiekből egyértelműen látszik, hogy a kompozit és az acél a számunkra leginkább megfelelő megerősítési mód, hiszen viszonylag a ragasztás teljes felületén „munkára” foghatók a fával szemben ahol a teherátadásáért felelős nyírófeszültség egy viszonylag rövid szakaszon játszódik le. Mondhatnánk, hogy ez jobb nekünk (kevesebb anyag) viszont a lemezben nagyságrendekkel nagyobb igénybevételek keletkeznek ekkor, mint az esetleg szükségesen hosszabb társai esetében. Mind a ragasztó mind a vastagságok változtatásával az igénybevételek számunkra kedvezőbbé tételét érhetjük a toldás mentén, ugyanakkor ez általában a lemez végénél történő hámozó feszültség növelésével a kárunkra válhat!

8. Gyakorlati alkalmazási lehetőségek és a kutatás további lehetőségei

Gyakorlati alkalmazása, a már bevezetőben megemlített, ragasztott laminált fatartók esetében meghatározó. Ugyanakkor itt fontos leszögezni, hogy több réteg fa kapcsolatának vizsgálatáról van szó, ami bonyolítja a dolgot. Másik fontos szempont, hogy a manapság egyre nagyobb fesztávú terek lefedését kell kialakítani. Amelynél, vagy nagyobb összetett szerkezeteket, pl. rácsótartót, vagy ha vékonyabb (kisebb) szerkezetet akarunk, akkor toldásokkal kell elérnünk a kívánt távolságot. Ehhez pedig szükséges ismernünk a toldásnál a kapcsolat tulajdonságait. Építészeti vonatkozásban felújításoknál olyan esetek is lehetségesek, amikor nem lehet például egy tetőszerkezet vagy földem rongálódott gerendáját azonnal kicserélni. Ekkor ideiglenes megoldás lehet valamilyen fentebb említett erősítés.

A közeljövőben szeretném kísérletekkel is igazolni a kutatási eredményeimet. Továbbá célom a modell vizsgálati terének kibővítése, és megvizsgálása annak, hogy mi történik egy hajlító igénybevétel alá helyezett erősítéssel ellátott rúdban. Hiszen ennek gyakorlati jelentősége sokkal nagyobb, mint egy speciálisan csak húzás alatt levő rúd esetén. Továbbá hosszabb távon érdekes lenne megvizsgálni a hasonló vasbetonból készült szendvics szerkezetek esetében, hogy a kialakuló repedéseket hogyan módosítják a lemezek?

9. Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni konzulensemnek Dr. Sajtos Istvánnak, szakmai segítségnyújtását és mindenkori biztatását.

10.Függelék:

$$y = \begin{pmatrix} N_p \\ N_s \\ S_p \\ S_s \\ T_p \\ M_p \\ v_p \\ \varphi_p \end{pmatrix} \quad q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{E_c A_c}{N} \\ -\frac{E_c A_c}{N} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k_{pu} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{E_p A_p} + \frac{2}{E_c A_c} & \frac{1}{E_c A_c} & 0 & 0 & 0 & \frac{h_p}{2E_p I_p} & 0 & 0 \\ \frac{2}{E_c A_c} & \frac{1}{E_s A_s} + \frac{1}{E_c A_c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{pv} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h_p k_{pu}}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{E_p A_p} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

11. Felhasznált irodalom, források:

- [1] D.Ferretti, Marco Savoia: Serviceability behaviour of R/C Tensile members strengthened by FRP plates, Studi e Ricerche (Studies and Researches; Politecnico di Milano)Vol. 21., 2000, pp. 95-123.
- [2]Pierre Engel III. Beam reinforcement techniques:
http://www.constructalia.com/english/renovation_with_steel/iii_beam_reinforcement_techniques#.VE1fk_mG8XV
- [3] Rózsa Pál: Lineáris algebra és alkalmazásai; 2. kiadás; Műszaki könyvkiadó, Budapest 1976, 422-427. oldal
- [4] Serény György, Segédanyagok, tematikák és Zh-k villamosmérnököknek A3, Segédanyag: Laplace transzformáció és lineáris differenciálegyenlet rendszerek, Differenciálegyenlet-rendszerek megoldása pdf dokumentum. Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Algebra tanszék
<http://www.math.bme.hu/~sereny/LAPLACE/rendszer.pdf>
- [5] Dr. Dulácska Endre: Kisokos statikusoknak: Segédlet tartószerkezetek tervezéséhez,2. Javított kiadás, Artifex kiadó, Budapest, 2013
- [6] Volkersen O.: Die nietkraftverteilung in zugbeanspruchenden nietverbindungen mit Konstanten Laschenquerschnitten,Luftfahrtforschung, Vol 15, 1938, pp 41-47.
- [7] Goland M. and Reissner E.: The stress cemented joints, Journal of Applied Mechanics ASME,1944, pp 41-60
- [8] Hart-Smith,L.J.: Adhesive-bonded double-lap joints. NASA CR-112235. McDonnell Douglas Corporation,California: 1973 január
- [9] J.G. Broughton, A.R. Hutchinson: Adhesive system for structural connections in timber,International Journal of Adhesion & Adhesives Vol. 21.,2001, pp 177-186.
- [10] Eic Serrano: Glued-in rods for timber structures – a 3D model and finite element paramenter studires, Internaional Journal of Adhesion & Adheesives Vol 21.,2001,pp. 115-127.
- [11] Jun Deng, Marcus M.K. Lee, Stuart S.J. Moy: Stress analysis of steel beams reinforced with a bonded CFRP plate, Composite Structures Vol. 65.,2004,pp.205-215.

[12] Pizhong Qiao, Jialai Wang, Julio F. Davalos: Tapered beam on elastic foundation model for compliance rate change of TDCB specimen, Engineering Fracture Mechanics Vol. 70.,2003,pp. 339-353.