

A. függelék

Matematikai háttér

A.1. Lineáris inhomogén differenciálegyenletek

¹ Legyen adott a következő lineáris inhomogén differenciálegyenlet

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t), \quad (\text{A.1})$$

ahol $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b}(t) \in \mathbb{R}^n$ egy folytonos függvény. Felhasználva az állandók variálásának módszerét, a megoldás keresett alakja

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{g}(t), \quad (\text{A.2})$$

ahol $\mathbf{g}(t) \in \mathbb{R}^n$ differenciálható függvény és $e^{\mathbf{A}t}$ a mátrix-exponenciális, mely különböző módszerekkel számítható, például $\mathbf{A}$ sajátvektoraiból képzett transzformációval, Taylor sorfejtéssel, tehát

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k t^k, \quad (\text{A.3})$$

vagy számítható a különböző matematikai szoftverekbe beépített függvények segítségével. Differenciálva (A.2) összefüggést, eredményként adódik

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{g}(t) + e^{\mathbf{A}t}\dot{\mathbf{g}}(t). \quad (\text{A.4})$$

Behelyettesítve (A.1)-be, majd egyszerűsítés után

$$e^{\mathbf{A}t}\dot{\mathbf{g}}(t) = \mathbf{b}(t) \quad (\text{A.5})$$

kifejezhető, amely integrálás után

$$\mathbf{g}(t) = \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{b}(s)ds + \mathbf{K} \quad (\text{A.6})$$

¹[4]-es forrásból átvéve

alakra vezet, továbbá $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^n$ egy konstans vektor. (A.1) megoldása így

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}s} \mathbf{b}(s) ds + e^{\mathbf{A}t} \mathbf{K}, \quad (\text{A.7})$$

és $\mathbf{K}$ meghatározható a kezdeti feltételekből ($\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$), így $\mathbf{K} = e^{\mathbf{A}t_0} \mathbf{x}_0$. Ennek eredményeképpen a végső megoldás

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-s)} \mathbf{b}(s) ds. \quad (\text{A.8})$$

A.2. Elsőrendű szemi-diszkretizáció

A numerikus számítás során, annak érdekében, hogy a számítási idő csökkenjen és a térképek pontossága is javuljon, elsőrendű szemi-diszkretizációs módszer került alkalmazásra nulladrendű közelítés helyett. A módszer, matematikai háttére, bizonyításai és annak részletei megtalálhatók [4]-ben.

Elsőrendű módszer esetén a közelítő $\rho(t-\tau)$ polinom egy időkésést tartalmazó esetben

$$\rho(t-\tau) = \beta_0(t)u(t_{i-r}) + \beta_1(t)u(t_{i-r+1}) \quad (\text{A.9})$$

valamint

$$\beta_0 = \frac{\tau + (i-r+1)h - t}{h}, \quad \beta_1 = \frac{t - (i-r)h - \tau}{h}, \quad (\text{A.10})$$

és $r = \tau/h + 1/2$. A sematikus ábra látható az A.1 ábrán. Ebben az esetben a közelített rendszer állapotter egyenletei

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_s \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_s (\beta_0(t)u(t_{i-r}) + \beta_1(t)u(t_{i-r+1})), \quad t \in [t_i, t_{i+1}] \quad (\text{A.11})$$

$$u(t_i) = \mathbf{C}_s \mathbf{x}(t_i). \quad (\text{A.12})$$

A megoldás egy diszkrét időlépés esetén (hasonlóan a nulladrendű közelítéshez) megadható

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{P} \mathbf{x}_i + \mathbf{R}_0 u_{i-r} + \mathbf{R}_1 u_{i-r+1} \quad (\text{A.13})$$

szerint, ahol

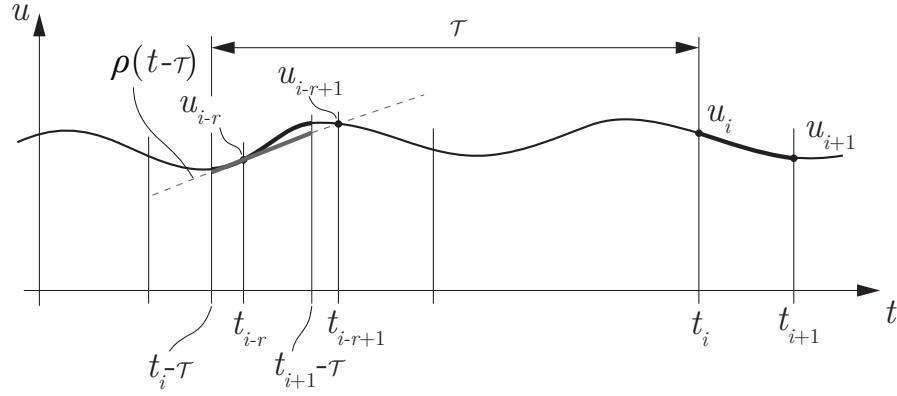
$$\mathbf{P} = e^{\mathbf{A}_s h}, \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbf{R}_0 = \int_0^h \frac{\tau - (r-1)h - s}{h} e^{\mathbf{A}_s(h-s)} ds \mathbf{B}, \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbf{R}_1 = \int_0^h \frac{s - \tau + rh}{h} e^{\mathbf{A}_s(h-s)} ds \mathbf{B}. \quad (\text{A.16})$$

Ha létezik $\mathbf{A}^{-1}$, az integrálás analitikus eredménye

$$\mathbf{R}_0 = \left(\mathbf{A}_s^{-1} + \frac{1}{h} \left(\mathbf{A}_s^{-2} - (\tau - (r-1)h) \mathbf{A}_s^{-1} \right) \left(\mathbf{I} - e^{\mathbf{A}_s h} \right) \right) \mathbf{B}_s \quad (\text{A.17})$$



A.1. ábra. Elsőrendű közelítése $u(t - \tau)$ függvénynek a $\rho(t - \tau)$ közelítő polinom alapján (szaggatott vonal).

$$\mathbf{R}_1 = \left(-\mathbf{A}_s^{-1} + \frac{1}{h} \left(-\mathbf{A}_s^{-2} + (\tau - rh) \mathbf{A}_s^{-1} \right) (\mathbf{I} - e^{\mathbf{A}_s h}) \right) \mathbf{B}_s. \quad (\text{A.18})$$

A $\mathcal{G}$ együtthatómátrix alakja így

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{C} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.19})$$

továbbá $\mathbf{R}_0$ és $\mathbf{R}_1$ sorra az $(r - 1)$ -edik és r -edik elemek helyén foglalnak helyet.

Irodalomjegyzék

- [1] O. Rott, *Simulation and Stability of Milling Processes*, Verkehrs- und Maschinensysteme der Technischen Universität Berlin, Berlin, 2011.
- [2] Z. Dombóvári, G. Stépán, *Marószerszámok dinamikai tulajdonságai és azok hatása a megmunkálás stabilitására*, GÉP, 2011.
- [3] T. Insperger, *Stability analysis of Periodic Delay-Differential Equations Modeling Machine Tool Chatter*, PhD dissertation, Budapest, 2002.
- [4] T. Insperger, G. Stépán, *Semi-Discretization for Time-Delay Systems*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 178, Springer, New-York, 2011
- [5] D. Hajdu, T. Insperger, *Time Domain Analysis of the Smith Predictor in Case of Parameter Uncertainties: A Case Study*, American Society of Mechanical Engineers, IDETC Conference, Portland, 2013.
- [6] D. J. Ewins, *Modal Testing, Theory, Practice, and Application*, Research Studies Press 2nd edition, 2000
- [7] C. Min, H. Park, S. Park, *Direct identification of non-proportional modal damping matrix for lumped mass system using modal parameters*, Journal of Mechanical Science and Technology, **26**(4) pp. 993–1002, 2011.
- [8] S. Adhikari, *Damping Models for Structural Vibration*, Cambridge University, Engineering Department, Cambridge, 2000.
- [9] H. Park, C. Min, B. Kim, *Experimental Vibration Analysis for a Viscoelastically Damped Cylindrical Shell*, The International Society of Offshore and Polar Engineers, Osaka, Japan, 2009.
- [10] Z. Dombóvári, J. Munoa, G. Stépán, *General Milling Stability Model for Cylindrical Tools*, 3rd CIRP Conference on Process Machine Interactions (3rd PMI), Elsevier, Procedia CIRP 4, pp. 90–97, 2012.
- [11] M. H. Richardson, D. L. Formenti, *Parameter Estimation From Frequency Response Measurement Using Rational Fraction Polynomials*, 1st IMAC Conference, Orlando, Florida, 1982.
- [12] D. Bachrathy, G. Stépán, *Improved Prediction of Stability Lobes with Extended Multi Frequency Solution*, CIRP Annals – Manufacturing Technology 62, pp. 411–414, 2013.

- [13] G. Stépán, J. Munoa, T. Insperger, M. Surico, D. Bachrathy, Z. Dombóvári, *Cylindrical Milling Tools: Comparative Real Case Study for Process Stability*, CIRP Annals – Manufacturing Technology **63**(1), pp. 385–388, 2014.