



BUDAPEST MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR

MŰSZAKI MECHANIKAI TANSZÉK

Regeneratív szerszámgéprezgés stabilitásának érzékenysége a modális paraméterek függvényében

OTDK DOLGOZAT

Készítette: Hajdu Dávid

2014

Konzulens: Insperger Tamás, egyetemi docens
Műszaki Mechanikai Tanszék

Tartalomjegyzék

Bevezetés	1
1. Modális analízis	3
1.1. Arányos csillapítás	3
1.1.1. Csillapítatlan rendszer	4
1.1.2. Arányosan csillapított rendszer vizsgálata	6
1.1.3. Frekvenciaátviteli függvény arányos csillapításnál	7
1.1.4. Megoldás időtartományban	9
1.2. Nemarányos csillapítás	10
1.2.1. Nemarányosan csillapított rendszer vizsgálata	10
1.2.2. Frekvenciaátviteli függvény nemarányos csillapításnál	12
1.2.3. Megoldás időtartományban	13
1.3. Numerikus példák	15
1.3.1. Szimuláció	16
1.3.2. Görbeillesztés	17
1.3.3. Példa arányos csillapítás paramétereinek illesztésére	18
1.3.4. Példa nemarányos csillapítás paramétereinek illesztésére	19
2. Szerszámgéprezgések	21
2.1. Esztergálás	21
2.1.1. Vizsgálat frekvenciatartományban	23
2.1.2. Szemi-diszkretizáció	26
2.1.3. Érzékenységvizsgálat esztergálás esetén	29
2.1.4. Stabil szigetek esztergálás során	37
2.1.5. Esettanulmány	39
2.2. Marás	42
2.2.1. Szemi-diszkretizáció	46
2.2.2. Érzékenységvizsgálat marás esetén	48
2.2.3. Esettanulmány	54
Összefoglalás	57
A. Matematikai háttér	58
A.1. Lineáris inhomogén differenciálegyenletek	58
A.2. Elsőrendű szemi-diszkretizáció	59
Irodalomjegyzék	61

Bevezetés

A piaci versenyképesség növelése érdekében a gyártással szemben támasztott egyik alapvető elvárás az anyagleválasztás sebességének növelése, vagyis a megmunkálási idő csökkentése miközben a termék minősége változatlan marad [1]. Gépeink alkatrészének nagy része forgácsolási folyamatokkal készül, mint például esztergálás vagy marás. Ha a fordulatszám növekszik, a megmunkálási idő csökken, és nagyfordulatú megmunkálások során jelentősen növelhető a leválasztható forgácsvastagság. Sajnálatos módon a legtöbb alkalmazásnál öngerjesztett rezgések jelennek meg a gyártási folyamat során, amely rontja a termék minőségét [2]. Az irodalomban ezt a jelenséget szerszámgéprezgésnek nevezik (angolul *chatter*). Mai napig nagy kihívást jelent a stabilitás határainak előrejelzése, mielőtt az instabil rezgés megjelenik a megmunkálás közben.

A szerszámgéprezgés irodalma száz évre nyúlik vissza, amikor Taylor (1907) az instabil rezgést az egyik legbizonytalanabb jelenségnek nevezte, amivel gyártástechnológus szembesülhet [3]. Az 1960-as években Tobias és Thusty rámutatott az ún. *regeneratív hatás* jelentőségére, amely nagy szerepet játszik a szerszámgéprezgés kialakulásában [2]. Mikor a szerszám elkezd rezegni, a nemkívánatos rezgés rámásolódik a munkadarab felületére, ennek hatására pedig a leválasztandó forgács vastagsága is folyamatosan változik. Mivel vagy a szerszám, vagy a munkadarab forgó mozgást végez, egy fordulat után a megváltozott felületnek hatása lesz a pillanatnyi forgácsoló erőre, ami a leválasztandó forgács vastagságával együtt változik. Matematikai szempontból tekintve az anyagleválasztási folyamat nemcsak a jelenlegi állapottól, de korábbi állapotoktól is függ. Ezt a jelenséget késleltetett differenciálegyenletekkel írhatjuk le, amelynek triviális megoldása gyakran instabil [2].

Azok a rendszerek, amelyek állapotának megváltozása más állapotoktól függ, általában funkcionál-differenciálegyenletekkel (FDE) írhatók le. A FDE-ek olyan egyenletek, amelyek az $x(t)$ állapotot, ahol a t az idő, és annak további t -től eltérő időbeli differenciálhányadosait foglalják magukba. A FDE-ek csoportosítása idő-késleltetett állapotok esetén, ahol az időkézés általában τ -val jelölt, a következő. Ha az állapot megváltozása időben korábbi állapotoktól függ, akkor a rendszer késleltetett típusú funkcionál-differenciálegyenlettel írható le (*retarded functional differential equation*, RFDE). Ha az állapot megváltozása nemcsak a korábbi állapotoktól, hanem korábbi állapot-változásoktól is függ, akkor a rendszer neutrális funkcionál-differenciálegyenletekkel jellemezhető (*neutral functional differential equation*, NFDE). Ezzel szemben ha az állapot megváltozása annak idő-késleltetett, magasabb rendű differenciálhányadosaitól is függ, akkor siettetett típusú funkcionál-differenciálegyenletekről beszélhetünk (*advanced functional differential equation*, AFDE) [4].

Siettetett típusú késleltetett differenciálegyenletek csak ritka kivételekkor írnak le

newtoni rendszereket, ezzel szemben a késleltetett- ill. neutrális típusú egyenleteket gyakran használtak szerszámgéprezgés leírására, erő- és pozíciószabályozáskor, ahol az időkéés a visszacsatolásban jelentkezik [5], populációdinamikában vagy kerék-dinamikában, csak párat említve a sok példa közül [4].

Több évtizedig, a szerszámgéprezgéssel foglalkozó mérnökök csak nagyon kis hatást tudtak gyakorolni az iparra, jellemzően inkább csak tudományos kutatás jellegű vizsgálatok folytak. A feltételezett modellek bonyolultsága túl magas volt és a mérési eredmények túl pontatlanok voltak ahhoz, hogy érdembeli eredményeket érjenek el, és megfelelően meghatározhassák a stabilitás határait. Később természetesen, a fejlődő technológia hatására, a pontosabb mérési módszerek megjelenésével és a fejlettebb matematikai modellek, valamint a számítógépes módszerek elterjedésével az ipar számára is elérhetővé és alkalmazhatóvá váltak az eredmények. Ez igaz az esztergálási folyamatokra és nagysebességű megmunkálásokra is [3].

Annak ellenére, hogy a technológia és a matematikai modellek is sokat fejlődtek, a számítási módszerek sok esetben olyan paramétereket igényelnek, amelyeket zajos mérési adatokból nyerhetünk ki. Ezeket a modális tulajdonságokat általában ütési vagy rázási kísérletből határozhatjuk meg [2]. A modell komplexitása mindig limitált, például csak véges számú módust vehetünk figyelembe illetve az illesztés sem tökéletes, mindemellett a nemlinearitások kezelése is problémákba ütközhet. Az is kérdés azonban, hogy vajon a különféle közelített paraméterek mennyire írják le megfelelően az elméletileg helyes megoldást. Jelen dolgozatban a stabilitástérképek érzékenységének vizsgálata kerül előtérbe, mely során például bizonyos módusokat elhanyagolunk, míg másokat egyetlen közös móddussal közelítünk. Az így megváltozott eredmények jelentős hatással lehetnek a gyártási paraméterekre.

1. fejezet

Modális analízis

Jelen fejezetben több szabadsági fokú rendszerek (Multiple-Degrees-of-Freedom, MDoF) matematikai modellezésének lehetőségei valamint a modális analízis alapjai kerülnek bemutatásra. Először arányos csillapítást vizsgálunk, majd a nemarányos rendszerekkel folytatódik a dolgozat. Ezek alapján a frekvenciaátviteli függvény parametrikus alakja is megadható felhasználva a modális térbe történő transzformációt.

1.1. Arányos csillapítás

Mivel az arányos csillapítás (vagy Rayleigh-féle csillapítás) definiálásához szükség van a több szabadsági fokú rendszereknél megismert mátrix alakban megadott mozgásegyenletre, így először ez kerül bevezetésre. Ezért a kiindulási egyenlet a következő

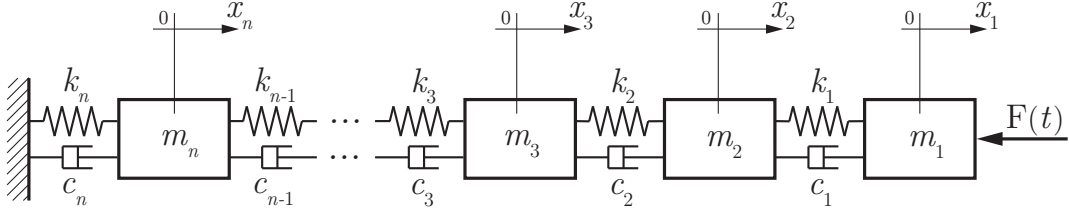
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}, \quad (1.1)$$

ahol $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ az általános koordinátavektor, $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a tömegmátrix, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a csillapítási mátrix, $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a merevségi mátrix, míg n a szabadsági fokok számát jelöli. Feltételezzük, hogy a tömegmátrix, a csillapítási mátrix és merevségi mátrix szimmetrikus. Egy több szabadsági fokú modell elképzelhető például egy tömeg-rugó-csillapítás rendszerrel (1.1 ábra), amellyel a magasabb frekvenciájú módusok is figyelembe vehetők.

Definíció szerint egy rendszer arányosan csillapított, ha a csillapítási mátrixra igaz, hogy

$$\mathbf{C} = \alpha_M \mathbf{M} + \alpha_K \mathbf{K}, \quad (1.2)$$

ami azt jelenti, hogy előállítható a tömegmátrix és a merevségi mátrix lineáris kombinációjaként. Az arányos csillapítás gyakorlati szempontból sokszor igazolható. Például jellemző, hogy a csillapításhoz tartozó mechanizmus kapcsolatba hozható a merevséggel (belső- vagy hiszterézis csillapítás) vagy a tömeggel (súrlódás). Egy általánosabb össze-

1.1. ábra. Dinamikai modell n szabadsági fok esetén.

függés szerint, ami az arányos csillapítás szükséges feltétele [6]

$$(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}) = (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C})(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}). \quad (1.3)$$

1.1.1. Csillapítatlan rendszer

Legyen adott a mátrix alakban felírt mozgásegyenlet (1.1) szerint. Felhasználva az exponenciális próbafüggvények módszerét, miszerint a megoldást keressük $\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}e^{\lambda t}$ alakban, és véve a csillapítatlan ($\mathbf{C} = \mathbf{0}$) és gerjesztetlen esetet, az egyenlet alakja

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}. \quad (1.4)$$

Behelyettesítés után, majd egyszerűsítve $e^{\lambda t} > 0$ -val,

$$(\lambda^2\mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (1.5)$$

adódik, ahol $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n$ a csillapítatlan rendszer lengésképe, $\lambda = i\omega$ (csillapítatlan esetben), és ω a rezgés sajátkörfrekvenciája. Ez az egyenlet a több szabadsági fokú rendszer (MDoF) sajátérték-sajátvektor problémájára vezet vissza. $\lambda^2\mathbf{M} + \mathbf{K}$ az ún. dinamikus mátrix, ahol

$$\det(\lambda^2\mathbf{M} + \mathbf{K}) = 0 \quad (1.6)$$

a szabad rezgést végző rendszer karakterisztikus egyenlete. Ennek az egyenletnek $2n$ gyöke van egy n szabadsági fokkal rendelkező rendszer esetén, ahol $\text{Im}(\lambda_i) = \pm\omega_{n,i}$. Itt $\omega_{n,i}$ az i -edik csillapítatlan sajátkörfrekvencia ('n' index a natural szóból ered). Csillapítatlan (és alulcsillapított) esetben a gyökök komplex konjugált párokat alkotnak. Az i -edik sajátértékhez tartozó $\mathbf{P}_i$ lengéskép vektora számítható

$$(\lambda_i^2\mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{P}_i = \mathbf{0} \quad (1.7)$$

szerint. Definíció szerint, mivel $\det(\lambda_i^2\mathbf{M} + \mathbf{K}) = 0$ szinguláris, $\mathbf{P}_i$ vektor valamely eleme önkényesen megválasztható. Következésképp bármely vektor megadható általában a következő alakban

$$\mathbf{P}_i = \begin{pmatrix} 1 & P_{i,2} & P_{i,3} & \cdots & P_{i,n} \end{pmatrix}^T,$$

ahol $(\bullet)^T$ a transzponáltat jelöli. Az (1.6) egyenlet matematikailag egy sajátérték-sajátvektor problémaként értelmezhető. Feltételezve a csillapítatlan esetet, mivel $\mathbf{M}$ és $\mathbf{K}$ szimmetrikusak, a normál lengésképek tisztán valósak és a következő tömeg és merevségi mátrix szerinti ortogonális tulajdonságokkal rendelkeznek

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i^T \mathbf{M} \mathbf{P}_j &= 0 & \text{és} & \quad \mathbf{P}_i^T \mathbf{K} \mathbf{P}_j = 0 & \quad \text{ha} \quad i \neq j, \\ \mathbf{P}_i^T \mathbf{M} \mathbf{P}_i &= M_i > 0 & \text{és} & \quad \mathbf{P}_i^T \mathbf{K} \mathbf{P}_i = K_i > 0 & \quad \text{ha} \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

M_i és K_i a modális tömeg és a modális merevség. Továbbá, megmutatható az is, hogy $\omega_{n,i} = \sqrt{K_i/M_i}$. Minden $\mathbf{P}_i$ sajátvektor normalizálható a következő kritérium szerint. Legyen definiálva ϕ_i normalizált sajátvektor úgy, hogy

$$\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i = 1 \quad \text{és} \quad \phi_i^T \mathbf{K} \phi_i = \omega_{n,i}^2, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.8)$$

amelyek ún. tömeg-ortonormált sajátvektorok. Ezek alapján ϕ_i előállítható a következő alakban

$$\phi_i = \frac{\mathbf{P}_i}{\sqrt{\mathbf{P}_i^T \mathbf{M} \mathbf{P}_i}}. \quad (1.9)$$

A $\mathbf{q}(t)$ modális koordinátákat (vagy *principal coordinates*) az $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi} \mathbf{q}(t)$ transzformációval vezetjük be, miszerint

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} & \cdots & \phi_{n1} \\ \phi_{12} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{1n} & \phi_{2n} & \cdots & \phi_{nn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{\Phi}} \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

ahol $\mathbf{\Phi}$ a modális transzformációs mátrix. Az (1.8) összefüggés alapján, a mozgásegyenlet felírható a $\mathbf{q}(t)$ modális koordináták terében a hagyományos általános $\mathbf{x}(t)$ térbeli koordináták helyett. Felhasználva a levezetett összefüggéseket a modális és általános térbeli koordináták között, visszahelyettesítve (1.4)-be majd mindkét oldalt megszorozva $\mathbf{\Phi}^T$ -tal balról a kapott összefüggés

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi} \mathbf{q}(t) = \mathbf{0}.$$

Itt $\mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi} = \mathbf{M}_m$ az ún. modális tömegmátrix és $\mathbf{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi} = \mathbf{K}_m$ a modális merevségi mátrix. Mivel a sajátvektorok a tömegmátrix szerint ortonormáltak, így $\mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi} = \mathbf{M}_m = \mathbf{I}$ és $\mathbf{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi} = \mathbf{K}_m = \text{diag}(\omega_{n,i}^2)$ összefüggések teljesülnek. Ezzel a módszerrel az eredeti mozgásegyenlet kapcsolt egyenletei független egyenletekre esnek szét.

1.1.2. Arányosan csillapított rendszer vizsgálata

Egy rendszer arányos csillapított ha a csillapítási mátrix előállítható a tömegmátrix és a merevségi mátrix lineáris kombinációjaként, ahogy azt az (1.2)-es összefüggés definiálja. Figyelembe véve most a mozgásegyenlet csillapítással kiegészített alakját (1.1) szerint, a modális transzformáció eredményeképpen

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{q}}(t) + \Phi^T \mathbf{C} \Phi \dot{\mathbf{q}}(t) + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{q}(t) = \mathbf{0} \quad (1.11)$$

adódik, ahol $\Phi^T \mathbf{C} \Phi = \mathbf{C}_m$ a modális csillapítási mátrix. Felhasználva az arányos csillapítás definícióját, a kapott összefüggés

$$\Phi^T \mathbf{C} \Phi = \alpha_M \Phi^T \mathbf{M} \Phi + \alpha_K \Phi^T \mathbf{K} \Phi = \alpha_M \mathbf{I} + \alpha_K \text{diag}(\omega_{n,i}^2). \quad (1.12)$$

Egy szabadsági fokú rendszerek esetén (*Single-Degree-of-Freedom*, SDoF) a mozgásegyenlet

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0$$

alakban adható meg. Ezekben az esetekben lényegesen egyszerűbb a vizsgálat, szokás ugyanis az m tömeggel elosztani az egyenlet mindkét oldalát, így

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = 0$$

alakra átírható, ahol ξ a viszkozus csillapítási tényező, mely alulcsillapított esetekben $\xi < 1$. Megadva a karakterisztikus egyenletet, felírva a gyököket, megmutatható, hogy azok alakja

$$\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -\sigma \pm i\gamma = -\xi\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\xi^2}.$$

Érdemes megjegyezni, hogy csillapítatlan esetben $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_n$ tisztán képzetes, ahogy az már korábban említésre került. Ellenkező esetben a valós rész $\sigma = \xi\omega_n$ a rezgés amplitúdójának időbeli változását jellemzi, valamint $\gamma = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ a csillapított sajátkörfrekvencia. Az egy szabadsági fokú rendszer példáját kihasználva, több szabadsági fokú rendszerek esetére megmutatható, hogy $\alpha_M + \alpha_K\omega_{n,i}^2 = 2\xi_i\omega_{n,i}$, ami ξ_i -re az alábbi összefüggést eredményezi

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_M}{\omega_{n,i}} + \alpha_K\omega_{n,i} \right). \quad (1.13)$$

A fenti levezetés megmutatta, hogy arányos esetben a mozgásegyenlet a modális dekompozíció során független egyenletekre bontható szét, mivel Φ modális transzformációs mátrix $\mathbf{C}$ -t is diagonális alakra vezeti vissza. Ez egyben azt is megmutatja, hogy a lengéskép (sajátvektor) a csillapítatlan és arányosan csillapított rendszer esetén megegyezik. Itt érdemes néhány fontos tulajdonságot megemlíteni, amely segíti a különféle esetek közötti

eltérés megértését. Tehát az arányos csillapítás tulajdonságai [6]:

- Lengésképek valósak, ún. normál módusok.
- Csillapítatlan és arányosan csillapított rendszer lengésképei megegyeznek.
- A modális térben független egyenletekre bontható szét.
- A rezgés során a minimum és maximum pontok elérése ugyanabban az időpillanatban történik.
- A rezgés matematikailag állóhullámmal írható le.
- Minden szabadsági fok teljesen fázisban vagy ellenfázisban van (fáziskésés szigorúan 0° vagy 180°).
- Csomópontok helye időben állandó marad.

Érdemes megjegyezni, hogy a fenti tulajdonságok és levezetések arányos esetre vonatkoznak, nemarányos esetben nem érvényesek. Utóbbi esetében a vizsgálat kissé bonyolultabb.

1.1.3. Frekvenciaátviteli függvény arányos csillapításnál

Egy rendszer modális tulajdonságait a gyakorlatban általában ütési és rázási kísérletekből határozhatjuk meg [2], amelyekből származtatható a frekvenciaátviteli függvény (*Frequency Response Function*, FRF). A modális paraméterek görbeillesztési módszerekkel közelíthetők.

Legyen adott a csillapított és gerjesztett rendszer mozgásegyenlete az alábbi alakban

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (1.14)$$

ahol $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^n$ a gerjesztés vektora. Például ha a mérés ütési kísérlettel történik, akkor a gerjesztés elméleti modellje egy tiszta Dirac-impluzus $f_0\delta(t)$ a megadott koordinátánál. Az átviteli függvény ennek megfelelően a bementet és a kimenet Laplace transzformáltjával megadható. Ezek alapján (1.14) Laplace transzformáltja

$$\mathbf{M}s^2\mathbf{X}(s) + \mathbf{C}s\mathbf{X}(s) + \mathbf{K}\mathbf{X}(s) = \mathbf{F}(s), \quad (1.15)$$

ahol $\mathbf{X}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\}(s)$, $\mathbf{F}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{f}(t)\}(s)$ és $\mathcal{L}$ a Laplace operátor. Átrendezve a tagokat, a kapott alak

$$\mathbf{X}(s) = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{F}(s), \quad (1.16)$$

ahol $(\bullet)^{-1}$ az inverz mátrix műveletet jelöli és s a komplex változó. Mivel a bementet az $\mathbf{f}(t)$ gerjesztés, és a kimenet az $\mathbf{x}(t)$ elmozdulás, így az átviteli mátrix

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{X}(s)\mathbf{F}^{-1}(s) = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K})^{-1}. \quad (1.17)$$

A frekvenciaátviteli mátrix innen formális $s = i\omega$ helyettesítéssel megadható, vagyis

$$\mathbf{H}(\omega) = (-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{C}i\omega + \mathbf{K})^{-1}. \quad (1.18)$$

Érdemes megemlíteni, hogy habár a fenti összefüggés egy mátrixot definiál, később bemutatjuk, hogy bizonyos esetekben csak a mátrix egyetlen elemére van szükség. Szerszámcsúcsmérés esetén például egyetlen mérésből meghatározhatjuk a frekvenciaátviteli függvényt (megütve a szerszám végét, közben ugyanazon a ponton mérve). Habár teljes modális analízis során szükség lenne a teljes átviteli mátrixra [2], szerszámcsúcsmérésnél csak egyetlen koordináta elmozdulására ($x_1(t)$) van szükség, míg a többi csak a magasabb módusok modellezésére szolgál.

A görbeillesztéshez (1.18) egyenlet nem optimális. Célszerű az (1.14) egyenletet a modális térbe transzformálni, így a kiindulási egyenlet

$$\Phi^T M \Phi \ddot{\mathbf{q}}(t) + \Phi^T C \Phi \dot{\mathbf{q}}(t) + \Phi^T K \Phi \mathbf{q}(t) = \Phi^T \mathbf{f}(t), \quad (1.19)$$

ahol $\Phi^T M \Phi = \mathbf{I}$, $\Phi^T C \Phi = \mathbf{C}_m$ és $\Phi^T K \Phi = \mathbf{K}_m$. Mindkét oldal Laplace transzformáltját véve

$$(\mathbf{I}s^2 + \mathbf{C}_m s + \mathbf{K}_m) \mathbf{Q}(s) = \Phi^T \mathbf{F}(s) \quad (1.20)$$

adódik, ahol $\mathbf{Q}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{q}(t)\}(s)$. Az átviteli mátrix hasonlóan az előzőekhez meghatározható.

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{X}(s)\mathbf{F}^{-1}(s) = \Phi \mathbf{Q}(s)\mathbf{F}^{-1}(s) = \Phi (\mathbf{I}s^2 + \mathbf{C}_m s + \mathbf{K}_m)^{-1} \Phi^T \quad (1.21)$$

Mivel $(\mathbf{I}s^2 + \mathbf{C}_m s + \mathbf{K}_m)$ diagonális, annak inverze megadható a főátlóbeli elemek reciprokaként, vagyis

$$(\mathbf{I}s^2 + \mathbf{C}_m s + \mathbf{K}_m)^{-1} = \text{diag} \left(s^2 + 2\xi_i \omega_{n,i} s + \omega_{n,i}^2 \right)^{-1}, \quad (1.22)$$

$$\mathbf{W}(s) = \Phi \text{diag} \left(\frac{1}{s^2 + 2\xi_i \omega_{n,i} s + \omega_{n,i}^2} \right) \Phi^T. \quad (1.23)$$

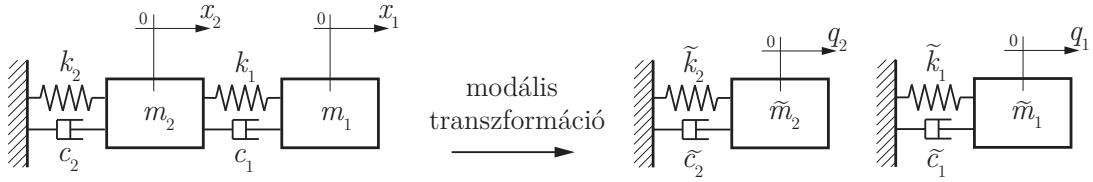
Innen már néhány szorzást követően, illetve $s = i\omega$ helyettesítéssel levezethető a frekvenciaátviteli függvény modális paraméterekkel meghatározott alakja, tehát

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{\phi_{ri} \phi_{rj}}{-\omega^2 + 2\xi_r \omega_{n,r} \omega i + \omega_{n,r}^2} \quad (1.24)$$

ahol n a szabadsági fokok száma, i a frekvenciaátviteli mátrix sorának, j a frekvenciaátviteli mátrix oszlopának indexe, valamint ϕ_{ri} az r -edik módushoz tartozó normalizált sajátvektor i -edik eleme (ld.(1.10)). Mivel csak $H_{11}(\omega)$ releváns ütési kísérlet szempontjából, így az kiemelve

$$H_{11}(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{\phi_{r1}^2}{-\omega^2 + 2\xi_r \omega_{n,r} \omega i + \omega_{n,r}^2} \quad (1.25)$$

adódik, ahol $\tilde{m}_i = 1/\phi_{i1}^2$ az effektív tömeg, $\tilde{k}_i = \tilde{m}_i \omega_{n,i}^2$ effektív merevség és $\tilde{c}_i = 2\xi_i \omega_{n,i} \tilde{m}_i$ az effektív csillapítás. Innen már látható a modális szétbontásnak az előnye. Ahelyett,



1.2. ábra. Áttérés térbeli reprezentációról a modális térre kettő szabadsági fokú modell esetén.

hogy egy n dimenziós másodrendű differenciálegyenlet-rendszert használnánk, n darab másodrendű differenciálegyenlet írható fel. Ennek illusztrálására szolgál az 1.2-es ábra. Továbbá a frekvenciaátviteli függvény fenti parametrikus alakja alkalmas a paraméterek illesztésére.

1.1.4. Megoldás időtartományban

Az $\mathbf{x}(t)$ időtartománybeli megoldás megadható a sajátértékek és sajátvektorok segítségével. Először az egy szabadsági fokú esetet nézzük, ahol a gerjesztetlen rendszer mozgásegyenlete

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = 0$$

alakú és a sajátértékek $\lambda_{1,2} = -\sigma \pm i\gamma = -\xi\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ (alulcsillapított esetben). A megoldás

$$x(t) = b_1e^{\lambda_1 t} + b_2e^{\lambda_2 t} = b_1e^{-\xi\omega_n t + i\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t} + b_2e^{-\xi\omega_n t - i\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t}$$

alakban adható meg, ahol b_1 és b_2 komplex értékű, kezdeti feltételtől függő együtthatók. Felhasználva az Euler-formulát, az egyenlet átírható

$$x(t) = \left(\underbrace{(b_1 + b_2)}_{B_1} \cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t\right) + \underbrace{(b_1 - b_2)i}_{B_2} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t\right) \right) e^{-\xi\omega_n t},$$

alakba, ahol B_1 és B_2 valós értékűek, mivel $x(t)$ elmozdulásnak valósnak kell lennie. Ez a feltétel igaz akkor, ha $b_2 = \bar{b}_1$, és $(\bullet)$ a komplex konjugáltat jelöli. Továbbá, ha a rendszer alulcsillapított ($\xi < 1$), akkor $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ is teljesül. Ezek alapján $x(t) = b_1e^{\lambda_1 t} + \bar{b}_1e^{\bar{\lambda}_1 t}$. Ez kerül kihasználásra több szabadsági fokú rendszerek esetén is.

Legyen adott az általános, arányosan csillapított rendszer, ahol a mozgásegyenlet (1.1) szerint felírható. Ilyenkor a sajátértékek alakja $\lambda_r = -\sigma_r + i\gamma_r$, és $\mathbf{P}_r$ az ehhez tartozó valós lengéskép (sajátvektor). Ennek megfelelően a megoldás

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{r=1}^n b_r \mathbf{P}_r e^{\lambda_r t} + \bar{b}_r \mathbf{P}_r e^{\bar{\lambda}_r t} \quad (1.26)$$

alakú. Ismét felhasználva az Euler-formulát és az ezt követő lépéseket, a fenti egyenlet átírható

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{r=1}^n \mathbf{P}_r \left(\underbrace{(b_r + \bar{b}_r)}_{B_{r1}} \cos(\gamma_r t) + \underbrace{(b_r - \bar{b}_r)}_{B_{r2}} i \sin(\gamma_r t) \right) e^{-\sigma_r t}, \quad (1.27)$$

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{r=1}^n \mathbf{P}_r (B_{r1} \cos(\gamma_r t) + B_{r2} \sin(\gamma_r t)) e^{-\sigma_r t}. \quad (1.28)$$

szerint. Hasonlóan az egy szabadsági fokú esethez, B_{r1} és B_{r2} mindig valós értékűek, és meghatározhatók a tetszőleges kezdeti feltételekből. Ebből látszik, hogy arányos csillapítás esetén a lengés állóhullámmal jellemezhető.

1.2. Nemarányos csillapítás

A viszkózus csillapítású modelleket arányosan és nemarányosan csillapított esetekre bonthatjuk szét. Az 1.1-es alfejezetben részletes bemutatásra kerültek a csillapítatlan és arányosan csillapított rendszerek modális vizsgálatának alapjai. Bár sok esetben jól alkalmazható és fizikailag is viszonylag pontos az arányosan csillapított modell, azonban a feltételezés, hogy $\mathbf{C}$ előállítható a tömegmátrix és a merevségi mátrix lineáris kombinációjaként, nem mindig helytálló. A valós rendszerek sok alkatrészből összeálló szerkezetek, melyek kapcsolata gyakran nemarányos csillapítással írható le, vagy akár nemlineáris modellre vezet [8].

1.2.1. Nemarányosan csillapított rendszer vizsgálata

A legtöbb arányos rendszerre levezett alak és tulajdonság nem teljesül nemarányosan csillapított rendszerre. Ha $\mathbf{C} \neq \alpha_M \mathbf{M} + \alpha_K \mathbf{K}$, akkor a csillapítatlan rendszer sajátvektorai nem fognak megegyezni a csillapított rendszerével és (1.3) sem teljesül. A lengéseképek továbbá komplex értékű vektorok, és a korábban bemutatott modális dekompozíció sem alkalmazható az (1.1)-es alakon, mivel az nem írható fel diagonális alakban.

Legyen (1.1) az elsőrendű alakban felírva, továbbá az új változó legyen $\mathbf{v}(t)$ -vel jelölt

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{pmatrix}, \quad (1.29)$$

ahol $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$. Ha létezik $\mathbf{M}^{-1}$, a mozgásegyenlet felírható a következő alakban

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \ddot{\mathbf{x}}(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{pmatrix}}_{\mathbf{Z}} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{pmatrix}, \quad (1.30)$$

ahol $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$. Ebben az esetben a sajátértékekkel és sajátvektorokból képzett transzformációs mátrixszal is megadható az egyenlet, vagyis

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{T} = \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix}, \quad (1.31)$$

ahol $\mathbf{T}$ a transzformációs mátrix. A sajátértékek, függetlenül az eltérő felírasmódtól, itt is komplex konjugált párokat alkotnak (alulcsillapított esetben). Bár az átviteli függvény kifejezhető ezzel az alakkal, mivel egy ismeretlen mátrix inverzére is szükség van, ez nem a legegyszerűbb megoldáshoz vezet. Ezzel szemben egy kényelmesebb felírasmód is választható, amely számos szakirodalomban megtalálható [6, 7, 10].

Legyen az állapotvektor $\mathbf{v}(t)$, de használjunk egy kiegészítő egyenletet, miszerint

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}. \quad (1.32)$$

(1.1) és (1.32) átírható gerjesztetlen esetben a következő szerint

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \ddot{\mathbf{x}}(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (1.33)$$

ahol $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ szimmetrikus mátrixok. Felhasználva az exponenciális próbafüggvények módszerét, a megoldás kereshető $\mathbf{v}(t) = \mathbf{U}e^{\lambda t}$ szerint. Érdeemes megjegyezni, hogy $\mathbf{U}$ felírható, mint

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} \\ \lambda \mathbf{P} \end{pmatrix}, \quad (1.34)$$

mivel $\mathbf{v}(t)$ definíció szerint $\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}e^{\lambda t}$, $\lambda = -\xi\omega_n + i\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ és $\dot{\mathbf{x}}(t) = \lambda\mathbf{P}e^{\lambda t}$ alapján összeállítható, ahol $\mathbf{P}$ a komplex nemarányosan csillapított rendszer lengésképe. Visszahelyettesítés után, az eredmény

$$(\lambda\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (1.35)$$

amely analóg (1.6)-tal. Innen a karakterisztikus egyenlet $\det(\lambda\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 0$. Az így kapott gyökök komplex konjugált párokat alkotva λ_i és $\bar{\lambda}_i$, valamint az ehhez tartozó sajátvektorok, amelyek szintén komplex konjugált párok, $\mathbf{U}_i$ és $\bar{\mathbf{U}}_i$. A sajátvektorok természetesen normalizálhatók egy tetszőleges kritérium szerint. Ha $\mathbf{A}$ mátrix szerint normalizáltak a vektorok, akkor

$$\psi_i = \frac{\mathbf{U}_i}{\sqrt{\mathbf{U}_i^T \mathbf{A} \mathbf{U}_i}}, \quad (1.36)$$

és az ehhez tartozó transzformációs mátrix felírható mint

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & \bar{\psi}_1 & \psi_2 & \bar{\psi}_2 & \cdots & \psi_n & \bar{\psi}_n \end{pmatrix},$$

továbbá $\Psi \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$. Felhasználva a normalizálás tulajdonságait, megmutatható, hogy $\Psi^T \mathbf{A} \Psi = \mathbf{I}$ és $\Psi^T \mathbf{B} \Psi = -\mathbf{\Lambda} = -\text{diag}(\lambda)$. Ψ transzformációs mátrix alakja

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \bar{\psi}_{11} & \psi_{21} & \bar{\psi}_{21} & \cdots & \psi_{n1} & \bar{\psi}_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \psi_{1n} & \bar{\psi}_{1n} & \psi_{2n} & \bar{\psi}_{2n} & \cdots & \psi_{nn} & \bar{\psi}_{nn} \\ \lambda_1 \psi_{11} & \bar{\lambda}_1 \bar{\psi}_{11} & \lambda_2 \psi_{21} & \bar{\lambda}_2 \bar{\psi}_{21} & \cdots & \lambda_n \psi_{n1} & \bar{\lambda}_n \bar{\psi}_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_1 \psi_{1n} & \bar{\lambda}_1 \bar{\psi}_{1n} & \lambda_2 \psi_{2n} & \bar{\lambda}_2 \bar{\psi}_{2n} & \cdots & \lambda_n \psi_{nn} & \bar{\lambda}_n \bar{\psi}_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1.37)$$

1.2.2. Frekvenciaátviteli függvény nemarányos csillapításnál

Ahogy az már említésre került, az arányos csillapításnál használt modális transzformáció nem használható nemarányos esetben. A kiegészített felírással azonban elérhető, hogy $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrix is diagonális alakra legyen áttanszformálható. Tekintsük a gerjesztett rendszer következő alakját

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \ddot{\mathbf{x}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{B} \mathbf{v}(t) = \mathbf{f}_v(t), \quad (1.38)$$

ahol $\mathbf{f}_v(t) = (\mathbf{f}(t) \ \mathbf{0})^T$ az általános gerjesztés vektora. Hasonlóan az arányosan csillapított esetekhez, jelen esetben a modális transzformáció $\mathbf{v}(t) = \Psi \mathbf{q}_v(t)$ helyettesítéssel érhető el. Felhasználva a Laplace transzformációt ($\mathbf{V}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{v}(t)\}(s)$, $\mathbf{Q}_v(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{q}_v(t)\}(s)$ és $\mathbf{F}_v(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{f}_v(t)\}(s)$), majd átrendezve a tagokat, a kapott alak

$$(\mathbf{A} \Psi s + \mathbf{B} \Psi) \mathbf{Q}_v(s) = \mathbf{F}_v(s). \quad (1.39)$$

A fenti egyenlet mindkét oldalát megszorozva Ψ^T -tal, a $\mathbf{W}(s)$ átviteli mátrix kifejezhető a következők szerint

$$(\Psi^T \mathbf{A} \Psi s + \Psi^T \mathbf{B} \Psi) \mathbf{Q}_v(s) = \Psi^T \mathbf{F}_v(s), \quad (1.40)$$

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{V}(s) \mathbf{F}_v^{-1}(s) = \Psi \mathbf{Q}_v(s) \mathbf{F}_v^{-1}(s) = \Psi (\Psi^T \mathbf{A} \Psi s + \Psi^T \mathbf{B} \Psi)^{-1} \Psi^T. \quad (1.41)$$

Mivel $\Psi^T \mathbf{A} \Psi = \mathbf{I}$ és $\Psi^T \mathbf{B} \Psi = -\mathbf{\Lambda}$ diagonális mátrixok, így azok inverze a sajátértékeik reciprokával megadható.

$$(\mathbf{I}s - \mathbf{\Lambda})^{-1} = \text{diag} \left(s - \lambda_{i,\bar{i}} \right) \Big|_{i=1 \dots n} = \text{diag} \left(\begin{matrix} \frac{1}{s - \lambda_i} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s - \bar{\lambda}_i} \end{matrix} \right) \Big|_{i=1 \dots n}$$

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{\Psi} \text{diag} \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{s-\lambda_i} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-\bar{\lambda}_i} \end{array} \right) \mathbf{\Psi}^T \Big|_{i=1 \dots n} \quad (1.42)$$

Innen a frekvenciaátviteli függvény a szorzásokat követően

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^n \left(\frac{\psi_{ri}\psi_{rj}}{\omega i - \lambda_r} + \frac{\bar{\psi}_{ri}\bar{\psi}_{rj}}{\omega i - \bar{\lambda}_r} \right), \quad (1.43)$$

ahol ij az átviteli mátrix adott i -edik sorát és j -edik oszlopát jelöli. Feltételezve, hogy a modell szabad vége mérhető és ez a gerjesztett pont is, az ehhez tartozó $H_{11}(\omega)$ frekvenciaátviteli függvény

$$H_{11}(\omega) = \sum_{r=1}^n \left(\frac{\psi_{r1}^2}{\omega i - \lambda_r} + \frac{\bar{\psi}_{r1}^2}{\omega i - \bar{\lambda}_r} \right). \quad (1.44)$$

Fontos megjegyezni, hogy ha a rendszer arányosan csillapított, akkor ψ_{r1}^2 tisztán képzetes, és ebben az esetben kifejezve a törtet a közös nevezővel, a számláló csak egy valós konstansból fog állni. Így a kapott függvény alakja megegyezik (1.25)-tel, tehát visszavezethető az arányos összefüggésre.

1.2.3. Megoldás időtartományban

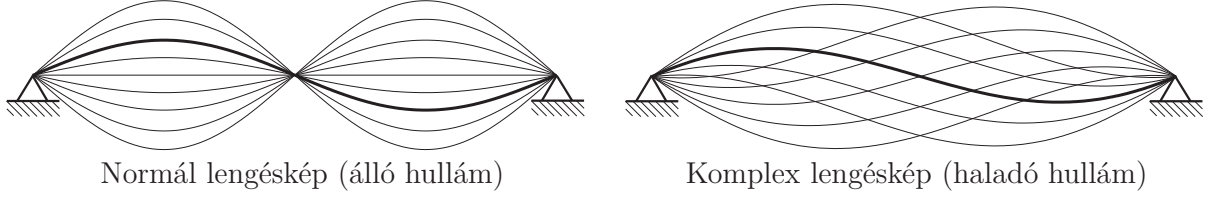
Érdemes rávilágítani az arányosan és nemarányosan csillapított rendszerek közötti különbségekre, például az időtartománybeli megoldás szemszögéből. Legyen a kiinduló egyenlet megint (1.1), amely mindkét típusú csillapítás esetén érvényes alak. Nemarányos csillapítású esetén a lengésképek komplex értékűek. Ebben az esetben a megoldás

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{r=1}^n b_r \mathbf{P}_r e^{\lambda_r t} + \bar{b}_r \bar{\mathbf{P}}_r e^{\bar{\lambda}_r t}. \quad (1.45)$$

$\mathbf{P}_r = \bar{\mathbf{P}}_r$ csak akkor teljesülhet, ha $\mathbf{P}$ tisztán valós, de ez azt jelentené, hogy a csillapítás arányos. Felhasználva az Euler-formulát, és kifejezve az exponenciális függvényt trigonometrikus függvényekkel (továbbá $\lambda_r = -\sigma_r + \gamma_r i$ és $\bar{\lambda}_r = -\sigma_r - \gamma_r i$), átrendezve a tagokat, a kapott alak

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \sum_{r=1}^n \left(\underbrace{(b_r \mathbf{P}_r + \bar{b}_r \bar{\mathbf{P}}_r)}_{\mathbf{B}_{r1}} \cos(\gamma_r t) + \underbrace{(b_r \mathbf{P}_r - \bar{b}_r \bar{\mathbf{P}}_r)}_{\mathbf{B}_{r2}} i \sin(\gamma_r t) \right) e^{-\sigma_r t} \\ \mathbf{x}(t) &= \sum_{r=1}^n (\mathbf{B}_{r1} \cos(\gamma_r t) + \mathbf{B}_{r2} \sin(\gamma_r t)) e^{-\sigma_r t}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Ebben az esetben $\mathbf{B}_{r1}$ és $\mathbf{B}_{r2}$ mindig valós értékű, n dimenziós vektorok, tehát az elmozdulás is valós értékű. b_r és $\bar{b}_r$ komplex értékek a kezdeti feltételekből meghatározhatók, azonban (1.46) nem tükrözi a nemarányosan csillapított rendszerek egy fontos tulajdonságát, és a lengésképek is nehezen azonosíthatók $\mathbf{B}_{r1,2}$ vektorokból.



1.3. ábra. Valós és komplex lengéskép közötti különbségek [6].

Használjuk fel a komplex értékű sajátvektorokat a következő alak szerint

$$\mathbf{P}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ P_{k2} \\ \vdots \\ P_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ P_{k2}^{\text{Re}} + P_{k2}^{\text{Im}}i \\ \vdots \\ P_{kn}^{\text{Re}} + P_{kn}^{\text{Im}}i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ |P_{k2}|e^{i\vartheta_{k2}} \\ \vdots \\ |P_{kn}|e^{i\vartheta_{kn}} \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

ahol k a k -edik sajátvektort, 'Im' a képzetes részt, és 'Re' a valós részt jelöli, továbbá ϑ a fázisszög illetve $|\bullet|$ a komplex szám abszolút értékét jelöli. Arányos csillapítás esetén a képzetes rész nulla, és a fázisszög szigorúan 0° vagy 180° . Behelyettesítve (1.46) egyenletbe

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{r=1}^n \left(b_r \begin{pmatrix} 1 \\ |P_{r2}|e^{i\vartheta_{r2}} \\ \vdots \\ |P_{rn}|e^{i\vartheta_{rn}} \end{pmatrix} e^{\gamma_r t} + \bar{b}_r \begin{pmatrix} 1 \\ |P_{r2}|e^{-i\vartheta_{r2}} \\ \vdots \\ |P_{rn}|e^{-i\vartheta_{rn}} \end{pmatrix} e^{-\gamma_r t} \right) e^{-\sigma_r t} \quad (1.48)$$

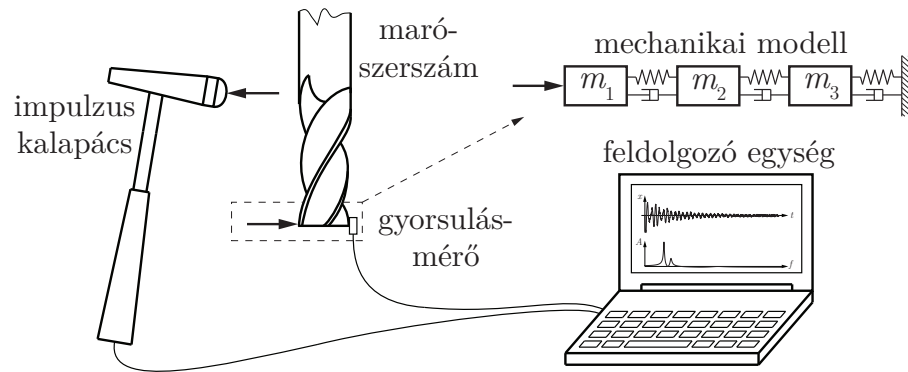
adódik. Ami átírható

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{r=1}^n \begin{pmatrix} 1 \\ |P_{r2}| \\ \vdots \\ |P_{rn}| \end{pmatrix} \circ \left(b_r \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\vartheta_{r2}} \\ \vdots \\ e^{i\vartheta_{rn}} \end{pmatrix} e^{\gamma_r t} + \bar{b}_r \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-i\vartheta_{r2}} \\ \vdots \\ e^{-i\vartheta_{rn}} \end{pmatrix} e^{-\gamma_r t} \right) e^{-\sigma_r t} \quad (1.49)$$

alakba, ahol $\circ$ a két vektor Hadamard-szorzatát jelöli (elemenkénti szorzat). Felhasználva megint az Euler-formulát, a soronkénti egyszerűsítés után a megoldás alakja

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{r=1}^n \begin{pmatrix} 1 \\ |P_{r2}| \\ \vdots \\ |P_{rn}| \end{pmatrix} \circ \left(B_{r1} \begin{pmatrix} \cos(\gamma_r t) \\ \cos(\gamma_r t + \vartheta_{r2}) \\ \vdots \\ \cos(\gamma_r t + \vartheta_{rn}) \end{pmatrix} + B_{r2} \begin{pmatrix} \sin(\gamma_r t) \\ \sin(\gamma_r t + \vartheta_{r2}) \\ \vdots \\ \sin(\gamma_r t + \vartheta_{rn}) \end{pmatrix} \right) e^{-\sigma_r t}, \quad (1.50)$$

és $B_{r1} = b_r + \bar{b}_r$, $B_{r2} = (b_r - \bar{b}_r)i$, ahol b_r és $\bar{b}_r$ a kezdeti feltételekből adóttak. (1.46) és (1.50) ekvivalensek, mivel az eltolts trigonometrikus függvények kifejezhetők tiszta trigonometrikus alakban is. Azonban ez az alak egyértelműen mutatja, hogy a nemarányosan csillapított rendszer egy haladó hullámmal jellemezhető, annak minden pontja fázisto-



1.4. ábra. Mérési összeállítás sematikus ábrája.

lásban van a többi ponthoz viszonyítva. Tehát a maximum és minimum pontokat sem ugyanabban az időpontban érik el. Összefoglalva, a következő tulajdonságokat állíthatjuk nemarányosan csillapított rendszerekről [6]:

- Lengésképek komplex értékűek, ún. komplex módusok.
- A csillapítatlan és nemarányosan csillapított rendszer lengésképe nem egyezik meg.
- Az egyenletek a hagyományos alakban nem fejezhetők ki diagonális formában, de a speciális elsőrendű átírással igen.
- A lengés során a maximum és minimum pontok elérése nem ugyanabban az időpillanatban történik.
- A lengés matematikai leírása egy haladó hullámmal történik.
- Egyik szabadsági fok sincs tisztán fázisban, vagy ellenfázisban, azok között mindig van egy kisebb fázistolás.
- A csomópontok időben nem maradnak álló pontok.

1.3. Numerikus példák

A bemutatott módszereket könnyen tesztelhetjük, ha a frekvenciaátviteli függvény ismert, ám annak érdekében, hogy realizistikusabb legyen a tesztelés, néhány lépést szükséges tenni visszafelé. Ahelyett, hogy egy mesterségesen generált FRF-et vennénk figyelembe, egy fiktív mérési folyamatot feltételezhetünk. A valóságban a dinamikai tulajdonságok ütési vagy rázási kísérletből határozhatók meg [2]. Jelen dolgozatban ütési kísérletet feltételezünk, ahogy az az 1.4-es ábrán látható.

Mérve a kimenetet és a bemenetet, utóbbi a gerjesztés, az átviteli függvény meghatározható (1.17) szerint. Ahogy azt a formula definiálja, az elmozdulás és a gerjesztő erő ismerete szükséges. A gyakorlatban a gyorsulás és az ütés ereje mérhető, de jelen esetben, mivel a gyorsulásból számítható az elmozdulás, feltételezzük, hogy az elmozdulás a mért jellemző. Az eredmények pontossága ebben az egyszerű esetben függ a mérést terhelő zajtól és a mintavételezés f_s Hz frekvenciájától. Mivel a mért adatsor nem lehet végtelen, a

mintavételezés is csak véges, valamint mesterségesen is adható zaj az eredményekhez, így az illesztés mindig fog hibát tartalmazni. A következőkben ezt vizsgálhatjuk.

1.3.1. Szimuláció

A valós mérés során a szerszám végére helyezhető egy gyorsulásmérő, majd az ellentétes oldalon megütve egy impulzuskalapáccsal azt, a keletkező rezgés mérhető. A numerikus szimuláció során nem szükséges a gerjesztést figyelembe venni, ha az egy egyszerű impulzusszerű ütés, akkor az ahhoz tartozó kezdeti feltételek is megadhatók. Ebben az alfejezetben egy három szabadsági fokú modellt vizsgálunk, amelyhez tartozó térbeli paraméterek az 1.1-es táblázatban adottak.

Az ütés előtt a rendszer nyugalomban van, tehát az elmozdulás és a sebesség is zérus. Az ütközés pillanatában, ha az erő ismert, annak impulzusából számítható az első m_1 tömegű elem ütközés utáni sebessége.

$$\Delta I_1 = m_1 v_1 + m_1 u_1 = - \int_{t_0}^{t_0+\tau} f(t) dt = -1, \quad (1.51)$$

ahol u_1 az első elem ütközés előtti sebessége, v_1 az ütközés utáni sebessége, $F(t)$ pedig a gerjesztő erő (ideális esetben egyetlen Dirac-delta impulzus $\delta(t)$) és τ az ütközés időtartama. Mivel u_1 nulla, a jobb oldalon szereplő integrál pedig definíció szerint -1 , ez alapján a kezdeti értékek sorra

$$x_i(t_0) = 0, \quad i = 1, 2, 3(\dots n), \quad (1.52)$$

$$\dot{x}_1(t_0) = -\frac{1}{m_1} \quad \text{és} \quad \dot{x}_i(t_0) = 0, \quad i = 2, 3(\dots n). \quad (1.53)$$

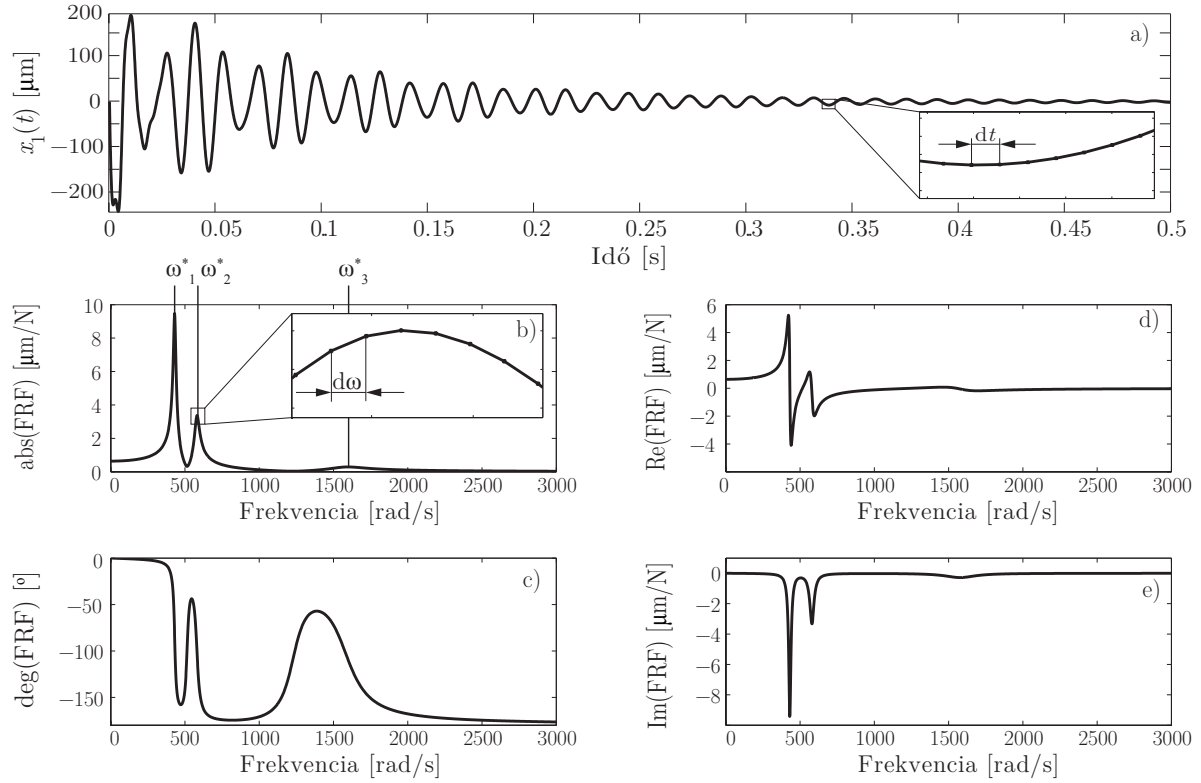
Az $x_1(t)$ -es koordinátához tartozó megoldás analitikusan számítható

$$\mathbf{v}(t) = e^{\mathbf{Z}(t-t_0)} \mathbf{v}(t_0) \quad (1.54)$$

alapján, ahol $\mathbf{v}(t)$ és $\mathbf{Z}$ (1.29) és (1.30) szerint meghatározott, és $\mathbf{v}(t_0)$ a kezdeti feltételek vektora. Az így kapott időfüggvényből a frekvenciaátviteli függvény előállítható gyors fourier transzformációs módszerrel (*Fast Fourier Transformation*, FFT). A jelen példához a MATLAB beépített *fft* és *fftshift* függvényei kerültek felhasználásra. Az 1.5 ábra egy $f_s = 4$ kHz-es mintavételezésű szimulált mérés eredményeit mutatja.

Csillapítás típusa	Tömeg [kg]			Csillapítás $\left[\frac{Ns}{m}\right] \cdot 10^2$			Merevség $\left[\frac{N}{m}\right] \cdot 10^6$		
	m_1	m_2	m_3	c_1	c_2	c_3	k_1	k_2	k_3
Arányos	4	5	100	5	2.5	25	5	2.5	25
Nemarányos	4	5	100	1	15	20	5	2.5	25

1.1. táblázat. A három szabadsági fokú modellhez tartozó térbeli paraméterek arányos és nemarányos csillapítás esetén.



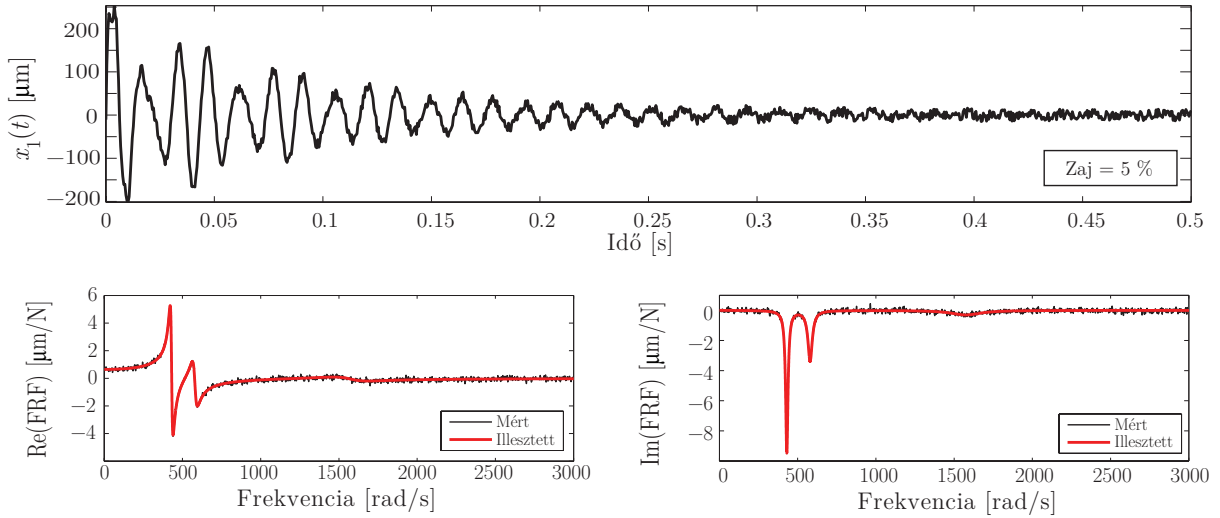
1.5. ábra. $x_1(t)$ elmozdulás elméleti mérése az ütési kísérlet során, valamint az ehhez tartozó számított frekvenciaátviteli függvény különböző nézetei $f_s = 4$ kHz esetén.

1.3.2. Görbeillesztés

A [9]-es szakirodalom alapján, bizonyos lineáris illesztési technikák (Linear Least Squares) nem képesek megfelelően pontos eredményt produkálni, de nemlineáris módszerek igen, mint például nemlineáris legkisebb négyzetek módszere (NLLS). Másrésről a gyakorlatban elfogadott racionális polinomtörtillesztés (*Rational Fraction Polynomial Method*), mely egy lineáris probléma megoldására vezet vissza is felvet problémákat. Utóbbi esetében például a hamis sajátértékek kiszűrésére van szükség, miközben az illesztés rendszámát folyamatosan növelve lehet pontosítani az eredményeket [2, 10, 11]. A jelen dolgozatban a MATLAB beépített *lsqcurvefit* függvénye került felhasználásra annak érdekében, hogy egy egyszerű, könnyen alkalmazható módszert készítsünk, amely nagyon hatékonyan alkalmazható a mintapéldákon, alacsony szabadsági fokú esetekben. Ez a beépített függvény egy nemlineáris legkisebb négyzetek módszerét alkalmazó algoritmus, amellyel iteratív módon lehet minimalizálni a következő hibafüggvényt

$$\min ||H_{\text{illesztett}}(\omega) - H_{\text{mért}}(\omega)||_2^2, \quad (1.55)$$

ahol $H_{(\bullet)}(\omega)$ a komplex frekvenciaátviteli függvény. Az így felhasznált program a mért frekvenciaátviteli függvény valós és képzetes részére (1.5 ábra d) és e) diagramja) egyszerre illeszti a modális paramétereket. Annak ellenére, hogy a választott beépített függvény



1.6. ábra. A szimulált frekvenciaátviteli függvényre illesztett eredmény arányos csillapítás esetén $f_s = 4$ kHz-es mintavételezéssel és $t_{\max} = 0.5$ s-os mérési adathosszal.

képes komplex bemenettel is operálni, a valós részekre való szétválasztás alkalmasabb módszernek bizonyult. Ennek alapján a pontos minimalizálandó függvény

$$\min \left\| \begin{pmatrix} H_{\text{illesztett}}^{\text{Re}}(\omega) \\ H_{\text{illesztett}}^{\text{Im}}(\omega) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} H_{\text{mért}}^{\text{Re}}(\omega) \\ H_{\text{mért}}^{\text{Im}}(\omega) \end{pmatrix} \right\|_2^2, \quad (1.56)$$

Az iteráció során célszerű az illesztendő modális paraméterekre alsó és felső határokat beállítani, így kizárható a fizikailag irreális paraméterek megjelenése. A mért frekvenciaátviteli függvény általában a legdominánsabb módusokkal és a hozzájuk tartozó ω_i^* rezonanciafrekvenciákkal közelíthető. Bár a rezonanciafrekvencia eltér mind a csillapított, mint a csillapítatlan rendszer sajátfrekvenciájától, azonban az igaz, hogy gyengén csillapított esetben a rezonancia közel fog esni $\omega_{n,i}$ csillapítatlan sajátfrekvenciához. Így az *lsqcurvefit* numerikus megoldóhoz a kezdeti értékek megadhatók alacsony csillapítási tényezőt feltételezve és a rezonanciafrekvenciát lemérve.

1.3.3. Példa arányos csillapítás paramétereinek illesztésére

Ahogy az már bemutatásra került az 1.1.3-as alfejezetben, arányos csillapítás esetén a frekvenciaátviteli függvény modális térben felírt parametrikus alakja egy n szabadsági fokú modell esetén

$$H(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{\phi_{r1}^2}{-\omega^2 + 2\xi_r\omega_{n,r}\omega i + \omega_{n,r}^2}. \quad (1.57)$$

Az ismeretlen paraméterek ϕ_{r1} , ξ_r , $\omega_{n,r}$, és $r = 1, 2, \dots, n$ valamint mindegyik valós értékű. Ennek eredményeképpen $3n$ ismeretlen paraméter meghatározására van szükség.

Az 1.6 ábra egy három szabadsági fokú modell ($n = 3$) eredményeit mutatja. A fiktív mérés során a végpont elmozdulását mérjük 4 kHz-es mintavételezési frekvenciával, majd

az eredményekhez utólag 5% zajt adunk (1% zaj az a normál eloszlású zavarás a mérési adatokon, amelynek maximum amplitúdója a maximum elmozdulás értékének 1%-a). Az így kapott elmozdulásból gyors Fourier-transzformációval előállítható a frekvenciaátviteli függvény, amely már illeszthető. Az ábrán a fekete vonal a „szimulált mért” eredményt, míg piros vonal az erre illesztett eredményt mutatja. A pontos modális paraméterek az 1.2-es táblázatban megtalálhatók 0%, 2% és 5% mesterséges zaj esetén. Abban esetben ha nincs zaj adva a mérési adatokhoz, meglehetősen pontosan azonosíthatók a paraméterek, annak ellenére, hogy viszonylag alacsony a mintavételezés. Magasabb mintavételezés esetén az illesztés még pontosabb. Abban az esetben ha a zaj 2% vagy 5%-ra emelkedik, még mindig meglepően pontos eredmény nyerhető, a hiba 1% alatti. Az is megfigyelhető, hogy a legdominánsabb módusok meghatározása a legpontosabb, míg a legkevésbé meghatározó módusok a zajos mérésben akár el is veszhetnek. Ha a mérés az említettnél is nagyobb zajjal terhelt, a legkisebb módus teljesen eltűnne, de a megmaradó kettő módus illesztése továbbra is elfogadható maradna. Fontos megjegyezni, hogy ez egy egyszerű, mesterségesen generált példa, valós mérés esetén az illesztés sokkal érzékenyebb.

Zaj	ω_n [rad/s]			ξ [%]			ϕ [$\sqrt{\text{rad/kg}}$] $\cdot 10^2$		
Eredeti	430.88	579.85	1582.13	2.15	2.90	7.91	27.42	25.33	33.27
0%	430.79	579.85	1582.14	2.16	2.88	7.80	27.45	25.24	33.02
2%	430.79	579.94	1578.96	2.15	2.86	7.57	27.46	25.18	32.74
5%	430.81	579.90	1583.91	2.15	2.82	7.67	27.45	25.19	32.54

1.2. táblázat. Modális paraméterek meghatározása arányos esetben $f_s = 4$ kHz-es mintavételezési frekvencia esetén.

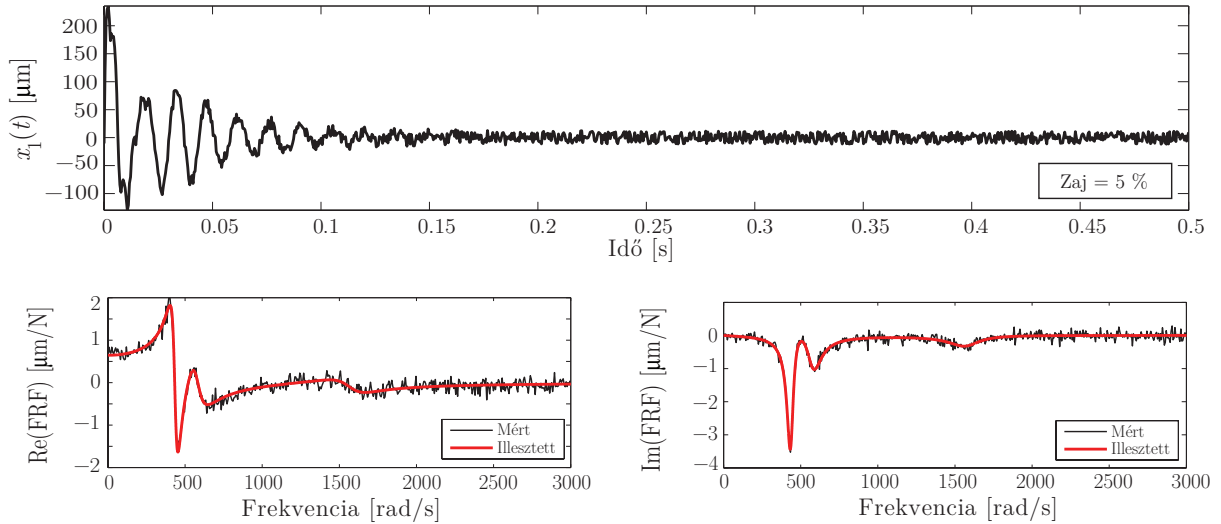
1.3.4. Példa nemarányos csillapítás paramétereinek illesztésére

A legtöbb esetben a nemarányos csillapítás elmélete közelebb esik a valósághoz, annak ellenére, hogy ez is csak egy egyszerűsített modell, hiszen a nemlinearitások és a nemviszkózus csillapítás továbbra sem szerepel az elméletben. Ennek ellenére a matematikai leírás nagyon hasonló, de vannak eltérések. Ebben az alfejezetben a nemarányosan csillapított esetet vizsgáljuk, amelynek paraméterei az 1.1-es táblázatban megtalálhatók. Ez a rendszer erősen nemarányos jellegű, a szabadsági fokok közötti fázistolás $1 \dots 50^\circ$ közötti.

Ahogy az már bemutatásra került az 1.2.2-es alfejezetben, a frekvenciaátviteli függvény felírható, mint

$$H(\omega) = \sum_{r=1}^n \left(\frac{\psi_{r1}^2}{\omega i - \lambda_r} + \frac{\bar{\psi}_{r1}^2}{\omega i - \bar{\lambda}_r} \right), \quad (1.58)$$

ahol $\lambda_r = -\sigma_r + i\gamma_r$ és ψ_{r1}^2 egy komplex szám, így kifejezhető $\psi_{r1}^2 = U_{r1} + V_{r1}i$ alakban.



1.7. ábra. A mért frekvenciaátviteli függvényre illesztett eredmény nemarányos csillapítás esetén $f_s = 4$ kHz-es mintavételezéssel és $t_{\max} = 0.5$ s-os mérési adathosszal.

Így a frekvenciaátviteli függvény egy áttekinthetőbb alakja

$$H(\omega) = \sum_{r=1}^n \left(\frac{U_r + V_r i}{\omega i + \sigma_r - \gamma_r i} + \frac{U_r - V_r i}{\omega i + \sigma_r + \gamma_r i} \right) \quad (1.59)$$

Ebben a reprezentációban az ismeretlen paraméterek U_r , V_r , σ_r , γ_r és $r = 1, 2, \dots, n$, amely $4n$ ismeretlent eredményez (továbbá $\sigma_r = \xi_r \omega_{n,r}$ és $\gamma_r = \sqrt{1 - \xi_r^2} \omega_{n,r}$).

Hasonlóan az arányos esethez, egy nemlineáris legkisebb négyzetek módszere került alkalmazásra annak érdekében, hogy a paraméterek egyszerűen identifikálhatóak legyenek. A keresés kezdeti feltételeinek megadása a következők szerint történhet. Feltételezhető egy alacsony, néhány százalékos csillapítási tényező, valamint a rezonanciafrekvenciák használhatók a csillapítatlan sajátfrekvenciák becslésére. Ezen felül U, V is becsülhető, de zérus kezdeti értékből is indítható. Az eredmények megtalálhatók a fenti három szabadsági fokú modell esetében az 1.3-as táblázatban és az 1.7-es ábrán.

Zaj	ω_n [rad/s]			ξ [%]			ψ [$\sqrt{\text{rad} \cdot \text{s}/\text{kg}} \cdot 10^3$]		
Eredeti	436.11	575.93	1573.79	5.72	10.13	6.78	5.64+7.53i	7.09+4.13i	3.72+4.70i
0%	436.11	576.10	1574.41	5.71	10.13	6.82	5.64+7.53i	7.08+4.14i	3.71+4.73i
2%	436.09	576.53	1570.63	5.68	10.09	6.84	5.65+7.50i	7.03+4.13i	3.77+4.70i
5%	436.01	576.64	1566.13	5.67	10.32	7.46	5.63+7.50i	6.98+4.21i	3.90+4.69i

1.3. táblázat. Modális paraméterek meghatározása nemarányos esetben $f_s = 4$ kHz-es mintavételezési frekvencia esetén.

2. fejezet

Szerszámgéprezgések

Az időkésés egy a mérnöki problémákban gyakran megjelenő jelenség. Ilyen terület például a kerékdinamika, autókövetési modellek, szabályozórendszerek, vagy szerszámgéprezgések [4]. Ebben a fejezetben esztergálás és marási folyamat stabilitását valamint a stabilitási térképek érzékenységet vizsgáljuk egyszerűbb mechanikai modelleken keresztül.

2.1. Esztergálás

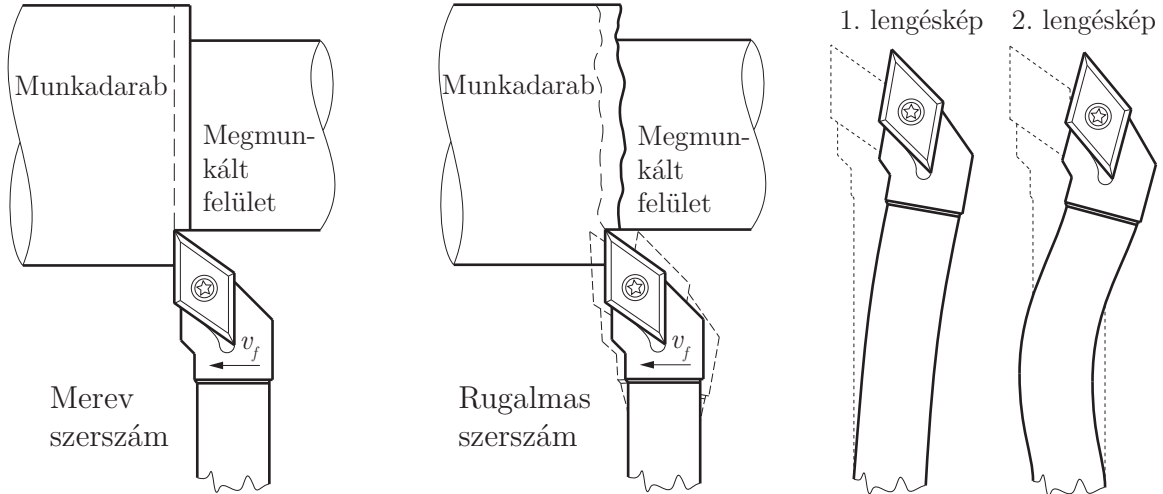
Az 1960-as években Tobias, Tlustý és számos kutató kiemelkedő tevékenységének köszönhetően az ún. *regeneratív hatások* váltak az instabil rezgések legelfogadottabb tudományos magyarázatává [4]. Az anyagleválasztási folyamat közben, a szerszám hajlító lengéseinek következtében a forgács vastagsága változik, melynek eredményeképpen a kialakult felület egyenetlen lesz. Az ideálisan merev és rugalmas szerszám közötti különbséget szemlélteti a 2.1-es ábra. Különbség, hogy utóbbi esetében a változó forgácsvastagság egyben változó forgácsoló erőt is gerjeszt.

A rendszer stabilitási tulajdonságait az ún. stabilitási térképeken (*stability lobe diagram*) szokás ábrázolni, ahol a fordulatszám függvényében ábrázolandó a maximális fogásmélység, melyek még rezgések nélkül elérhetők. Ezek a diagramok hasznos információval szolgálnak gyártástechnológusoknak, hogy optimális paraméterek alapján tervezhessék meg a gyártási folyamatot.

A szakirodalomban általánosan alkalmazott mechanikai modell látható a 2.2-es ábrán, ahol az y irányú (tangenciális) rezgést elhanyagolhatónak feltételezzük. Ezzel szemben x irányban, mely egyben az előtolás iránya is, egy több szabadsági fokú modellel vehető figyelembe a különböző módusok hatása. Felhasználva ezt a feltételezést, a leíró egyenletek késleltetett típusú differenciálegyenletek, ahol az időkésés pontszerű, és időben állandó.

A 2.2-es ábra alapján a mozgásegyenlet a több szabadsági fokú modell esetében

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (2.1)$$



2.1. ábra. Az esztergálás mechanikai modellje a felületi regeneratív hatással.

ahol $\mathbf{f}(t) = [F_x(t) \ 0 \dots 0]^T$, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ és a forgácsolási erőre a kísérleti eredmények alapján meghatározott összefüggés

$$F_x(t) = K_x w h^q(t). \quad (2.2)$$

K_x a fajlagos forgácsoló erő x irányban, w a fogásmélység, $h(t)$ az időben változó forgácsvastagság, q pedig a forgácsolási erő-exponens. Ha a szerszám ideálisan merev, akkor $h(t) = h_0$. A valóságban azonban a szerszám rezgéseket végez és egy fordulat után a hullámos felület hatást gyakorol a pillanatnyi forgácsolási erőre. A forgácsvastagság így számítható az előtolásból, valamint a szerszám pillanatnyi és egy fordulattal korábbi pozíciójából. A τ időkézés megadható $\tau = 60/\Omega$ alakban, ahol Ω a fordulatszám (1/min, rpm). Az időben változó forgácsvastagság meghatározható, mint

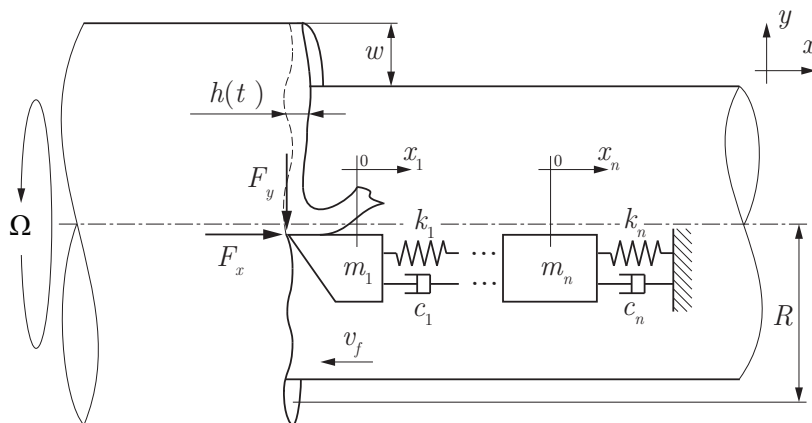
$$h(t) = v_f \tau + x_1(t - \tau) - x_1(t),$$

ahol v_f az előtolás sebessége. A mozgásegyenlet ennek megfelelően

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} K_x w (v_f \tau + x_1(t - \tau) - x_1(t))^q \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

A megoldás általánosan kereshető $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_p + \boldsymbol{\xi}(t)$ alakban, ahol $\mathbf{x}_p$ a statikus deformációhoz köthető, míg $\boldsymbol{\xi}(t)$ kis perturbáció az egyensúlyi helyzet körül. A forgácsolási erő Taylor-sorba fejthető, majd a magasabb rendű tagok elhanyagolásával linearizálható, így

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\xi}}(t) + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) + \mathbf{K}\boldsymbol{\xi}(t) = \boldsymbol{\kappa} (\boldsymbol{\xi}(t - \tau) - \boldsymbol{\xi}(t)), \quad (2.4)$$



2.2. ábra. Felületi regeneratív hatás, az esztergálás mechanikai modellje.

valamint

$$\kappa = \begin{pmatrix} \kappa & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \kappa = K_x w q (v_f \tau)^{q-1} = K_x w q h_0^{q-1}, \quad (2.5)$$

ahol κ a vágási együttható, és h_0 az állandó forgácsvastagság. Érdeemes megjegyezni, hogy κ arányos a w fogásmélységgel, amely fontos megmunkálási paraméter. Részletes levezetés megtalálható [4]-ben.

2.1.1. Vizsgálat frekvenciatartományban

Jelen pontig a levezetés időtartományban történt. A dolgozat témájából kifolyólag a frekvenciaátviteli függvény közvetlen felhasználására alkalmas módszer kerül először bemutatásra, de fontos megjegyezni, hogy a mechanikai modell alapján, a D-görbe módszer segítségével, is van lehetőség a stabil tartományok meghatározására [4].

Ahogy az már bemutatásra került az 1.1.3-as alfejezetben, a frekvenciaátviteli mátrix megadható a bemenet és a kimenet Fourier-transzformáltjával, vagyis

$$\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{X}(\omega) \mathbf{F}^{-1}(\omega). \quad (2.6)$$

A forgácsolási erő megadható

$$\mathbf{f}(t) = \kappa (\mathbf{x}(t - \tau) - \mathbf{x}(t)) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathbf{F}(\omega) = \kappa (e^{-i\omega\tau} - 1) \mathbf{X}(\omega) \quad (2.7)$$

szerint. A tagok átrendezését követően, majd visszahelyettesítve (2.7)-be, a kifejezés alakja

$$\mathbf{F}(\omega) = \kappa (e^{-i\omega\tau} - 1) \mathbf{H}(\omega) \mathbf{F}(\omega). \quad (2.8)$$

A fenti összefüggés nullára rendezve

$$\left(\mathbf{I} - \left(e^{-i\omega\tau} - 1\right) \kappa \mathbf{H}(\omega)\right) \mathbf{F}(\omega) = \mathbf{0}. \quad (2.9)$$

Mivel $\mathbf{F}(\omega) \neq \mathbf{0}$, így $\det(\mathbf{I} - (e^{-i\omega\tau} - 1) \kappa \mathbf{H}(\omega)) = 0$ feltételnek szükségszerűen teljesülnie kell. A determináns kifejtése lényegesen egyszerűsíthető, mivel csak az első koordináta gerjesztett. A szorzások elvégzése után látható, hogy csak $\mathbf{H}(\omega)$ első sora számít, míg a determináns kifejtését követően minden nemdiagonális elem is kiesik.

$$\det \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} - (e^{-i\omega\tau} - 1) \begin{pmatrix} \kappa & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) & \dots & H_{1n}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & \dots & H_{2n}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1}(\omega) & H_{n2}(\omega) & \dots & H_{nn}(\omega) \end{pmatrix} \right) =$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \kappa(e^{-i\omega\tau} - 1)H_{11}(\omega) & 1 - \kappa(e^{-i\omega\tau} - 1)H_{12}(\omega) & \dots & -\kappa(e^{-i\omega\tau} - 1)H_{1n}(\omega) \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Végül

$$\det(\mathbf{I} - (e^{-i\omega\tau} - 1) \kappa \mathbf{H}(\omega)) = 1 - \kappa(e^{-i\omega\tau} - 1)H_{11}(\omega) = 0 \quad (2.10)$$

adódik, amelyből kifejezhető az inverz frekvenciaátviteli függvény

$$H_{11}^{-1}(\omega) = \kappa(e^{-i\omega\tau} - 1) = \Lambda_{\text{Re}} + i\Lambda_{\text{Im}}. \quad (2.11)$$

Felhasználva az $e^{-i\omega\tau} = \cos(\omega\tau) - i\sin(\omega\tau)$ azonosságot, (2.11) valós és képzetes része felírható

$$\Lambda_{\text{Re}} = \kappa(\cos(\omega\tau) - 1) \quad \text{és} \quad \Lambda_{\text{Im}} = -\kappa\sin(\omega\tau)$$

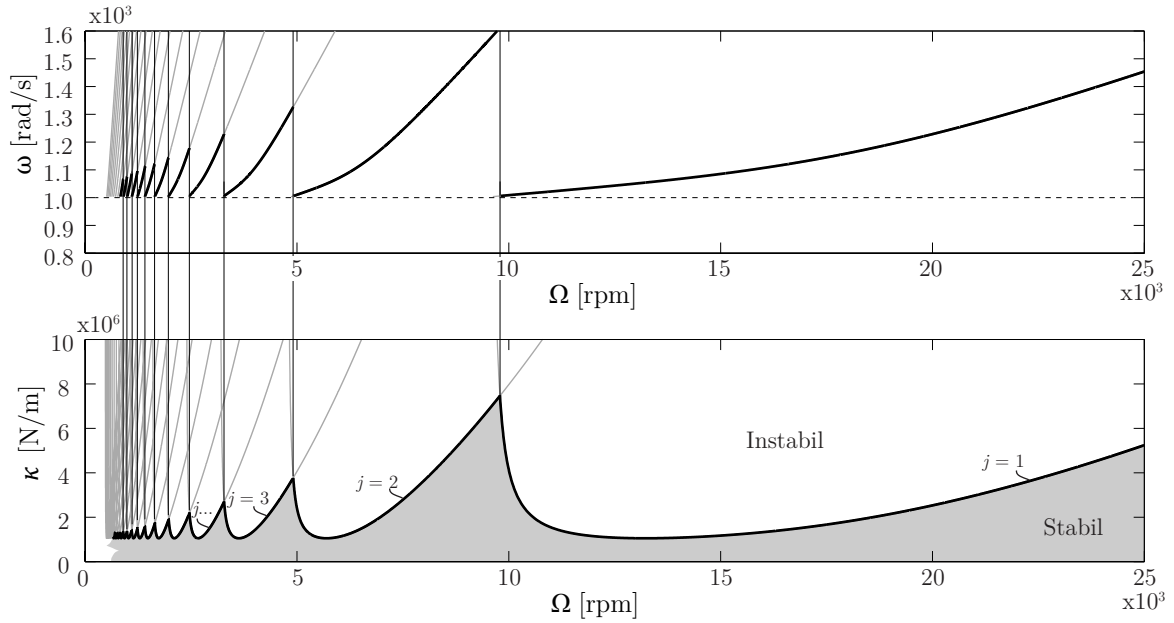
szerint. Véve a két kifejezés hányadosát, κ eliminálható az egyenletekből

$$\frac{\Lambda_{\text{Re}}}{\Lambda_{\text{Im}}} = \frac{1 - \cos(\omega\tau)}{\sin(\omega\tau)}. \quad (2.12)$$

Ez a forma egy trigonometrikus azonossághoz vezet, felhasználva

$$\left. \begin{aligned} \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1 - \cos(x)}{2} \\ \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1 + \cos(x)}{2} \end{aligned} \right\} \text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}} = \dots$$

$$\dots = \pm \sqrt{\frac{(1 - \cos(x))(1 - \cos(x))}{(1 + \cos(x))(1 - \cos(x))}} = \pm \sqrt{\frac{(1 - \cos(x))^2}{1 - \cos^2(x)}} = \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}$$



2.3. ábra. Stabilitástérkép és berezgési frekvenciák a határgörbéken egy szabadsági fokú rendszer esetén, ahol $\omega_n = 1000$ [rad/s], $\xi = 0.05$ [-], $\psi^2 = -5i \cdot 10^{-5}$ [rad · s/kg].

összefüggéseket, a kifejezés egyszerűsítés után

$$\frac{\Lambda_{\text{Re}}}{\Lambda_{\text{Im}}} = \frac{1 - \cos(\omega\tau)}{\sin(\omega\tau)} = \text{tg}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right). \quad (2.13)$$

Megoldva az egyenlete τ -ra, az eredmény

$$\tau = \frac{2}{\omega} \left(\arctg\left(\frac{\Lambda_{\text{Re}}}{\Lambda_{\text{Im}}}\right) + j\pi \right), \quad j = 0, 1, 2 \dots \quad (2.14)$$

Mivel $\tau = 60/\Omega$, a fordulatszám kifejezhető

$$\Omega = \frac{30\omega}{\arctg\left(\frac{\Lambda_{\text{Re}}}{\Lambda_{\text{Im}}}\right) + j\pi}, \quad j = 0, 1, 2 \dots \quad (2.15)$$

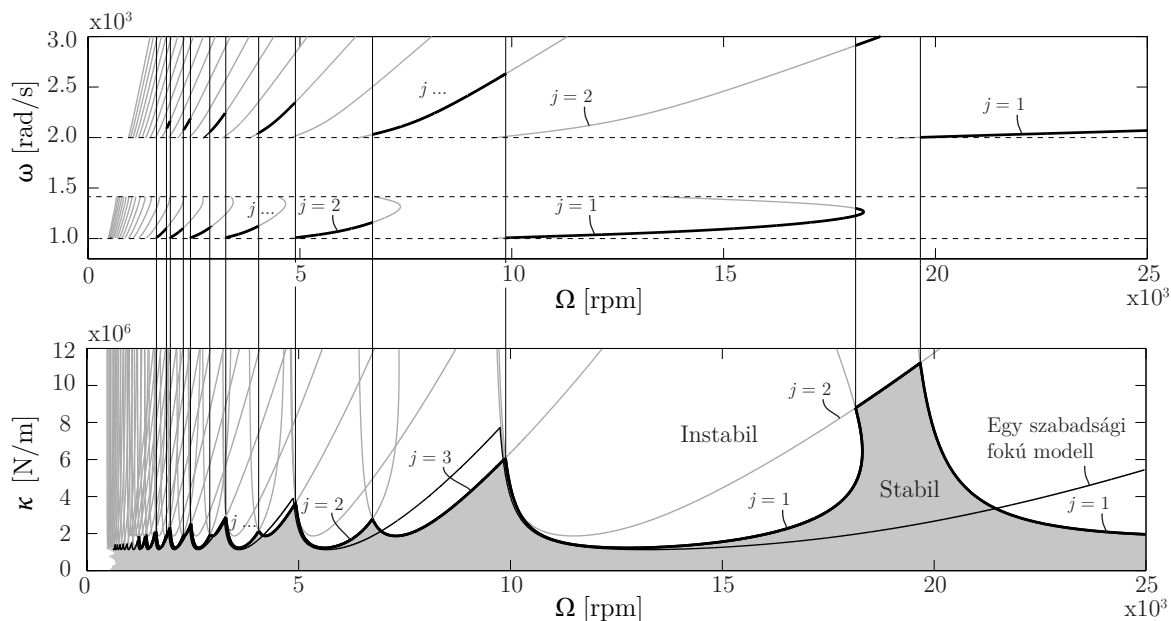
Ebből az ehhez tartozó vágási együttható

$$\left. \begin{array}{l} \Lambda_{\text{Re}} + \kappa = \kappa \cos(\omega\tau) \\ \Lambda_{\text{Im}} = -\kappa \sin(\omega\tau) \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\bullet)^2 \\ (\bullet)^2 \end{array} \rightarrow \Lambda_{\text{Re}}^2 + 2\Lambda_{\text{Re}}\kappa + \kappa^2 + \Lambda_{\text{Im}}^2 = \kappa^2,$$

valamint

$$\kappa = -\frac{\Lambda_{\text{Re}}^2 + \Lambda_{\text{Im}}^2}{2\Lambda_{\text{Re}}} \quad \text{és} \quad w = \frac{\kappa}{K_x q h_0^{q-1}}. \quad (2.16)$$

A stabilitás határgörbéi (2.15) és (2.16)-ból numerikusan határozhatók meg, ha a frekvenciaátviteli függvény ismert és $\omega \in [0, \infty)$ között futtatott. A módszer előnye, hogy közvetlenül a mérési eredmény felhasználható, nincs szükség illesztésre. Továbbá a számításigény jóval alacsonyabb, mint más módszereknél és a szabadsági fokok számának



2.4. ábra. Stabilitástérkép és berezgési frekvenciák a határgörbéken kettő szabadsági fokú rendszer esetén, ahol $\omega_{n,1} = 1000$, $\omega_{n,2} = 2000$ [rad/s], $\xi_1 = \xi_2 = 0.05$ [-], $\psi_1^2 = \psi_2^2 = -5i \cdot 10^{-5}$ [rad · s/kg].

definiálására sincs szükség. Egy egy- és egy kettő szabadsági fokú modell eredményei láthatók a 2.3-as és 2.4-es ábrákon.

Érdeemes megjegyezni, hogy az eredmények receptancia frekvencia átviteli függvény esetére kerültek bemutatásra (erő-elmozdulás FRF). Ha a mobilitás (sebesség-erő) vagy az accelerancia (gyorsulás-erő) ismert, akkor az alábbi helyettesítéssel élve elvégezhető a konverzió: $\mathbf{A}(s) = s\mathbf{V}(s) = s^2\mathbf{X}(s)$ kapcsolat alapján, ahol $\mathbf{A}(s)$ a gyorsulás, $\mathbf{V}(s)$ pedig a sebesség Laplace transzformáltja, míg $s = i\omega$ a komplex változó, megmutatható, hogy a különböző frekvenciaátviteli függvények kifejezhetők egymásból $i\omega$ -val vagy $(i\omega)^2 = -\omega^2$ -val értelemszerűen szorozva vagy osztva. Az elméleti stabilitástérkép nem változik.

2.1.2. Szemi-diszkretizáció

A lineáris rendszer stabilitása vizsgálható egyben közvetlenül (2.4) alapján a szemi-diszkretizációs módszerrel [4], ehhez azonban szükségesek a modális paraméterek. A mozgásegyenlet átírható elsőrendű alakba

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K} + \kappa) & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\kappa & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(t - \tau) \\ \dot{\xi}(t - \tau) \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Annak érdekében, hogy a numerikus számítást később lényegesen felgyorsítsuk, írjuk fel a második mátrixot a következő szerint. A tömegmátrix feltételezeten diagonális és κ egyetlen nemzérus elemet tartalmaz csak. Ahelyett, hogy egy $2n \times 2n$ -es mátrixot hasz-

nálnánk a felíráshoz, a szorzat felírható két darab $2n$ dimenziós vektor segítségével is, vagyis

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\boldsymbol{\kappa} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\kappa}{m_1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{m_1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Ennek megfelelően az állapottermodell

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{A}_s \mathbf{z}(t) + \mathbf{B}_s u(t - \tau), \\ u(t) &= \mathbf{C}_s \mathbf{z}(t) \end{aligned} \quad (2.19)$$

ahol

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K} + \boldsymbol{\kappa}) & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{B}_s &= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{C}_s = \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{m_1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

és $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n}$ az állapotvektor, $u \in \mathbb{R}$, $\mathbf{A}_s \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ a rendszermátrix, $\mathbf{B}_s \in \mathbb{R}^{2n}$ a bemeneti mátrix és $\mathbf{C}_s \in \mathbb{R}^{2n}$ (jelen esetben utóbbi kettő vektorok).

A szemi-diszkrétizációs módszer lépései [4] alapján a következők. (2.19) megoldása $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$ kezdeti értékekkel

$$\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{A}_s(t-t_0)} \mathbf{z}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}_s(t-s)} \mathbf{B}_s u(s - \tau) ds. \quad (2.20)$$

A módszer alapján, feltételezve, hogy a késleltetett tagok $t \in [t_i, t_{i+1})$ intervallumon konstans értékűek, bevezetve $h = t_{i+1} - t_i$ numerikus időlépést és az időkétséget $\tau = (r + 1/2)h$ szerint definiálva, ahol r a felbontás, a következő alakot kapjuk

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{i+1} &= e^{\mathbf{A}_s h} \mathbf{z}_i + \int_0^h e^{\mathbf{A}_s(h-s)} \mathbf{B}_s ds u_{i-r} \\ u_i &= \mathbf{C}_s \mathbf{z}_i. \end{aligned}$$

Így az eredeti késleltetett rendszert egy h lépésközű diszkrét leképezéssel közelítjük, amely átírható $\mathbf{Z}_{i+1} = \mathcal{G} \mathbf{Z}_i$ alakba. Részletesen kiírva

$$\begin{pmatrix} \mathbf{z}_{i+1} \\ u_i \\ u_{i-1} \\ \vdots \\ u_{i-r+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{C}_s & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}_i \\ u_{i-1} \\ u_{i-2} \\ \vdots \\ u_{i-r} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

ahol

$$\mathbf{P} := e^{\mathbf{A}_s h}, \quad \mathbf{Q} := \int_0^h e^{\mathbf{A}_s(h-s)} \mathbf{B}_s ds, \quad (2.22)$$

továbbá, ha $\mathbf{A}_s^{-1}$ létezik, akkor az integrálás analitikus megoldása

$$\mathbf{Q} = (e^{\mathbf{A}_s h} - \mathbf{I}) \mathbf{A}_s^{-1} \mathbf{B}_s. \quad (2.23)$$

Az együttthatómátrix $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^{2n+r \times 2n+r}$, valamint $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ és $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{2n \times 1}$. A $\mathcal{G}$ együtttható mátrix adja a közelítő leképezés monodromi mátrixát, ezért a közelítő rendszer stabil, ha $\mathcal{G}$ legnagyobb sajátértékének abszolút értéke kisebb, mint egy. Ezt a feltételt szükséges vizsgálni az elkészítendő térkép minden egyes pontjában. Az eredményeket összeállítva elkészíthető a stabilitástérkép. Az általános módszer, részteles levezetésekkel és matematikai bizonyításokkal megtalálható [4]-ben.

A módszer a modális térben értelmezett alak esetén is használható. A terjedelemre való tekintettel csak a nemarányos alak kerül ismertetésre, de hasonló módon arányos csillapítás esetén is levezethetők az összefüggések. Nemarányos csillapítás esetén a linearizált egyenlet

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \ddot{\xi}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \xi(t-\tau) \\ \dot{\xi}(t-\tau) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{pmatrix} \right). \quad (2.24)$$

Legyen a fenti egyenlet jelölve a következők szerint

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{B} \mathbf{v}(t) = \tilde{\kappa} (\mathbf{v}(t-\tau) - \mathbf{v}(t)), \quad (2.25)$$

amely már bemutatásra került az 1.2-es alfejezetben. Felhasználva az erre érvényes modális transzformációt $\Psi \mathbf{z}(t) = \mathbf{v}(t)$, majd megszorozva Ψ^T -tal

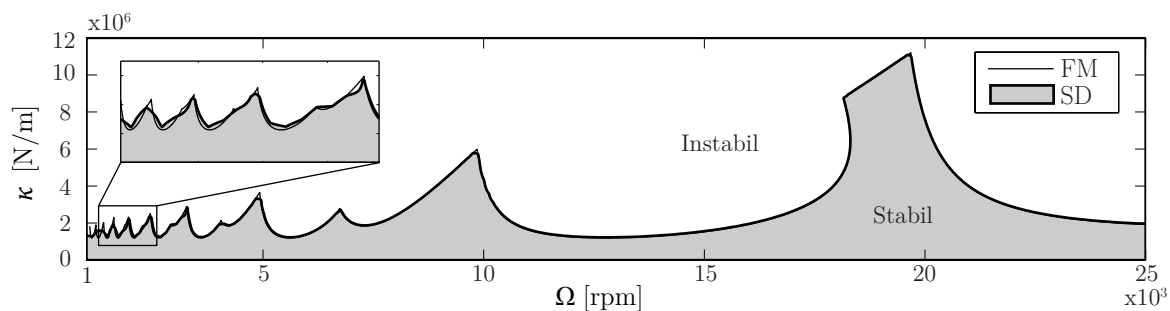
$$\Psi^T \mathbf{A} \Psi \dot{\mathbf{z}}(t) + \Psi^T \mathbf{B} \Psi \mathbf{z}(t) = \Psi^T \tilde{\kappa} \Psi (\mathbf{z}(t-\tau) - \mathbf{z}(t)) \quad (2.26)$$

eredményhez juthatunk. A transzformáció tulajdonságait felhasználva, átrendezve a tagokat, az átírt alak

$$\dot{\mathbf{z}}(t) - \Lambda \mathbf{z}(t) = \tilde{\kappa}_m (\mathbf{z}(t-\tau) - \mathbf{z}(t)) \quad (2.27)$$

ahol $\tilde{\kappa}_m = \Psi^T \tilde{\kappa} \Psi$. Hasonlóan az előző esethez, mivel $\tilde{\kappa}$ -nak csak egyetlen eleme nemzérus, így

$$\tilde{\kappa}_m = \Psi^T \tilde{\kappa} \Psi = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \bar{\psi}_{11} & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \psi_{n1} & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \bar{\psi}_{n1} & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \kappa & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \psi_{11} & \bar{\psi}_{11} & \cdots & \psi_{n1} & \bar{\psi}_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$



2.5. ábra. A frekvenciamódszer (FM) és a szemi-diszkretizáció (SD, $r = 100, 200 \times 100$) összehasonlítása kettő szabadsági fokú rendszer esetén, ahol $\omega_{n,1} = 1000$, $\omega_{n,2} = 2000$ [rad/s], $\xi_1 = \xi_2 = 0.05$ [-], $\psi_1^2 = \psi_2^2 = -5i \cdot 10^{-5}$ [rad · s/kg].

$$= \kappa \begin{pmatrix} \psi_{11}\psi_{11} & \psi_{11}\bar{\psi}_{11} & \cdots & \psi_{11}\psi_{n1} & \psi_{11}\bar{\psi}_{n1} \\ \bar{\psi}_{11}\psi_{11} & \bar{\psi}_{11}\bar{\psi}_{11} & \cdots & \bar{\psi}_{11}\psi_{n1} & \bar{\psi}_{11}\bar{\psi}_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \psi_{n1}\psi_{11} & \psi_{n1}\bar{\psi}_{11} & \cdots & \psi_{n1}\psi_{n1} & \psi_{n1}\bar{\psi}_{n1} \\ \bar{\psi}_{n1}\psi_{11} & \bar{\psi}_{n1}\bar{\psi}_{11} & \cdots & \bar{\psi}_{n1}\psi_{n1} & \bar{\psi}_{n1}\bar{\psi}_{n1} \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} \psi_{11} \\ \bar{\psi}_{11} \\ \vdots \\ \psi_{n1} \\ \bar{\psi}_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{11} & \bar{\psi}_{11} & \cdots & \psi_{n1} & \bar{\psi}_{n1} \end{pmatrix}.$$

A fenti levezetést felhasználva, az állapottérmodell mátrixai

$$\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_s = \mathbf{\Lambda} - \tilde{\mathbf{\kappa}}_m,$$

$$\mathbf{B}_s = \kappa \begin{pmatrix} \psi_{11} & \bar{\psi}_{11} & \cdots & \psi_{n1} & \bar{\psi}_{n1} \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{C}_s = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \bar{\psi}_{11} & \cdots & \psi_{n1} & \bar{\psi}_{n1} \end{pmatrix}.$$

2.1.3. Érzékenységvizsgálat esztergálás esetén

A dolgozat elsődleges célja a megmunkálási folyamatok stabilitásának vizsgálata a modális paraméterek függvényében. Feltételezve különféle illesztési hibákat, részletesen bemutatásra kerül, hogyan is változik meg a stabilitástérkép azok hatására. A feltételezett rendszer kettő szabadsági fokú, ezt közelítjük különféle szempontok alapján. A 2.1-es táblázatban a vizsgált kettő szabadsági fokú modell modális paraméterei találhatók meg.

Módus	ω_n [rad/s]	ξ [%]	ψ^2 [rad · s/kg] · 10^{-5}
1	1000.0	5.00	-5.00i
2	2000.0	2.50	-5.00i

2.1. táblázat. Kettő szabadsági fokú modell modális paraméterei az érzékenységi vizsgálathoz.

Hiba a modális paraméterek becslésében

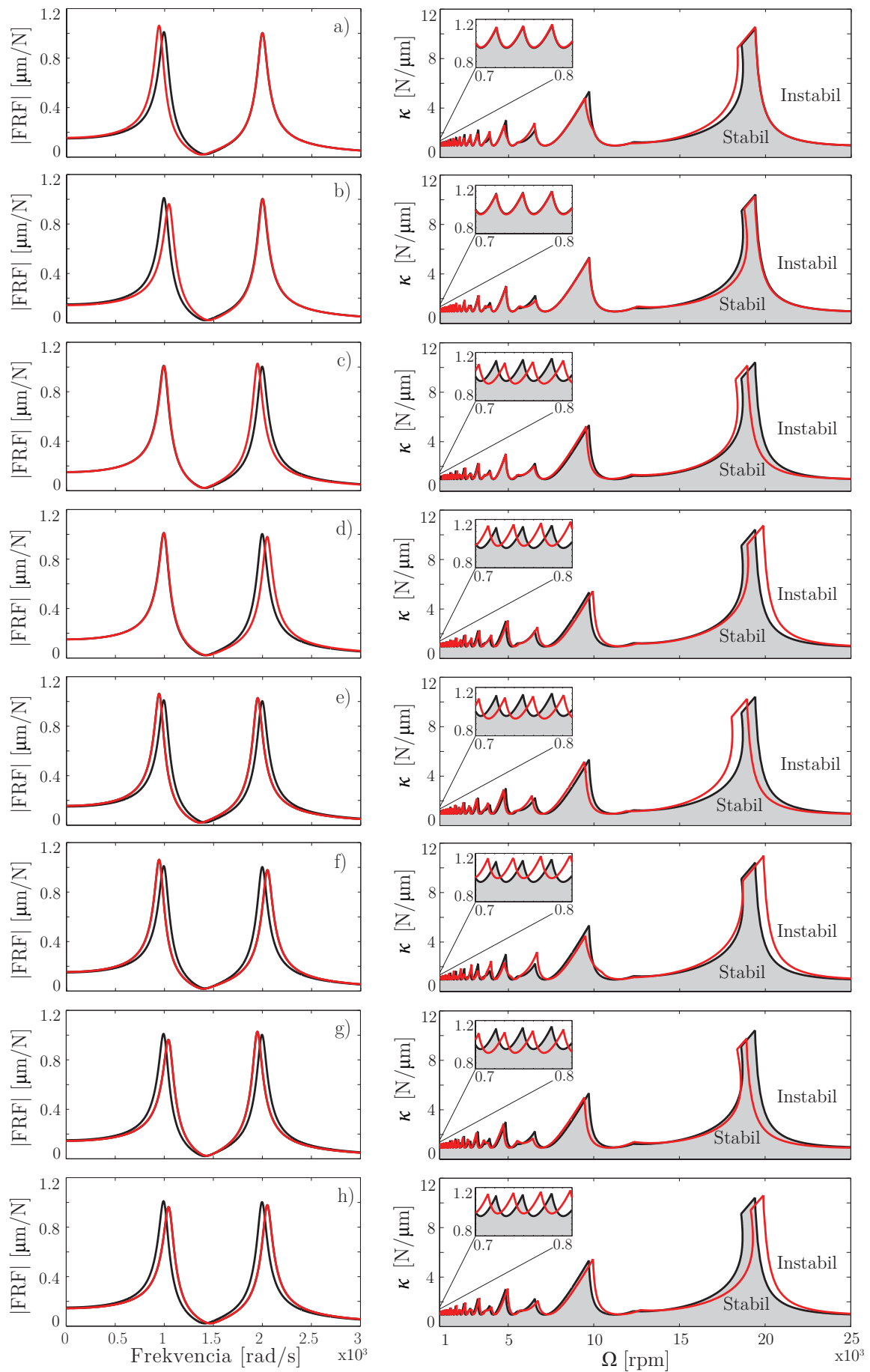
Ez a legegyszerűbb vizsgálati módszer, a modális paraméterek manuálisan eltorzítottak, majd a térkép két eset közötti eltérést vizsgáljuk. A gyakorlatban az illesztés mindig tartalmaz hibát. Amikor egy nemdomináns módust elhanyagolunk vagy túl zajos a mérés, az illesztett módus nem képes tökéletesen leírni a mért FRF-et.

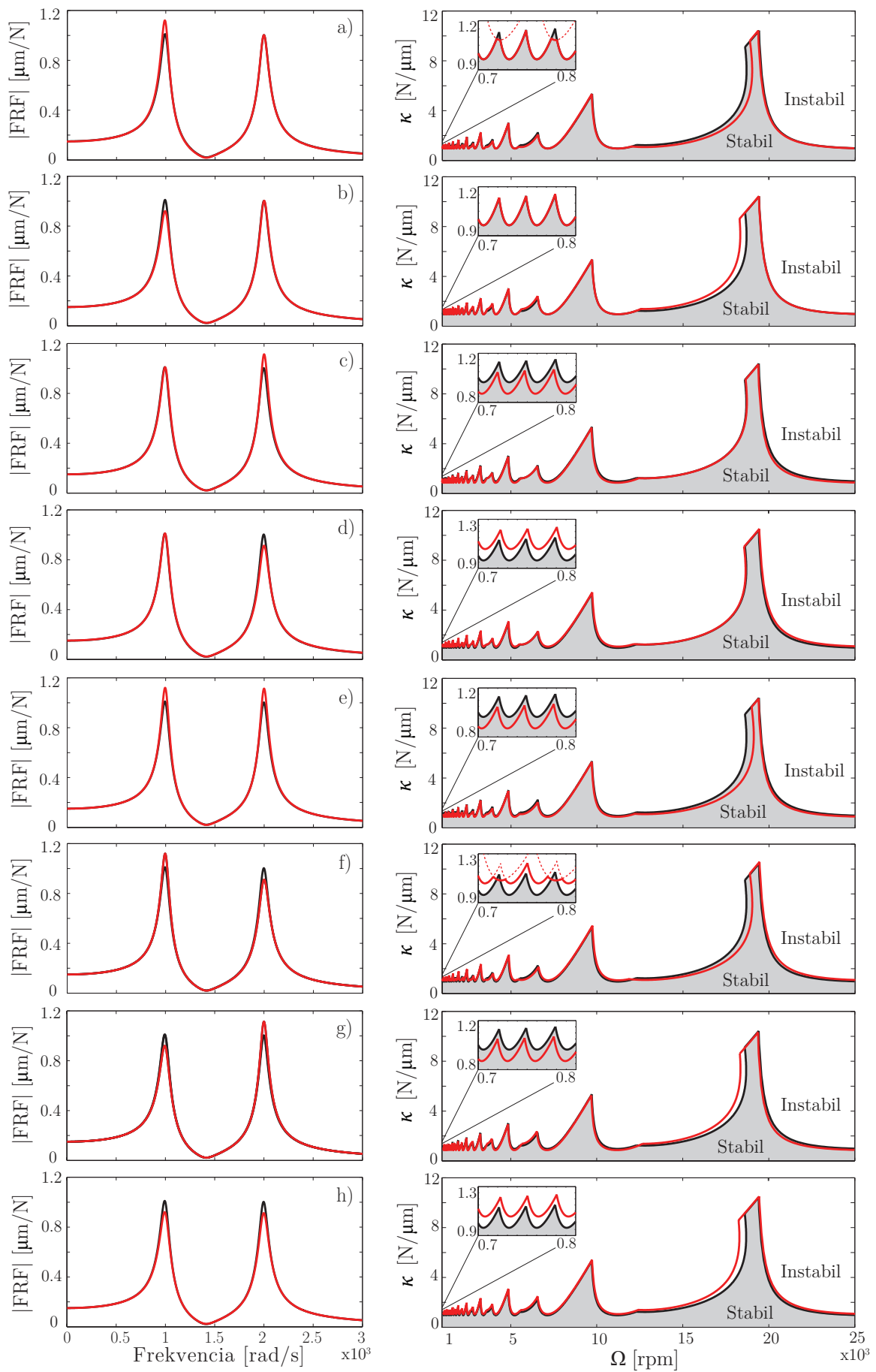
Első lépésben a csillapítatlan sajátkörfrekvencia hibáját vizsgáljuk. A körfrekvenciák manuálisan eltoltuk ± 50 rad/s-mal ($\pm 5\%$), miközben a többi paramétert változatlanul hagytuk. A 2.6-es ábrán minden ehhez tartozó variáció megtalálható a kettő szabadsági fokú modell esetén, ahol a szürke tartomány az eredeti pontos eredményt, míg piros a módosult határvonalakat jelöli. Jelenlegi esetben a következő eredmények adódtak. Ha hiba az első módus frekvenciájának becslésében adódik, vagy a) és b) eset, a stabil tartomány határai alacsony fordulatszámon változatlanok, magasabb fordulatszámon pedig nem jelentősek. A magasabb módus hibás becslésekor, c) és d) eset, az alacsony fordulatszámú tartományokon jelentős eltolódás jelentkezik, míg a magasabb fordulatokon is érzékelhetőbbé válik az eltérés. Ebben az esetben a második módus tűnik meghatározóbbnak, a térkép érzékenyebb annak változására. További példákban, e–h) esetek, ahol mindkét módus sajátkörfrekvenciájának becslésében keletkezik hiba, a térkép változása gyakorlatilag jellemezhető a külön-külön tapasztalt hibák együttesével.

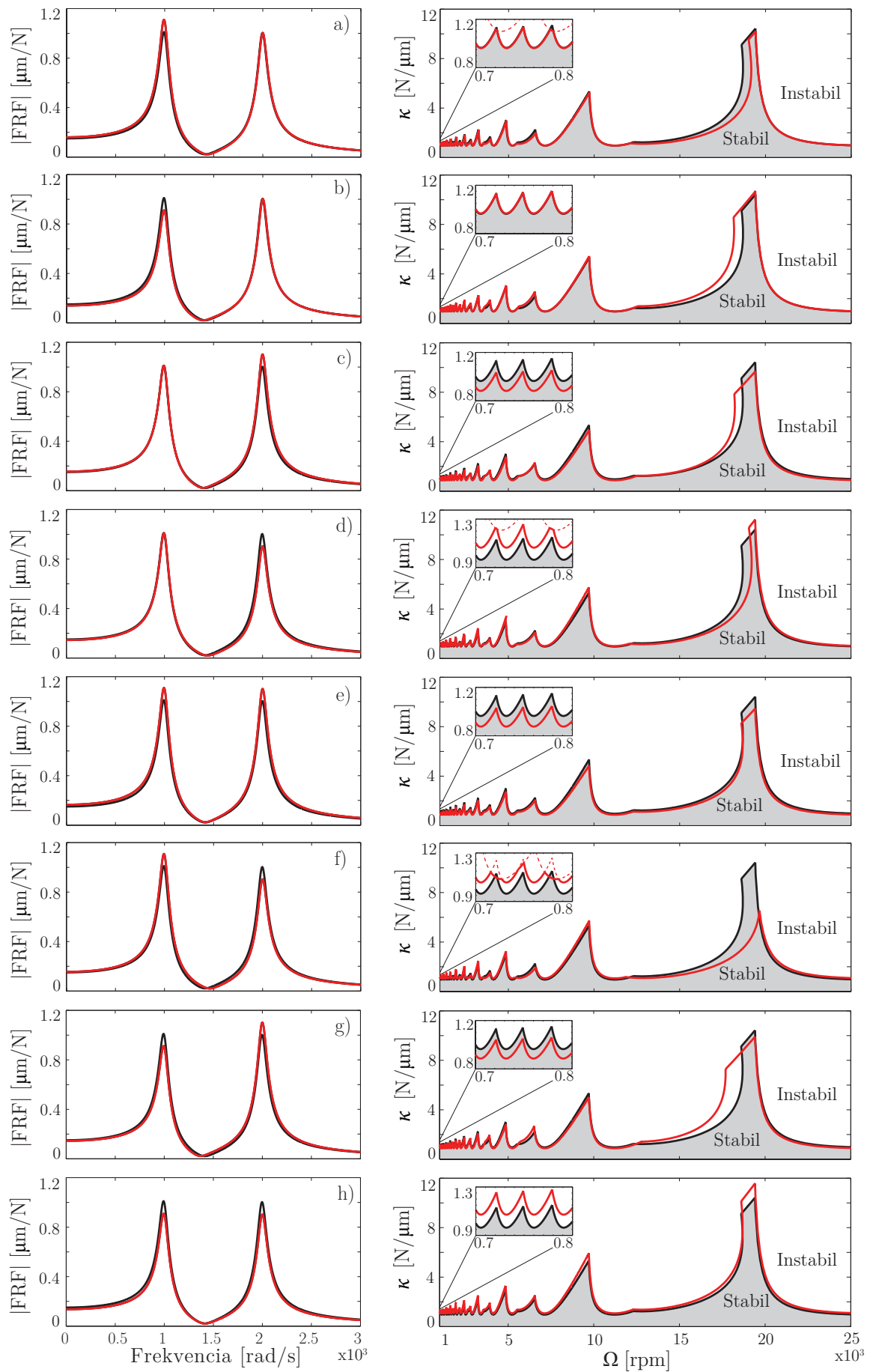
A térkép érzékenységeinek eredményeit a ξ ($\pm 10\%$) csillapítás függvényében a 2.7 ábra mutatja. Az alacsonyabb frekvenciájú módus, vagyis a) és b) esetben a térkép magasabb frekvenciákon változik jelentősen, míg alacsonyabb fordulatszámnál általában elhanyagolható, ugyanakkor előfordulhat, hogy az elmozduló határgörbék területeket vágnak ki az eredetiből, így változtatva a stabil tartomány határait (szaggatott piros). A második módus hibás becslése esetén, c) és d) ábrán, alig változik a térkép magasabb fordulatszámokon, ugyanakkor alacsonyabbak esetén jelentős eltolódás jelentkezik. Többszörös hiba esetén (e–h) a térkép megváltozása a módusok külön-külön tapasztalt hatásával írható le.

A ψ^2 paraméter, amely közvetlenül a lengésképhez köthető, hibájának ($\pm 10\%$) hatása a 2.8 ábrán látható. Az a) és b) ábrák esetén, ahol hiba csak az első módusban tapasztalható, a korábbiakhoz képest a térkép változása enyhén jelentősebb. A határvonalak gyakorlatilag csak magasabb fordulatszámon változnak észrevehetően, ugyanakkor látható, hogy alacsony fordulatszámon is előfordulhat, hogy a torzult eredmény hatására az elmozduló határgörbe a meglévő stabil tartományokba metsz. A c) és d) esetben a térkép alacsony fordulatszámon is torzul, de magasabb fordulatszámon is jelentősebb a korábbiakhoz képest. Többszörös hiba esetén is megfigyelhető, hogy a hiba jellegre összegződik a módusok külön-külön vett hibáját tekintve (ld. e–h) ábrák).

Fontos megjegyezni, hogy ezek az eredmények természetesen csak a jelen példára igazak, általános következtetés az alapján nem vonható le. Ettől függetlenül látható, hogy a stabilitástérkép magasabb fordulatszámokon érzékenyebbé válik a modális paraméterek becslésére, és ez csak erősödik, ha a hiba egy magasabb frekvenciájú módusban jelentkezik.

2.6. ábra. Térkép érzékenysége a ω_n függvényében (± 50 [rad/sec]).

2.7. ábra. Térkép érzékenysége ξ függvényében ($\pm 10\%$).

2.8. ábra. Térkép érzékenysége ψ^2 függvényében ($\pm 10\%$).

Módus elhanyagolás

Egy valós szerkezet elméletileg csak végtelen szabadsági fokú (kontinuum) modellel írható le. A mechanikai modellben, és így az illesztés során is természetesen csak véges szabadsági fokszaám alkalmazható. A módusok elhanyagolásának hatását a következő eljárással szemléltetjük. Első lépésben előírunk egy mesterséges frekvenciaátviteli függvényt, amelyhez elkészítjük a stabilitástérképet. Ezt követően, felhasználva egy görbeillesztő technikát, alacsonyabb fokszaámmal közelítjük a modellt, pontosabban csak a domináns módus kerül illesztésre. Az illesztés a bemutatott, nemarányosan csillapított modell alapján történik. A hibás közelítés hatására a domináns módus modális paraméterei is torzulnak.

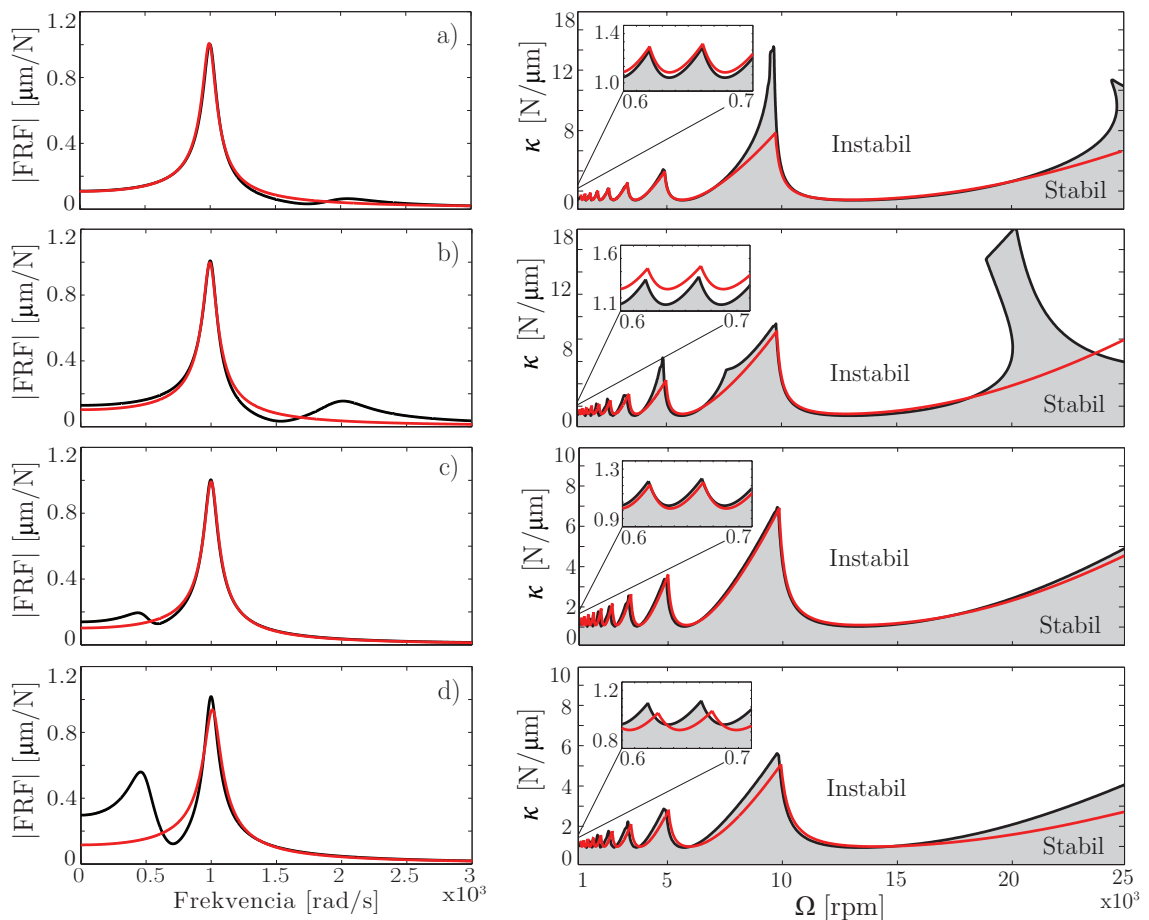
2.2-as táblázatban megtalálhatók ez eredeti és az alacsonyabb rendszámú közelítéshez tartozó modális paraméterek, miközben a 2.9-es ábrán maguk az eredmények láthatók.

Gyakran előfordul, hogy egy magasabb frekvencián található, alacsony amplitúdójú módust az egyszerűség kedvéért elhanyagolhatónak tekintünk. Ennek eredményei láthatók a) ábrán. Észrevehető, hogy 10 000 rpm-hez közel az eltérés a stabil tartomány maximumában közel 100%, annak ellenére, hogy a frekvenciaátviteli függvényen alig látszik a második módus. Ennek hatása azonban jelentős, a megmunkálási idő ideális esetben akár felére is csökkenthető. Alacsonyabb fordulatszámon, mivel a domináns módus viszonylag pontosan illesztett, így a térkép változása is kevésbé jelentős, de észrevehető. Abban az esetben, ha egy nagyobb módus kerül elhanyagolásra, természetesen az eltérés is nagyobb (ld. b) ábra). Több módus esetén újabb határgörbék jelennek meg, amelyek elmozdítják a tartományokat, így alacsonyabb rendszámú közelítésnél könnyű ezeket elveszíteni. Látható módon alacsony fordulatszámon inkább csak eltolódik a határvonal, míg magasabb fordulatszámokon stabil nyúlványok vesznek el.

Meglepő módon a térkép kevésbé érzékeny, ha az elhanyagolt módus a domináns módushoz képest alacsonyabb frekvencián jelentkezik. Ilyen eseteket mutat c) és d) ábra. Annak ellenére, hogy láthatóan igencsak jelentősen megjelenik a frekvenciaátviteli függvényben mindkét módus, a közelítés hatására a térkép meglehetősen keveset változik. A

Eset	Módus	ω_n [rad/s]	ξ [%]	ψ^2 [rad · s/kg] · 10 ⁻⁵	$\tilde{\omega}_n$ [rad/s]	$\tilde{\xi}$ [%]	$\tilde{\psi}^2$ [rad · s/kg] · 10 ⁻⁵
a)	1	1000.0	5.00	-5.00i	997.6	5.06	0.25-5.03i
	2	2000.0	10.00	-1.00i	×	×	×
b)	1	1000.0	5.00	-5.00i	992.5	5.24	0.78-5.09i
	2	2000.0	10.00	-3.00i	×	×	×
c)	1	500.0	20.00	-1.00i	×	×	×
	2	1000.0	5.00	-5.00i	1002.2	5.17	-0.24-5.15i
d)	1	500.0	20.00	-5.00i	×	×	×
	2	1000.0	5.00	-5.00i	1011.4	6.36	-1.36-5.98i

2.2. táblázat. Modális paraméterek módus elhanyagolás esetén, ahol $\tilde{\bullet}$ az alacsonyabb rendszámú közelítés modális paraméterei.



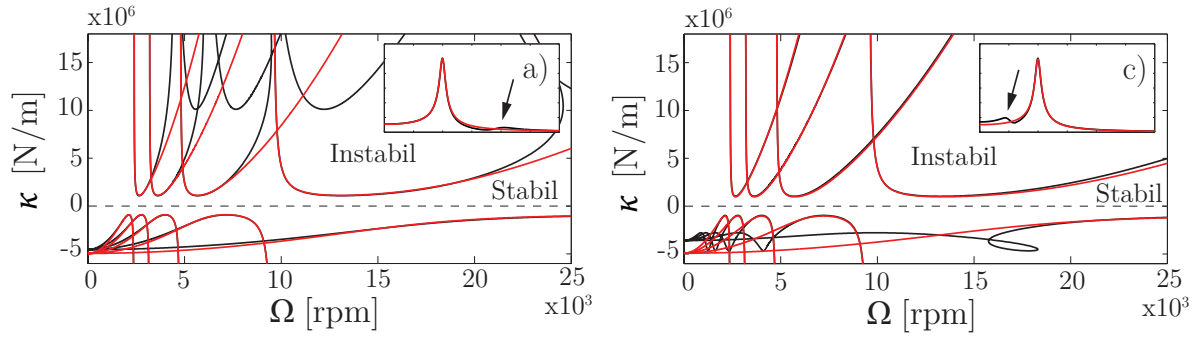
2.9. ábra. Eredmények a nemdomináns módus elhanyagolásának következtében.

c) esetben szinte elhanyagolható a különbség, míg d) esetén sem számottevő. Ennek oka, hogy ha az elhanyagolt módushoz képest alacsonyabb frekvencián van egy másik módus, úgy könnyen előfordulhat, hogy a negatív félsíkhoz tartozó határgörbét befolyásolja csak a változás. (2.16) alapján, amíg $\Lambda_{Re} > 0$, addig $\kappa < 0$, tehát fizikailag nem releváns az elhanyagolás eredménye. Ezzel szemben $\Lambda_{Re} < 0$ esetén már a pozitív félsíkon jelenik meg az eredmény. Ezért van különbség a) és c) esetek között, előbbi esetén a pozitív, utóbbi esetén a negatív félsíkra van hatása a módus elhanyagolásának. Ez látható 2.10 ábrán, amelyek 2.9 ábra a) és c) alábráinak kiegészítése.

Általános következtetések megfogalmazása nélkül megint az látható, hogy a térkép érzékenyebb, ha az elhanyagolt módus magasabb frekvencián jelentkezik a frekvenciaátviteli függvényben. Ezekben az esetekben könnyen előfordulhat, hogy nagy stabil csúcsok, nyúlánkok vesznek el a hibás illesztés következtében. Ezzel azonban a megmunkálás számára hasznos lehetőségek is elvesznek.

Közei módusok összeolvadása

A gyakorlatban a mért frekvenciaátviteli függvény a legtöbbször nehezen megkülönböztethető, közei módusokat is tartalmaz. Gyakran annyira közel vannak egymáshoz, hogy



2.10. ábra. Móduselhanyagolás hatása alacsony és magas frekvencián (kapcs. 2.9 ábra).

első ránézésre észre sem lehet venni, hogy egyszerre több módus is előfordul. A 2.11-es ábrán néhány tipikus eset található. Ezekben az esetekben előfordulhat, hogy egyetlen közös módussal illesztjük azokat. A pontos és illesztett modális paraméterek megtalálhatók a 2.3-as táblázatban.

Az a) ábrán látható az az eset, amikor az elhanyagolt módus közvetlenül a domináns módus előtt helyezkedik el. Az illesztett módus nem írja le megfelelően a frekvenciaátviteli függvényt, ugyanakkor a stabilitástérkép nem változik jelentősen, de hatással van rá alacsonyabb és magasabb fordulatszámokon is. Itt is az elhanyagolt módus a negatív félsíkon eredményezne jelentősebb eltérést, ám ez fizikailag nem releváns. Természetesen a hiba ezekben a mintapéldákban eltúlzott, hogy a hatás érzékelhető legyen.

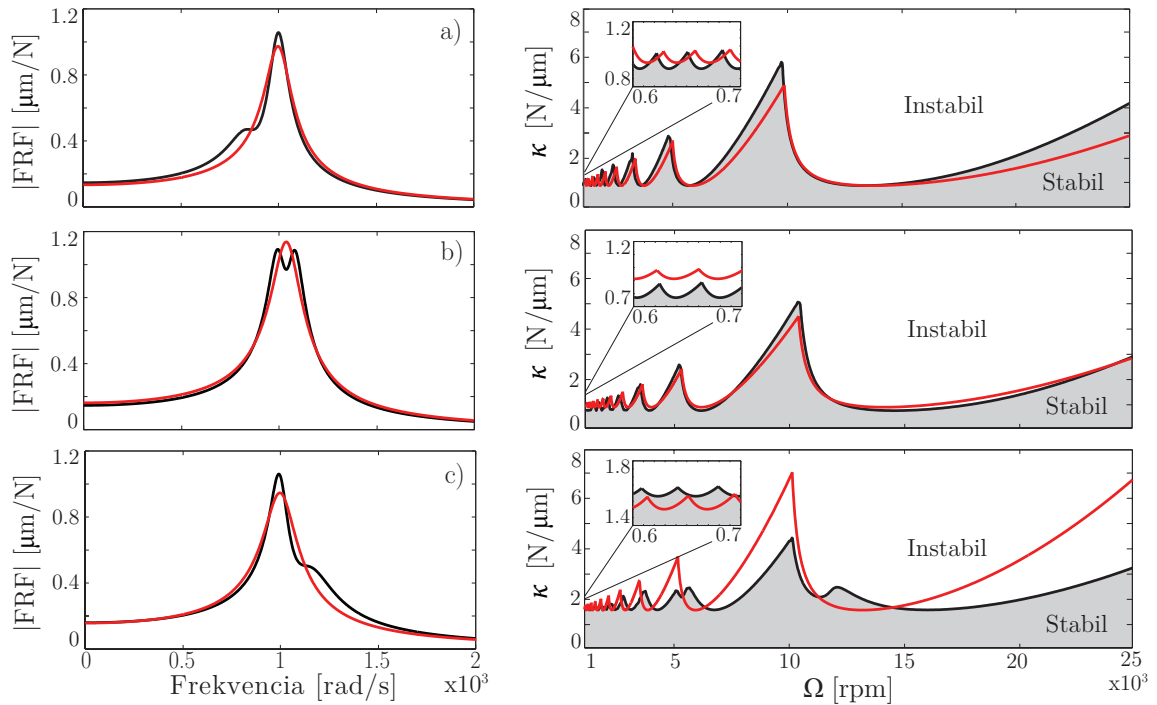
Abban az esetben, ha a közeli módusok közül egyik sem dominánsabb a másiknál, amint az látható a b) eseten is, az illesztett közös módus viszonylag pontos eredményt produkál magasabb fordulatszámokon, ám alacsonyabbak esetén egy enyhébb eltolódás jelentkezik a határgörbéken.

Meglepően jelentős az eltérés c) esetben, ahol az elhanyagolt módus a domináns módus után jelentkezik. Látható, hogy alacsony fordulatszámokon csak kissé eltolódnak a határok, míg magasabb fordulatszámokon jellegre is megváltoznak, jelentősebben mint a korábbi esetekben.

A fenti példák alapjaként ismét megállapítható, hogy a térkép érzékenyebb a magasabb frekvenciákon jelentkező módusok hibás azonosítására.

Eset	Módus	ω_n [rad/s]	ξ [%]	ψ^2 [rad · s/kg] · 10 ⁻⁵	$\tilde{\omega}_n$ [rad/s]	$\tilde{\xi}$ [%]	$\tilde{\psi}^2$ [rad · s/kg] · 10 ⁻⁵
a)	1	850.0	10.00	-2.00i	1002.8	6.98	-1.00-6.81i
	2	1000.0	5.00	-5.00i	×	×	×
b)	1	1000.0	5.00	-4.00i	1045.0	7.46	-0.23-8.95i
	2	1080.0	4.50	-4.00i	×	×	×
c)	1	1000.0	5.00	-4.50i	1003.5	8.53	-1.71-7.78i
	2	1150.0	10.00	-4.00i	×	×	×

2.3. táblázat. Modális paraméterek közeli módus összeolvadása esetén, ahol $\tilde{\bullet}$ az alacsonyabb rendszámú közelítés modális paraméterei.



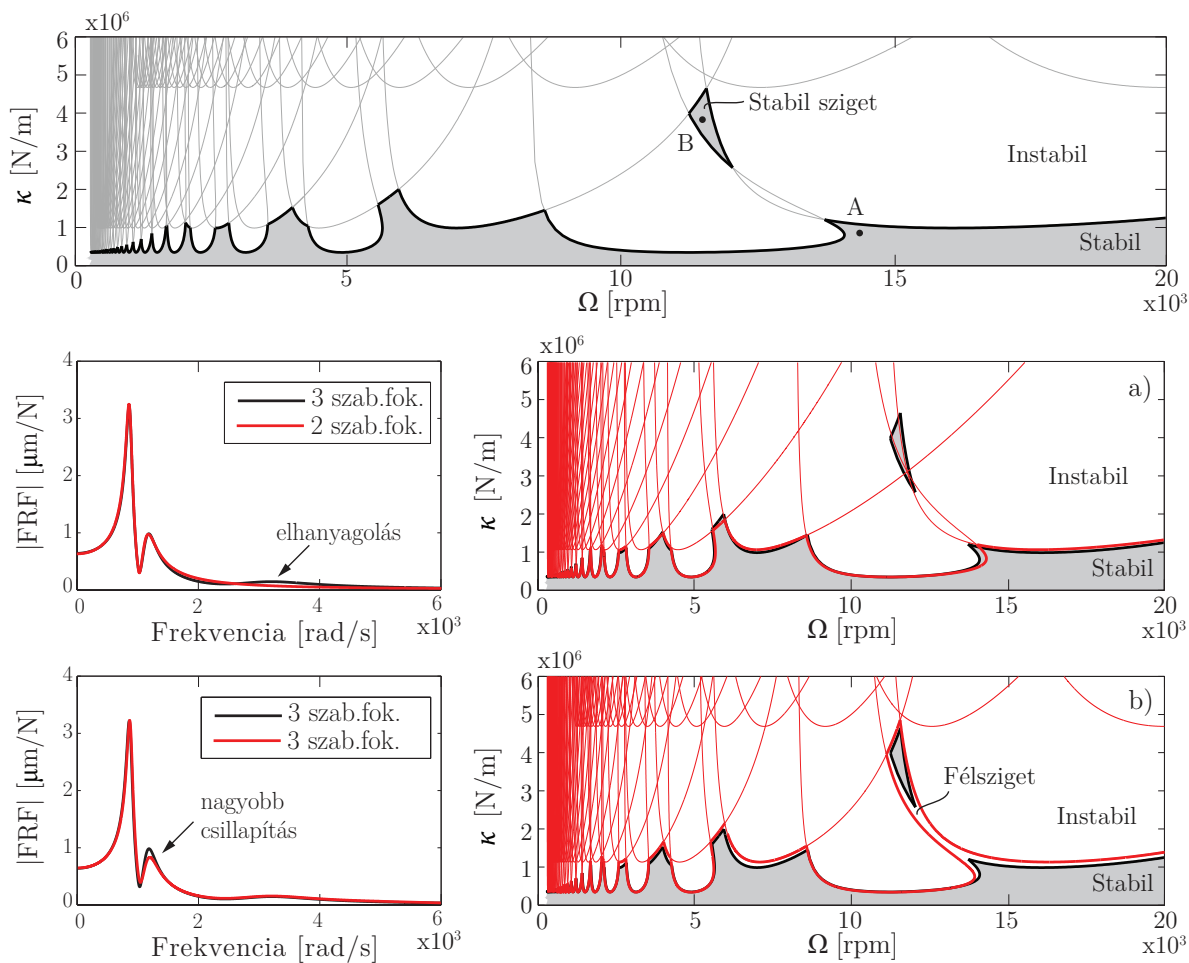
2.11. ábra. Eredmények a közeli módusok összeolvadásának következtében.

2.1.4. Stabil szigetek esztergálás során

A gyártási folyamat időtartamát meghatározza az anyagleválasztás sebessége, amely pedig lineárisan függ az előtolástól, a fordulattól és a fogásmélységtől. A gyártási idő így csökken ha ezen paraméterek bármelyike megnövelhető. A maximális fordulatszámot meghatározza a szerszámgép teljesítménye, más részről a fogásmélység sem választható meg tetszőlegesen. A gyártástechnológus feladatai közé tartozik, hogy ezen paramétereket a megfelelően válassza meg és optimális gyártási folyamatot tervezzen.

Ritka esetekben, csak több szabadsági fokú rendszer esetén előfordulhat, hogy egy stabil sziget határolódik el a zárt tartománytól. Egy példa található erre a 2.12 ábra felső térképén, amelyhez tartozó modális paraméterek a 2.4-es táblázatban találhatóak (a térkép a frekvenciamódszerrel és a szemidiszkrétizációs módszerrel is ellenőrizve lett). Összehasonlítva az A és B pontokat, az anyagleválasztás sebessége jelentősen eltér. Annak ellenére, hogy a fordulatszám csökkenthető B esetében A-hoz képest, a vágási együttható közel négyszer akkora, melynek eredményeképpen a fogásmélység is négyszeres (2.16) szerint. A gyártási folyamat ideje utóbbi esetében közel harmadára csökkenthető.

Ezeknek a stabil szigeteknek a felfedése egy igen bonyolult feladat lehet. Általában apróbbak és magasabb fordulatszámon fordulnak elő és a modális paraméterek kis változására könnyen eltűnhetnek. A 2.12 ábra a) részén az az eset található, amikor a harmadik, kevésbé domináns módus elhagyásra kerül, és kettő módust illesztünk. Szürke tartománnyal és fekete határvonallal az eredeti stabil területek láthatók, míg piros határvonalakkal a két szabadsági fokú modell eredményei. A közelítés hatására látható módon



2.12. ábra. Stabil sziget egy három szabadsági fokú modell esetén (szürke tartomány fekete határvonallal az eredeti eset, míg piros a módosított frekvenciaátviteli függvény eredményei).

a sziget éppen egyetlen pontig szűkül (vékony piros vonalak majdnem egyetlen pontban metszik egymást a sziget alsó felénél), gyakorlatilag eltűnik, míg a tartomány többi határvonala keveset változik. Természetesen magasabb fordulatszámokon még jelentkezik eltérés, ám ezt itt nem vizsgáljuk. A b) esetben a második módus csillapítását emeltük meg 10.6%-ról 12.6%-ra. Itt a szürke tartomány továbbra is az eredeti három szabadsági

Módus	ω_n [rad/s]	ξ [%]	ψ^2 [s/kg] · 10 ⁻⁶
1	870	6.14	-51.60-169.24i
2	1150	10.60	60.66-118.14i
3	3200	21.06	-18.56-75.96i

2.4. táblázat. Modális paraméterek egy három szabadsági fokú modell esetén stabil szigettel.

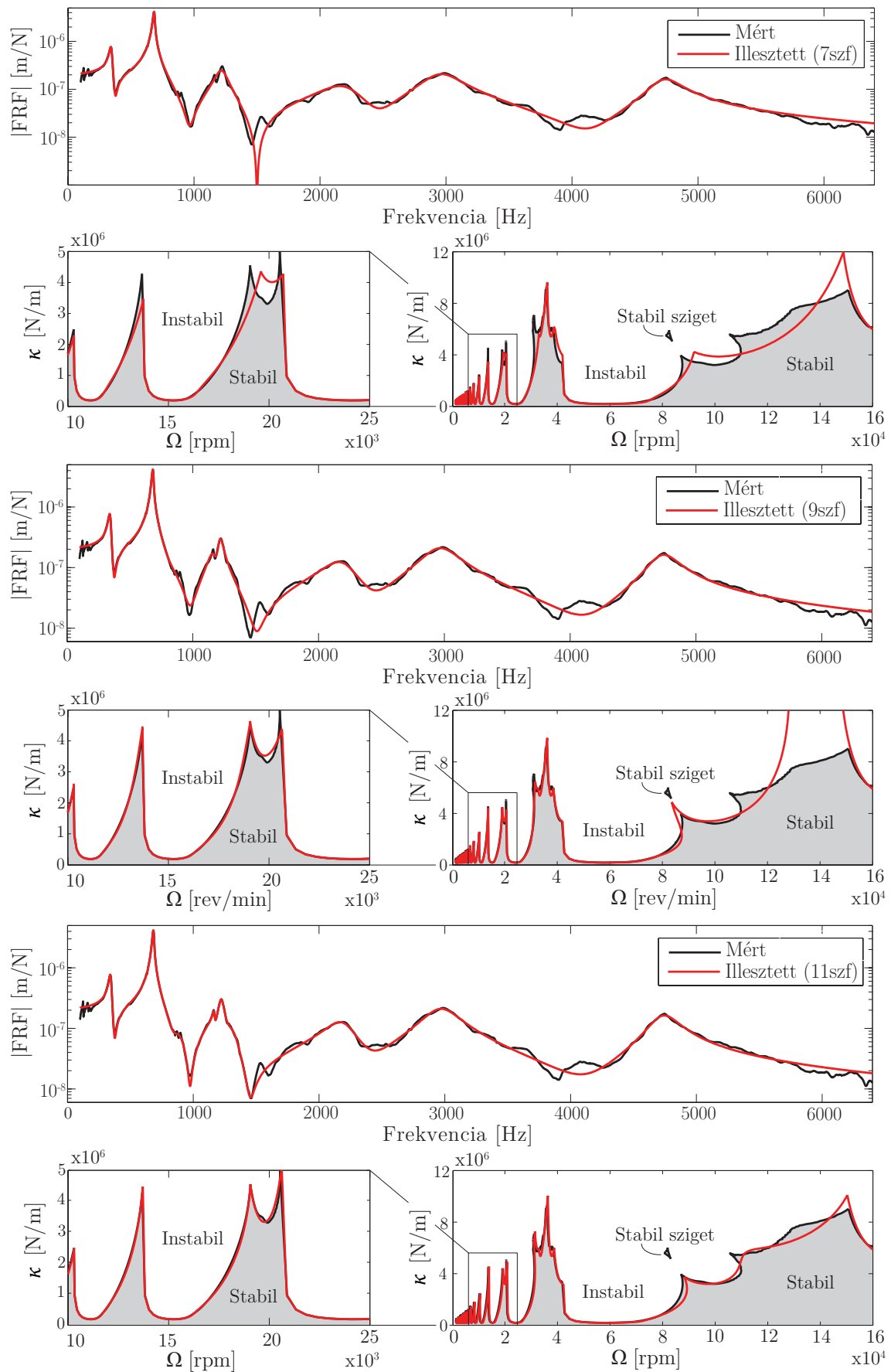
fokú eset eredményeit mutatja, míg piros a csillapítottabb esethez tartozó tartományok határvonalai. Ebben az esetben a stabil sziget kinyílik és félszigetként csatlakozik stabil területhez. Mivel gyakran igen nehézkes pontos frekvenciaátviteli függvényt illeszteni, sőt a gyakorlatban minden illesztett módus pontatlan, így könnyen előfordulhat, hogy egy ilyen hiba hatására elveszik egy stabil tartomány. 2.1.5 alfejezetben is található példa egy ilyen esetre.

2.1.5. Esettanulmány

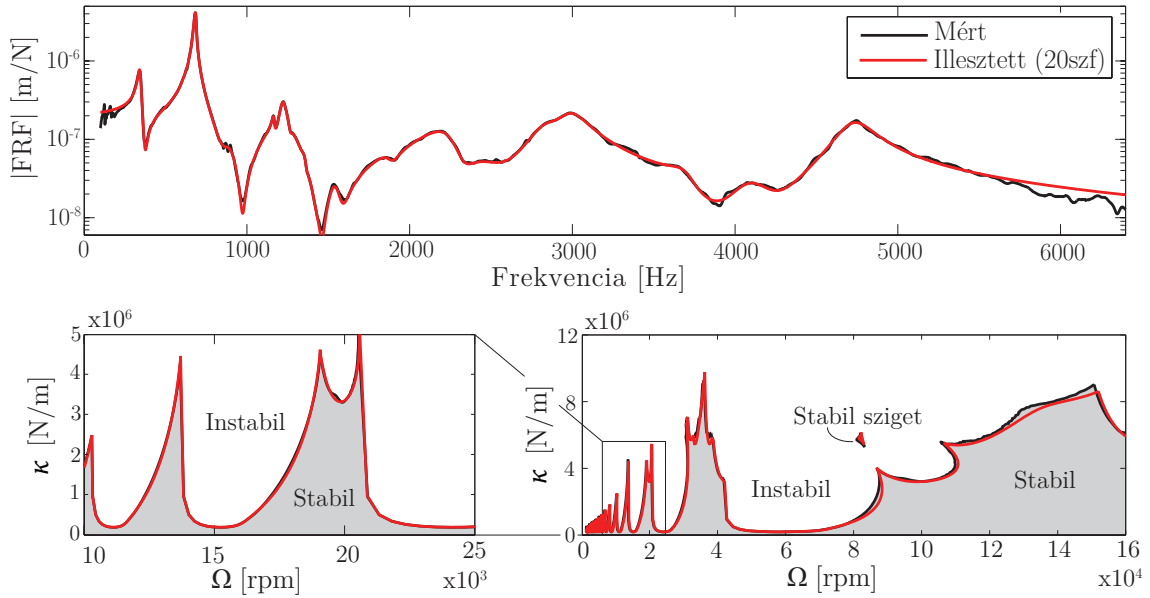
Ebben az alfejezetben egy valós, mért esetet vizsgálunk. A frekvenciaátviteli függvény egy maró szerszámgépen került le mérésre ütési kísérlettel, majd meghatározásra ipari eszközökkel [13]. Jelen vizsgálatban azonban úgy tekintünk erre, mint egy esztergakés mérési eredményére.

A 2.13-as ábrán az illesztett model 7, 9 valamint 11 szabadsági fokból áll, nemarányosan illesztve. Az ehhez tartozó modális paraméterek megtalálhatók a 2.5-ös táblázatban. A 7 szabadsági fokú modell esetén csak a domináns módusok kerültek illesztésre, ez bizonyult a legalacsonyabb, de elfogadható szintű illesztésnek. Meg kell jegyezni, hogy jelen esetben is csak a frekvenciaátviteli függvény abszolút értéke látható az ábrákon, de az illesztés során a mért függvény valós és képzetes részét szükséges illeszteni egyszerre. Azt is érdemes megjegyezni, hogy az ábrák jelen esetben logaritmikus léptékűek, hogy a teljes tartomány érzékelhető legyen (2–3 nagyságrend szükséges). Ennek ellenére az illesztés meglehetősen pontos. A stabilitási térképeken látható, hogy alacsony fordulatszám (10 000 . . . 25 000 rpm) esetén is jelentkezik eltérés a két eredmény között, magasabb fordulatszámokon ($\Omega > 25\,000$ rpm) pedig jelentősebbé is válik a hiba, ugyanakkor első közelítésnek megfelelő. Egy apró stabil sziget is jelentkezik a mért FRF-fel való számítás eredményeképpen, ugyanakkor az illesztés ezt nem mutatja. Itt fontos leszögezni, hogy a fordulatszám technológiailag irreálisan magas értékig ábrázolásra került, azonban a térkép érzékenysége vizsgálatához ez is hozzá tartozik (másképp a mérés egy maró szerszámgépen történt, nem pedig egy esztergakés átviteli függvénye). Az is megemlíthető, hogy abban az esetben, ha a szerszám több vágó éllel rendelkezik, mint például maró szerszám esetén, akkor ez a magas fordulátú tartomány reális fordulatszámokig elmozdul, tehát ennek a vizsgálatára nem érdektelen. A hibák kiszűrésének érdekében a stabilitási térképeket ellenőriztük a frekvenciamódszerrel és a szemidiszkrétizációs módszerrel is.

Annak érdekében, hogy pontosabb legyen az illesztés, a szabadsági fokok számát 9-ig növeltük, amely két módussal való kibővítést jelentett 700-1200 Hz környékén. Alacsonyabb fordulatszámokra így pontosabbá vált az eredmény, 10 000 rpm alatt gyakorlatilag elhanyagolható az eltérés, ugyanakkor magasabb fordulatszámokon a hiba megnövekedett.



2.13. ábra. Esettanulmány: Stabilitástérképek 7-, 9- és 11 szabadsági fok esetén.



2.14. ábra. Esettanulmány: Stabilitástérkép 20 szabadsági fok esetén.

7-DoF	ω_n [Hz]	ξ [%]	ψ^2 [s/kg] · 10 ⁻⁶
1	341.92	2.98	0.2279-45.48 <i>i</i>
2	679.94	2.71	122.79-118.69 <i>i</i>
3	684.24	1.00	-129.4-96.34 <i>i</i>
4	1219.90	3.99	-15.35-74.67 <i>i</i>
5	2204.93	7.67	5.088-113.69 <i>i</i>
6	2961.58	5.13	42.63-189.86 <i>i</i>
7	4732.50	2.59	0.747-118.65 <i>i</i>

9-DoF	ω_n [Hz]	ξ [%]	ψ^2 [s/kg] · 10 ⁻⁶
1	342.19	3.00	-0.940-45.98 <i>i</i>
2	681.67	2.06	116.4-196.87 <i>i</i>
3	685.45	0.97	-138.7-22.40 <i>i</i>
4	789.67	12.59	30.29-14.97 <i>i</i>
5	1165.84	3.11	-8.411-30.46 <i>i</i>
6	1216.94	1.77	10.16-35.53 <i>i</i>
7	2190.77	6.22	14.47-90.07 <i>i</i>
8	2967.41	4.87	32.36-180.07 <i>i</i>
9	4734.75	2.50	-1.766-114.23 <i>i</i>

11-DoF	ω_n [Hz]	ξ [%]	ψ^2 [s/kg] · 10 ⁻⁶
1	342.28	2.99	-1.393-45.72 <i>i</i>
2	681.11	2.13	115.1-178.17 <i>i</i>
3	685.19	0.97	-134.0-38.39 <i>i</i>
4	882.28	7.17	-8.729-23.45 <i>i</i>
5	1118.37	20.35	100.25-27.17 <i>i</i>
6	1167.50	0.76	-3.406-3.50 <i>i</i>
7	1225.14	1.74	-13.01-30.74 <i>i</i>
8	1318.95	4.28	-19.72-3.34 <i>i</i>
9	2190.83	5.39	12.71-76.18 <i>i</i>
10	2971.77	4.75	25.39-175.34 <i>i</i>
11	4736.36	2.45	-3.501-111.97 <i>i</i>

20-DoF	ω_n [Hz]	ξ [%]	ψ^2 [s/kg] · 10 ⁻⁶
1	342.28	2.92	-1.347-44.62 <i>i</i>
2	603.03	7.05	5.741-9.35 <i>i</i>
3	681.28	1.91	93.83-205.30 <i>i</i>
4	685.72	0.94	-119.7-7.58 <i>i</i>
5	892.81	5.94	-11.08-13.25 <i>i</i>
6	1165.68	0.70	-1.882-3.73 <i>i</i>
7	1181.70	8.02	-18.04-56.76 <i>i</i>
8	1220.29	1.90	3.115-37.56 <i>i</i>
9	1269.12	1.33	4.615+0.28 <i>i</i>
10	1358.78	0.75	-0.275+0.75 <i>i</i>
11	1416.01	2.19	0.889+0.21 <i>i</i>
12	1543.71	2.76	0.808-5.67 <i>i</i>
13	1881.76	2.81	-5.373-3.98 <i>i</i>
14	2258.38	5.36	-108.7-58.83 <i>i</i>
15	2342.36	9.46	143.5-105.09 <i>i</i>
16	2837.92	3.72	31.63-43.30 <i>i</i>
17	2988.25	3.32	24.76-96.23 <i>i</i>
18	3699.10	2.43	-7.876+2.20 <i>i</i>
19	4094.20	3.29	0.968-12.90 <i>i</i>
20	4727.91	2.43	5.778-112.34 <i>i</i>

2.5. táblázat. Esettanulmány: Illesztett modális paraméterek.

A 11 szabadsági fokú modellel további kettő módus vehető figyelembe, az illesztés során ezek 882 Hz-re és 1318 Hz-re álltak be. Ezzel a már meglévő modális paraméterek keveset változtak, ugyanakkor mind alacsonyabb, mind magasabb fordulatszámon sikerült pontosítani a térképet. Ennek ellenére a stabil sziget még továbbra sem jelentkezik.

Az illesztés során a 20 szabadsági fokú modell volt a legmagasabb illesztés, amelyet illesztési problémák nélkül el lehetett érni. Az eredmények megtalálhatók a táblázatban ill. 2.14-as ábrán. Láthatóan a legtöbb nemdomináns, zajos módust is ilyen módon figyelembe lehetett venni, az eltérés a logaritmikus skálán is gyakorlatilag vonalvastagságon belüli. A stabilitástérképen az eltérés alacsony fordulatszámon gyakorlatilag észrevehetetlen, míg magasabb fordulatszámon is jelentősen csökkenthető volt az eltérés. Ebben az esetben a stabil sziget is megjelenik az illesztés hatására.

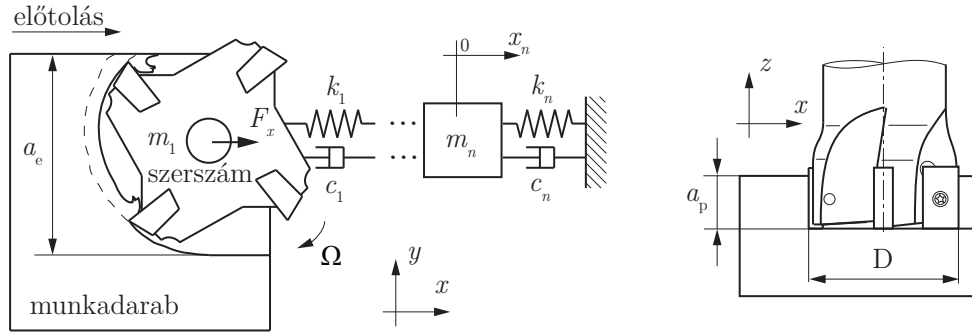
Ahogy azt a bemutatott esettanulmány mutatja, annak érdekében, hogy a nagyon pontos térképet elkészíthessük, jellemzően nagy fokszerű modell szükséges, amely már nehézkes és problémához vezethet. Alacsony fordulatszámon a domináns módusok pontos illesztése megfelelőnek bizonyulhat, ugyanakkor magasabb fordulatszámokon ez könnyen jelentős eltéréseket eredményezhet, amelyek előre jelzése nem egyszerű feladat. Még a legpontosabb illesztés hatására is jelentkezhet kisebb-nagyobb eltérés a térképen, de az elméletileg pontos eredmény a magasabb fokszerű modellekkel elégségesen közelíthető.

2.2. Marás

A regeneratív szerszámgéprezgés nemcsak esztergálás, de marási folyamatok esetén is megjelenik. A felületi regeneratív hatás azonban kiegészül periodikusan változó együtt-hatókkal, amelyet a szerszám élének folyamatos be- ill. kilépése okoz. Az első közelítő modellek Tobias és Thusty munkáiban is megjelentek, ahol a periodikus tagokat időben átlagolt tagokkal közelítették, így azok az esztergáláshoz hasonló matematikai modelleket eredményeztek. Ez a modell alkalmazható olyan esetekben, amikor nagy a radiális fogásmélység illetve a szerszám élének száma. Ellenkező esetben azonban az él be- és kilépésének hatása nem elhanyagolható [4].

Az utóbbi évtizedben szerteágazó eredmények születtek sok kutató munkájának eredményeképpen. A dolgozat során a szemi-diszkretizációs módszer alkalmazott, ezzel szemben azonban számos más módszer létezik, mellyel a különböző stabil határok meghatározhatók. Példaként említve, a frekvenciaátviteli függvény közvetlen meghatározásán alapuló *extended multi frequency solution* módszer található [12]-ben, egy összehasonlító tanulmány pedig [13]-ban.

A könnyebb kezelhetőség végett az érzékenységi vizsgálat során egy egydimenziós, de több szabadsági fokú modell alkalmazott, amely látható a 2.15 ábrán. Feltételezett, hogy csak x irányú rezgések keletkeznek, mind a munkadarab, mind pedig a szerszámgép y irányban teljesen merevnek tekinthető, vagyis az ebbe az irányba eső lengések elha-



2.15. ábra. Marás egydimenziós mechanikai modellje egyenes élű szerszám esetén.

nyagolható. Továbbá a szerszám N egyenletesen elosztott egyenes éllel rendelkezik. Ezek az egyszerűsítések könnyítik a számítást, és az érzékenységi vizsgálat is áttekinthetőbb. A dinamikai modell egy szabadsági fokú esete és annak vizsgálata megtalálható [4]-ben. A mozgásegyenlet teljesen analóg módon több szabadsági fokú esetben, az előző fejezethez hasonlóan megadható

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (2.28)$$

szerint, ahol $\mathbf{f}^T(t) = [F_x(t) \ 0 \dots 0]$, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$. A forgácsolási erő meghatározása azonban összetettebb, szükség van ugyanis minden szerszámélre ható erő megfelelő irányú komponenseinek összegzésére. Az előtolás irányának ismeretében, 2.16 ábra alapján a pillanatnyi forgácsvastagság meghatározható, illetve egy élre ható forgácsolási erő komponensei is felírhatók. Ez alapján a j -edik élre ható erő komponensei

$$F_{j,t}(t) = g_j(t) K_t a_p h_j^q(t), \quad (2.29)$$

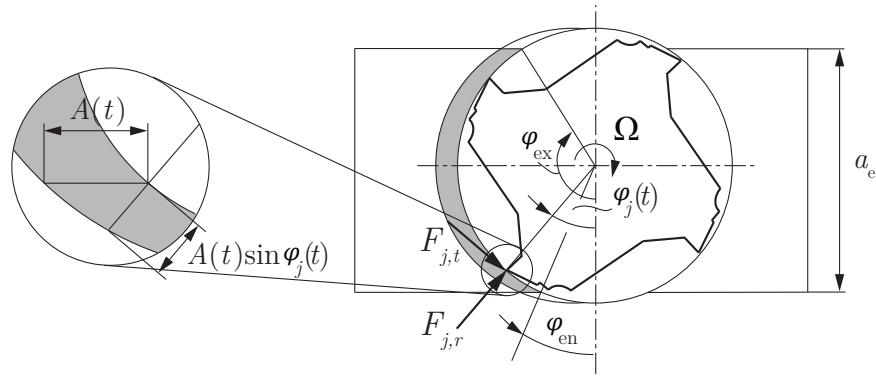
$$F_{j,r}(t) = g_j(t) K_r a_p h_j^q(t), \quad (2.30)$$

ahol K_t és K_r az anyagra jellemző tangenciális és radiális forgácsolási-erő együtthatók, a_p az axiális fogásmélység, $h_j(t)$ a j -edik élnél vágott forgácsvastagság, q a forgácsolási erő-exponens, $g_j(t)$ pedig egy olyan ablakfüggvény, amely csak 0 ill. 1 értéket vehet fel, jelölve azt, hogy az adott szerszámél az adott pillanatban az anyagban van-e, vagyis forgácsol-e vagy sem. φ_{en} jelöli azt a szögértéket, amelynél a szerszám belép az anyagba, φ_{ex} pedig a kilépési szöget (*enter* és *exit* szavakból származtatva). Ennek megfelelően az ablakfüggvény

$$g_j(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \varphi_{en} < (\varphi_j(t) \bmod 2\pi) < \varphi_{ex} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases} \quad (2.31)$$

továbbá a j -edik fog pillanatnyi $\varphi_j(t)$ szöghelyezete

$$\varphi_j(t) = \frac{2\pi\Omega}{60}t + j\frac{2\pi}{N} \quad (2.32)$$



2.16. ábra. Forgácsolási erőkomponensek és forgácsvastagság meghatározása x irányú elmozdulások esetén.

és Ω a szerszám fordulatszáma (rpm). Attól függően, hogy a szerszám a munkadarab szélén milyen irányban forgácsol, kétféle folyamat különböztethető meg, amelyek láthatók a 2.17 ábrán. Abban az esetben, ha az ábra alapján lentről felfelé történik az anyagleválasztás, ún. ellenirányú megmunkálásról beszélünk (*up-milling*). Ilyen esetben a belépéskor a pillanatnyi forgácsvastagság nulla, majd folyamatosan növekszik, mígnem egyszer hirtelen kilép az anyagból. Fordított esetben egyenirányú marásról beszélünk (*down-milling*), ilyenkor a belépés pillanatában hirtelen jelenik meg a gerjesztő erő, majd folyamatosan változva, nulláig csökken, amikor kilép az él. Ebből trigonometrikus összefüggésekkel, 2.16 ábrának megfelelően a belépési és kilépési szögek ellenirányú marás esetén

$$\varphi_{en} = 0 \quad \text{és} \quad \varphi_{ex} = \arccos \left(1 - \frac{2a_e}{D} \right) \quad (2.33)$$

valamint egyenirányú marás esetén

$$\varphi_{en} = \arccos \left(\frac{2a_e}{D} - 1 \right) \quad \text{és} \quad \varphi_{ex} = \pi. \quad (2.34)$$

Szokás előtolásként a fogankénti f_z előtolást megadni, ahonnan figyelembe véve a szerszám mozgását, az időben változó forgácsvastagság x irányban (ld. 2.16 és 2.15 ábrák)

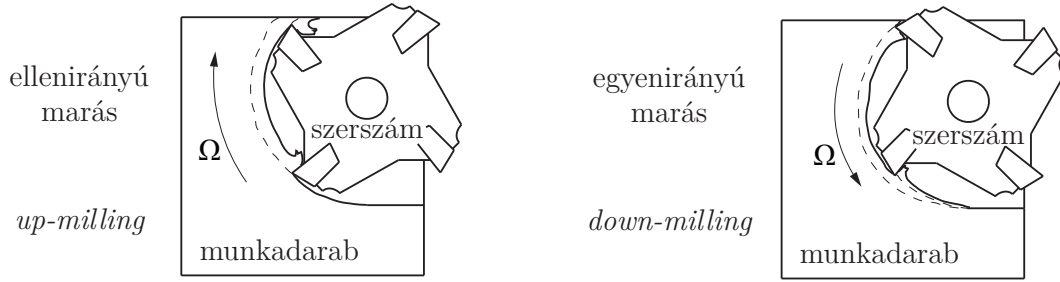
$$A(t) = f_z + x_1(t - \tau) - x_1(t), \quad (2.35)$$

ahol marás esetén a regeneratív időkésés egyenközü fogelosztásnál $\tau = 60/(N\Omega)$. A j -edik fogra vetített forgácsvastagság így

$$h_j(t) = A(t) \sin \varphi_j(t) = (f_z + x_1(t - \tau) - x_1(t)) \sin \varphi_j(t). \quad (2.36)$$

Mivel (2.29) és (2.30) forgácsolási erőre meghatározott empirikus képletek radiális és tangenciális irányban definiálják az erőt, ennek felbontása szükséges, ahol az y irányú merevség miatt csak az x irányú felbontás szükséges, azaz

$$F_{j,x}(t) = F_{j,t}(t) \cos \varphi_j(t) + F_{j,r}(t) \sin \varphi_j(t). \quad (2.37)$$



2.17. ábra. Ellenirányú és egyenirányú marási folyamat.

Mivel a szerszámnak több éle van, a teljes gerjesztő erő az ezekre ható x irányú erőkomponensek összege. Behelyettesítve (2.29) és (2.30) összefüggésekbe, majd egyszerűsítve azt, a gerjesztőerő alakja

$$F_x(t) = Q(t)(f_z + x_1(t - \tau) - x_1(t))^q, \quad (2.38)$$

ahol

$$Q(t) = \sum_{j=1}^N a_p g_j(t) \sin^q \varphi_j(t) (K_t \cos \varphi_j(t) + K_r \sin \varphi_j(t)), \quad Q(t) = Q(t + \tau) \quad (2.39)$$

egy τ szerint periodikus függvény. Ezzel a nemlineáris mozgásegyenlet már felírható. A megoldás kereshető $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_p(t) + \boldsymbol{\xi}(t)$ alakban, ahol $\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{x}_p(t + \tau)$ az állandósult periodikus megoldás, $\boldsymbol{\xi}(t)$ pedig kis perturbáció. A linearizálás után, a magasabb rendű tagok elhagyásával előáll a lineáris rendszer. A részletes levezetés megtalálható [4]-ben. Ennek eredménye

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\xi}}(t) + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) + \mathbf{K}\boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{G}(t)(\boldsymbol{\xi}(t - \tau) - \boldsymbol{\xi}(t)), \quad (2.40)$$

ahol $\mathbf{G}(t) = \mathbf{G}(t + \tau)$ szintén egy periodikus függvény (periodikus vágási együttható mátrix), amely függ a radiális és axiális forgácsolási együtthatóktól, valamint az axiális fogásmélységtől is (esztergálás esetén ez κ -val azonosítható, azonban marási folyamatoknál ez egy periodikus függvénnyé alakul). Mivel csak a végpont gerjesztett, így a $\mathbf{G}(t)$ csak egyetlen nemzérus elemet tartalmaz, vagyis

$$\mathbf{G}(t) = \begin{pmatrix} G(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

és

$$G(t) = a_p q f_z^{q-1} \sum_{j=1}^N g_j(t) \sin^q \varphi_j(t) (K_t \cos \varphi_j(t) + K_r \sin \varphi_j(t)). \quad (2.42)$$

2.2.1. Szemi-diszkretizáció

Kezdve a térbeli leírással, a rendszerhez rendelhető állapottermodell

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{A}_s(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}_s(t)u(t - \tau), \\ u(t) &= \mathbf{C}_s\mathbf{z}(t),\end{aligned}\tag{2.43}$$

ahol $\mathbf{A}_s(t)$ rendszermátrix és $\mathbf{B}_s(t)$ bemeneti mátrixok periodikusak, valamint (2.40) alapján fel is írhatók. Itt $\mathbf{B}_s(t)$ és $\mathbf{C}_s$ sorra $2n \times 1$ és $1 \times 2n$ méretű vektorok, mivel $\mathbf{G}(t)$ csak egyetlen nemzérus elemet tartalmaz az esztergálás modelljéhez hasonlóan. Tehát

$$\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_s(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K} + \mathbf{G}(t)) & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{pmatrix},\tag{2.44}$$

$$\mathbf{B}_s(t) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{G(t)}{m_1} & \dots & 0 \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{C}_s = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.\tag{2.45}$$

Ez az egyszerűsítés jelentősen gyorsítja a számítást. A közvetlenül megismert módszer azonban nem használható, mivel a próbafüggvények módszere a periodikus együtthatók miatt nem alkalmas.

A megoldáshoz szükséges a késleltetett periodikus differenciálegyenletek Floquet elmélete. Az elmélet összefoglalva megtalálható [4]-ben, mely szerint $\mathbf{z}_t = \mathcal{M}(t)\mathbf{z}_0$ kezdeti feltételtől függő megoldás előáll, ahol $\mathbf{z}_t(\theta) = \mathbf{z}(t + \theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$ és $\mathcal{M}(t)$ megoldás operátor meghatározható. Ez azonban a legtöbb esetben nem állítható elő analitikusan, így az csak numerikusan közelíthető. A szemi-diszkretizáció alapján a periodikus együtthatókat közelíthetjük szakaszonként véges számú konstans taggal, melynek megfelelően

$$\mathbf{A}_{s,i} = \frac{1}{h} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{A}_s dt, \quad \mathbf{B}_{s,i} = \frac{1}{h} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{B}_s dt\tag{2.46}$$

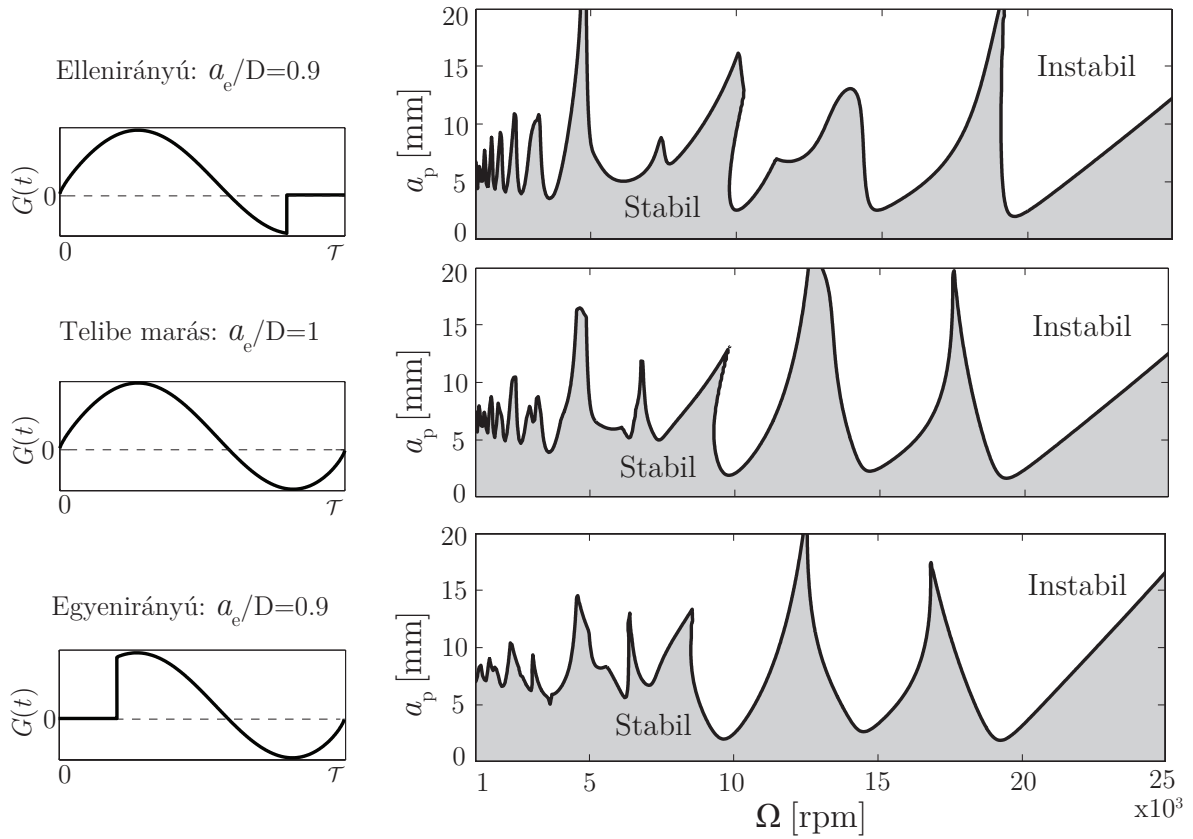
ahol $i = 1, 2 \dots p$, $\tau = ph$ és p a periódusban felbontott szakaszok száma. A szakaszonként konstans közelítés miatt már használható a megismert szemi-diszkretizációs módszer. Míg esztergálás esetén a $\mathcal{G}$ mátrix adta a monodromi mátrixot, úgy marás esetén a periodikusság miatt $\mathcal{M}$ monodromi mátrix

$$\mathcal{M} = \mathcal{G}_{p-1}\mathcal{G}_{p-2} \dots \mathcal{G}_0,\tag{2.47}$$

szerint számítható, $2n + r \times 2n + r$ méretű, és a szakaszonkénti $\mathcal{G}_i$ meghatározható

$$\mathcal{G}_i = \left(\begin{array}{c|cccc} \mathbf{P}_i & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_i \\ \mathbf{C}_s & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & 0 & \dots & 1 & 0 \end{array} \right), \quad \mathbf{P}_i := e^{\mathbf{A}_{s,i}h}, \quad \mathbf{Q}_i := \int_0^h e^{\mathbf{A}_{s,i}(h-s)} \mathbf{B}_{s,i} ds\tag{2.48}$$

alján. Tehát a monodromi mátrix közelítése után a rendszer stabilitásvizsgálata elvé-



2.18. ábra. Különböző típusú marási folyamatok stabilitástérképei egy két szabadsági fokú modell esetén, ahol $\omega_{n,1} = 1000$, $\omega_{n,2} = 2000$ [rad/s], $\xi_1 = 0.05$, $\xi_2 = 0.025$ [-], $\psi_1^2 = \psi_2^2 = -5i \cdot 10^{-5}$ [rad · s/kg]

gezhető, a stabilitás feltétele hasonlóan az előzőekhez a mátrix sajátértékeihez köthető. Ha $\mathbf{M}$ mátrix legnagyobb sajátértékének abszolút értéke kisebb, mint egy, tehát a komplex síkon az egységsugarú körön belül található, akkor a rendszer stabil, ellenkező esetben instabil.

Az esztergálás vizsgálatához képest teljesen analóg módon a mozgásegyenlet felírható a modális térbeli alakban. A terjedelempre való tekintettel az vizsgálat csak a nemarányosan csillapított esetben kerül bemutatásra. A már megismert elsőrendű alakra történő átírást

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) \\ \ddot{\boldsymbol{\xi}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}(t-\tau) \\ \dot{\boldsymbol{\xi}}(t-\tau) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) \end{pmatrix} \right) \quad (2.49)$$

követően, bevezetve a fenti együttthatókra a

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{v}(t) = \tilde{\mathbf{G}}(t) (\mathbf{v}(t-\tau) - \mathbf{v}(t)), \quad (2.50)$$

jelölést, a mozgásegyenlet modális koordináták terében értelmezett alakja

$$\boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\Psi} \dot{\mathbf{z}}(t) + \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{B} \boldsymbol{\Psi} \mathbf{z}(t) = \boldsymbol{\Psi}^T \tilde{\mathbf{G}}(t) \boldsymbol{\Psi} (\mathbf{z}(t-\tau) - \mathbf{z}(t)), \quad (2.51)$$

amely az érvényes azonosságok figyelembevételével, valamint átalakításokkal

$$\dot{\mathbf{z}}(t) - \mathbf{\Lambda} \mathbf{z}(t) = \tilde{\mathbf{G}}_m(t) (\mathbf{z}(t - \tau) - \mathbf{z}(t)) \quad (2.52)$$

összefüggésre hozható, ahol $\tilde{\mathbf{G}}_m(t) = \mathbf{\Psi}^T \tilde{\mathbf{G}}(t) \mathbf{\Psi}$. Mivel itt is $\tilde{\mathbf{G}}_m(t)$ csak egyetlen nemzérus elemmel rendelkezik, így a mátrixok kondicionálása után a szorzat kifejezhető

$$\tilde{\mathbf{G}}_m(t) = \dots = G(t) \begin{pmatrix} \psi_{11} \\ \bar{\psi}_{11} \\ \vdots \\ \psi_{n1} \\ \bar{\psi}_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{11} & \bar{\psi}_{11} & \dots & \psi_{n1} & \bar{\psi}_{n1} \end{pmatrix}.$$

alakkal, amelyből $\mathbf{B}_s(t)$ és $\mathbf{C}_s$ mátrixok könnyen azonosíthatók. A fenti levezetést felhasználva, az állapottérmodell mátrixai

$$\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_s(t) = \mathbf{\Lambda} - \tilde{\mathbf{G}}_m(t),$$

$$\mathbf{B}_s(t) = G(t) \begin{pmatrix} \psi_{11} & \bar{\psi}_{11} & \dots & \psi_{n1} & \bar{\psi}_{n1} \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{C}_s = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \bar{\psi}_{11} & \dots & \psi_{n1} & \bar{\psi}_{n1} \end{pmatrix}.$$

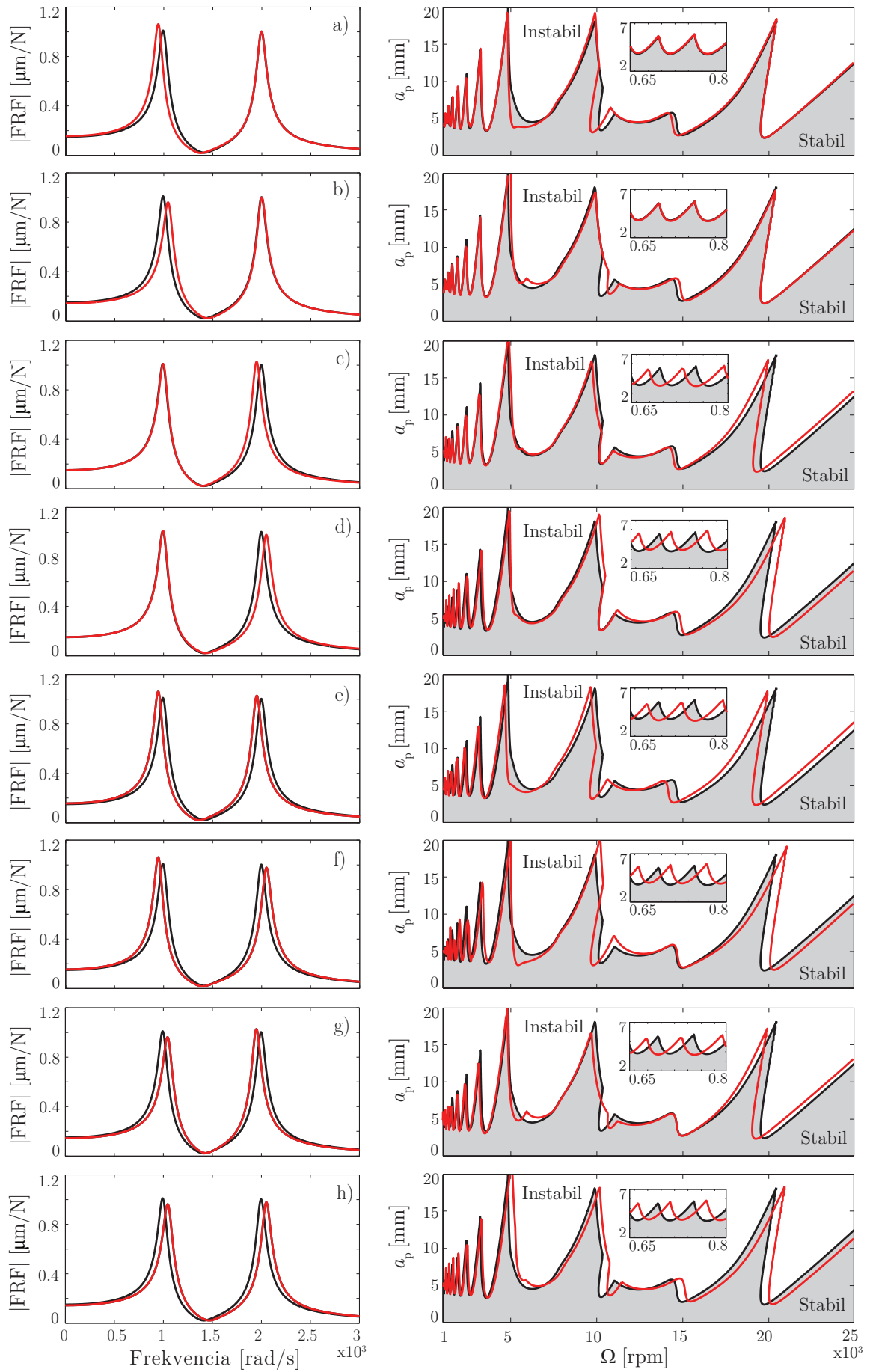
Látható, hogy itt is elegendő csak a modális paraméterek meghatározása, amely után a stabilitástérképek elkészíthetők. $\mathcal{M}$ monodromy mátrix és $\mathcal{G}_i$ numerikus leképezési mátrix dimenziói továbbra is $2n + r \times 2n + r$, a (2.43)-ra levezetett összefüggések változatlanok. 2.18 ábrán a módszerrel elkészített eredmények láthatók egy 90%-os radiális fogásmélységű egyenirányú, ill. ellenirányú, valamint egy 100%-os telibe marás (*full-immersion milling*) esetén.

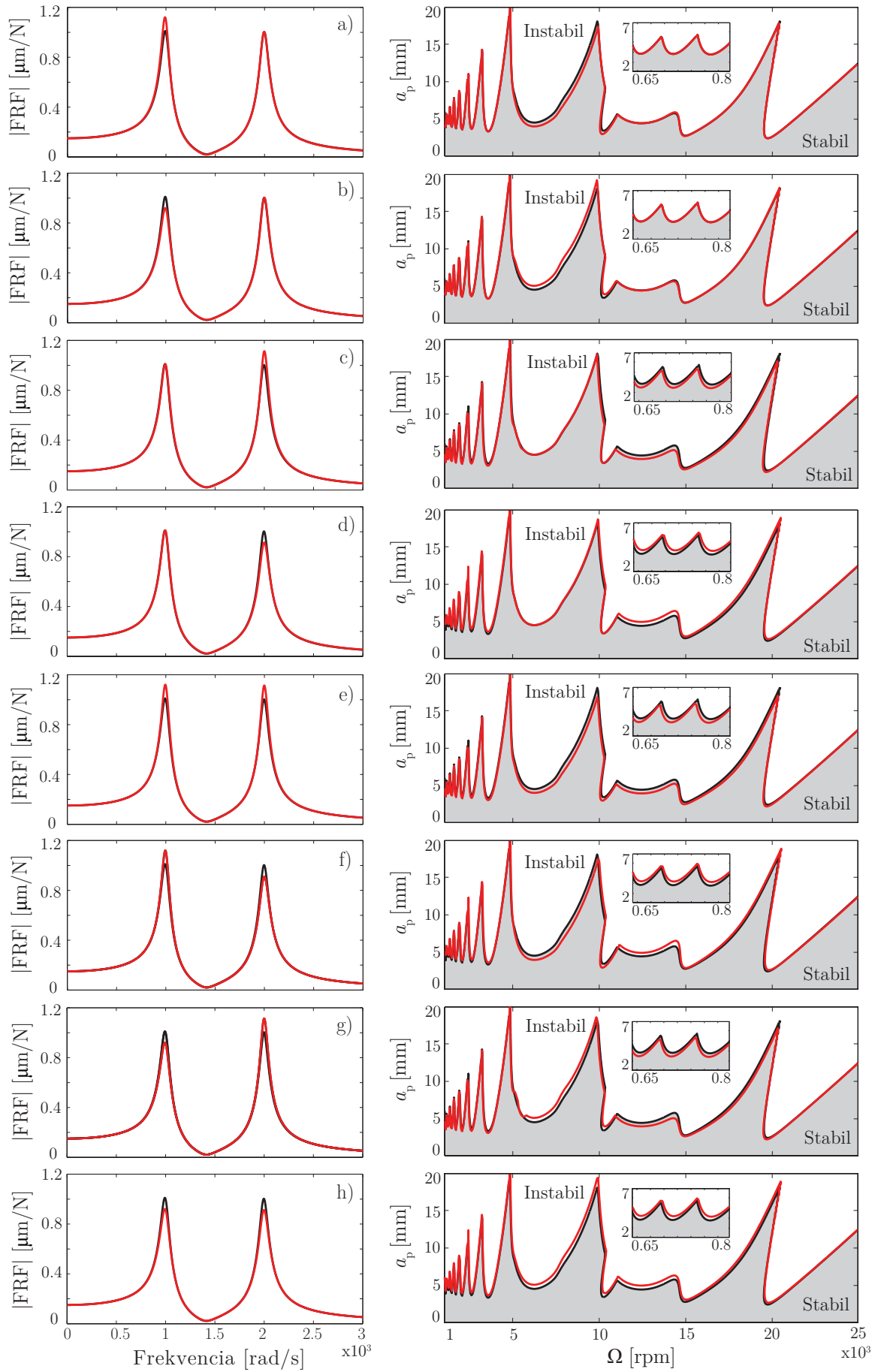
2.2.2. Érzékenységvizsgálat marás esetén

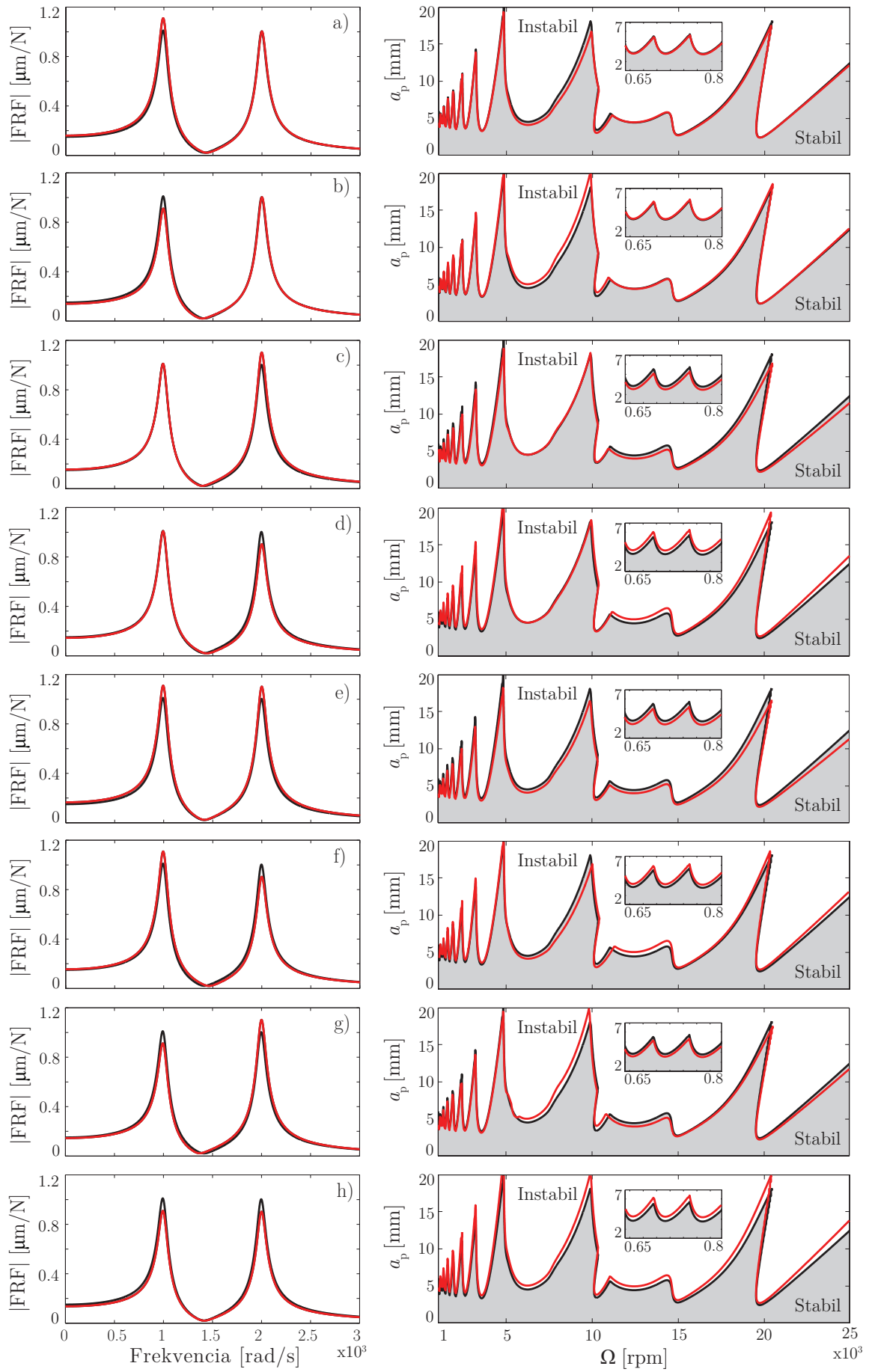
Az esztergáláshoz hasonlóan, a marási folyamatok stabilitástérképének érzékenysége is vizsgálható. Az egyszerűbb vizsgálat érdekében a fent bemutatott egydimenziós modell használt, ugyanakkor fontos megjegyezni, hogy ez csak egy egyszerűsítés. Abban az esetben, ha sem x sem pedig y irányban nem elhanyagolható a merevség, jelentősen kiterjeszthetők a szempontok, így a vizsgálat is összetettebbé válik.

Hiba a modális paraméterek becslésében

Az érzékenységi vizsgálat szempontjai megegyeznek az esztergáláséval. Első lépésben a felvett kettő szabadsági fokú modell modális paramétereit torzítjuk el, majd ezt követően az elhanyagolt illetve összeolvadt módusok hatásai vizsgáltak. A felvett és illesztett frekvenciaátviteli függvények, tehát azok modális paraméterei is megegyeznek a 2.1.3 alfejezetben ismertetettekkel. A térképek 50%-os ellenirányú marást ($a_e/D = 0.5$) feltételezve készültek egy egyenes, kettő élű szerszám alapján ($N = 2$).

2.19. ábra. Térkép érzékenysége a ω_n függvényében (± 50 [rad/sec]).

2.20. ábra. Térkép érzékenysége ξ függvényében ($\pm 10\%$).

2.21. ábra. Térkép érzékenysége ψ^2 függvényében ($\pm 10\%$).

A megmunkálási paraméterek: $q = 0.75$, $K_t = 133 \cdot 10^6 \text{ N/m}^{1+q}$, $K_r = 40 \cdot 10^6 \text{ N/m}^{1+q}$ és $f_z = 0.1 \text{ mm/fog}$.

Első lépésben a csillapítatlan sajátkörfrekvencia eltérése vizsgált, amelyben $\pm 50 \text{ Hz}$, vagyis 5% eltérést feltételezünk. 2.19 ábrán ennek hatása látható, a torzítatlan modális paraméterek pedig 2.1 táblázatban megtalálhatók. Az alacsonyabb frekvenciájú módus hibája esetén, vagyis a) és b) ábrákon, (hasonlóan az esztergálási példákhoz) a térkép csak magasabb fordulatszámokon változik jelentősen, alacsony fordulatszámon a fenti példában nem észrevehető az eltérés. A magasabb frekvenciájú módus (c) és d) ábra) azonban alacsony és magasabb fordulatszámokon is észrevehető eltérést eredményez. Többszörös hiba esetén az eltérés jellemezhető a becsült frekvenciák hibáinak összegével, ez megtalálható e)–h) ábrákon.

2.20 ábrán a ξ csillapítási tényezők hibás becslésének hatása látható. A sajátfrekvenciák azonosítása rendszerint pontosabb, ám a csillapítási tényezőké az esetek többségében bizonytalanabb. Az első módus hibája látható a) és b) ábrákon, a második módusé pedig c) és d) ábrákon. Megfigyelhető, hogy itt is az alacsonyabb frekvenciájú módusnak gyakorlatilag csak magasabb fordulatszámon van hatása, míg a második módus alacsony és magas fordulatszámon is befolyásolja a térkép határait. Ennek oka az, hogy a második módus a dominánsabb, az ahhoz tartozó határgöbék fogják első sorban meghatározni a stabil terület határait. Ez természetesen nem általános jelenség, de a fenti példában ez egyértelműen kivehető. Ha mindkét módus illesztése tartalmaz pontatlanságokat, amint az látható e)–h) ábrákon, a határvonala eltolódása a módusok egyenkénti hibájának összegével arányos.

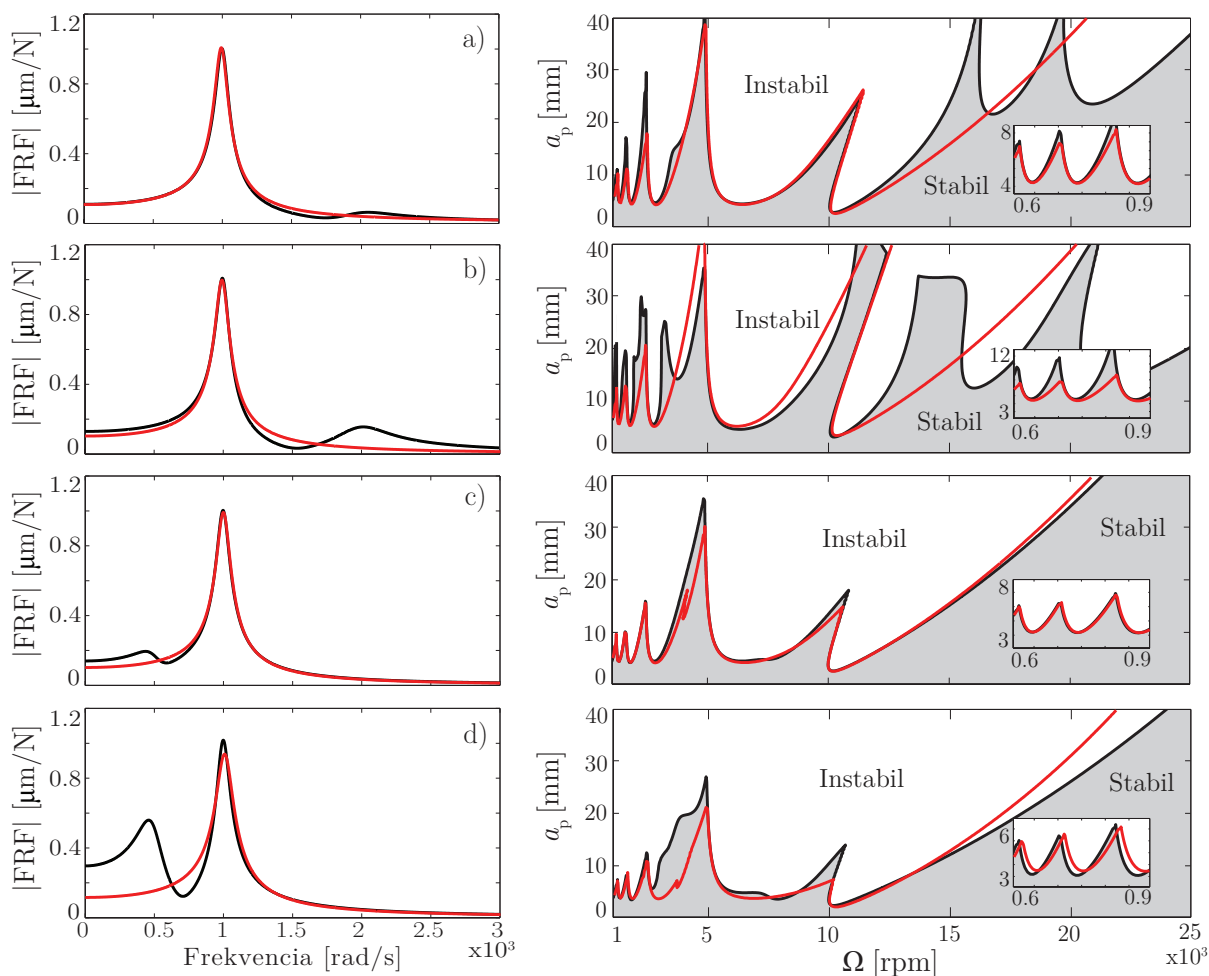
Abban az esetben, ha a lengésképhez tartozó ψ^2 paraméter tartalmaz csak hibát, az eredmények hasonlóak a csillapítási tényezőéhez. a) és b) ábrán az első módus hibájának hatása látható, míg c) és d) ábrákon a másodiké. Megfigyelhető, hogy alacsony fordulatszámon gyakorlatilag csak a második módus becslésének hibája okoz eltérést. e)–h) ábrákon a többszöri hiba hatása látható, amely hasonló az előzőekhez.

Jelen példában tehát a magasabb frekvenciájú módushoz tartozó határgöbék határozzák meg elsősorban a stabil tartomány széleit, így azok hibás becslése is jelentősebb változásokat vonz maga után.

Módus elhanyagolás

Mint az már esztergálás esetén is bemutatásra került, a legtöbb esetben az illesztés hibáját az alacsony rendszámú közelítés, például nem-domináns rezonanciafrekvenciák elhanyagolása jelentősen befolyásolhatja. A stabilitástérkép bizonyos esetekben igencsak érzékeny lehet. 2.22 ábrán néhány tipikus eset található. Az eredeti modális paraméterek és az ahhoz tartozó alacsonyabb fokszerű közelítés paraméterei megtalálhatók 2.2 táblázatban.

Abban az esetben, ha a domináns módushoz képest magasabb frekvencián kerül elhanyagolásra egy módus, amint az látható a) és b) ábrán, a térkép elsősorban magas



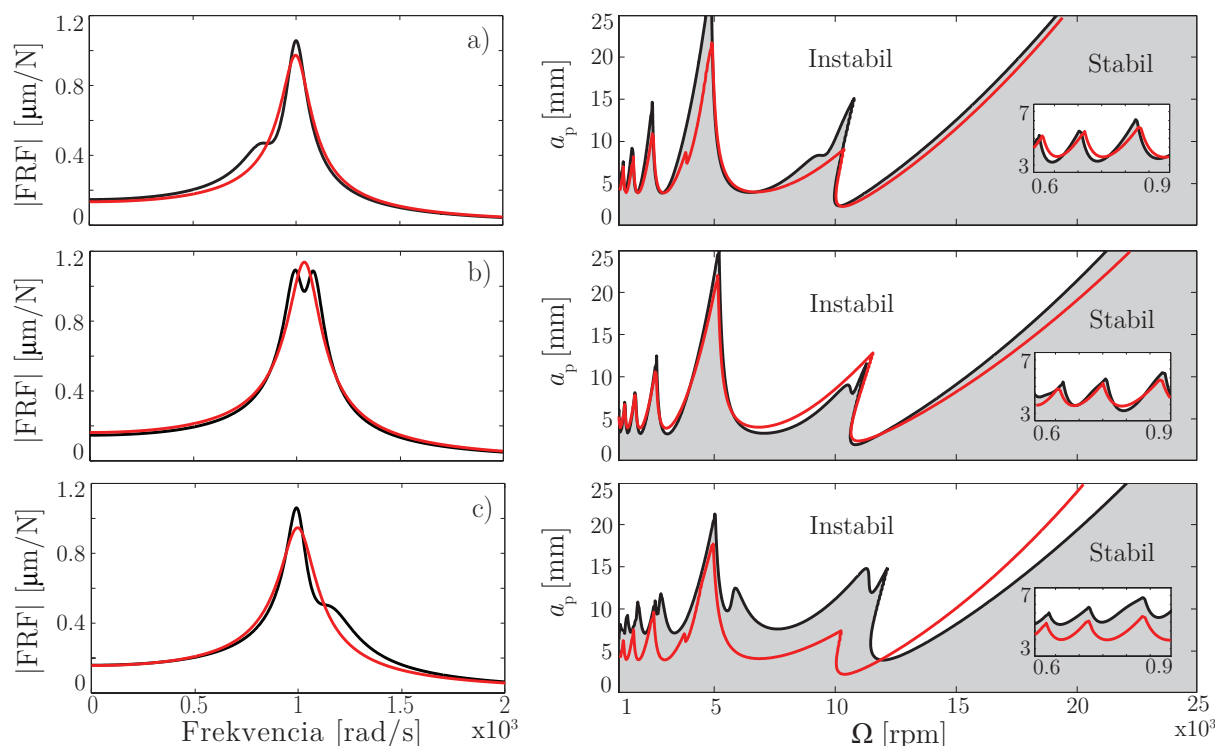
2.22. ábra. Eredmények a nemdomináns módus elhanyagolásának következtében.

fordulatszámokon változik jelentősen.

Amint észrevehető, nemcsak eltolódnak a határok, de jellegre is megváltoznak. Kisebb hiba esetén alacsony fordulatszámon gyakorlatilag elhanyagolható az eltérés, míg nagyobb hiba esetén már itt is észrevehető annak hatása. A gyakorlatban történő illesztés során ilyen esetek könnyen előfordulhatnak, így ezeknek a módusoknak a helyes közelítése elengedhetetlen lehet.

Ha a domináns módus előtt helyezkedik el egy kevésbé domináns rezonanciacsúcs, amint az kivehető c) és d) ábrákon, abban az esetben kisebb az illesztés hibájának a hatása. Látható módon nagy elhanyagolás esetén a domináns csúcs sem közelíthető megfelelően, így pusztán ebből kifolyólag is várható egy nagyobb eltérés. Ennek ellenére az a) és b) esetekhez viszonyítva sem jelentős a hibás illesztés hatása. Természetesen a hiba az ábrákon jelentősen felnagyított, a gyakorlatban viszont ezek lényegesen pontosabban és könnyen közelíthetők illetve illeszthetők magasabb fokszerű modellekkel.

Megfigyelhető tehát, hogy jelen esetben is a magasabb frekvenciájú módusok becslésére, valamint a magasabb fordulatszámokra érzékenyebb a térkép. A különféle esetek közötti eltérés oka már az esztergálásnál bemutatásra került (2.10 ábra).



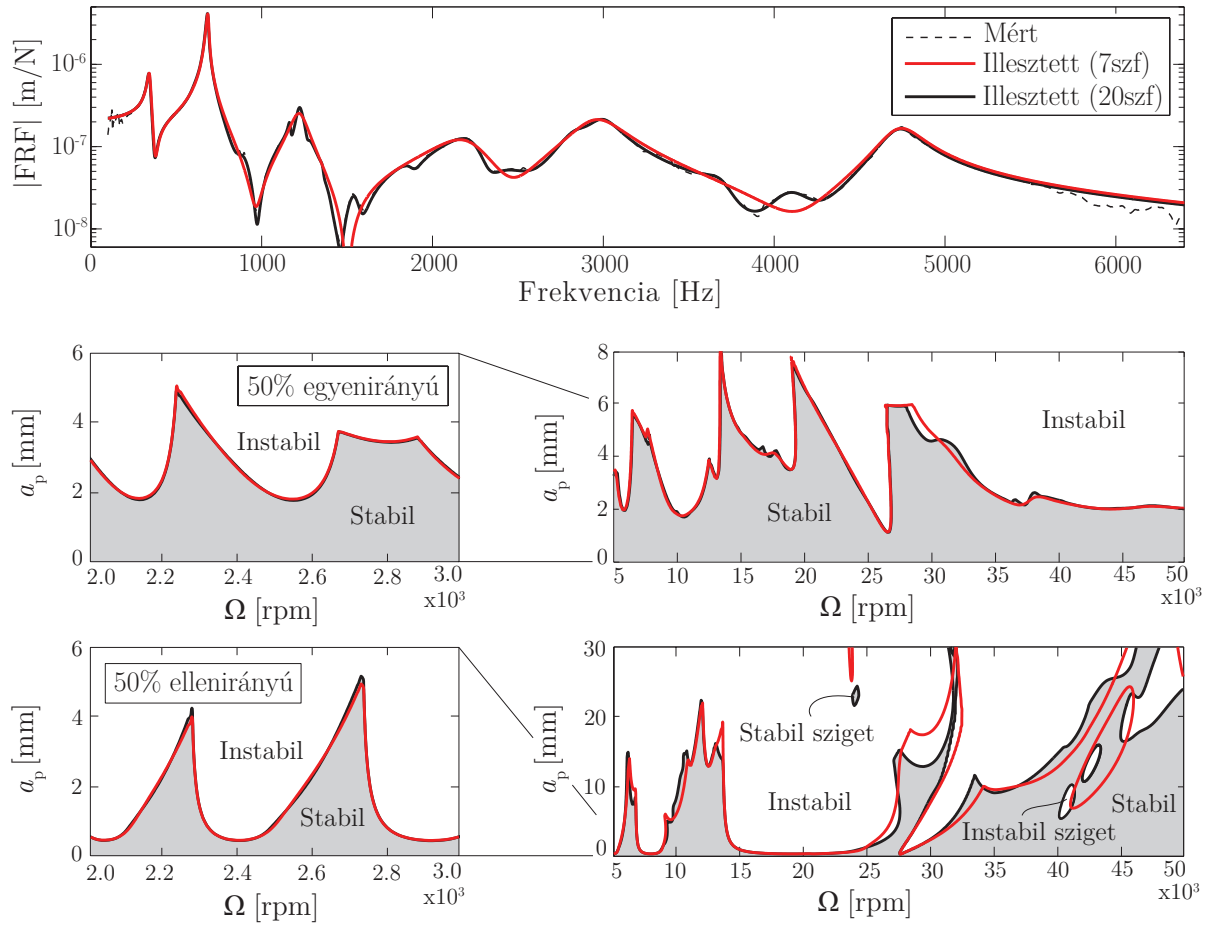
2.23. ábra. Eredmények a közeli módusok összeolvadásának következtében.

Közeli módusok összeolvadása

Egy másik könnyen előforduló hibalehetőség a közeli módusok közös illesztése. 2.23 ábrán néhány ehhez tartozó tipikus eset látható, míg az ehhez tartozó modális paraméterek 2.3 táblázatban. Abban az esetben, ha a domináns módushoz képest közvetlenül alacsonyabb frekvencián olvad be egy másik módus, amint az látható az a) ábrán, akkor annak a hatása kevésbé lesz érzékelhető. A stabil tartomány határai mind alacsony fordulatszám, mind pedig magasabb fordulatszám keveset változnak, az egy szabadsági fokú közelítés elfogadható eredményt ad. Hasonló állítható b) esetben, ahol a két módus közel azonos, ám nagyon közeli frekvencián jelennek meg. Ilyen esetben is jó közelítést ad az egy szabadsági fokú modell. Ezzel szemben c) esetben, amikor magasabb frekvenciájú módus kerül elhanyagolásra, a térkép minőségileg is megváltozik. Érdekes rámutatni, hogy jelen esetben jelentősen alábecsüljük a stabil tartományt alacsony és magas fordulatszám is, míg ugyanebben a példában az esztergálási modell esetén felülbecsültté vált a térkép. Más esetekben azonban hasonló eredményeket láthattunk.

2.2.3. Esettanulmány

A 2.1.5 alfejezetben egy valós mérési eredményt és annak különféle fokszerű közelítésének hatását vizsgáltuk meg a stabil tartományokra. Míg előbbi esetben esztergálásra, jelen esetben marásra végezhetjük el ugyanazt a vizsgálatot. Ennek érdekében a 7 és 20 szabad-



2.24. ábra. Esettanulmány: Stabilitástérképek érzékenysége 7 (piros) és 20 (fekete) szabadsági fokú modell esetén (50%-os egyenirányú és ellenirányú marás).

sági fokú közelítés eredményeit hasonlítjuk össze. A modális paraméterek megtalálhatók a 2.5 táblázatban.

2.24 ábrán két megmunkálási típus eredményét ábrázoltuk, egy 50%-os egyenirányút és egy 50%-os ellenirányút. Mindkét esetben a szerszám három egyenes éllel rendelkezik ($N = 3$), továbbá a megmunkálási paraméterek: $q = 0.75$, $K_t = 133 \cdot 10^6 \text{ N/m}^{1+q}$, $K_r = 40 \cdot 10^6 \text{ N/m}^{1+q}$ és $f_z = 0.1 \text{ mm/fog}$. A numerikus számításnál a periódus felbontása $p = 75$ volt. A 20 szabadsági fokú modell eredménye tekinthető pontosabbnak, ezt jelöli a szürke tartomány fekete határvonallal, míg a 7 szabadsági fokú modell eredményét pirossal ábrázoltuk.

A felső ábrán az 50%-os egyenirányú marás eredménye látható. Alacsony fordulatszámon ($\Omega = 2 \dots 3000 \text{ rpm}$) a két modell között gyakorlatilag nincs különbség, de magasabb fordulatszámokon ($\Omega > 5000 \text{ rpm}$) sem jelentős.

Az alsó ábrán az 50%-os ellenirányú marás eredménye található meg. Alacsony fordulatszámon itt sem jelentkezik értékelhető eltérés, azonban a fordulatszám növekedésével ez már nem teljesül. A stabil területek csúcsai egyre magasabbra nyúlnak és az előző esethez

képest jelentősen szabdaltabbá válik a terület. Látható módon a maximális axiális fogásmélység is többszörösére növelhető, azonban a 7 és 20 szabadsági fokú közelítés között itt már jelentősebb eltérés érzékelhető. Található egy apró stabil sziget is, amely viszonylag jelentősen elmozdul és változik a fokszám növelésével.

Jelen esettanulmány eredménye azt mutatja, hogy a két megmunkálási folyamat közül az egyenirányú marás eredménye kevésbé érzékeny a modális paraméterekre, míg az ellenirányú folyamat nemcsak érzékenyebb, de több megvizsgálandó körülményt is tartalmaz.

Összefoglalás

Az ipar által támasztott egyik legfontosabb követelmény a megmunkálási idő csökkentése és a minőség javítása. Ezek bizonyos szempontból ellentmondó követelmények, és a valóságban ennek gyakran jelentős hatása van. A megmunkálási idő csökkenthető, ha a szerszámgép fordulatszámát, így az anyagleválasztás sebességét növeljük. A folyamat során azonban olyan káros rezgések keletkezhetnek, amely nemcsak rontják a minőséget, de tönkreteszhetik a munkadarabot vagy magát a szerszámgépet is. A keletkező rezgések magyarázatának legelfogadottabb elmélete a *regeneratív hatás*, amely bonyolult matematikai és mechanikai modellekkel írható le.

A dolgozat első részében bemutatásra kerültek a több szabadsági fokú dinamikai rendszerek vizsgálatának módjai, az arányos és nemarányos csillapítás matematikai és mechanikai tulajdonságai valamint a modális analízis alapjai. Utóbbi témájában részletesen elemeztük az arányos és a nemarányos rendszer frekvenciatartománybeli tulajdonságait, valamint a frekvenciaátviteli függvény modális paraméterekkel történő alakjának levelezését. A téma kidolgozása közben egy könnyen alkalmazható iteratív módszeren alapuló paraméterillesztés is alkalmazásra került, amellyel gyorsan és hatékonyan lehet alacsony fokszámú illesztést végezni.

A téma második felében a szerszámgéprezgések esetén gyakran alkalmazott stabilitási térképek érzékenységét vizsgáltuk. Egy valós mért frekvenciaátviteli függvényből nehéz a pontos modális paraméterek meghatározása, a zaj miatt az illesztett paraméterek hibával terheltek. Ennek hatására a stabilitási térképek megváltoznak. Áttekintettük az esztérgáláshoz használt dinamikai modellt és elemeztük a gerjesztett rendszer stabilitását mind frekvenciatartományban, mind pedig időtartományban az illesztett modális paraméterekkel. A frekvenciatartománybeli számítással a frekvenciaátviteli függvényhez tartozó pontos térkép meghatározható, így könnyen összehasonlítható az elméletileg helyes és a közelített illesztés közti eltérés. Ennek megfelelően egy valós mérés esetére is elkészítettük a térképeket. Vizsgáltuk az egydimenziós marási modell érzékenységét is időtartományban az illesztett modális paraméterek ismeretében.

A vizsgálat eredménye megmutatta, hogy a stabilitási térkép érzékenyen reagál a magas frekvenciájú módusok modális paramétereinek hibás illesztésére. Külön kiemelhetők itt azokat az eseteket, amikor egy dominánsnak nem tűnő sajátfrekvenciát hanyagolunk el, vagy közeli módusokat illesztünk egyetlen közössel. Extrém esetekben minőségileg is megváltozhat a térkép jellege, jelentős területeket veszíthetünk vagy hamisakat nyerhetünk. A vizsgált esettanulmány azonban azt mutatja, hogy kellően magas fokszámú és pontos illesztés esetén megfelelően jól közelíthetők a stabil tartományok még magas fordulatszámoknál is, ahol a térkép kifejezetten érzékeny.