



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Gépészmérnöki Kar
Műszaki Mechanikai Tanszék



Kotnyek Bálint

IZOGEOMETRIKUS ANALÍZIS BEMUTATÁSA,
HATÉKONYSÁGÁNAK ELEMZÉSE

TDK dolgozat

Konzulens: Dr. Kossa Attila

2014.

Tartalomjegyzék

I.	Absztrakt.....	3
II.	Bevezetés.....	4
1.	<i>Előzmények</i>	4
2.	<i>Célkitűzés</i>	9
3.	<i>A dolgozat tartalmi áttekintése</i>	9
III.	Irodalmi áttekintés.....	10
IV.	A szükséges elméleti háttér bemutatása.....	14
1.	<i>Az izogeometrikus analízishez használt terek</i>	14
2.	<i>Knot vektor</i>	17
3.	<i>B-spline</i>	19
4.	<i>NURBS</i>	28
V.	Az analízis alkalmazása	33
1.	<i>Rugalmasságtani összefoglaló</i>	33
2.	<i>Teljes potenciális energia minimumelve</i>	35
3.	<i>Izogeometrikus diszkretizáció</i>	35
4.	<i>Globális deriváltak származtatása</i>	36
5.	<i>Numerikus integrálás</i>	37
6.	<i>Merevségi egyenlet meghatározása</i>	38
VI.	Tesztfeladatok.....	39
1.	<i>Tesztfeladat: Megoszló erőrendszerrel terhelt hajlított rúd</i>	39
2.	<i>Tesztfeladat: Hajlított konzol</i>	47
VII.	Összefoglalás.....	51
VIII.	Függelék	52
1.	<i>Táblázatok jegyzéke</i>	52
2.	<i>Forrásjegyzék</i>	55

Absztrakt

Az izogeometrikus analízis (IGA) egy új, végeselemes módszer (VEM), amely jelenleg nagy érdeklődésnek örvend a tudományos világban, valamint a szoftvercégek is nagy hangsúlyt fektetnek az eljárás népszerű tervező és szimulációs programokba történő implementálására. Az analízis magába foglal egy olyan fejlett technológiát, amely lehetőséget ad a mechanikai analízishez tartozó módszerek, illetve a számítógéppel segített tervezés (CAD) egyesítésére és egy önálló, egységes folyamatba való ágyazására. Megtartva a CAD tervezés, valamint a VEM analízis felépítését és alapelveit, de ezeket kombinálva az eljáráshoz szükséges, eddig nem használt fogalmakkal, megalkothatunk egy új, egységes, pontosabb eredménnyel szolgáló technikát.

A téma kiválasztásakor az izogeometrikus analízis aktualitása, valamint napjaink mérnöktársadalmában betöltött meghatározó szerepe volt elsődleges szempont.

A dolgozat célja folyóiratcikkek, szakkönyvek és további publikációk tanulmányozásával a lehető legnagyobb rálátást kialakítani a témában, majd részletesen ismertetni az analízis alkalmazásához szükséges háttérismereteket. A módszer bemutatása rugalmasságtani problémákra szorítkozik, ismertetve a modellezéséhez szükséges geometria kialakításának elméleti hátterét, illetve eszköztárát, valamint az analízis elvégzéséhez elengedhetetlen ismeretek összefoglalását. Az izogeometrikus analízis előnyeit és hatékonyságát több mintapélda illusztrálásával ismerteti a dolgozat, főként olyan feladatok bemutatásával, ahol a geometria kialakításából adódóan pontosabb eredményeket ad a NURBS alapú geometriák alkalmazása.

A dolgozatban bemutatott mintapéldák ismertetik az adott feladathoz tartozó megoldásokat - az IGA megoldások mellett - a klasszikus értelemben vett végeselemes módszer alkalmazásával, valamint az értékeléskor referenciaként értendő eredményeket is. Ezáltal széles rálátást kapunk az IGA hatékonyságáról, pontosságáról.

A dolgozat másodlagos célja, hogy kiindulópontot nyújtson az érdeklődőknek. Az izogeometrikus analízist mérnöki szempontból összefoglalva közelebb hozza ezt az aktuális, egyre nagyobb teret foglaló témakört az emberekhez.

I. Bevezetés

1. Előzmények

Az izogeometrikus analízis kialakulásának története:

Jelen fejezet az [1] irodalom alapján nyújt rövid összefoglalást az izogeometrikus analízis kialakulásáról.

Az izogeometrikus analízis ötlete egy olyan megbeszélés közben fogalmazódott meg Thomas J.R. Hughes¹-ban, amelynek témáját a CAD környezetben készítendő végeselemes modellek szolgáltatták. A probléma a következő volt: az elmúlt években az egyre bonyolultabbá és összetettebbé váló rendszerek esetén modellalkotás nehézsége egyre nagyobb lett a komplex mérnöki tervezésben, ha az általános végeselemes eljárást alkalmazták. Hughes szerint a helyzet olyannyira kilátástalan volt, hogy a tudományos közösség rossz nézőpontból kezdte megközelíteni az adott helyzet megoldását. A végeselemes számításokkal foglalkozó mérnökök számára közismert tény volt, hogy egy tényleges feladat megoldásánál rengeteg idő és energia megy el arra, hogy a CAD-ben készített modellt behálózzák a végeselemes analízis számára. Sokszor ez nem triviális és összetett folyamat. Ha ezt a lépést ki lehetne iktatni a számítások során azzal rengeteg időt és energiát lehetne megspórolni. Ez a gondolat volt az ami Hughes-t is motiválta

Az izogeometrikus analízis elméletén 2003-ban kezdett el dolgozni Hughes, egy évvel az után, hogy csatlakozott az austini University of Texas egyetemhez. Kapott egy kutatási támogatást az egyetemtől, viszont nem volt erre kijelölt hallgatója. Egy első éves hallgató, Austin Cottrell viszont felkereste Hughes professzort a témával kapcsolatban, és felajánlotta, hogy amennyiben van lehetőség, dolgozna a témán PhD hallgatóként, Tom felügyelete alatt. Miközben Austin elkezdte a tanulmányait, Tom Hughes egy másik végzős hallgatója, Yuri Bazilevs is felvette vele a kapcsolatot, és Cottrelllel együtt megalkották az első NURBS alapú végeselemes kódot. Ekkoriban vetődött fel az izogeometrikus analízis elnevezés. Ezután rövid idő alatt ez lett Hughes professzor legfőbb projektje, amelyhez számos hallgató, és az egyetemen kutató ember csatlakozott, mint: Ido Akkerman, David Benson, Alessandro Reali, Giancarlo Sangalli.

¹ <http://users.ices.utexas.edu/~hughes/>

Hughes, Cottrell és Bazilevs 2007 szeptemberében indult projektjében egy könyv kiadását tűzték ki célul, amelyben összefoglalják az elmélet lényegét. Az általuk kidolgozott módszer rengeteg fizikai folyamat vizsgálatára alkalmas, kezdve az áramlástani, elektromos feladatokkal, a rugalmasságtani problémák megoldásán át a rezgéstani, hullámterjedési kérdések megválaszolásáig. A 2009-ben kiadott könyv [1] a mai napig a legfontosabb kiindulópont a témakörben.

Thomas J.R. Hughes: Az austini *University of Texas* egyetem *Aerospace Engineering and Engineering Mechanics* tanszékének professzora, Az egyetemhez 2002-ben csatlakozott, előtte a *Stanford University* és a *California Institute of Technology* egyetemeken volt az *Department of Applied Mechanics* és *Department of Mechanical Engineering* elnöke. Kutatási témái rendkívül széles területet fednek le a deformálható testek mechanikája terén és a hozzá kapcsolódó numerikus módszerek kidolgozásában. Kutatási területeiről részletesen olvashatunk személyes honlapján



1. Ábra
Thomas J.R. Hughes

Hughes a mechanikával foglalkozó tudományos közösség egyik legismertebb kutatója. Tagja az amerikai Tudományos Akadémiának (*U.S.-National Academy of Sciences*), a Királyi Természettudományos Társaságnak (*Royal Society of London*), és más számos intézménynek. Számos egyetemen szerzett tiszteletbeli doktori címet. 2001-ben a Thomson Reuters jelentése szerint szerepelt a 15 legtöbbet hivatkozott kutató között a „Scientific Computing” kategóriában és tagja a 100 legtöbbet hivatkozott kutatónak az összes mérnöki tudomány terén. Publikációira több tízezer hivatkozást kapott a Google Scholar adatbázisa szerint. Az alábbi táblázat mutatja a hivatkozási számokat.



2. Ábra – Thomas J.R. Hughes hivatkozásai

Az öt legfontosabb publikációjára kapott hivatkozásokat az alábbi táblázat foglalja össze, köztük a 2005-ös izogeometrikus analízisről szóló első fontos publikációja.

Cím 1–20	Idézte	Év
The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis TJR Hughes Courier Dover Publications	7830	2012
Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations AN Brooks, TJR Hughes Computer methods in applied mechanics and engineering 32 (1), 199-259	4088	1982
Computational inelasticity JC Simof, TJR Hughes	3453	2008
Mathematical foundations of elasticity JE Marsden, TJR Hughes Courier Dover Publications	2465	1994
Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement TJR Hughes, JA Cottrell, Y Bazilevs Computer methods in applied mechanics and engineering 194 (39), 4135-4195	1409	2005

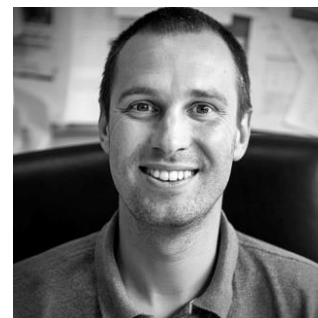
3. Ábra – Thomas J.R. Hughes legfontosabb munkái (Forrás: Google Scholar, 2014.10.04.)

A Műszaki Mechanikai tanszék kapcsolatba kerülése a témával:

A Műszaki Mechanikai Tanszék számos dolgozója ismerte már az izogeometrikus módszert és annak lehetőségeit. A TDK dolgozatomban témavezetője, Dr. Kossa Attila 2013 tavaszán részt vett a „Iso-Geometric Methods for Numerical Simulation” CISM kurzuson Udinében. A kurzus során ismerkedett össze Alessandro Realival, az egyik előadóval és egyeztek meg abban, hogy Reali látogatást tesz a BME Műszaki Mechanikai Tanszékén és egy ismertető előadást tart az izogeometrikus analízisről.

Alessandro Reali szemináriuma

Alessandro Reali²: A pavai egyetem, a *Civil Engineering and Architecture* tanszékének egyetemi docense, aki több, jelenlegi is futó izogeometrikus analízissel kapcsolatos kutatás vezetője, egy izogeometrikus kutatási szoftver, és több publikáció, tanulmány megalkotója, aki számtalan díj, és elismerés mellett 2014-ben felkerült a „*Highly Cited Researchers*” listára. Érdekes kihangsúlyozni azt is, hogy rendelkezik ERC Starting Grant támogatással is, ami bizonyítja kutatói munkájának fontosságát. A Google Scholar rendszer szerinti idézettségi mutatókat és az 5 legfontosabb publikációját az 5. és a 6. ábra mutatja.



4. Ábra –
Alessandro Reali



5. Ábra – Alessandro Reali hivatkozási számai

A 6. Ábrán látható öt publikáció mindegyike az izogeometrikus analízis alkalmazásához kapcsolódik. Többek között ez is egy bizonyíték arra, hogy ez a téma mennyire komoly, aktuális és felkapott.

Alessandro Reali által tartott előadást természetesen nagy érdeklődés övezte, a tanszéki könyvtár teljesen megtelt érdeklődő oktatókkal, hallgatókkal. Ezen az előadáson kerültem kapcsolatba a témával, és ekkor döntöttem úgy, hogy felkeresem Dr. Kossa Attila Tanár Urat, ugyanis szerettem volna jobban megismerkedni ezzel a módszerrel, és további ismereteket szerezni ebben a témakörben.

² <http://www-3.unipv.it/alereali/>

Cím 1–20	Idézte	Év
Isogeometric analysis of structural vibrations JA Cottrell, A Reali, Y Bazilevs, TJR Hughes Computer methods in applied mechanics and engineering 195 (41), 5257-5296	428	2006
Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows Y Bazilevs, VM Calo, JA Cottrell, TJR Hughes, A Reali, G Scovazzi Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 197 (1), 173-201	414	2007
Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis JA Cottrell, TJR Hughes, A Reali Computer methods in applied mechanics and engineering 196 (41), 4160-4183	329	2007
Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis TJR Hughes, A Reali, G Sangalli Computer methods in applied mechanics and engineering 199 (5), 301-313	243	2010
Duality and unified analysis of discrete approximations in structural dynamics and wave propagation: Comparison of p-method finite elements with k-method NURBS TJR Hughes, A Reali, G Sangalli Computer methods in applied mechanics and engineering 197 (49), 4104-4124	171	2008

6. ábra – Alessandro Reali legfontosabb munkái (Forrás: Google Scholar, 2014.10.04.)

Az előadáson érintett témák:

- Az izogeometrikus analízis alapkoncepciója
- Formafüggvények, és hálósűrítés
- Izogeometrikus analízis alapjai és implementációs lehetőségei
- Az alkalmazás legfontosabb szabályai
- Példákon keresztüli összehasonlítás a „hagyományos” végeselemes eljárással

Magyar nyelvű kutatások a témában

Mivel jelenleg tudomásom szerint nincs magyar nyelvű dolgozat, cikk ebben a témában, a dolgozat egyik célja, hogy az izogeometrikus analízis alapjait magyar nyelven összefoglalva, és rugalmasságtani példákon kifejtve bemutassa a módszer lényegét, és alkalmazásához tartozó előnyöket.

2. Célkitűzés

A téma kiválasztásakor figyelembe vett szempontok elsődlegesen az izogeometrikus analízis aktualitása, a meghatározó szerepe, és fontossága napjaink mérnöktársadalmában. Ezt alátámasztva rengeteg tudományos munka, és hivatkozás jelent meg a módszerrel kapcsolatban, és emellett problémát, kérdést újravizsgáltak az izogeometrikus analízis segítségével.

A dolgozat célja a legnagyobb rálátást kialakítva a témában, összefoglalja a módszer alkalmazásához szükséges ismereteket, és mintapéldákon keresztül bemutassa a módszer hatékonyságát. Másodlagos cél, a kidolgozott mintapéldákhoz, és további saját feladatokhoz felhasználható programkód megvalósítása Wolfram Mathematica [10] környezetben.

3. A dolgozat tartalmi áttekintése

Az 1. fejezetben a dolgozathoz kapcsolódó absztrakt található. A 2. fejezetben összefoglalásra kerül az izogeometrikus analízis kialakulásának története, valamint a Thomas J.R. Hughes, illetve Alessandro Reali munkássága. Ebben a fejezetben kerülnek kitűzésre a dolgozattal kapcsolatos célok is. A 3. fejezetben a témakörhöz kapcsolódó irodalomkutatás olvasható, valamint bemutatásra kerülnek a legfontosabb publikációk. A hatalmas irodalmi háttér miatt, az irodalmi áttekintés csak az izogeometrikus analízishez tartozó fontosabb munkákat ismerteti, a „hagyományos” végeselemes eljárással kapcsolatos publikációkat nem. Az izogeometrikus analízis megértéséhez és elsajátításához alapvetően szükséges a végeselemes módszer ismerete, e tudást feltételezve, felhasználva készült ez a dolgozat. A 4. fejezetben az izogeometrikus analízishez szükséges további elméleti ismeretek találhatók, valamint a kidolgozott mintapéldákon keresztül kerülnek bemutatásra a módszer alapjai. Az 5. fejezetben az alapokat rugalmasságtani feladatokra alkalmazva, az általános megoldáshoz tartozó gondolatmenet ismertetése található, míg az 6. fejezetben két síkbeli példa került kidolgozásra referencia, végeselemes, valamint izogeometrikus megoldással, végül a kapott eredmények összehasonlítása és pontossági vizsgálata olvasható. A dolgozat utolsó fejezetében az összefoglalás és értékelés található.

II. Irodalmi áttekintés

Mivel hatalmas számú tudományos publikáció jelent meg ebben a témában, ezért képtelenség tökéletesen átfogó, minden cikke kiterjedő irodalomkutatást végezni. Emiatt a dolgozat e fejezete betekintést nyújt a téma elterjedésének folyamatába, valamint ismerteti a témához kapcsolódó legfontosabb publikációkat.

A három legnagyobb kiadónál megjelentetett publikációkból készített kutatásom eredményének összehasonlítása látható az alábbi grafikonokon. A kutatásokat a Springer³, Elsevier⁴, Wiley⁵ kiadók honlapján végeztem, minden esetben az „isogeometric analysis” kifejezésre irányult a keresés.

1 .Táblázat – Megjelent publikációk

Év/Kiadó	SPRINGER	ELSEVIER	WILEY	Google Scholar	Megjelent disszertációk
2005	0	2	0	11	0
2006	3	4	0	20	1
2007	0	13	4	38	3
2008	11	9	7	69	1
2009	10	21	24	128	4
2010	17	48	15	210	3
2011	22	55	31	310	6
2012	52	102	27	478	12
2013	40	135	32	516	9
2014.07.09	58	157	26	424	1
Összesen	213	546	166	2208	40

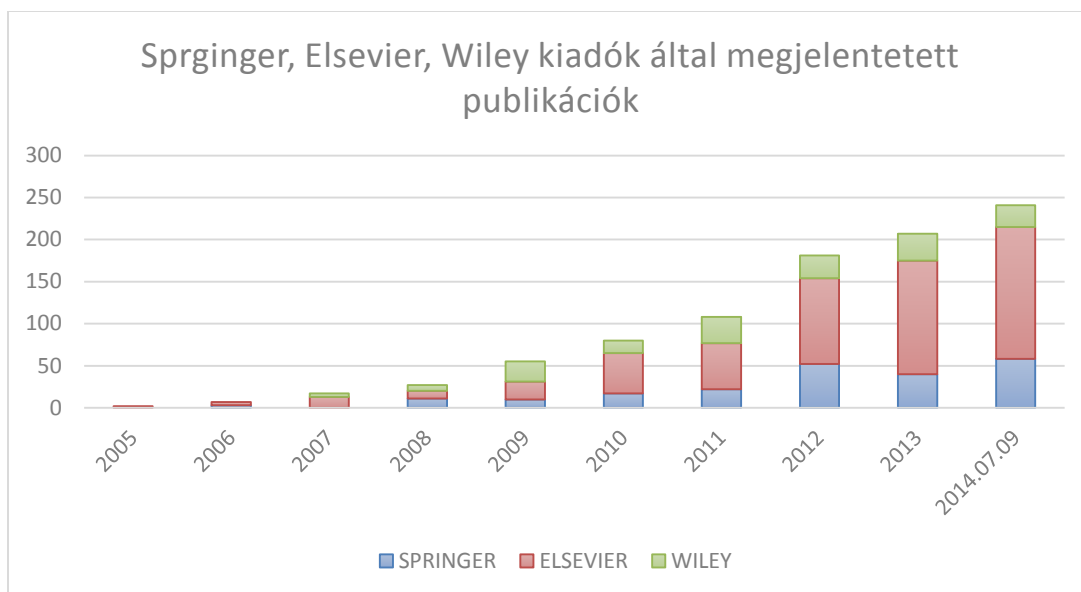
Az első témában készített meghatározó publikáció a 2005 októberében a Hughes, Cottrell és Bazilevs által az *Elsevier* kiadónál megjelentetett *Isogeometric analysis: CAD, finite element, NURBS, exact geometry and mesh refinement* című cikk [5].

Az témában az egyik legnagyobb mérföldkőnek az a 2009-ben megjelent könyv számít, amely az előbb említett szerzők által a Wiley kiadónál megjelent *Isogeometric analysis: Towards Integrations of CAD and FEA* című alkotás [1].

³ <http://link.springer.com/advanced-search>

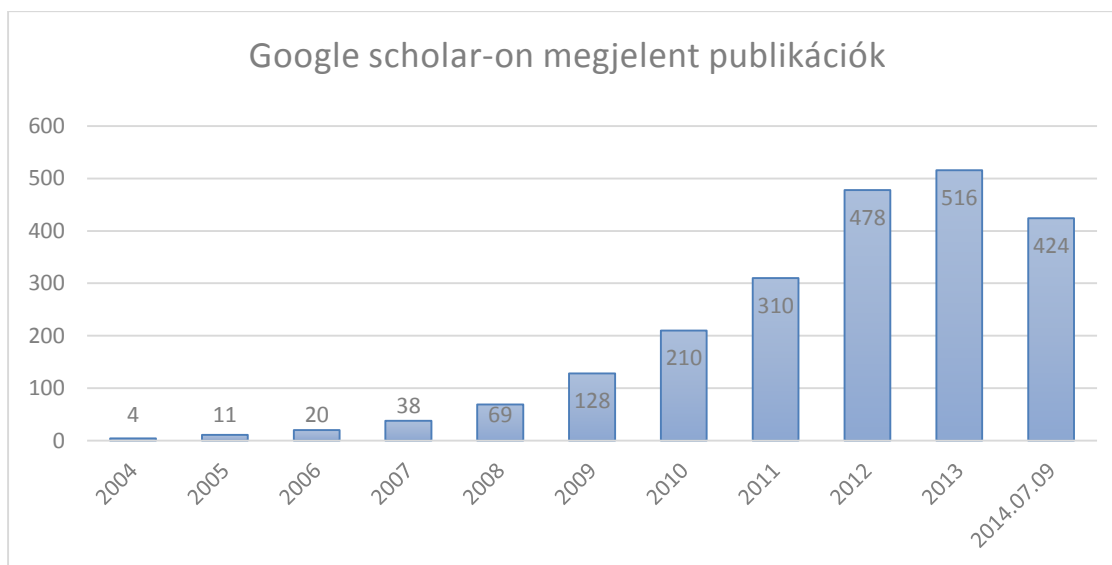
⁴ <http://www.sciencedirect.com/>

⁵ <http://onlinelibrary.wiley.com/>



1. grafikon – Megjelentetett publikációk összehasonlítása

A grafikonon szembetűnő, hogy a publikációk száma rohamosan nőtt az elmúlt években. Ezt a megállapítást támasztja alá a Google Scholar segítségével készített kimutatás is:

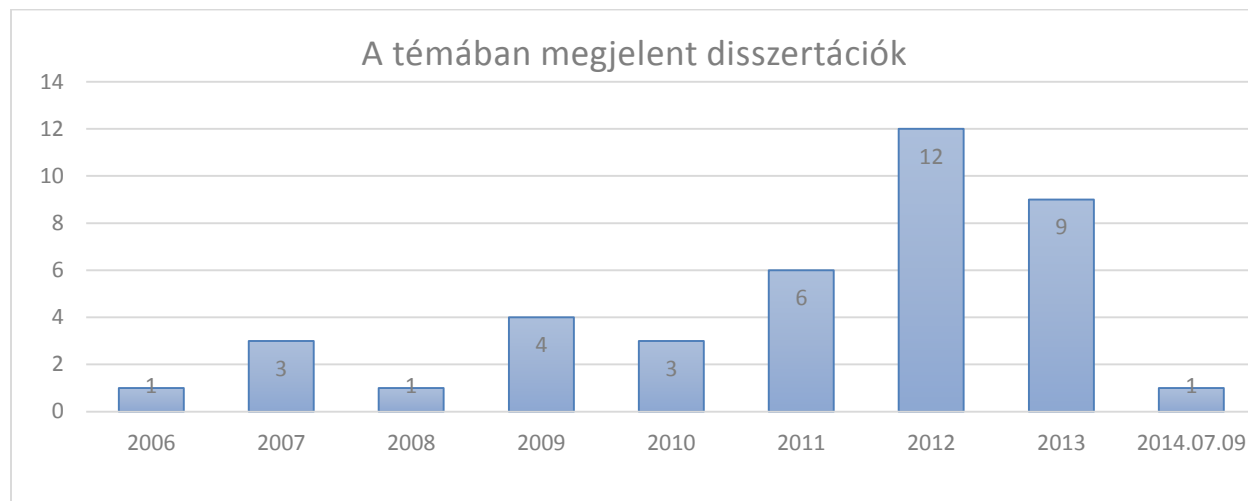


2. grafikon – Google Scholar-on megjelent publikációk

A Google Scholar keresője minden kiadott publikációt figyelembe vesz, ezáltal ez a diagram tartalmazza az előző kimutatásnál figyelembe vett cikkeket, tehát az ezen szereplő adatok nem függetlenek az előzőektől.

Megfigyelhető, hogy a Google Scholar-on 2004-ben is került fel hivatkozás az izogeometrikus analízissel kapcsolatban, de ezekben csak említés szintjén merül fel a módszer neve, az első igazán fontos mérföldkő az előzőekben említett Hughes-Cottrell-Bazilevs cikk [5].

Cikkek, könyvek mellett természetesen megjelentek disszertációk⁶ is az adott témában. Ezeket a következő grafikon foglalja össze. Érdekes megjegyezni, hogy a dolgozat beadásának idején a 2014-es találatok száma már 22 a júniusi lekérdezéshez képest.



3. grafikon – A Témában megjelent disszertációk

A megjelent munkák szemléltetése után a következőkben összefoglalásra kerülnek azok a publikációk, amelyek számomra, nagy jelentőséggel bírtak az IGA megismerésének, elsajátításának szempontjából. Remélem, amennyiben az olvasó érdekesnek találja ezt a témakört, megfelelő kiindulási alapot nyújthat neki.

T. J. R. Hughes, J. A. Cottrell, and Y. Bazilevs. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol 194, no. 39, 4135-4195 2005. [5]

Az izogeometrikus analízis koncepcióját kitűnően összefoglaló cikk, amely leírja az egzakt geometriai modellalkotásnak a felépítési módját. Emellett az IGA újdonságait is összefoglalja, mint például a könnyen implementálható hálófinomítási lehetőségeket a geometria változtatása nélkül, de bemutatja, az IGA- hoz tartozó, új, hatékonyabb k-finomítási módszert is.

⁶ <http://dissexpress.umi.com/dxweb/search.html>

J. A. Cottrell, T. J. R. Hughes, and Y. Bazilevs. Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA. Wiley, 2009.[1]

„A könyv szerzői az izogeometrikus analízis feltalálói, kitűnő tudósok, és nagyszerű oktatók. Ez egy nagyon eredeti alkotás, nincs még egy ilyen könyv ebben a témában.” – René de Borst

A könyv a legjobb kiindulópont ebben a témakörben. Nagyon átfogóan, alapos magyarázattal, és nagyon széleskörű, több területről vett példákkal mutatja be az izogeometrikus analízis lényegét, és a benne rejlő lehetőségeket.

V.P. Nguyen, S. Bordas, T. Rabczuk.: Isogeometric Analysis: An overview and computer implementation aspects. Computers and Structures, vol. 23, no. 2, 124-135 (2013) [4]

Szintén remek cikk az izogeometrikus analízis alkalmazásának (implementálásának) módjáról, különös részletességgel mutatja be a számításokhoz szükséges lépéseket, és azok háttérhez kapcsolódó magyarázatokat.

D. F. Rogers. An Introduction to NURBS with Historical Perspective. Academic Press, 2001. [2]

A *B-Spline* görbék és felületek megértéséhez egyik legmegfelelőbb lehetősége a könyv, az IGA alapelemét, a NURBS-t (*Non-Uniform Rational B-Splines*) részletesen és alaposan bemutatva lehet az első lépés az izogeometrikus analízishez tartozó formafüggvények felépítésének megértéséhez tartozó úton. Rengeteg illusztrációval és példával szolgál a felmerülő kérdésekkel kapcsolatban. Sok fontos algoritmust mutat be, amelyek ez által könnyen megérthetők, és implementálhatóak.

Martin H. Sadd Elasticity: Theory, Applications and Numerics. Elsevier, 2005.[6]

Mivel ezen dolgozat keretein belül az izogeometrikus analízis rugalmasságtani példákon keresztül kerül bemutatásra, e könyv lehet egy viszonyítási pont, ugyanis a lineáris rugalmasságtan elméletét számos példafeladaton keresztül dolgozza ki, mutatja be.

III. A szükséges elméleti háttér bemutatása

Az izogeometrikus analízis, és alkalmazásához szükséges elméleti alapok bevezetéseként a következő táblázat bemutatja a különbségeket a NURBS alapú izogeometrikus analízis és a klasszikus értelemben vett végeselemes analízis között [1].

2.Táblázat – IGA és VEM összehasonlítása

Izogeometrikus analízis (IGA)	Végeselemes analízis (VEM)
Egzakt geometria	Közelített geometria
Kontrolpontok	Csomópontok
Kontrolváltozók	Csomóponti változók – Szabadsági fokok
A bázisfüggvények nem kapcsolják össze a kontrolpontokat és kontrolváltozókat	A bázisfüggvények összekapcsolják a csomópontokat és a csomóponti változókat
NURBS alapú bázisfüggvények	Polinom alapú bázisfüggvények
Magas, könnyen szabályozható folytonosság	Mindig állandó, C^0 -folytonosság
h , p , k – sűrítési módok	h , p – sűrítési módok

Látható, hogy a két analízishez tartozó tulajdonságok között legtöbb helyen az IGA-ban rejlő lehetőségek előnyösebbek, viszont az ilyen eljárással készített modell bonyolultabb, ezért lassabban futtatható.

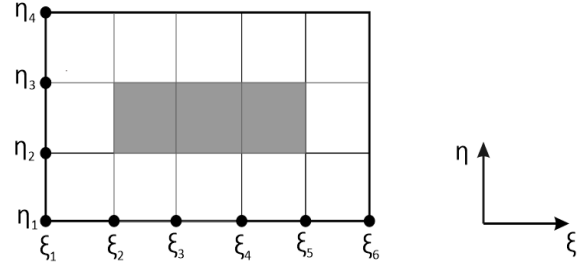
Vizont az analízis felépítése mögött komoly matematikai és mechanikai tartalom áll, emiatt a hagyományos végeselemes analízishez tartozó ismereteket az író elsajátítotttnak tekinti, és a legtöbb esetben komolyabb magyarázat nélkül azokat használja fel, vagyis azokra épít.

Ebben a fejezetben az olvasó betekintést nyerhet az IGA-hoz használt modellek geometriai felépítéséhez, illetve a végeselemes háló elkészítéséhez szükséges ismeretekbe.

1. Az izogeometrikus analízishez használt terek

A következőkben látható ábrák, illetve magyarázatok felelnek az analízis során használt fontos terek, és a terek között lévő leképezések könnyebb áttekinthetőségéért. A következőkben az *index*, *parameter*, *physical* és *parent* tér összefoglalása következik [5],[13],[14].

Index space: Az *index space*-ben a meglévő knot vektort felépítő elemek, mint koordináták találhatóak, függetlenül attól, hogy azok ismétlődőek-e vagy sem. Ez a tartomány szemléltetése annak a területnek, amelyet a rendelkezésre álló *knot*-ok határolnak,



7. Ábra – Index space

egyértelműen azonosítja minden egyes *knot*-ot, valamint szemlélteti azokat, amelyek többször is előfordulnak, ugyanis ebben a térben az ismétlődő *knot*-ok között található területek zérusértékűek. Példaként a következő *knot* vektorok felhasználásával kapható meg a meghatározott *index space*, amelyet a 7. ábra szemléltet

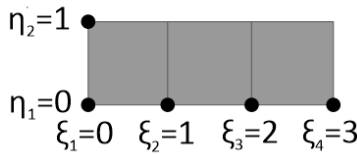
$$\Xi^1(\xi) = \{0, 0, 1, 2, 3, 3\} \quad \Xi^2(\eta) = \{0, 0, 1, 1\} \quad (4.1)$$

Figyelembe véve, hogy mely *knot*-ok zérusértékűek, meghatározható az *index space*-ben az a terület, amelyeket nem zérus elemek határolnak. Ez a tartomány használandó fel az analízis során.

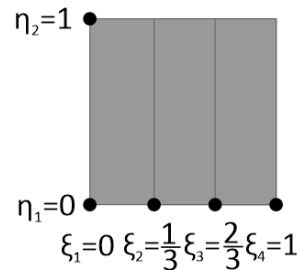
Az *index space*-t az analízis során közvetlenül nem használják, ez csak egy kiindulópont, szemléltetése a geometriát meghatározó *knot*-oknak.

Parameter space: Ezen teret az *index space*-ben található *knot* értékeket összekötő nem zérus intervallumok határozzák meg, ezt mutatja be a 8. és 9. ábra. A teret $\hat{\Omega} \in \mathbb{R}$ jelöljük, ebben a térben pedig a következő hozzárendelést definiáljuk: $\xi = (\xi, \eta, \zeta) = (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in \mathbb{R}$.

Minden *parameter space*, ami egy *B-spline* vagy *NURBS patch*-t definiál, normalizálható vonalra, négyszögre, illetve kockára, az adott dimenziótól függően. Normalizált esetben a $\hat{\Omega} = [0, 1]$ intervallum értelmezhető.

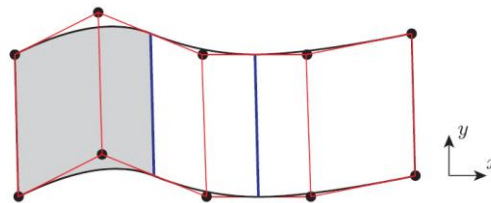


8. Ábra – Parameter space



9. Ábra – Normalizált parameter space

Physical space: A *B-Spline* és *NURBS* által végzett leképezések a *parameter space*, és a *physical space* között valósulnak meg. A fizikai térben található a modellezésre szolgáló aktuális geometria. E tér jelölése: $\Omega \in \mathbb{R}$, valamint az itt érvényes hozzárendelés pedig: $\mathbf{x} = (x, y, z) = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}$ [4]. A 10. ábrán látható, hogy az eddig taglalt terek mely részén érvényesek az adott geometriának a fizikai térre vonatkozóan.



10. Ábra – Physical space [4]

Parent space: Az előzőekben említett három tér elegendő a geometria felépítéséhez, de az analízis elvégzéséhez szükség van egy olyan hozzáadott térre, amely az analízis során felmerülő numerikus integráláshoz szükséges, ennek jelölése $\bar{\Omega} \in \mathbb{R}$. A tér a $\bar{\Omega} = [-1, 1]$ intervallumon érvényes, koordinátáit $\bar{\xi} = (\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}) = (\bar{\xi}^1, \bar{\xi}^2, \bar{\xi}^3)$ jelöljük.

A geometria megalkotásához, és az analízishez szükséges terek definiálása után a következő fontos állomás az adott geometria felépítésének összefoglalása. *NURBS* segítségével felépített geometriák két hálót tartalmaznak, a kontrol hálót, illetve a fizikai hálót.

A kontrolháló tartalmazza a kontrol pontokat. Ez a háló az, ami lineáris elemekből épül fel, ez az, ami a tipikus végeselemes eljárás során használt hálónak megfeleltethető lenne, de ez a háló nem tartalmazza a meghatározandó geometriát, ez csak egy „állványként” szolgál, amelyet felhasználva hozható létre az aktuális geometriát leíró háló. Az eddig használt, tipikus szabadsági fokok (DoF) a kontrol pontokhoz kapcsolódnak.

A fizikai háló követi le a geometriát, amit felhasználunk az analízishez. A fizikai hálót felépítő elem a *patch*, amely egy makró elem, vagy *subdomain*. Ahogy már elhangzott minden *patch*-nek két térben történik a leírása, a paraméter, illetve a fizikai térben. Minden *patch* felbontható *knot span*-ekre. A *knot*-ok - dimenziójuktól függően - pontok, vonalak, felületek. Ezek kezelhetők mikro-elemként, ez a legkisebb egység, amivel az analízis során foglalkozni kell. A patchekhez hasonlóan ezeknek is két térben történik a leírása, és a *knot span*-ek IGA esetén, a VEM-ben használt elemeket a *knot span*-eknek feleltetjük meg.

2. Knot vektor

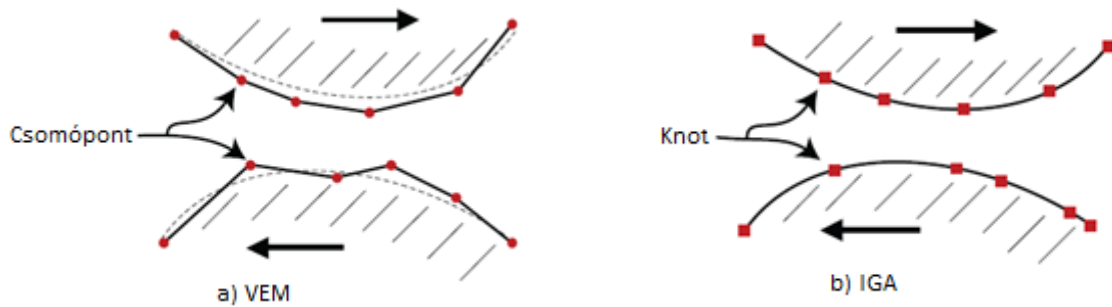
Egy *B-spline* létrehozásához az első lépés a *knot* vektor definiálása [1],[4]. A *knot* vektor egy monoton növekvő sorozata a paraméter térben található koordinátáknak, és a *knot*-ok osztják szét elemekre ezt a teret. A *knot* vektor felépítése a következő:

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_i, \dots, \xi_{n+p+1}\}, \quad (4.2)$$

ahol:

- $\xi_i \in R$: az *i*-edik *knot*
- *n*: a bázisfüggvények száma, amely a B-Spline-t felépíti
- *p*: polinom fok

A *knot*-ok felhasználásával valósíthatóak meg a *B-Spline*-okat felépítő bázisfüggvények. A *knot*-ok és a VEM-ben lévő csomópontok fontos különbségét a 11. ábra szemlélteti.



11. Ábra –Csomópontok és Knot-ok összehasonlítása [4]

Az ábrán látható a legfontosabb tulajdonság, miszerint a csomópontokkal ellentétben a *knot*-ok pontosan követik a geometriát, és annak felületén találhatóak. Ahogy már elhangzott, a VEM-ben alkalmazott csomópontok IGA esetén a kontrol pontoknak felletethetőek meg, ezekhez tartozóan a fejezet későbbi részében lesz magyarázat.

A *knot* vektorok fontosabb tulajdonságai [1]:

- **uniform knot vektor:** Ha a *knot* vektor egyenlő részekre osztja a *parameter space*-t. Ellenkező esetben non-uniform *knot* vektorról beszélünk.
- a *knot* értékek ismétlődhetnek, amely azt jelenti, hogy több *knot* is felveheti ugyan azt az értéket. A *knot*-ok multiplicitásai jelentősen befolyásolják a bázisfüggvények tulajdonságait.

- **nyitott knot vektor:** ha az első és az utolsó knot érték $p + 1$ –szer fordul elő a vektorban. Ennek nagy jelentősége van a CAD modellezés szempontjából, ugyanis egy nyitott knot vektor létrehozásával biztosítható két *B-Spline* összekapcsolhatósága a *parameter space* határán

A következőben egy példán keresztül kerül bemutatásra, hogyan lehet a *knot* vektorok meghatározni a *B-Spline*-t (vagy *NURBS*-t) felépítő bázisfüggvények számát.

1. Példa: Adott a következő *knot* vektor: $\Xi = \left\{0, 0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 1, 1, 1\right\}$, amelyről tudjuk, hogy nyitott. Állapítsuk meg a *B-Spline*-t felépítő bázisfüggvények számát.

A *knot* vektor elemeinek számát meghatározó összefüggésből kiindulva:

$$\kappa = n + p + 1,$$

$$\kappa = 10.$$

Ahol κ a *knot* vektorban található elemek számát jelenti. Ez az egyenlet önmagában nem szolgáltat elegendő információt ahhoz, hogy meg tudjuk oldani a feladatot. Fel kell használni, még azt, hogy nyitott *knot* vektorról beszélünk, tehát az első, és utolsó érték $p + 1$ –szer fordul elő a vektorban.

Mivel ez azz előfordulás mindkét esetben 4, ezért megadható a polinom foka

$$p + 1 = 4 \rightarrow p = 3.$$

Tehát harmadfokú polinomról beszélünk. Ennek ismeretében megválaszolható a kérdés

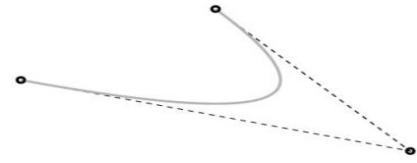
$$n = \kappa - p - 1 = 10 - 3 - 1 = 6.$$

Tehát a *B-Spline*-t felépítő bázisfüggvények száma: $n = 6$.

Amennyiben a *knot* vektor már meghatározott, illetve ismert, abban az esetben meghatározhatóak belőle a *B-Spline*, illetve a *NURBS* bázisfüggvényei.

3. B-spline

A CAD alapú tervezésben helyet kapó modellekhez tartozóan követelményként fogalmazható meg a szoftver által megalkotott modell diszkretizációja, mégpedig úgy, hogy pontosan a rendelkezésre álló geometriát kell felhasználni a további analízishez. Ehhez szükséges egy olyan háló felépítése, amelynek alapja a *B-spline*, és a belőle képezhető *NURBS*.



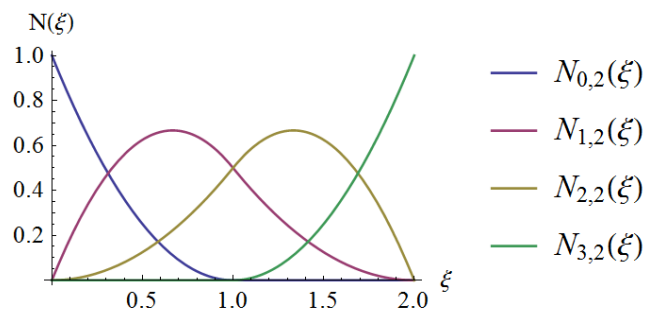
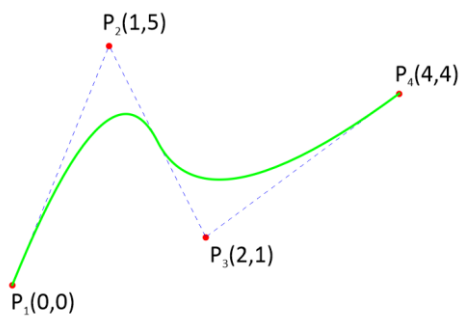
12. Ábra – B – Spline görbe [3]

A matematika numerikus analízis szakterületén, a *B-spline*-ok olyan függvények, amelyeket minimálisan befolyásol az adott fokszám, az egyenletesség, és a tartomány felosztása. Bármely (adott fokszámú) *spline* kifejezhető ugyan olyan fokszámú *B-spline*-ok lineáris kombinációjaként [2].

A *B-spline*-okat az 1900-as évek elején Nikolai Lobachevsky találta fel. Magát a "*B-spline*" szót - ami a *basis spline* rövidítése - Isaac Jacob Schoenberg alkotta meg.

A *B-spline* függvény egy szakaszonkénti polinomokból álló függvény, amelynek alapja a knot vektor. A *B-spline* a több elemet magába foglaló *patch*-ek paraméter tere és fizikai tere közötti leképezést valósítja meg, ahogy az a 13. ábrán látható. Minden egyes elem megtalálható a fizikai és a paraméter *space*-ben, de a leképezés globálisnak tudható be az egész *PATCH* esetén, amely így egyszerűbb, mint minden egyes elem külön-külön történő leképezése.

A 13. ábrán látható egy másodfokú ($p = 2$) *spline*, amelynek alapja a $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 2, 2, 2\}$ knot vektor. A kék vonalak alkotják a *spline*-hoz tartozó kontrol hálót, a koordinátákkal ábrázolt piros pontok pedig a kontrol pontokat. A másik képen a *spline*-hoz tartozó bázisfüggvények képe található.



13. Ábra – B – Spline görbe, és bázisfüggvényei

B-Spline bázisfüggvények:

A knot vektor ismeretében a Cox – de Boor rekurziós formula [8], [9] segítségével kiszámíthatóak a hozzá tartozó bázisfüggvények [1], [2], [3],[4], amelyeket a 14. ábra szemléltet,

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i,p} - \xi_i} \cdot N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \cdot N_{i+1,p-1}(\xi) . \quad (4.3)$$

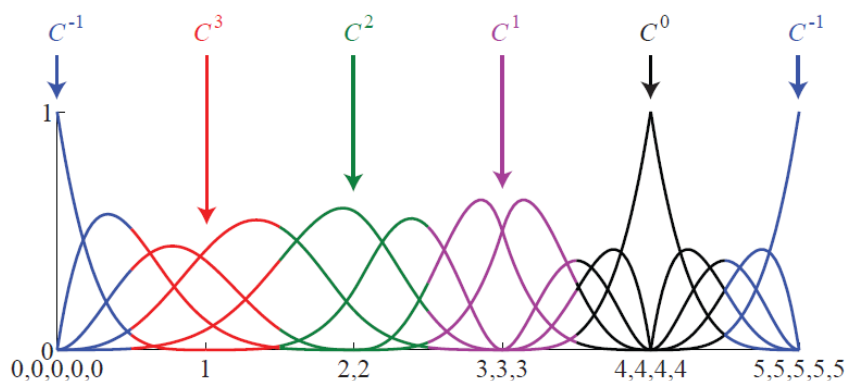
Cox – de Boor rekurziós formula: A matematika numerikus analízis szakterületén a de Boor féle algoritmus egy gyors és stabil algoritmus a *B-Spline* görbék kiértékelésére. Az algoritmus gyakorlatilag a de Casteljau-féle algoritmus általánosítása Bézier görbékre, amit Carl R. de Boor dolgozott ki. Azóta egyszerűbb és gyorsabb módszerek is születtek már ennél, ám azok kevésbé stabilak.

Látható, hogy a formula függ a polinom fokszámától, a függvények számát pedig az előző példában ismertetett módon lehet meghatározni. Speciális eset, ha $p=0$, ekkor a következő összefüggést használjuk fel

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} . \quad (4.4)$$

A bázisfüggvények legfontosabb tulajdonságaik [1]:

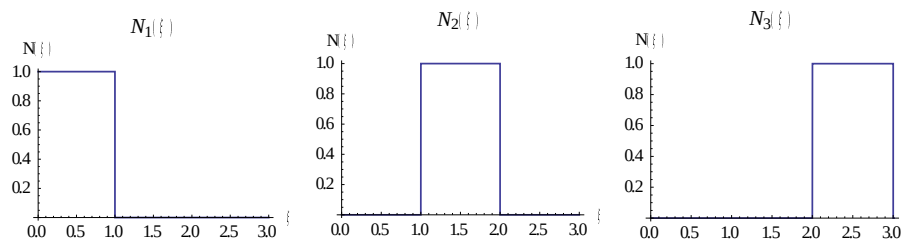
- Minden egyes bázisfüggvény nem negatív az egész tartományra nézve
- Lineárisan függetlenek egymástól
- p -ed fokú *B-Spline* bázisfüggvény $p+1$ *knot span*-t ível át
- *B-Spline* bázisfüggvények általában nem összekapcsolhatóak.
- Az adott ξ_i -n C^{p-m} folytonosságot tart, ahol m a ξ_i knot előfordulásának száma



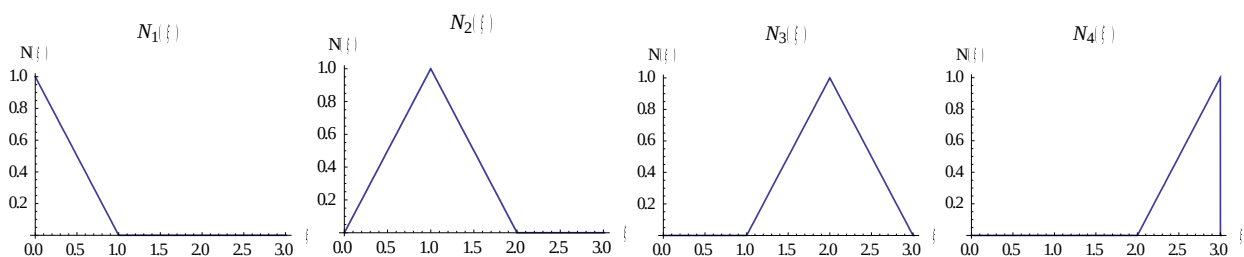
14. Ábra – *B – Spline* bázisfüggvények [1] $p = 2$, és a knot vektor: $\Xi = \{0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5\}$

2. Példa: Bázisfüggvények változása a polinom fok növekedésének függvényében: $p = 0, 1, 2$ fokú knot vektor esetén. $p = 0$ esetben a knot vektor a $\Xi = \{0, 1, 2, 3\}$, amelynek elemszáma a fokszámtól függően változik, eleget téve annak a nyitott knot vektor kritériumnak.

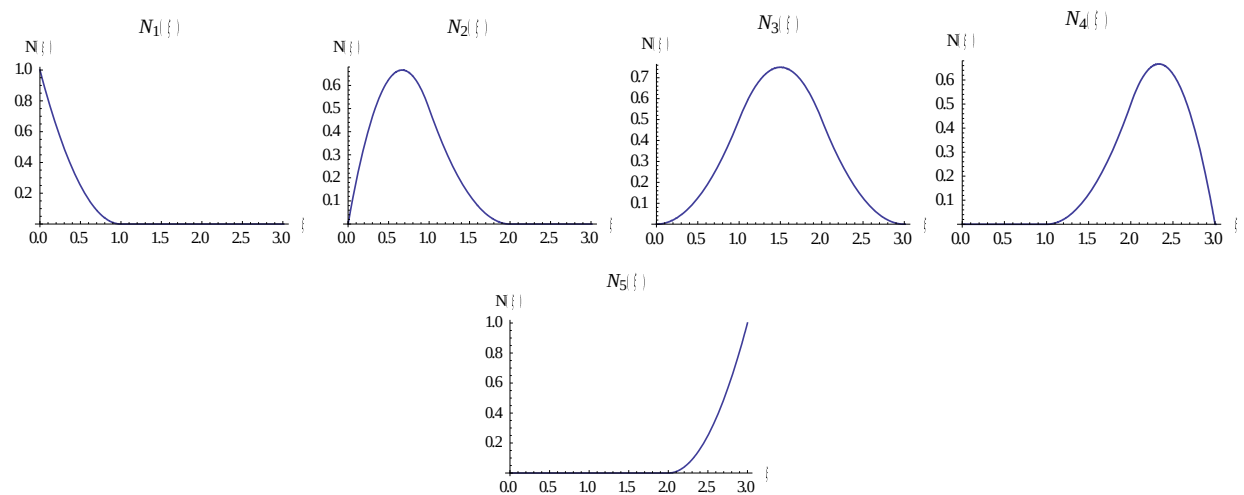
$$p = 0 \rightarrow \Xi = \{0, 1, 2, 3\}$$



$$p = 1 \rightarrow \Xi = \{0, 0, 1, 2, 3, 3\}$$



$$p = 2 \rightarrow \Xi = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3\}$$



Említve volt a tulajdonságok között, hogy a bázisfüggvények általában nem összekapcsolhatóak, ez alól két esetben lehet kivételt tenni, amikor a folytonosság C^0 , vagy C^{-1} .

Abban az esetben, ha a folytonosság C^0 , akkor a knot előfordulásának száma (m) p -vel egyenlő tehát fennáll, hogy $C^{p-m} = C^0$, vagyis a függvények összekapcsolhatóak.

Emellett függvények a tartományok határán szintén összekapcsolhatóak, ennek oka, hogy a használt knot vektorok minden esetben nyitottak, vagyis ekkor a knot értéke $p+1$ -szer fordul elő, ami azt eredményezi, hogy a folytonosság C^{-1} .

3. Példa: Az első példában megadott $\Xi = \{0, 0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 1, 1, 1\}$ knot vektor ismeretében határozza meg a *B-spline*-t felépítő bázisfüggvényeket.

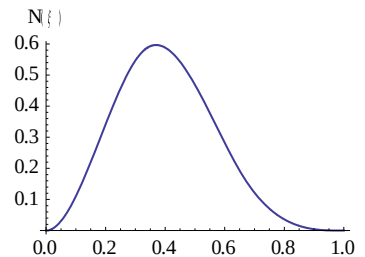
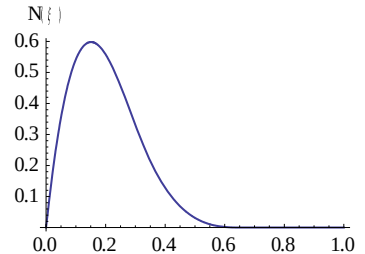
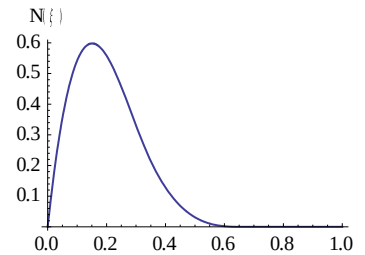
A Cox-de Boor rekurziós formulával, illetve a Wolfram Mathematica program beépített függvényével (BSplineBasis) egyaránt meghatározhatók a bázisfüggvények.

Felhasználva a (4.3) egyenletet, és a megadott knot vektort:

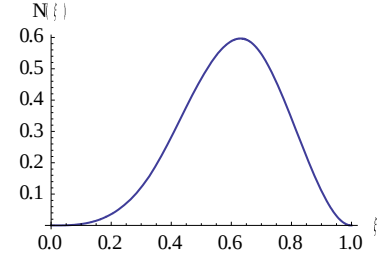
$$N_{1,3}(\xi) = \begin{cases} 1 - 9\xi + 27\xi^2 - 27\xi^3 & 0 \leq \xi \leq \frac{1}{3} \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$N_{2,3}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{4}(8 - 36\xi + 54\xi^2 - 27\xi^3) & \frac{1}{3} \leq \xi \leq \frac{2}{3} \\ \frac{9}{4}(4\xi - 18\xi^2 + 21\xi^3) & 0 \leq \xi < \frac{1}{3} \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

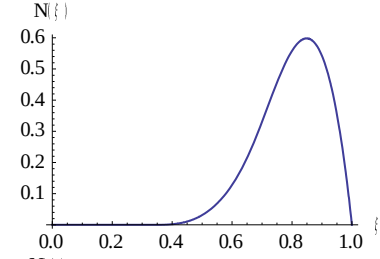
$$N_{3,3}(\xi) = \begin{cases} -\frac{9}{2}(-1 + 3\xi - 3\xi^2 + \xi^3) & \frac{2}{3} \leq \xi \leq 1 \\ -\frac{9}{4}(-6\xi^2 + 11\xi^3) & 0 \leq \xi < \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4}(-2 + 18\xi - 36\xi^2 + 21\xi^3) & \frac{1}{3} \leq \xi < \frac{2}{3} \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$



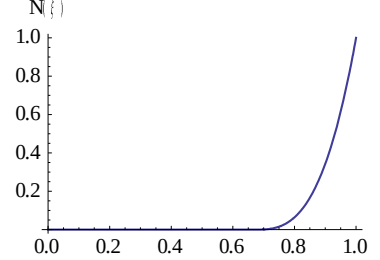
$$N_{4,3}(\xi) = \begin{cases} \frac{9\xi^3}{2} & 0 \leq \xi < \frac{1}{3} \\ \frac{9}{4}(-5 + 21\xi - 27\xi^2 + 11\xi^3) & \frac{2}{3} \leq \xi \leq 1 \\ -\frac{3}{4}(-1 + 9\xi - 27\xi^2 + 21\xi^3) & \frac{1}{3} \leq \xi < \frac{2}{3} \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$



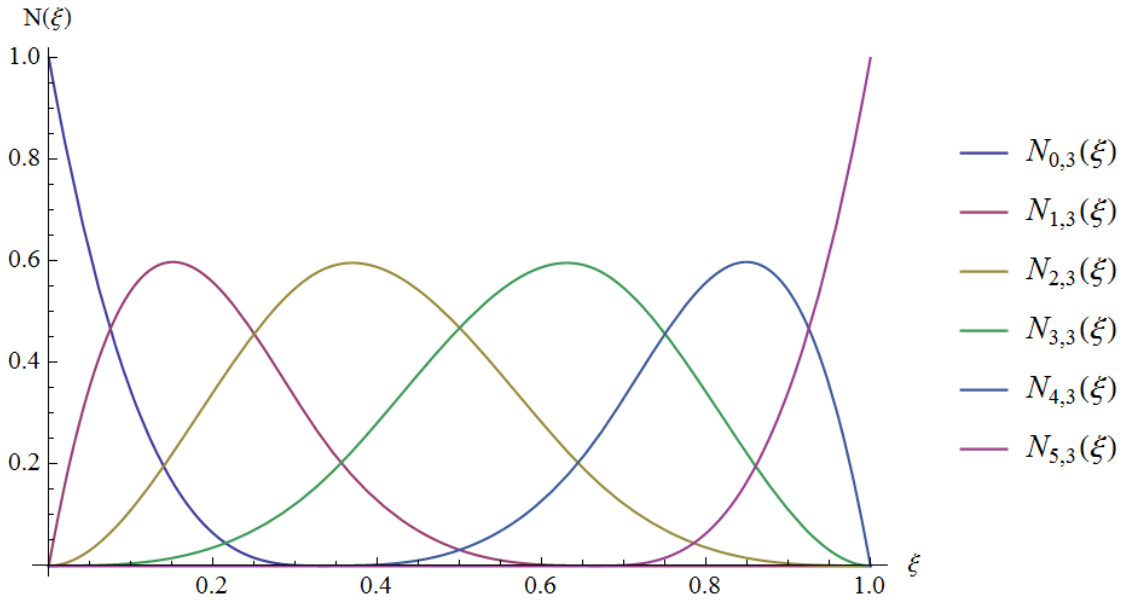
$$N_{5,3}(\xi) = \begin{cases} -\frac{9}{4}(-7 + 31\xi - 45\xi^2 + 21\xi^3) & \frac{2}{3} \leq \xi \leq 1 \\ \frac{1}{4}(-1 + 9\xi - 27\xi^2 + 27\xi^3) & \frac{1}{3} \leq \xi < \frac{2}{3} \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$



$$N_{6,3}(\xi) = \begin{cases} -8 + 36\xi - 54\xi^2 + 27\xi^3 & \frac{2}{3} \leq \xi \leq 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$



Az összes bázisfüggvényt meghatározása után azokat egyben ábrázolva a 15. ábrán látható a kapott eredmény.



15. Ábra – B – Spline bázisfüggvények: $p = 2$, és $\Xi = \{0, 0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 1, 1, 1\}$

B-spline görbék

Amennyiben adott n darab bázisfüggvény, $N_{i,p}, i=1,2,\dots,n$, valamint n darab kontrol pont, $P_i \in \mathbb{R}, i=1,2,\dots,n$ a következő összefüggéssel megadható a *B-Spline* görbe [1],[15]:

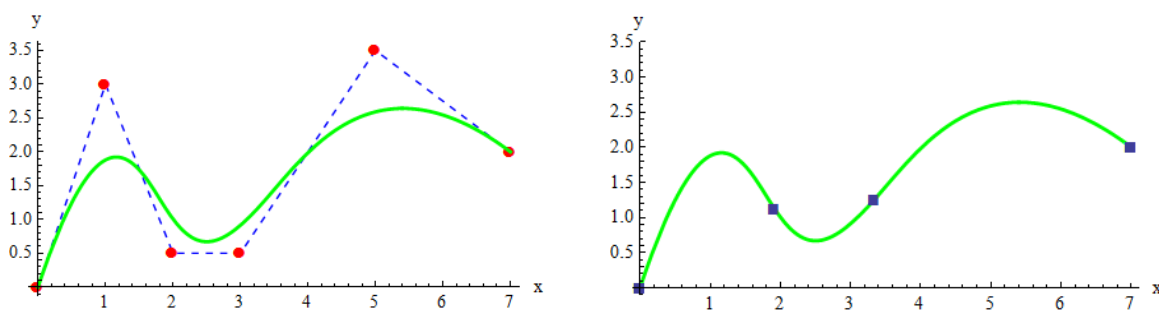
$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \cdot P_i, \quad (4.5)$$

ahol P_i a kontrol pontokat tartalmazó vektor. A 4. példában egy harmadfokú *B-Spline* görbe látható, amely egy nyitott knot vektor segítségével lett felépítve. A képen szintén látható a kontrolháló, valamint a kontrol pontok. Nyitott knot vektor használata azt jelenti, hogy a görbe az első és az utolsó pontoknál összekapcsolható.

4. Példa: A megadott a knot vektor, és a *B-Spline*-hoz szükséges kontrol pontok ismeretében határozza meg a görbét. *Knot* vektor:

$$\Xi = \left\{ 0, 0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 1, 1, 1 \right\}$$

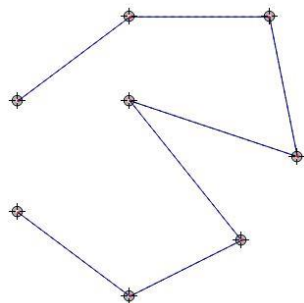
A *B-Spline* görbét a (4.5) egyenlet felhasználásával tudjuk meghatározni. A bázisfüggvények a 3. példából már ismertek, így meghatározható a görbe, valamint utána meghatározhatók a hozzá tartozó *knot*-ok koordinátái is. A 16. ábrán látható a kapott eredmény.



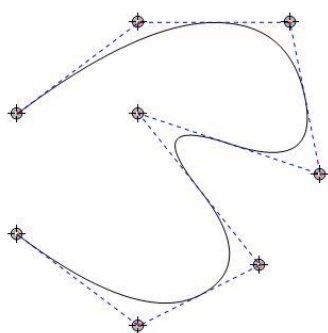
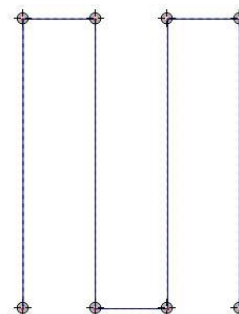
16. Ábra – *B – Spline* görbe, és a *knot*-ok elhelyezkedése

A következő példában két görbén keresztül kerül bemutatása a p (polinom fokszáma) növelésének hatása. Megfigyelhető, hogy a p növelésével hogy változik a *B-spline* görbülete, viszont meg kell jegyezni, hogy mivel a $\kappa = n + p + 1$ egyenlet minden esetben fennáll, tehát a (4.5) egyenlet szerint a bázisfüggvények száma állandó, ezért a foksám növelésével a *knot* vektor elemeinek száma is nő.

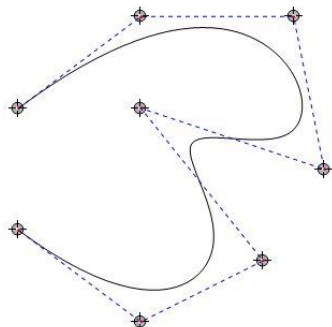
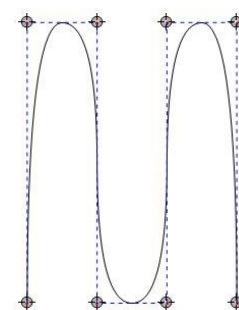
5. Példa: A polinom fokszám növelésének hatása.



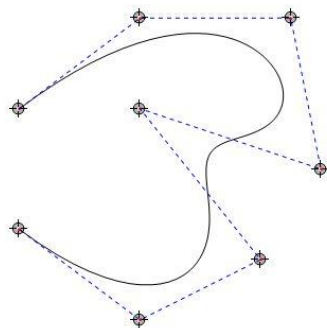
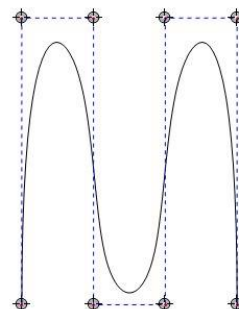
$p = 1$



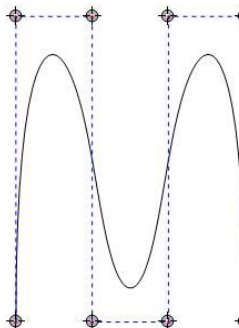
$p = 2$



$p = 3$



$p = 4$



B-spline felület

Amennyiben adottak a felület definiálásához szükséges paraméterek, tehát a kontrollháló $\{\mathbf{P}_{i,j}\}, i=1,2,\dots,n, j=1,2,\dots,m$, a szükséges knot vektorok $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots, \xi_{n+p+1}\}$, $H = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_i, \dots, \eta_{m+q+1}\}$, a polinom fokszámok (p, q) , akkor a felület megadható a következő összefüggés segítségével [1],[4],[15]:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) \cdot M_{j,q}(\eta) \cdot \mathbf{P}_{i,j}, \quad (4.6)$$

ahol: $N_{i,p}(\xi), M_{j,q}(\eta)$ a knot vektorokból képzett bázisfüggvények. A geometria részletesebb bemutatásához a 6. példában egy *B-Spline* felület látható, a hozzá tartozó kontrol pontokkal együtt.

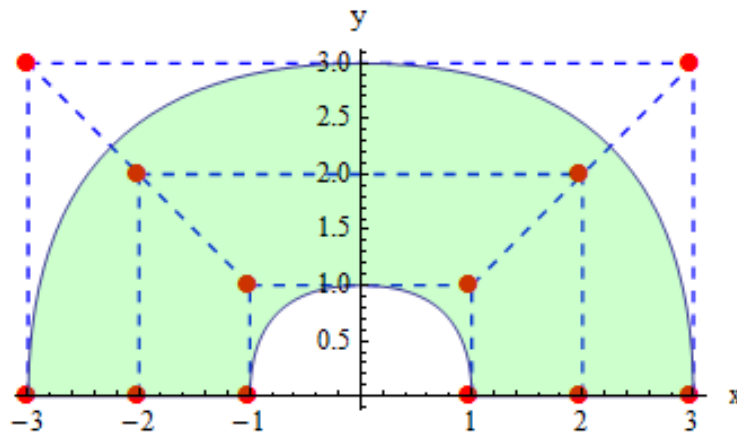
6. Példa: A *B-Spline* felület.

Ismertek a polinom fokok: $p = 2, q = 2$, valamint adottak a felületet felépítő knot vektorok:

$$\Xi = \left\{0, 0, 0, \frac{1}{2}, 1, 1, 1\right\}, \quad H = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\},$$

illetve ismertek az egyes kontrol pontok, és azok koordinátái.

Ezeket felhasználva meghatározhatjuk az (4.6) egyenlet segítségével a felületet. A 17. ábrán kék szaggatott vonallal a kontrollháló, pirossal a kontrol pontok láthatóak.



17. Ábra – *B – Spline* felület

B-Spline térfogat

Térfogat létrehozása a felület megalkotásával analóg módon történik, ebben az esetben a kontrol háló szerepét a kontrol rács váltja fel, $\{\mathbf{P}_{i,j,k}\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, l$.

A knot vektorok száma ebben az esetben már három, $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots, \xi_{n+p+1}\}$, $H = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_i, \dots, \eta_{m+q+1}\}$, $Z = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_i, \dots, \zeta_{k+r+1}\}$, a polinom fokszámok (p, q, r) , pedig szintén ismertek, akkor a keresett térfogat definiálható a következő összefüggés segítségével [1]:

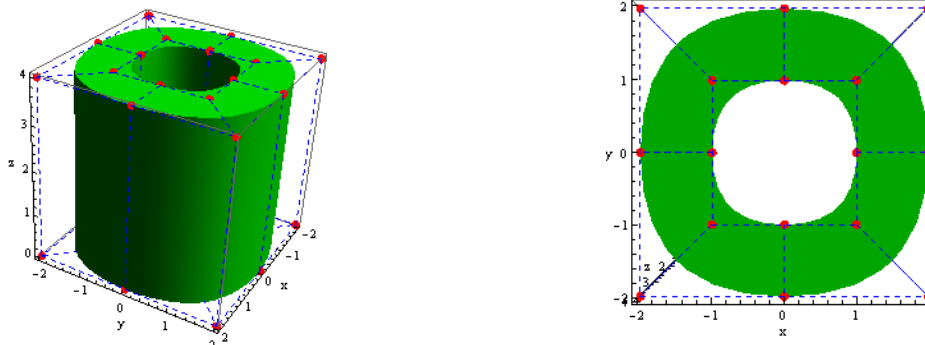
$$S(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l N_{i,p}(\xi) \cdot M_{j,q}(\eta) \cdot L_{k,r}(\zeta) \cdot \mathbf{P}_{i,j,k}, \quad (4.7)$$

ahol: $N_{i,p}(\xi), M_{j,q}(\eta), L_{k,r}(\zeta)$ a knot vektorokból képzett bázisfüggvények. A geometria részletesebb ismertetéséhez a 7. példában ezen eljárással modellezett *B-Spline* térfogat látható.

7. Példa: A *B-Spline* térfogat. Ismertek a polinom fokok: $p = 2, q = 1, r = 1$ valamint adottak a felületet felépítő knot vektorok. Illetve ismertek az egyes kontrol pontok, és azok koordinátái

$$\Xi = \{0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4\}, \quad H = \{0, 0, 1, 1\}, \quad Z = \{0, 0, 1, 1\}.$$

Ezeket felhasználva meghatározhatjuk az (4.7) egyenlet segítségével a térfogatot, ami jelen esetben egy csőszakasz. A 18. ábrán szaggatott kék vonallal a kontrol rács, pirossal a kontrol pontok láthatóak.



18. Ábra – *B – Spline* térfogat

A felülnézeti ábrán látható, hogy a modellezni kívánt cső *B-Spline* -okból felépített modelljének keresztmetszete nem pontosan kör, ezért van szükség a *NURBS* geometriákra.

4. NURBS

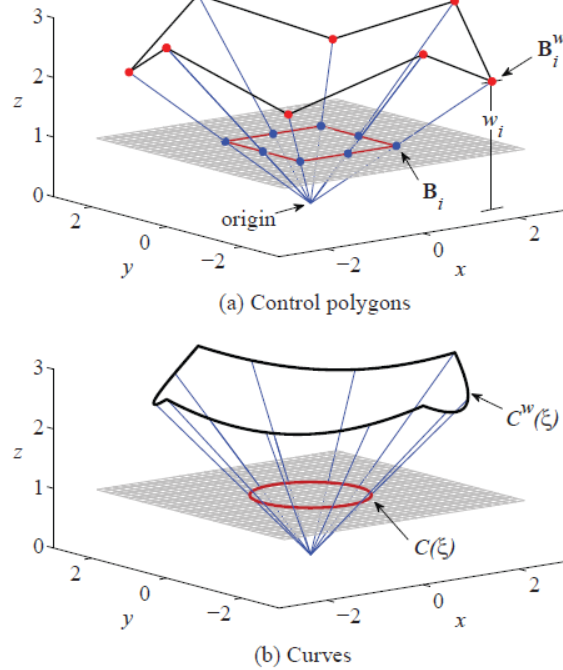
Az eddig tárgyalt *B-Spline* segítségével kényelmesen hajtható végre különböző felületű testek modellezése, de ezzel nem lehet egzakt módon leírni bizonyos geometriákat, mint például a kör vagy ellipszis. Emiatt ma a CAD rendszerek *NURBS* (*Non-Uniform Rational B-Splines*) alapú modelleket készítenek.[2],[3] A *NURBS* a *B-Spline* függvényekből állítható elő. Ahhoz, hogy a legkönnyebben megértsük a *NURBS* lényegét, érdemes egyaránt geometriai, és algebrai nézőpontból is bemutatni a felépítési módjukat. A geometriai nézőpont rálátást ad a *NURBS* előállításához tartozó módszerhez gondolatmenetére, míg az algebrai nézőpont bemutatja, hogy hogyan lehet könnyen algoritmizálni a *NURBS* görbék, felületek, testek előállítását. A *NURBS*-szel kapcsolatos további információk a már említett David F Rogers által írt könyvben található.

Geometriai nézőpont [1]

A *NURBS* geometriai nézőpontból megközelített leképezésének lényege a 19. ábra segítségével kerül bemutatásra. Ezen az ábrán egy kör ($\square^2$), és a létrehozásához szükséges harmadfokú *B-Spline* görbék ($\square^3$) láthatóak. A leképezés a $z=1$ koordinátájú síkra történik.

A *NURBS* előállításához szükséges kontrol pontokat megkaphatjuk, ha a *B-Spline* -okhoz tartozó kontrol pontokon is végrehajtjuk a (4.8) transzformációt. Az ábrán látható, hogy a *B-Spline* -hoz tartozó kontroll pontokat $\mathbf{P}_i^w$ -vel, magát a görbét

pedig $C^w(\xi)$ -vel jelölik, míg a *NURBS* esetén ezek a jelölések $\mathbf{P}_i$ és $C(\xi)$.



19. Ábra – *NURBS* előállítása [1]

$$(\mathbf{P}_i)_j = \frac{(\mathbf{P}_i^w)_j}{w_i}, \quad (4.8)$$

ahol a $(\mathbf{P}_i)_j$ a j -edik komponense a $\mathbf{P}_i$ vektornak, a w_i pedig az i -edik súly. Ebben az esetben a figyelembe vett súlyok értékeit a $\mathbf{P}_i^w$ kontrol pontok z koordinátái adják. Mivel ezt a transzformációt a kontrol pontok mellett a görbe minden egyes pontjára el kell végezni, ezért be kell vezetni egy súlyfüggvényt.

$$W(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \cdot w_i, \quad (4.9)$$

ahol $N_{i,p}(\xi)$ a B -Spline -hoz tartozó bázisfüggvények. A súlyfüggvény, és az eredeti B -Spline bázisfüggvény ismeretében már megadható a NURBS felépítéséhez szükséges összefüggés, ahol $C^w(\xi)$ a (4.5) egyenlettel megadott B -Spline görbe

$$C(\xi) = \frac{C^w(\xi)}{W(\xi)}. \quad (4.10)$$

Algebrai nézőpont [1], [2], [3]

A geometriai nézőpont segítségével a NURBS előállítás mögötti koncepciót könnyebb megérteni, viszont a tényleges felépítéshez érdekesebb az algebrai megközelítést alkalmazni. Emellett bizonyos esetekben célszerű, hogy csak a kontrol pontokat beállítva tudjuk a görbét, felületet változtatni. Emiatt szükségünk lesz egy bázisfüggvényre. Tehát, ha a bázisfüggvény ismert, akkor az eddig ismertett B -Spline felépítési módszerek alkalmazandók. A NURBS bázisfüggvényét a következő módon definiáljuk

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)}{W(\xi)} = \frac{N_{i,p}(\xi) \cdot w_i}{\sum_{j=1}^n N_{j,p}(\xi) \cdot w_j}. \quad (4.11)$$

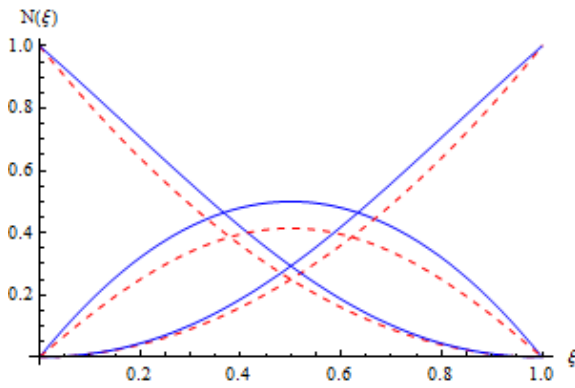
Ezen bázisfüggvény felhasználásával megalkothatóak a NURBS görbék

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi) \cdot \mathbf{P}_i. \quad (4.12)$$

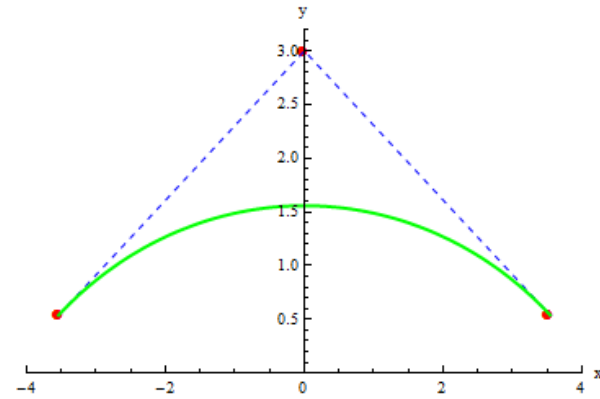
8. Példa: A megadott $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$ knot vektor, és a *NURBS*-hoz szükséges kontrol pontok, valamint a kontrol pontokhoz tartozó súlyok ismeretében határozza meg a görbét.

A *NURBS* görbét az (4.12) egyenlet felhasználásával tudjuk meghatározni. Mivel a kontrol pontok függetlenek attól, hogy épp *B-Spline*, vagy *NURBS* készítése a cél, ezért érdemes összevetni a két típushoz tartozó bázisfüggvényeket.

A 20. ábrán késsel folytonos vonallal látható a *NURBS*-hoz tartozó, piros szaggatott vonallal pedig a *B-Spline* tartozó bázisfüggvények. Megfigyelhető, hogy a súlyozás hogy befolyásolja az eredményt. A bázisfüggvények ismeretében meghatározható a körív, a 21. ábrán a piros pontok a kontrol pontok koordinátái, míg a kék szaggatott vonal a kontrol görbét jelöli.



20. Ábra – Bázisfüggvények összehasonlítása



21. Ábra – NURBS görbe

A *NURBS* görbékhez hasonlóan a felületek, és a testek is teljesen analóg módon épülnek fel. Ezekben az esetekben a különbség szintén a bázisfüggvényekben keresendőek. A felületek esetén a bázisfüggvény a következő módon definiálható

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) \cdot M_{j,q}(\eta) \cdot w_{i,j}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) \cdot M_{j,q}(\eta) \cdot w_{i,j}} . \quad (4.13)$$

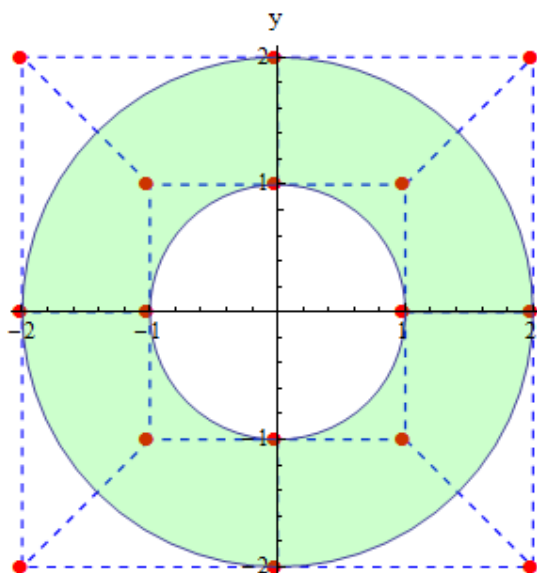
9.Példa: NURBS felület.

Ismertek a polinom fokok: $p = 2, q = 1$, valamint adottak a felületet felépítő knot vektorok:

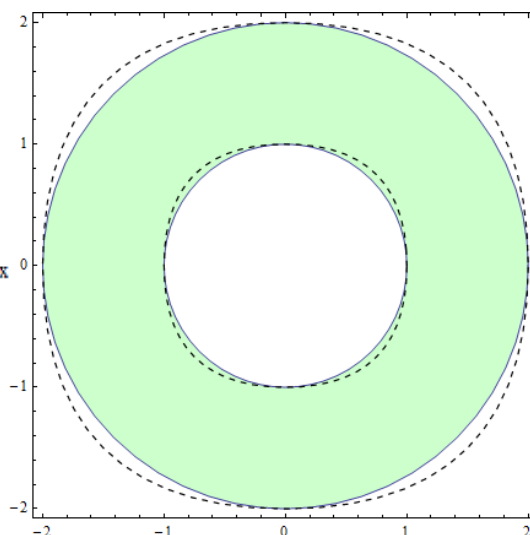
$$\Xi = \{0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4\}, \quad H = \{0, 0, 1, 1\},$$

illetve ismertek az egyes kontrol pontok, azok koordinátái, és a hozzá tartozó súlyok.

Ezeket felhasználva meghatározhatjuk az (4.13) egyenlet segítségével a felületet. A 22. ábrán kék szaggatott vonallal a kontrolháló, pirossal a kontrol pontok láthatóak.



22. Ábra –NURBS felület



23. Ábra –NURBS és B-Spline összehasonlítása

A 23. ábrán látható a két eljárással készített geometriák közti különbséget. Megfigyelhető, hogy sokkal *pontosabb* eredményt ad a NURBS segítségével történő felületmodellezés.

NURBS testek esetén pedig következő alakú a bázisfüggvény

$$R_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{N_{i,p}(\xi) \cdot M_{j,q}(\eta) \cdot L_{k,r}(\zeta) \cdot w_{i,j,k}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l N_{i,p}(\xi) \cdot M_{j,q}(\eta) \cdot L_{k,r}(\zeta) \cdot w_{i,j,k}}. \quad (4.14)$$

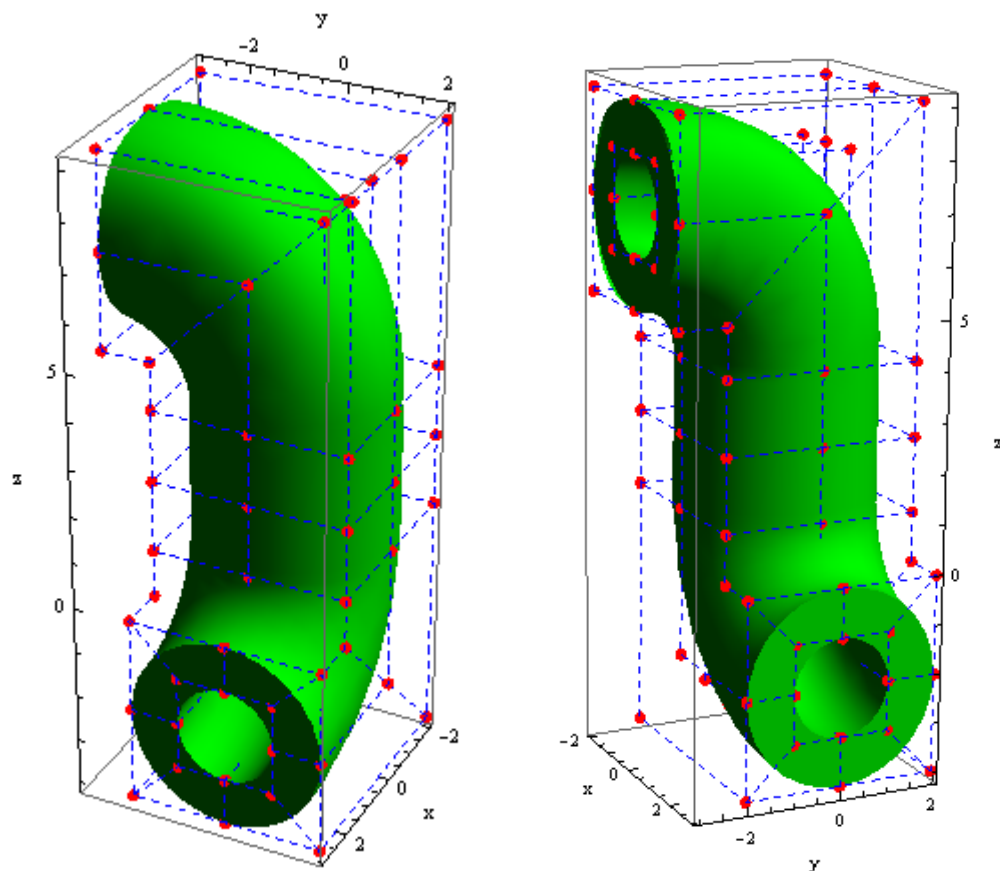
Egyértelműen látszik, hogy minden NURBS közvetlenül *B-Spline* -okból épül fel, ezért az eddig bemutatott hálósűrítési eljárások is érvényesek, és használhatóak *NURBS* esetén is. Valamint megjegyezendő, hogy fennállhat az az eset, amikor $R_i^p(\xi) = N_{i,p}(\xi)$. Emiatt belátható, hogy a *B-Spline* egy speciális esete a *NURBS*-nak.

10. Példa: NURBS Térfogat.

Ismertek a polinom fokok: $p = 2, q = 1, r = 2$, valamint adottak a felületet felépítő knot vektorok:

$$\Xi = \{0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4\}, \quad H = \{0, 0, 1, 1\}, \quad Z = \{0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3\},$$

illetve ismertek az egyes kontrol pontok, azok koordinátái, és a hozzá tartozó súlyok. Ezeket felhasználva meghatározhatjuk az (4.14) egyenlet segítségével a térfogatot. Az 24. ábrán kék szaggatott vonallal a kontrolháló, pirossal a kontrol pontok láthatóak.



24. Ábra –NURBS térfogat

IV. Az analízis alkalmazása

Mielőtt részletezésre kerül az izogeometrikus analízis használata, érdemes megemlíteni a hasonlóságokat, és a különbségeket az IGA és a VEM között [3]. A dolgozatban felhasznált elemek mindkét eljárás esetén izoparametrikus elemek, tehát a geometria és az ismeretlen elmozdulásmező is ugyanazokkal a bázisfüggvényekkel van közelítve.

VEM: az előre kiválasztott bázisfüggvények segítségével közelítik a CAD rendszer segítségével meghatározott geometriát, illetve az ismeretlen elmozdulásmezőt. A CAD modellezés, és az analízis különálló folyamat. Mivel ebben az esetben a geometria is mindig közelítve van, ez már magában foglal egy hibalehetőséget, illetve az eredmények pontatlanságát.

IGA: a bázisfüggvények a geometria felépítéséhez felhasználandó CAD rendszer segítségével kaphatóak meg, ezek egzakt módon határozzák meg a geometriát. Ezek a függvények kerülnek felhasználásra az ismeretlen elmozdulásmező közelítésekor. Tehát ebben az esetben a geometria közelítéséből adódó hibák nem jelennek meg, és sokkal pontosabb eredményeket kaphatunk.

Ezen dolgozat rugalmasságtani feladatok megoldására szorítkozik. Megjegyzendő, hogy az IGA nem csak rugalmasságtani feladatokra, hanem más fizikai folyamatoknál felmerülő parciális differenciálegyenletek (hőtan, áramlástan) megoldására is hatékonyan alkalmazható.

Végeselemes módszernél alkalmazott merevségi egyenlet megadásának elegáns módszere a Galerkin-féle módszer alkalmazása, ugyanez igaz az IGA-ra is, tehát a kezdeti parciális differenciálegyenlet és a peremfeltételek „átkonvertálása” $K \cdot U = F$ egyenletté [1]. Viszont lineáris rugalmasságtani feladatoknál a merevségi egyenlet előállításának egy egyszerű módszere a teljes potenciális energia minimumelvének használata. Ezen elv alkalmazása található ebben a dolgozatban is.

1. Rugalmasságtani összefoglaló [6]

A rugalmasságtan a szilárdságtan azon területe, amely a testek alakváltozásainak – és az ebből ébredő feszültségeknek – azon eseteit vizsgálja, amikor a terhelés hatására még nem következik be képlékeny (maradó) deformáció a testen.

A rugalmasságtan elméletének összefoglalása a Lamé–Navier egyenleten bemutatásán keresztül történik.

A Lamé–Navier egyenlet az elmozdulásmezőt ($\mathbf{u}$) tekinti elsődleges változónak, és az egyenlet levezetése végén az elmozdulásmezőre vonatkozóan kapunk parciális differenciálegyenletet.

Első lépésben az alakváltozási tenzor ($\boldsymbol{\varepsilon}$), és az elmozdulásmező kapcsolatát keressük, amit a geometriai egyenlet definiál:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \cdot (\text{grad} \mathbf{u} + \text{grad}^T \mathbf{u}). \quad (5.1)$$

Keressük a kapcsolatot az alakváltozás, illetve a feszültségi állapot között. Erre vonatkozóan a Hooke törvény nyújt segítséget. Behelyettesítve az ismert $\boldsymbol{\varepsilon}$ -t a Hooke törvény Lamé paraméterekkel (5.4), (5.5) felírt alakjába (5.2):

$$\boldsymbol{\sigma} = 2 \cdot \mu \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \cdot (\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{I}, \quad (5.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2 \cdot \mu \cdot (\text{grad} \mathbf{u} + \text{grad}^T \mathbf{u}) + \lambda \cdot (\text{div} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{I}, \quad (5.3)$$

$$\lambda = \frac{E \cdot \nu}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)} \text{ Pa}, \quad (5.4)$$

$$\mu = G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \text{ Pa}. \quad (5.5)$$

A feszültségi állapot ismeretében megoldható az egyensúlyi egyenlet (5.6), ahol $\mathbf{b}$ a térfogaton megoszló erőrendszer

$$\text{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (5.6)$$

$$\text{div} (2 \cdot \mu \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_I \cdot \mathbf{I}) + \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (5.7)$$

$$\mu \cdot \Delta \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \cdot (\text{grad} (\text{div} \mathbf{u}) + \mathbf{b}) = \mathbf{0}. \quad (5.8)$$

Ezzel megkaptuk a Lamé – Navier – féle egyenletet (5.8), amelyet a szükséges peremfeltételek segítségével megoldva, megkapjuk az ismeretlen elmozdulásmezőt, és az abból származtatható mennyiségeket. Mivel analitikus megoldás csak nagyon egyszerű esetekben lehetséges, ezért van szükség numerikus módszerek alkalmazására, mint például a VEM, vagy az IGA.

2. Teljes potenciális energia minimumelve

Lineárisan rugalmas test esetén a kinematikailag lehetséges elmozdulásmezők közül az egyensúlyi egyenleteket és a feszültségi peremfeltételeket is kielégítő elmozdulásmezőnél a teljes potenciális energiának (π) minimuma van. A π az $\mathbf{u}$ elmozdulásmezőhöz rendelt funkcionál ($\pi(\mathbf{u})$), amely az alakváltozási energiának és a külső erők munkájának (ami a külső erőrendszerhez rendelt potenciálból származtatható) különbsége

$$\pi = U - W. \quad (5.9)$$

A teljes potenciális energia minimuma elv konzervatív erőrendszerek esetén érvényes. Amennyiben az összes kinematikailag lehetséges π közül választjuk ki a legkisebbet, akkor $\pi_{\min} = \pi$, de a diszkretizálás miatt véges számú π közül választjuk ki a legkisebbet, emiatt $\pi_{\min} \neq \pi$, vagyis elmondható, hogy

$$\pi_{\min} - \pi > 0. \quad (5.10)$$

Ebből következik, hogy a teljes potenciális energia első variációja $\delta\pi = 0$. Ezzel az eredeti parciális differenciálegyenlet rendszert átalakítottuk a π funkcionál minimumának keresésére. A dolgozatban a teljes potenciális energia minimumelvén keresztül kerül bemutatásra az izogeometrikus analízis segítségével elvégzett feladatok megoldásához tartozó általános gondolatmenet ismertetése.

3. Izogeometrikus diszkretizáció [5]

Az izogeometrikus diszkretizáció bővebb kifejtése történt meg a IV. fejezetben, tehát, hogy hogyan kell a rendelkezésre álló bázisfüggvények segítségével felépíteni a geometriát. Egy adott elem esetén a geometria a következő összefüggéssel írható fel:

$$\mathbf{x}^e(\xi) = \sum_{a=1}^{n_{en}} \mathbf{P}_a^e \cdot R_a^e(\xi), \quad (5.11)$$

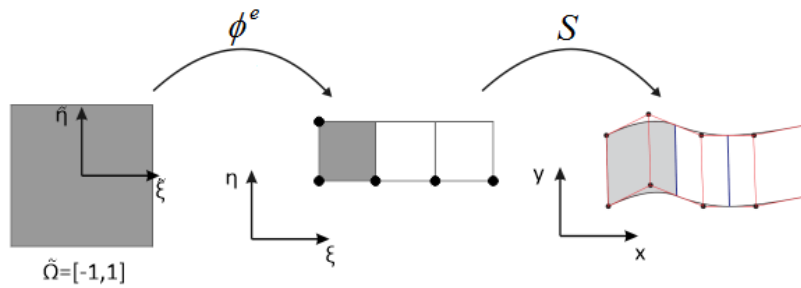
ahol a a lokális bázisfüggvények indexe, n_{en} az elemen átívelő nem zérusértékű bázisfüggvények, R_a^e a NURBS bázisfüggvények, $\mathbf{P}_a^e$ pedig a kontrol pontok. Ugyanezen elv segítségével írjuk le az ismeretlen elmozdulásmezőt is

$$\mathbf{u}^e(\xi) = \sum_{a=1}^{n_{en}} \mathbf{d}_a^e \cdot R_a^e(\xi), \quad (5.12)$$

ahol $\mathbf{d}_a^e$ a kontrolponti változó. Síkbeli feladatok esetén minden kontrol ponthoz egy ismeretlen x , és y irányú elmozdulás tartozik.

4. Globális deriváltak származtatása [4]

A két módszer közötti egyik szembetűnő különbség az elemeken értelmezett lokális bázisfüggvények leképezése globális függvényekké. Itt kerül előtérbe a IV. fejezetben ismertetett tereknek. Izogeometrikus analízis esetén nem pusztán egy lokális-globális leképezést kell elvégezni a Gauss-kvadratura elvégzésének érdekében, hanem a *physical space* (globális) – *parameter space* (lokális) leképezés mellett egy *parameter space* – *parent space* leképezést is el kell végezni. Az első esetben $\phi^e : \bar{\Omega} \rightarrow \Omega^e$ kerül értelmezésre, a második esetben $S : \Omega \rightarrow \Omega$. Ezen leképezések figyelembe vételével készíthetők el a globális deriváltak.



25. Ábra –Leképezések

Parent space – parameter space közti leképezés

Ezen művelet során a $\bar{\Omega} = [-1,1]$ és a $\Omega = [0,1]$ között kell kapcsolatot létesíteni. Ezt a

$$\xi = \frac{1}{2} \cdot \left((\xi_{i+1} - \xi_i) \cdot \bar{\xi} + (\xi_{i+1} + \xi_i) \right), \quad (5.13)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot \left((\eta_{j+1} - \eta_j) \cdot \bar{\eta} + (\eta_{j+1} + \eta_j) \right), \quad (5.14)$$

összefüggések segítségével lehetséges megvalósítani. Az integrálás során pedig szükség lesz még a koordinátarendszerek közti transzformációból eredő determinánsra

$$\det \bar{\mathbf{J}} = \frac{1}{4} \cdot (\xi_{i+1} - \xi_i) \cdot (\eta_{j+1} - \eta_j) d\bar{\xi} d\bar{\eta}. \quad (5.15)$$

Parameter space – physical space közti leképezés

Ezen művelet során pedig a lokális *parameter space* és a globális *physical space* közötti kapcsolatot kell megvalósítani. Ehhez a formafüggvények globális változók szerinti deriváltjai szükségesek. Ezen leképezés teljes mértékig megegyezik a hagyományos végesesemes eljárás során alkalmazottakkal, tehát szükségünk van a transzformációhoz a Jacobi mátrixra.

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

ahol a mátrix komponensei az alábbiak szerint számíthatóak

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{a=1}^{n_{en}} \mathbf{P}_a^e \cdot \frac{\partial R_a^e(\xi)}{\partial \xi}. \quad (5.17)$$

5. Numerikus integrálás [6]

A merevségi egyenlet felírásához a tartományon vett integrálok szükségesek. A polinom alakú mezőváltozók analitikus integrálása lehetséges, de nem hatékony módszer, ha sok elemünk van. Célszerűbb numerikus integrálást használni, például a Gauss-féle kvadraturát. Ez két változó esetén

$$\int_c^d \int_a^b F(x, y) dx dy = \sum_{j=1}^{n_{en}} \sum_{i=1}^{n_{en}} w_i \cdot w_j \cdot F(d\xi, d\eta) \cdot \left(\frac{1}{4} \det \mathbf{J} \right), \quad (5.18)$$

ahol:

- w_i, w_j táblázatból vett érték (integrálási súly)
- $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ a Gauss- pontok koordinátái a parent space-ben

3. Táblázat –Gauss pontok koordinátái és integrálási súlyok különböző eseteknél

Gauss-pontok száma	Gauss-pontok koordinátái	Integrálási súlyok
1	0	2
2	$-1/\sqrt{3}$	1
	$1/\sqrt{3}$	1
3	0	8/9
	$\sqrt{3/5}$	5/9
	$-\sqrt{3/5}$	5/9

6. Merevségi egyenlet meghatározása

A merevségi egyenlethez szükséges merevségi mátrix meghatározásához a rugalmas alakváltozási energiából származtatott térfogati integrált alkalmazzuk. Ezt a térfogati integrálást végezzük el a Gauss-féle kvadratura segítségével. Ezek elemre értendő mennyiségek, melyeket a szabadsági fokok és az elemtopológia figyelembe vételével kell az egész modellre értendő globális merevségi mátrixot előállítani. Síkbeli esetben az elem merevségi mátrixa

$$\mathbf{K}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot t \cdot \det \mathbf{J} \cdot \det \bar{\mathbf{J}} d\xi d\eta, \quad (5.19)$$

ahol $\mathbf{D}$ az anyagi jellemzőket tartalmazó mátrix, $\mathbf{B}$ az alakváltozásból származtatott mátrix [3] amelyben a bázisfüggvények globális deriváltjai találhatóak, t pedig az elem vastagsága. Az index az elemen átívelő nem zérusértékű bázisfüggvényeken értendő. Az x index az adott bázisfüggvény x szerinti deriváltját takarja

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} R_{A,x} & 0 \\ 0 & R_{A,y} \\ R_{A,y} & R_{A,x} \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

Az elmozdulásvektor a kontrol pontokhoz tartozó kontrol változókat tartalmazza, a tehervektor pedig a csomóponti terhelések vektora.

A merevségi mátrix és az elmozdulás, valamint a tehervektor ismeretében felírható a merevségi egyenlet, amelynek megoldásával megkapható a keresett elmozdulásmező,

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}. \quad (5.21)$$

V. Tesztfeladatok

A kidolgozott tesztfeladatok során kerülnek gyakorlati alkalmazásra az eddig elhangzott ismeretek. A példák célja, hogy egyértelművé tegyék egy izogeometrikus modell felépítéséhez tartozó gondolatmenetet, valamint bemutassák a módszerrel kapott eredményeket, illetve összehasonlítsák a referencia-, illetve hagyományos végelelemes eljárással kapott értékekkel.

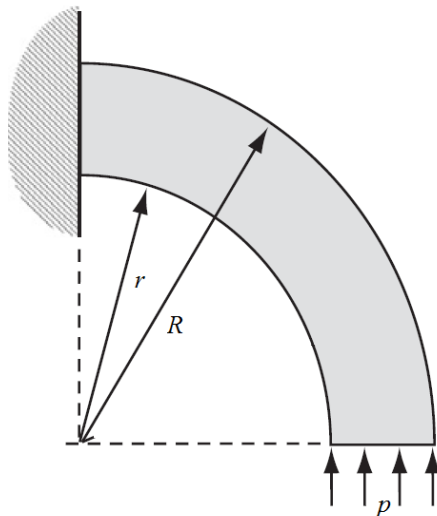
A kézi számítással végzett végelelemes, illetve ANSYS [11] használatával elkészített referencia megoldást gondolatmenetét röviden összefoglalva, az izogeometrikus modell elkészítését részletesebben ismertetve kerülnek kidolgozásra a feladatok.

Az első példában egy megoszló erőrendszerrel terhelt, síkfeszültségi állapotú hajlított rúd, míg a második példában pedig egy síkalakváltozási állapotú hajlított konzol található.

1. Tesztfeladat: Megoszló erőrendszerrel terhelt hajlított rúd

Geometria, numerikus adatok

A tartó geometriáját, méreteit a 26. ábra tartalmazza, míg a modellezés során használt numerikus adatok a következők:



26. Ábra –Geometria

- A lemez méretei, vastagsága:
 $R = 0,2 \text{ m}$
 $r = 0,1 \text{ m}$
 $t = 0,012 \text{ m}$
- A megoszló erőrendszer:
 $p_0 = 300 \text{ MPa}$
- A lemez anyagjellemzői:
 $E = 200 \text{ GPa}$
 $\nu = 0,25$

Referencia megoldás

Mivel nincs egzakt megoldás, ezért ANSYS segítségével készített modell lesz a referencia megoldás, amely hálófüggetlenségi vizsgálat elvégzése után 31916 csomópontból, 31500 elemből áll. Ennél az elemszámnál az elemek számának növelésével a kapott eredmények már csak sokadik tizedesjegy után változtak, emiatt az így kapott megoldásokat tekintem referencia-megoldásnak. Az anyagparaméterek, illetve a megadott peremfeltételek, a kiindulási adatok, illetve a 26. ábra alapján lettek beállítva. A modell célja, hogy a sűrű háló segítségével, jó közelítéssel írja le a konzol viselkedését az adott terhelés figyelembe vételével. Ez a szimuláció tekinthető a „pontos” megoldásnak, a továbbiakban bemutatott VEM és IGA modellek eredményei ezekkel a referencia értékekkel vannak összehasonlítva.

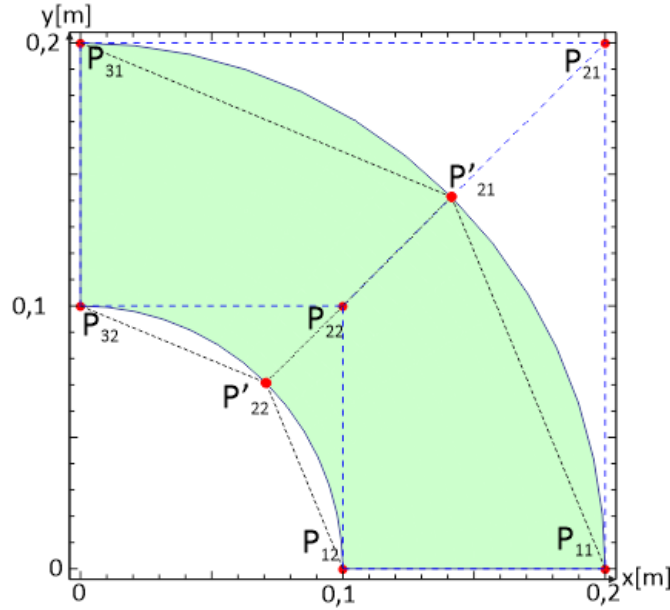
Végeselemes analízis

A VEM analízis során két, négy csomópontos, lineáris, izoparametrikus síkelem felhasználásával készült el a modell, így szabadsági fokok számában megegyezik a később ismertetett izogeometrikus modellel. A cél, hogy összehasonlítási alapot szolgáltatson az izogeometrikus analízis segítségével kapott adatokkal, ugyanis az elemszám, és a körív durva közelítése miatt ez a végeselemes analízis ilyen kevés elemszám esetén nem tud elfogadható megoldást adni.

Izogeometrikus analízis

A modell elkészítéséhez elsődlegesen szükség van a polinomok fokszámának a meghatározására (p, q) . Mivel a feladat geometriája hasonló a 9. példához, ezért ξ irányban másodfokú $(p = 2)$, míg η irányban elsőfokú $(q = 1)$ polinom fokszámot célszerű választani. Ehhez tartozóan, annak függvényében, hogy hány elemből lesz a háló felépítve, meghatározható a knot vektor. Ezen példa egy elemből álló végeselemes modellen mutatja be a gondolatmenetet, ezért a knot vektorok a következők: $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$, $H = \{0, 0, 1, 1\}$. A következő lépés, hogy a kontrol hálót felvétele, a hozzá tartozó kontrol pontokkal, és súlyokkal. Amennyiben ismertek a knot vektorok elkészíthetők belőle a NURBS bázisfüggvények, amelyek a (4.13) egyenlet felhasználásával kaphatók meg.

A 27. Ábrán láthatóak az analízishez felhasználandó hálók, amelyek közül izogeometrikus esetben egy fizikai hálót, illetve egy kontrol hálót takar. Az azonos szabadságfokú VEM modellt az ábrán a fekete szaggatott vonal jelöli. Az előbb ismertetett szabadságfokok a kontrolháló csomópontjaihoz tartozó értékek.



27. Ábra –IGA és VEM modell

Amint ismertek a bázisfüggvények, elkészíthető a háló. Jelen esetben az egy elemből álló végeleemes hálózhoz hat csomópont tartozik, amelyekhez összesen 12 ismeretlen szabadsági fok

$$\mathbf{u} = [u_{11x} \ u_{11y} \ u_{12x} \ u_{12y} \ u_{21x} \ u_{21y} \ u_{22x} \ u_{22y} \ u_{31x} \ u_{31y} \ u_{32x} \ u_{32y}]^T. \quad (5.22)$$

A cél, az (5.21)–as egyenlet felhasználásával ezen ismeretlen elmozdulás komponensek meghatározása. A kontrol pontok sorrendjét az alábbi vektor szemlélteti [5],[15]

$$\text{controlPts} = [\mathbf{P}_{11} \ \mathbf{P}_{12} \ \mathbf{P}_{21} \ \mathbf{P}_{22} \ \mathbf{P}_{31} \ \mathbf{P}_{32}]^T. \quad (5.23)$$

Az elem merevségi mátrixának meghatározásához az (5.19) egyenletet kell használni, a benne lévő mennyiségek kiszámítása után. A $\mathbf{B}$ mátrix esetén az (5.20) egyenlet használandó, amely jelen példa esetén a következőképp épül fel [5],[15]

$$\mathbf{R}_{,x} = [R_{1,x} \ R_{2,x} \ R_{3,x} \ R_{4,x} \ R_{5,x} \ R_{6,x}]^T. \quad (5.24)$$

Természetesen van $\mathbf{R}_{,y}$ vektor is, amely a bázisfüggvények y szerinti deriváltját tartalmazza. Amennyiben rendelkezésre állnak ezek a deriváltak, megkapható a $\mathbf{B}$ mátrix

$$\mathbf{B}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{R}[1]_{,x} & 0 & \dots \\ 0 & \mathbf{R}[1]_{,y} & \dots \\ \mathbf{R}[1]_{,y} & \mathbf{R}[1]_{,x} & \dots \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

Az anyagjellemzőket tartalmazó $\mathbf{D}$ mátrix síkfeszültségi állapotban a következőképp valósul meg:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (5.26)$$

síkalakváltozási állapotban pedig a következőt értjük a $\mathbf{D}$ mátrix alatt

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-2 \cdot \nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2 \cdot \nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

Az elem merevségi mátrixa, amely az (5.18) összefüggésével számítható, a Jacobi determinánsok számítása után a következő alakú

$$\mathbf{K}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot t \cdot \frac{1}{4} \cdot \det \mathbf{J} \cdot d\bar{\xi} d\bar{\eta}. \quad (5.28)$$

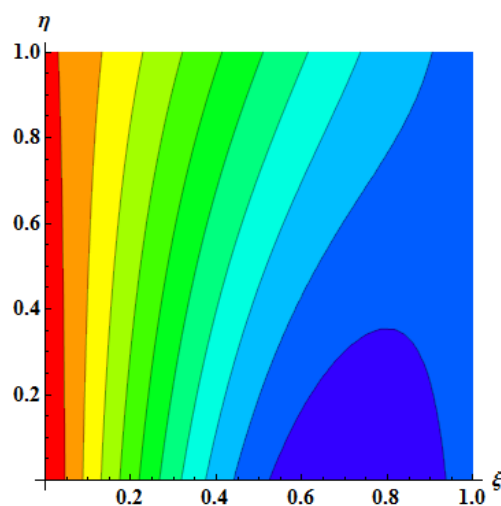
Az (5.21) egyenlet alkalmazásához a globális tehervektor felírása szükséges. A megoszló terhelést és a kényszererőket figyelembe véve jelen példa esetén a globális tehervektor a következő alakú

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{p_0 \cdot (R-r) \cdot t}{2} & 0 & \frac{p_0 \cdot (R-r) \cdot t}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{31x} & P_{31y} & P_{32x} & P_{32y} \end{bmatrix}^T. \quad (5.29)$$

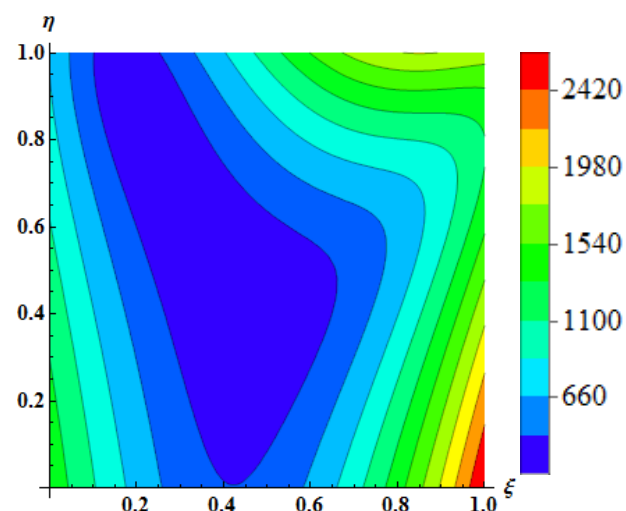
Kapott eredmények értékelése

Az elmozdulásmezőre, illetve a feszültségeloszlásra kapott megoldásokat a következő ábrák szemléltetik a *parameter space*-ben.

Az 28. és 29. ábrákon a *parameter space*-ben (lokális koordináta-rendszer) értelmezett elmozdulásmezőt látható, míg a 30 ábrán szintén a lokális koordináta-rendszerben található HMH-féle egyenértékű feszültség eloszlása található.



28. Ábra – Az X irányú elmozdulásmező a *parameter space*-ben



29. Ábra – A HMH egyenértékű feszültség a *parameter space*-ben

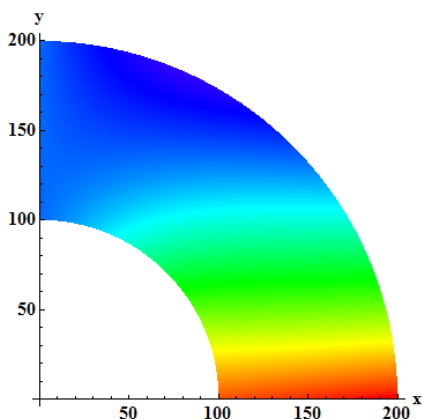
Megjegyzendő, hogy a *parameter space* $\xi = 1$ mentén adja meg a globális koordináta-rendszerben azon oldalt, amelyen a befogás található. Valamint a 28, 29, 30 ábrákon a $(\xi = 1, \eta = 0)$ pont felel meg a $\mathbf{P}_{31}$ pontnak.

Az elmozdulásmező grafikus értelmezése mellett, számszerű adatokat is megjelenítve, sokkal jobban közelíti a hat szabadságfokú IGA modell a referenciát a VEM modellhez képest.

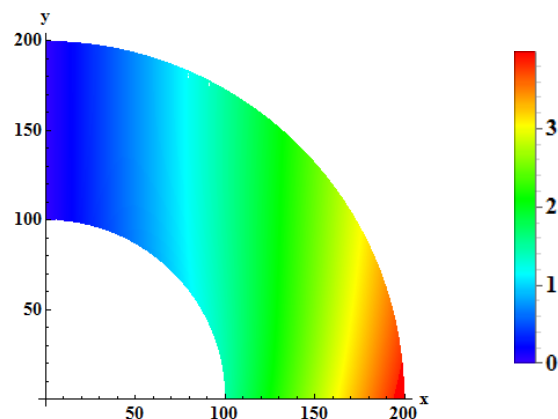
4. Táblázat – A csomópontok eredő elmozdulásai

Csomópontok elmozdulásai $-\Delta_i$	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6
Referencia	5,3443	3,6552	2,4748	1,6661	0	0
VEM	3,26928	2,08652	1,4837	0,9362	0	0
IGA	4,93577	3,04163	2,1244	1,4786	0	0

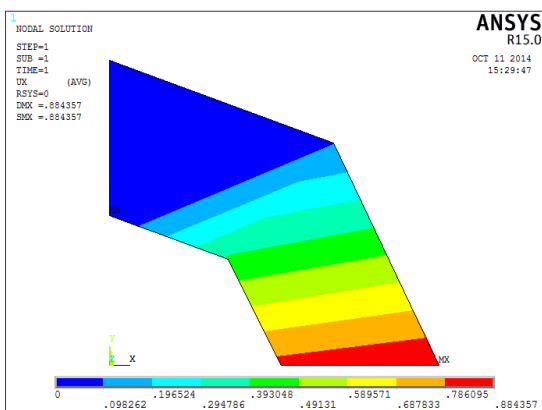
Az izogeometrikus analízis segítségével kapott globális koordináta rendszerben értelmezett elmozdulásmezőket összehasonlítva a referenciával, látható, hogy IGA esetén egy elem alkalmazásával majdhogynem pontosan vissza lehetett adni azokat az értékeket, amihez a VEM segítségével 31500 elem volt szükséges.



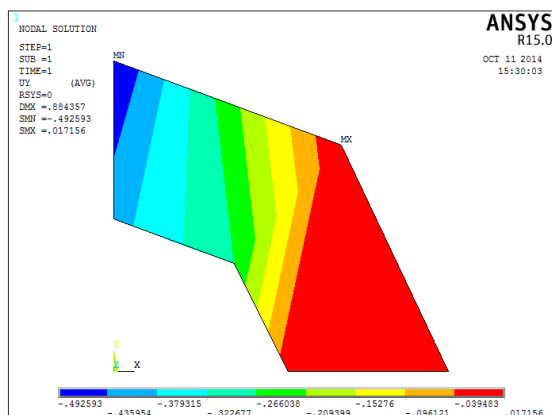
30. Ábra –Az X irányú elmozdulásmező - IGA



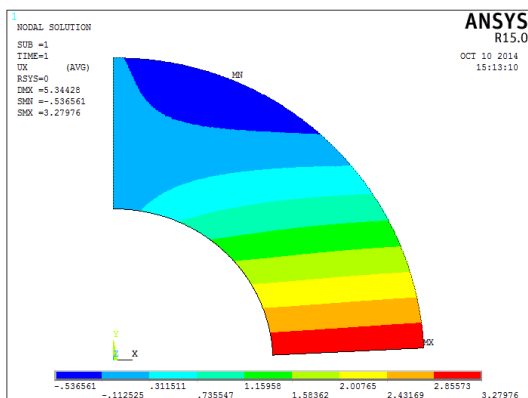
31. Ábra –Az Y irányú elmozdulásmező - IGA



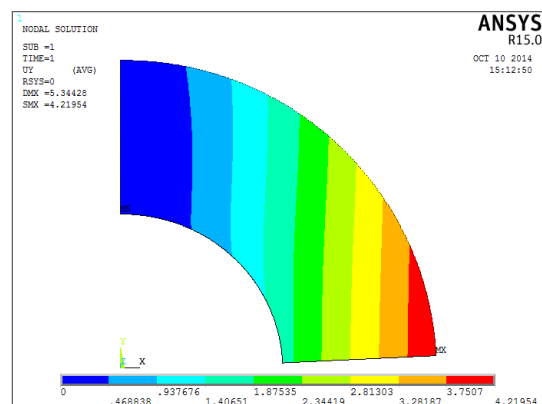
32. Ábra –Az X irányú elmozdulásmező - VEM



33. Ábra –Az Y irányú elmozdulásmező - VEM

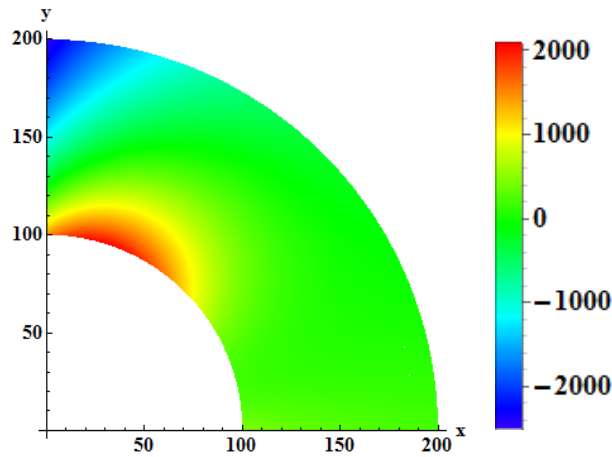


34. Ábra –Az X irányú elmozdulásmező - REFERENCIA

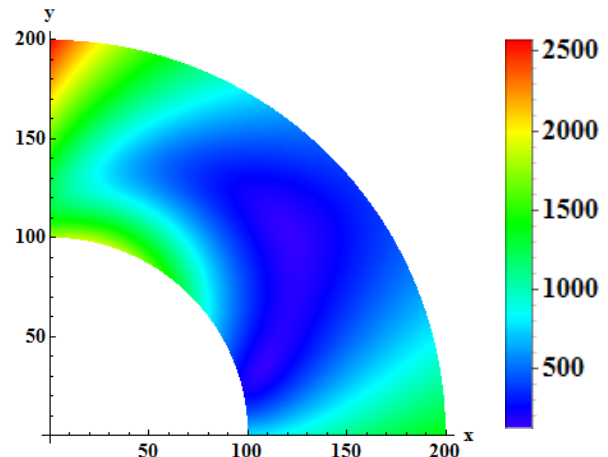


35. Ábra –Az y irányú elmozdulásmező - REFERENCIA

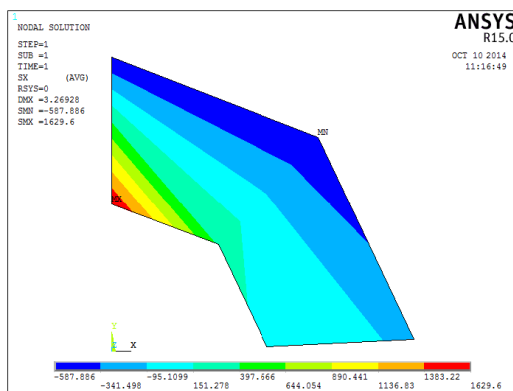
Mivel minden további eredmény az elmozdulásmezőből van származtatva, ezért ugyanezek a tulajdonságok igazak például a feszültségi állapotokra is $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$. Az alábbi ábrák illusztrálják az elmozdulásmezőre, és a feszültségeloszlásra kapott megoldásokat



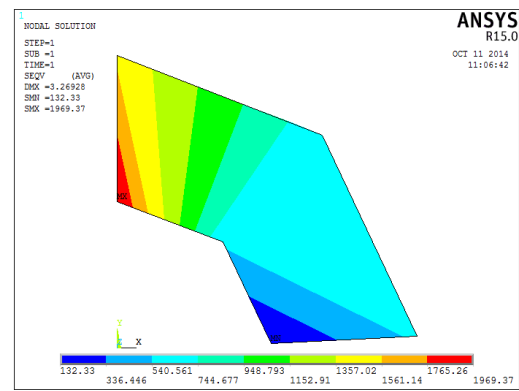
36. Ábra –Az X irányú feszültség - IGA



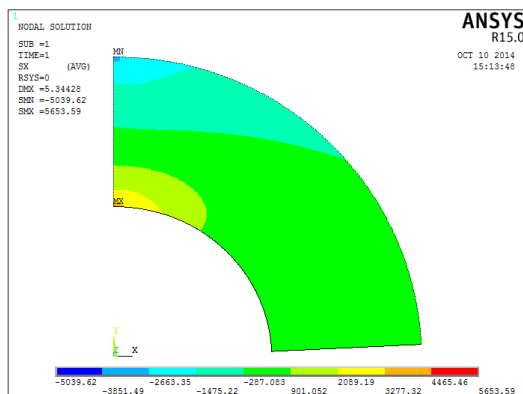
37. Ábra –A HMH egyenértékű feszültség - IGA



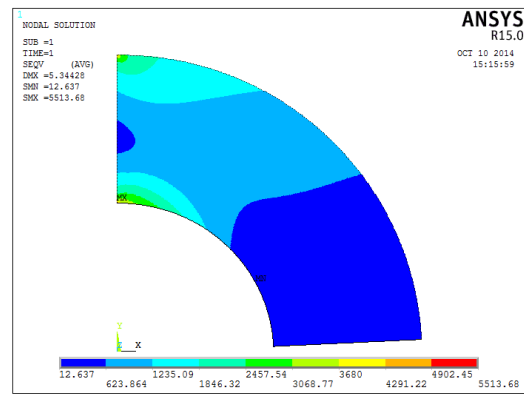
38. Ábra –Az X irányú feszültség - VEM



39. Ábra –A HMH egyenértékű feszültség - VEM



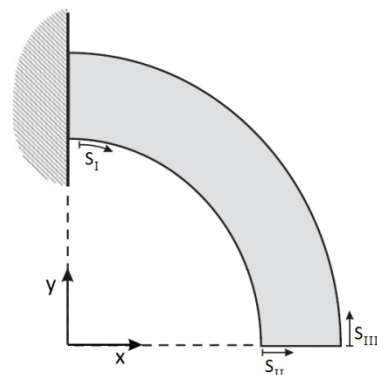
40. Ábra –Az X irányú feszültség - REFERENCIA



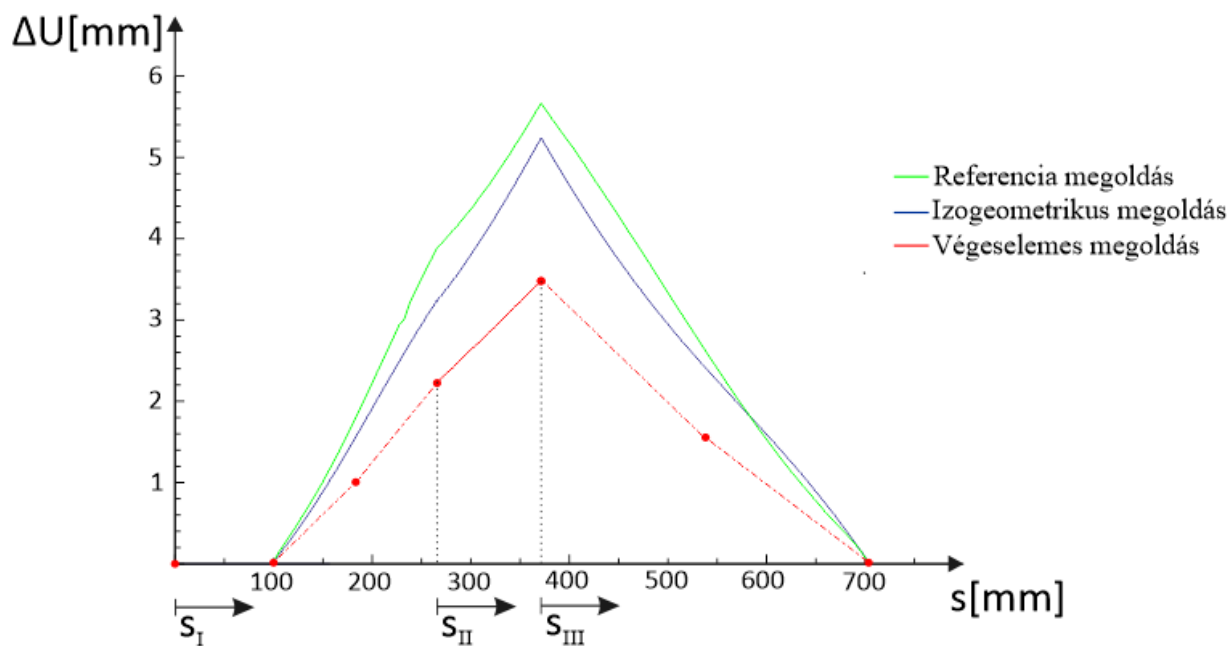
41. Ábra –A HMH egyenértékű feszültség - REFERENCIA

Az izogeometrikus megoldás Mathematica szoftverben íródott, a referencia megoldások, és a végeleemes megoldás ábrái pedig ANSYS segítségével kerültek kirajzoltatásra.

Fontos kihangsúlyozni, hogy az ábrákon mutatott eloszlások összehasonlítása nehézkes, hiszen az alkalmazott színskála a két szoftverben eltérő, emiatt a módszer pontosságának illusztrálására ismertetem a kontúr mentén számított eredő elmozdulásokat, amelyek s paraméter segítségével vannak ábrázolva. A kontúr menti elmozdulást a 41. ábra mutatja be. Az s paraméter futását a ... ábra szemlélteti.



42. Ábra –Az s paraméter szakaszai



43. Ábra –Az eredő elmozdulások összehasonlítása a tartó kontúrja mentén

Látható az azonos szabadságfokú izogeometrikus megoldás pontossága a hagyományos végeleemes eljáráshoz képest. A módszerek referenciához számított relatív hibáit az 5. táblázat foglalja össze.

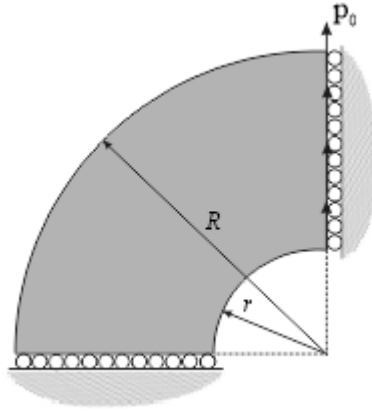
5. Táblázat –Az eredő elmozdulások referenciához viszonyított relatív hibái a csomópontokban

Az eredő elmozdulás relatív hibái a csomópontokban	Δ_1 [%]	Δ_2 [%]	Δ_3 [%]	Δ_4 [%]	Δ_5 [%]	Δ_6 [%]
VEM	38,95	43,01	40,33	43,97	0	0
IGA	7,64	16,78	14,76	10,98	0	0

2. Tesztfeladat: Hajlított konzol

Geometria, numerikus adatok

A tartó geometriáját, méreteit a 42. ábra tartalmazza, míg a számolás során felhasznált numerikus adatok a következők:



44. Ábra – Geometria

- A lemez méretei, vastagsága:

$$R = 0,2 \text{ m}$$

$$r = 0,05 \text{ m}$$

$$t = 0,01 \text{ m}$$

- A megoszló erőrendszer:

$$p_0 = 400 \text{ MPa}$$

- A lemez anyagjellemzői:

$$E = 150 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0,3$$

Ezen példa célja, hogy további esetben mutassa be az izogeometrikus analízis alkalmazását, a számítás során az első példa gondolatmenetét követve készült el a feladat. Szintén három modell kerül összehasonlításra, ebben az esetben a referencia megoldás 47250 elemből, és 47716 csomópontból áll, míg a VEM modell az IGA modellhez hasonlóan hat szabadságfokú.

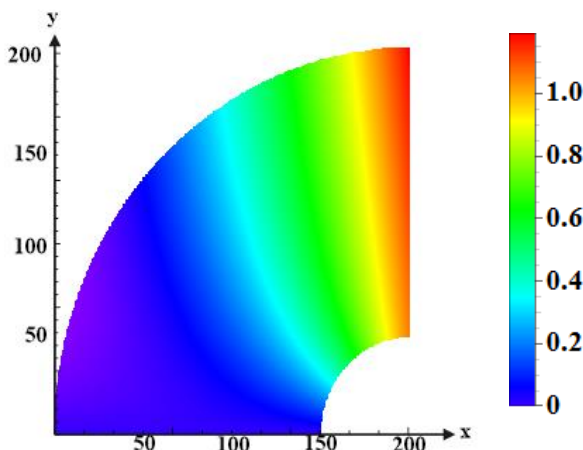
Hasonlóan az első példához, az IGA modell esetén ξ irányban másodfokú, η irányban elsőfokú polinom fokszám lett kiválasztva, emellett a knot vektorok is megegyeznek, Ellenben a kontrolháló, és az ahhoz tartozó kontrol pontok különbözőek, tehát összességében a geometria, vagyis a konzol orientációja eltérő. Épp ezért az (5.23)-(5.28) egyenletek jelen példában is felhasználhatóak, ami eltérő, az a peremfeltételekből, és a terhelésekből adódó elmozdulás-, és tehervektor

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & u_{11y} & 0 & u_{12y} & u_{21x} & u_{21y} & u_{22x} & u_{22y} & u_{31x} & 0 & u_{32x} & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (5.30)$$

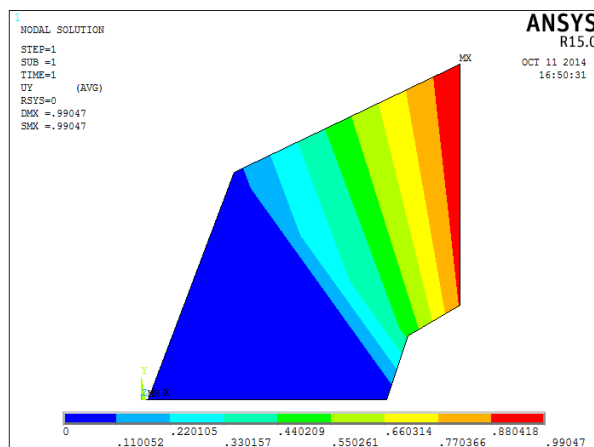
$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} P_{11x} & \frac{p_0 \cdot (R-r) \cdot t}{2} & P_{12x} & \frac{p_0 \cdot (R-r) \cdot t}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{31y} & 0 & P_{32y} \end{bmatrix}^T. \quad (5.31)$$

Kapott eredmények értékelése

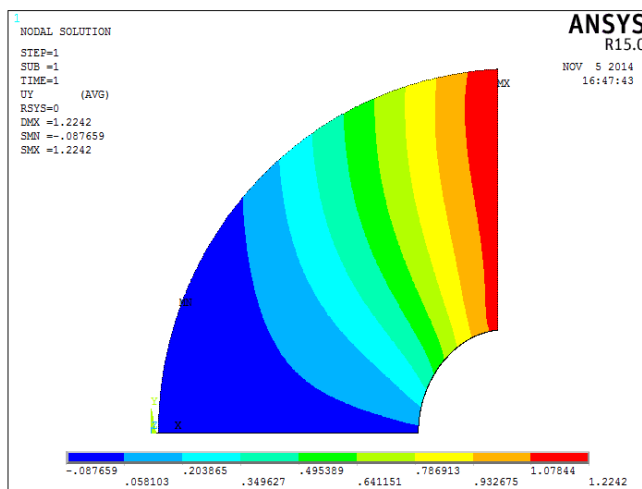
Ezen példában szintén az IGA alkalmazásával kapott elmozdulásmező, illetve a terhelés hatására kialakuló feszültségi állapot került összehasonlításra a referenciával, illetve a kételemes VEM modellel. A 43-45. ábrákon láthatóak a konzol Y irányú elmozdulásainak a különböző módszerekkel kapott eredményei.



45. Ábra –Az Y irányú elmozdulásmező - IGA



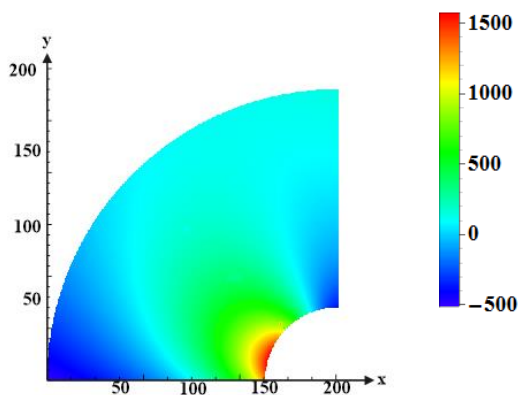
46. Ábra –Az Y irányú elmozdulásmező - VEM



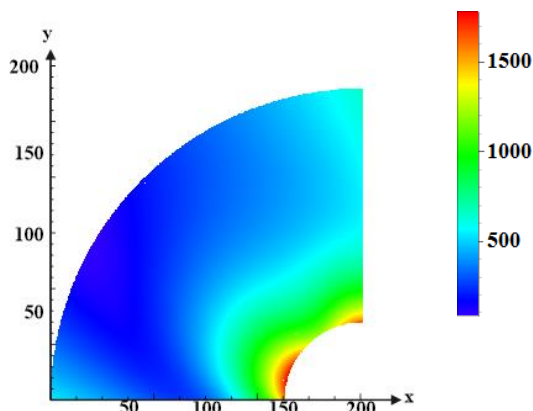
47. Ábra –Az Y irányú elmozdulásmező - REFERENCIA

Látható hogy jelen esetben is jól követi az eloszlást az izogeometrikus modell, de itt is fontos megjegyezni, hogy az ábrák színskálája eltérő, így a számszerű eredmények különbözőek az egyes pontokban. Ezt kiküszöbölve az 52. ábrán látható az Y irányú elmozdulások összehasonlítása a belső körív mentén.

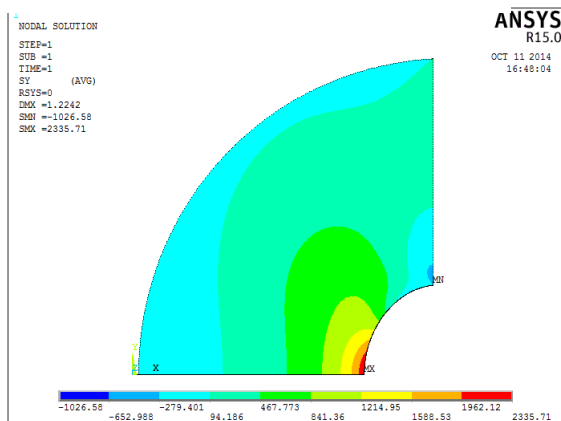
Az elmozdulásmező mellett természetesen a feszültségi állapotot is össze lehet vetni, a 46-51. ábrákon az y irányú, illetve a HMH egyenértékű feszültségeloszlás látható.



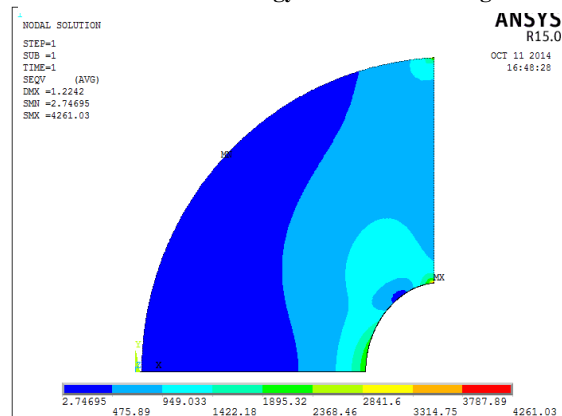
48. Ábra – Az Y irányú feszültség - IGA



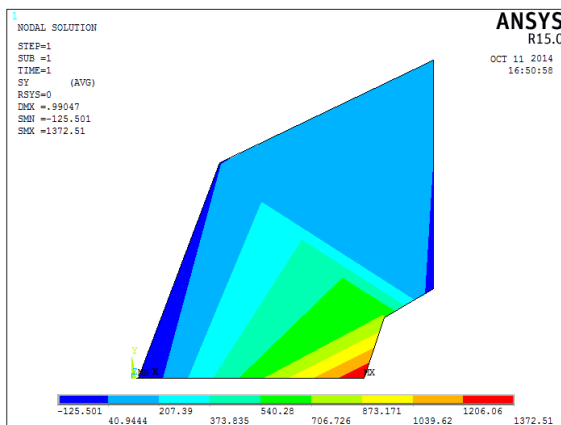
49. Ábra – A HMH egyenértékű feszültség - IGA



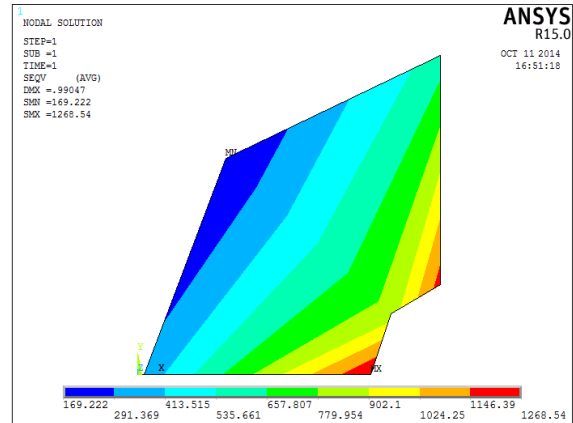
50. Ábra – Az Y irányú feszültség - REFERENCIA



51. Ábra – A HMH egyenértékű feszültség - REFERENCIA

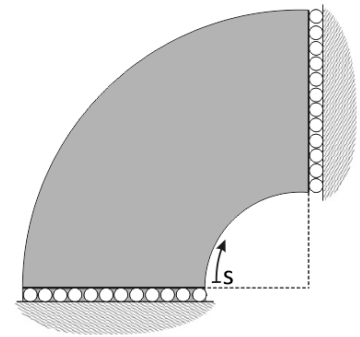


52. Ábra – Az Y irányú feszültség - VEM

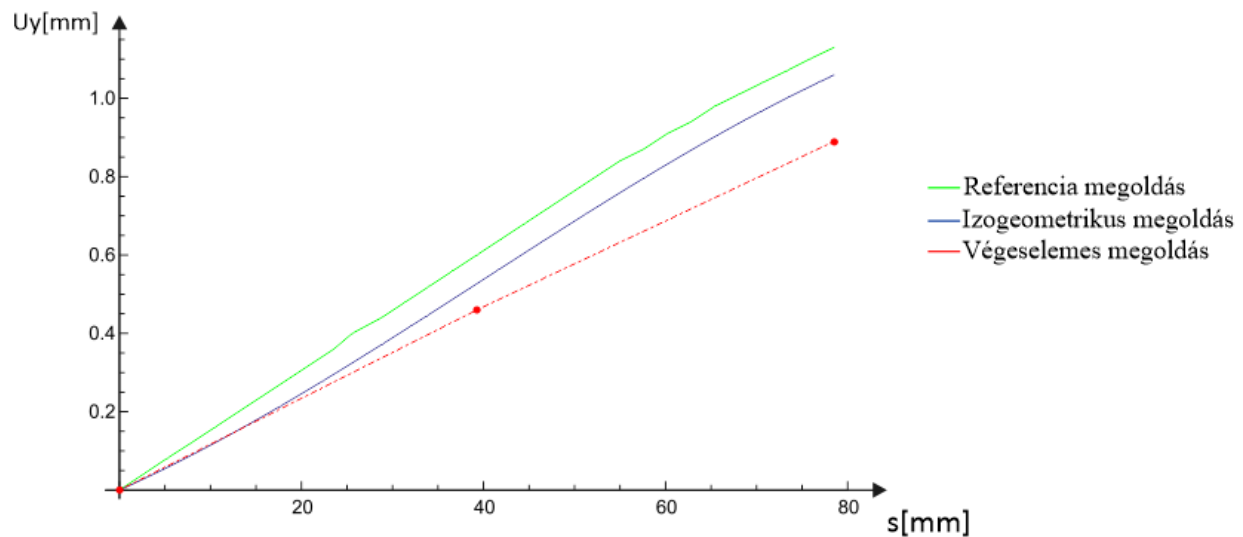


53. Ábra – A HMH egyenértékű feszültség - VEM

Mint ahogy már említve volt, a hatékonyság pontosabb illusztrálásához az 52. ábrán megjelenítésre került a Y irányú elmozdulás összehasonlítása a három eljárás között. Ez szintén az s paraméter bevezetésével történt, melynek futását az 54. ábra szemlélteti. Az azt követő 6. táblázat pedig a VEM és IGA relatív hibáit foglalja össze a referenciához képest a kontúr azon pontjaiban, ahol a kételes VEM megoldáshoz tartozó modell csomópontjai találhatók.



54. Ábra –Az s paraméter futása a belső körív mentén



55. Ábra –Az Y irányú elmozdulás összehasonlítása a belső kontúr mentén

Ebben az esetben is tapasztalható, hogy az izogeometrikus megoldás jobban követi a referenciát, és pontosabb eredményt szolgáltat, mint a hagyományos VEM modell.

6. Táblázat –Az Y irányú elmozdulások referenciához viszonyított relatív hibái a belső körív mentén, csomópontokban

Az Y irányú elmozdulás relatív hibái a belső körív mentén	Δ_2 [%]	Δ_4 [%]	Δ_6 [%]
VEM	21,23	25,00	0
IGA	7,07	13,33	0

VI. Összefoglalás

TDK dolgozatomban témájának, az izogeometrikus analízisnek kiválasztásakor döntő szerepet játszott a módszer aktualitása és meghatározó szerepe napjaink mérnöktár-sadalmában.

Szakirodalmi kutatómunka alapján a lehető legnagyobb rálátást alakítottam ki a témában, valamint összefoglaltam az izogeometrikus analízis kialakulásának és elterjedésének legfőbb lépéseit.

A NURBS alapú geometriák megadási módjait megismerve több kidolgozott mintapéldán keresztül mutattam be az izogeometrikus analízis alkalmazásához elengedhetetlen geometriai megadási módot, amely egyben a modell hálózását is magában foglalja. Az elkészített példák segítséget nyújtanak a dolgozat gondolatmenetének követésében. Ezeken keresztül az olvasó megismerkedhet a knot vektorok felépítésével, a NURBS alapjául szolgáló B-Spline bázisfüggvények meghatározásával. Ezen kívül megértheti a dolgozatban a B-Spline illetve NURBS görbék, felületek és testek létrehozására bemutatott módszereket, amelyek elsajátítását és reprodukálását a mellékletben található adatok és WOLFRAM MATHEMATICA programkódok segítik.

Az analízishez szükséges geometria létrehozása után részletesen ismertettem az izogeometrikus analízis főbb lépéseit, külön kitérve azokra a pontokra, ahol lényeges eltérést mutat ez a módszer a klasszikus értelemben vett végeses elemes eljárásához képest. Többek között kitértem az izogeometrikus diszkretizációra, az analízis során használatos terekre (parent, parameter, physical, index space) és azok leképezéseire. Emellett összefoglaltam a dolgozathoz tartozó tesztfeladatok rugalmasságtani hátterét.

A dolgozatomban bemutatott két, síkbeli tesztfeladat rugalmasságtani problémákra keresztül mutatja be az izogeometrikus analízis gondolatmenetét, gyakorlati alkalmazását. Az IGA segítségével kapott eredményeket mindkét esetben összehasonlítottam egy azonos szabadsági fokú VEM modellel, valamint egy nagyságrendekkel nagyobb hálóval rendelkező referencia megoldással. Ezen összehasonlításokkal elemeztem az elmozdulásmezőre illetve a feszültségi állapotra kapott eredményeket.

Az eredmények segítségével pedig igazoltam az izogeometrikus analízis hatékonyságát és pontosságát a klasszikus értelemben vett végeses elemes módszerhez képest.

VII. Függelék

1. Táblázatok jegyzéke

A 4. példában található B spline görbéhez tartozó kontrol pontok, és knot-ok koordinátái.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
X	0	1	2	3	5	7
y	0	3	0,5	0,5	3,5	2

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
x	0	0	0	0	23/12	10/3	7	7	7	7
y	0	0	0	0	9/4	9/4	2	2	2	2

A 6. példában található B-Spline felülethez tartozó kontrol pontok

i	j	P_{ij}	i	j	P_{ij}
1	1	(-1,0)	3	1	(1,1)
1	2	(-2,0)	3	2	(2,1.5)
1	3	(-3,0)	3	3	(3,2)
2	1	(-1,1)	4	1	(1,0)
2	2	(-2,1.5)	4	2	(2,0)
2	3	(-3,2)	4	3	(3,0)

A 7. példában található B-Spline térfogathoz tartozó kontrol pontok

i	j	$P_{i,1,k}$	$P_{i,2,k}$	i	j	$P_{i,1,k}$	$P_{i,2,k}$
1	1	(1,0,4)	(1,0,2)	5	2	(2,0,4)	(2,0,2)
1	2	(1,1,4)	(1,1,2)	6	1	(2,2,4)	(2,2,2)
2	1	(0,1,4)	(0,1,2)	6	2	(0,2,4)	(0,2,2)
2	2	(-1,1,4)	(-1,1,2)	7	1	(-2,2,4)	(-2,2,2)
3	1	(-1,0,4)	(-1,0,2)	7	2	(-2,0,4)	(-2,0,2)
3	2	(-1,-1,4)	(-1,-1,2)	8	1	(-2,-2,4)	(-2,-2,2)
4	1	(0,-1,4)	(0,-1,2)	8	2	(0,-2,4)	(0,-2,2)
4	2	(1,-1,4)	(1,-1,2)	9	1	(2,-2,4)	(2,-2,2)
5	1	(1,0,4)	(1,0,2)	9	2	(2,0,4)	(2,0,2)

A 8. példában található NURBS görbéhez tartozó kontrol pontok, és súlyok

	P_1	P_2	P_3
x	-3,5	0	3,5
y	0,5	3	0,5
w_i	1	$2 \cdot (\sqrt{2} - 1)$	1

A 9. példában található NURBS felülethez tartozó kontrol pontok, és súlyok

i	j	$P_{i,j}$	w_i	i	j	$P_{i,j}$	w_i
1	1	(1,0)	1	5	2	(-2,0)	1
1	2	(2,0)	1	6	1	(-1,-1)	$1/\sqrt{2}$
2	1	(1,1)	$1/\sqrt{2}$	6	2	(-2,-2)	$1/\sqrt{2}$
2	2	(2,2)	$1/\sqrt{2}$	7	1	(0,-1)	1
3	1	(0,1)	1	7	2	(0,-2)	1
3	2	(0,2)	1	8	1	(1,-1)	$1/\sqrt{2}$
4	1	(-1,1)	$1/\sqrt{2}$	8	2	(2,-2)	$1/\sqrt{2}$
4	2	(-2,2)	$1/\sqrt{2}$	9	1	(1,0)	1
5	1	(-1,0)	1	9	2	(2,0)	1

A 10. példában található NURBS térfogathoz tartozó kontrol pontok, és súlyok

i	j	$P_{i,1,k}$	$P_{i,2,k}$	w_i	i	j	$P_{i,1,k}$	$P_{i,2,k}$	w_i
1	1	(1,-3,7)	(2,-3,7)	1	5	5	(-1,0,1)	(-2,0,1)	1
1	2	(1,0,7)	(2,0,7)	$1/\sqrt{2}$	5	6	(-1,0,-3)	(-2,0,-4)	$1/\sqrt{2}$
1	3	(1,0,4)	(2,0,4)	1	5	7	(3,0,-3)	(3,0,-4)	1
1	4	(1,0,2.5)	(2,0,2.5)	1	6	1	(-1,-3,6)	(-2,-3,5)	1
1	5	(1,0,1)	(2,0,1)	1	6	2	(-1,-1,6)	(-2,-2,5)	$1/\sqrt{2}$
1	6	(1,0,-1)	(2,0,0)	$1/\sqrt{2}$	6	3	(-1,-1,4)	(-2,-2,4)	$1/\sqrt{2}$
1	7	(3,0,-1)	(3,0,0)	1	6	4	(-1,-1,2.5)	(-2,-2,2.5)	$1/\sqrt{2}$
2	1	(1,-3,8)	(2,-3,9)	1	6	5	(-1,-1,1)	(-2,-2,1)	$1/\sqrt{2}$
2	2	(1,1,8)	(2,2,9)	$1/\sqrt{2}$	6	6	(-1,-1,-3)	(-2,-2,-4)	$1/2$
2	3	(1,1,4)	(2,2,4)	$1/\sqrt{2}$	6	7	(3,-1,-3)	(3,-2,-4)	$1/\sqrt{2}$
2	4	(1,1,2.5)	(2,2,2.5)	$1/\sqrt{2}$	7	1	(0,-3,6)	(-0,-3,5)	1
2	5	(1,1,1)	(2,2,1)	$1/\sqrt{2}$	7	2	(0,-1,6)	(0,-2,5)	$1/\sqrt{2}$
2	6	(1,1,-1)	(2,2,0)	$1/2$	7	3	(0,-1,4)	(0,-2,4)	1
2	7	(3,1,-1)	(3,2,0)	$1/\sqrt{2}$	7	4	(0,-1,2.5)	(0,-2,2.5)	1
3	1	(0,-3,8)	(0,-3,9)	1	7	5	(0,-1,1)	(0,-2,1)	1
3	2	(0,1,8)	(0,2,9)	$1/\sqrt{2}$	7	6	(0,-1,-2)	(0,-2,-2)	$1/\sqrt{2}$
3	3	(0,1,4)	(0,2,4)	1	7	7	(3,-1,-2)	(3,-2,-2)	1
3	4	(0,1,2.5)	(0,2,2.5)	1	8	1	(1,-3,6)	(2,-3,5)	1
3	5	(0,1,1)	(0,2,1)	1	8	2	(1,-1,6)	(2,-2,5)	$1/\sqrt{2}$
3	6	(0,1,-2)	(0,2,-2)	$1/\sqrt{2}$	8	3	(1,-1,4)	(2,-2,4)	$1/\sqrt{2}$
3	7	(3,1,-2)	(3,2,-2)	1	8	4	(1,-1,2.5)	(2,-2,2.5)	$1/\sqrt{2}$
4	1	(-1,-3,8)	(-2,-3,9)	1	8	5	(1,-1,1)	(2,-2,1)	$1/\sqrt{2}$
4	2	(-1,1,8)	(-2,2,9)	$1/\sqrt{2}$	8	6	(1,-1,-1)	(2,-2,0)	$1/2$
4	3	(-1,1,4)	(-2,2,4)	$1/\sqrt{2}$	8	7	(3,-1,-1)	(3,-2,-0)	$1/\sqrt{2}$
4	4	(-1,1,2.5)	(-2,2,2.5)	$1/\sqrt{2}$	9	1	(1,-3,7)	(2,-3,7)	1
4	5	(-1,1,1)	(-2,2,1)	$1/\sqrt{2}$	9	2	(1,0,7)	(2,0,7)	$1/\sqrt{2}$

i	j	$P_{i,1,k}$	$P_{i,2,k}$	w_i	i	j	$P_{i,1,k}$	$P_{i,2,k}$	w_i
4	6	(-1,1,-3)	(-2,2,-4)	$1/2$	9	3	(1,0,4)	(2,0,4)	1
4	7	(3,1,-3)	(3,2,-4)	$1/\sqrt{2}$	9	4	(1,0,2.5)	(2,0,2.5)	1
5	1	(-1,-3,7)	(-2,-3,7)	1	9	5	(1,0,1)	(2,0,1)	1
5	2	(-1,0,7)	(-2,0,7)	$1/\sqrt{2}$	9	6	(1,0,-1)	(2,0,0)	$1/\sqrt{2}$
5	3	(-1,0,4)	(-2,0,4)	1	9	7	(3,0,-1)	(3,0,0)	1
5	4	(-1,0,2.5)	(-2,0,2.5)	1					

1. Tesztfeladat: Megoszló erőrendszerrel terhelt hajlított rúd – IGA kontrol pontok

	P_{11}	P_{12}	P_{21}	P_{22}	P_{31}	P_{32}
x	200	100	200	100	0	0
y	0	0	200	100	200	100
w_i	1	1	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1	1

1. Tesztfeladat: Megoszló erőrendszerrel terhelt hajlított rúd, VEM csomópontok

	P_{11}	P_{12}	P'_{21}	P'_{22}	P_{31}	P_{32}
x	200	100	$200/\sqrt{2}$	$100/\sqrt{2}$	0	0
y	0	0	$200/\sqrt{2}$	$100/\sqrt{2}$	200	100

2. Tesztfeladat: Hajlított konzol– IGA kontrol pontok

	P_{11}	P_{12}	P_{21}	P_{22}	P_{31}	P_{32}
x	200	200	0	150	0	150
y	200	50	200	50	0	0
w_i	1	1	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1	1

2. Tesztfeladat: Hajlított konzol, VEM csomópontok

	P_{11}	P_{12}	P'_{21}	P'_{22}	P_{31}	P_{32}
x	200	200	$200-200/\sqrt{2}$	$200-100/\sqrt{2}$	0	150
y	200	50	$200-200/\sqrt{2}$	$200-100/\sqrt{2}$	0	0

2. Forrásjegyzék

- [1] COTTRELL, HUGHES and BAZILEVS. Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA. 1st ed. John Wiley & Sons, 2009. ISBN: 978-0-470-748873-2
- [2] ROGERS. An Introduction to NURBS with Historical Perspective. Academic Press, 2001. ISBN: 978-1-55860-669-2
- [3] PIEGL and TILLER. The NURBS Book (Monographs in Visual Communication), 2nd ed. Springer-Verlag, New York, 1997. ISBN: 3-540-61545-8
- [4] NGUYEN, BORDAS and RABCZUK. Isogeometric Analysis: An overview and computer implementation aspects. *Computers and Structures*, 2013, vol. 23, no. 2, 124-135.
- [5] COTTRELL, HUGHES and BAZILEVS. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, vol 194, no. 39, 4135-4195.
- [6] SADD. Elasticity: Theory, Applications and Numerics. Elsevier, 2005. ISBN: 978-0-12-374446-3
- [7] FISH, BELYTSCHKO. A first course in finite elements. Wiley, 2007. ISBN: 978-0-470-03580-1
- [8] COX, The numerical evaluation of B-splines. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 1972, vol. 10, no. 2, 134-149.
- [9] DE BOOR. On calculation with B-splines. *Journal of Approximation Theory*, 1972, vol.6, no. 1, 50–62.
- [10] Wolfram Research: 2010e, Mathematica Edition: Version 8.0, Wolfram Research
- [11] ANSYS Mechanical APDL: Version 14.0, SAS IP Inc.
- [12] COTTREL, REALI, BAZILEVS, Y., and HUGHES. Isogeometric analysis of structural vibrations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, vol.195, 5257–5296., (2006)

- [13] HUGHES, REALI, SANGALLI. Efficient quadrature for NURBS-based Isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, vol.199, pp. 301-313.
- [14] BAZILEVS, et al. "Isogeometric analysis: approximation, stability and error estimates for h-refined meshes." *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 2006, vol. 16, no. 07: 1031-1090.
- [15] BARENDRECHT."Implementing an IGA compatible user-element for MSC Marc.", 2012.