

M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM

Gépészmérnöki Kar

Műszaki Mechanikai Tanszék

Gyűrűn gördülő kosárlabda egyensúlyi mozgásainak meghatározása

Készítette:

Havas Vince

Gépészeti fejlesztő alapszakos hallgató

Konzulens:

Antali Máté

Doktorandusz

Tudományos Diákköri konferencia

Budapest, 2014

1. Bevezető

Az emberiség régóta foglalkozik komoly problémákkal, mint például szórakoztató elfoglaltságok keresése. A történelem során rengeteg megoldási javaslat született ezen a téren, többek között a kosárlabda is. Viszont ha valami megoldás egy ismert problémára, az nem jelenti azt, hogy nem fog feltárni egész addig ismeretlen kérdéseket, jelen példában olyan mechanikai problémákat, melyek sorsdöntőek lehetnek a játék kimenetelére nézve.

Amikor például a kosárra dobott labda nem esik be vagy mellé „csont nélkül”, hanem elkezd körbe gördülni a kosár peremén, sokan izgatottan szurkolnak a nekik kedvezőbb kimenetelnek. Pedig ha tudnák, hogy a kérdés megfelelő módszerekkel már akkor eldönthető, amikor a labda megkezdte ezt a jellegzetes mozgást, talán előre örülnének, esetleg szomorkodnának.

Jelen dolgozat célja megkeresni azokat a stabil mozgásokat, melyek a fent leírt izgalmakat okozzák, viszont hogy véletlenül se csökkentsük a játék élvezeti értékét, nem részletezzük, hogy az adott mozgás pontot ért-e vagy sem.

2. Modellalkotás és leíró koordináták

Az alkalmazott egyszerűsítések két fő csoportba sorolhatóak, nevezetesen geometriai és mechanikai elhanyagolásokra.

A geometriai egyszerűsítések következtében a labda tökéletes gömb, a gyűrű pedig tökéletes kör, melynek keresztmetszete elhanyagolhatóan kicsi.

Másrészről mindkét testet merev testnek tekintjük. A jelenségeket a kosárhoz rögzített vonatkoztatási rendszerben írjuk le, viszont több koordináta-rendszert használunk. A vonatkoztatási rendszerhez kötött koordináta-rendszer esetén a gravitációs gyorsulás párhuzamos a Z tengellyel. Ezt a „legkülsőbb” rendszert $R0$ -al jelöljük.

Továbbá a labda homogén tömegeloszlású, és bármely időpillanatban pontosan egy ponton érintkezik a kosárral, vagyis első közelítésként egy kétirányú kényszer kapcsolatot feltételezünk. A gömb középpontja, bárhogy is álljon maga a test a térben, mindig egy jól meghatározott ρ távolságra esik a tapadási ponttól (ez a gömb definíciójának következménye). A tapadási pont pedig eleme a körnek, vagyis a középpont egy olyan felületen fekszik, amelyet egy adott körtől állandó távolságra lévő pontok halmaza alkot, ami definíció szerint egy tórusz felület. Ha ezen felület két sugara ismert (a gömb és a gyűrű sugarai, mint bemenő paraméterek), akkor a felület egy általános pontját le lehet írni két szöggel. Ezeket választottuk a gömb elhelyezkedését leíró két koordinátának, vagyis már az általános koordináták megválasztásakor figyelembe vettünk és kihasználtunk egy geometriai kényszert.

2.1 Általános koordináták és vonatkoztatási rendszerek

Ahhoz, hogy definiálni tudjuk a szögeket, elnevezzük a rendszer nevezetes pontjait a következőképpen. A gyűrű centrumát O -val jelöljük, a mindenkori tapadási pontot T -vel, valamint a gömb középpontját S -sel.

A szögek felírása mellett szükség van azoknak a mátrixoknak a meghatározására is, melyek segítségével átvihetjük a keresett mennyiségeket a „szomszédos” koordináta-rendszerbe. Ehhez végezzük el az említett forgatásokat.

Az első leíró szög az α , mellyel pozitív irányban elforgatva az XYZ koordináta-rendszert a Z tengely körül, megkapjuk az $R\alpha$ rendszert az azt jellemző X^α, Y^α és Z^α tengelyekkel. Az α -t úgy határozzuk meg, hogy nagysága minden pillanatban az X tengely és az OT vektor által bezárt szög legyen, vagyis az X^α tengely átmegy a tapadási ponton. Az α szög segítségével tudjuk leírni a gömb O pont körüli „keringését”.

Az $R\alpha$ -ból az $R0$ -ba az M_α mátrix segítségével tudjuk átírni a vektorokat, mégpedig úgy, hogy megszorozzuk azokat balról a mátrixszal. Ellentétes „haladási irány” esetén az eljárás változatlan, attól eltekintve, hogy a mátrix inverzét kell alkalmazni. Mivel azonban a forgató mátrixok ortogonálisak, ezért az inverzük egyenlő a transzponáltjukkal. A későbbiekben mindkét esetre fogunk példát mutatni.

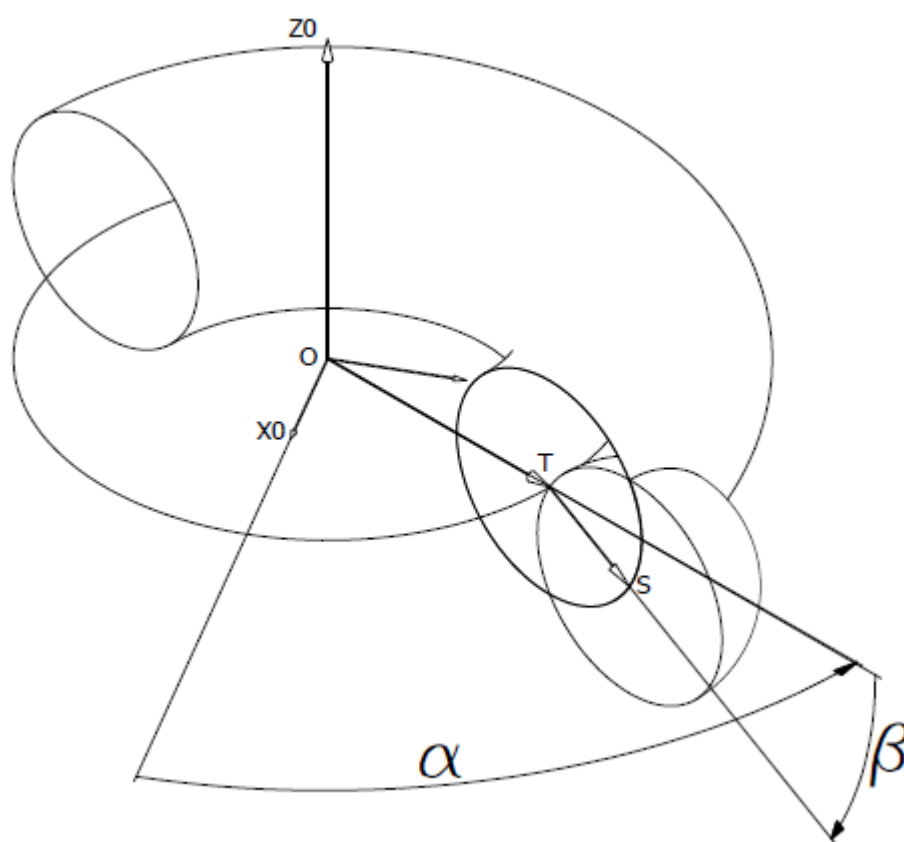
$$M_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1.1)$$

A másik szög, amit β -val jelölünk, az $R\beta$ rendszer leírására szolgál, az Y^α körüli forgatás révén. A β nagysága egyenlő a TS és az OT vektorok által bezárt szöggel. Ekkor az újonnan létrehozott X^β , Y^β és Z^β tengelyek közül a második a gyűrű és a gömb közös tapadási pontbeli érintője, az első azonos irányú a TS vektorral, a harmadik pedig a kiadódó tag. A β szög szolgál a gömb tapadási pont körüli „áteső” mozgásának leírására.

Az $R\alpha$ és $R\beta$ rendszerek között, az előbbiekhöz hasonlóan, az M_β segítségével lehet vektorokat transzformálni.

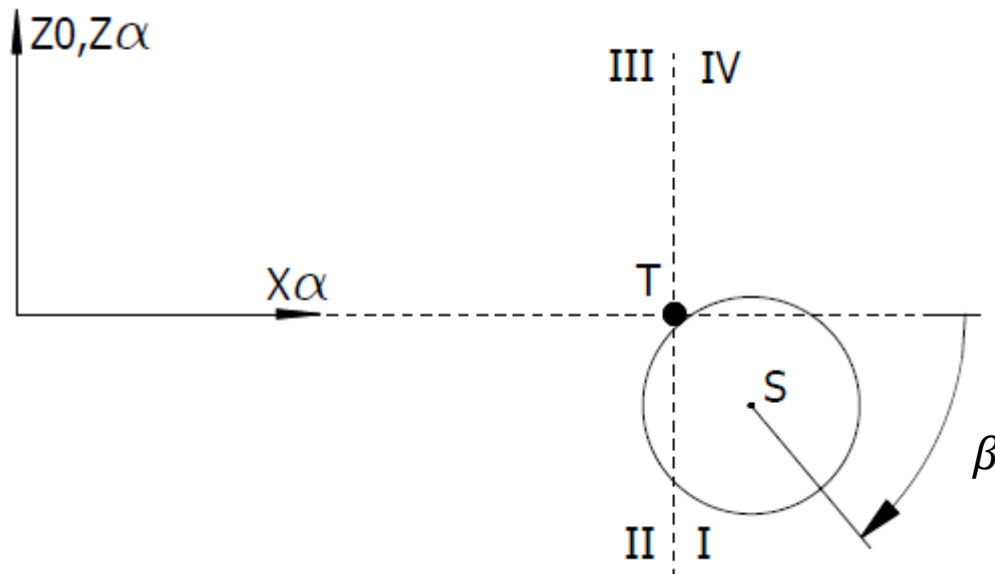
$$M_\beta = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (2.1.2)$$

A két forgatás eredménye egy három egymásba ágyazott tagból álló leíró rendszer szerkezet. Ennek szemléltetésére szolgál az 1/a ábra.



1/a. ábra: a gömb középpontjának leírása az α és β „törusz szögek” segítségével.

Azért, hogy a β szög értelmét kicsit szemléletesebbé tegyük, megrajzoltuk az 1/b ábrát, melyre a későbbi magyarázatok során többször fogunk hivatkozni. Az ábrán az $X^\beta Z^\beta$ sík látható négy sík negyedre osztva.

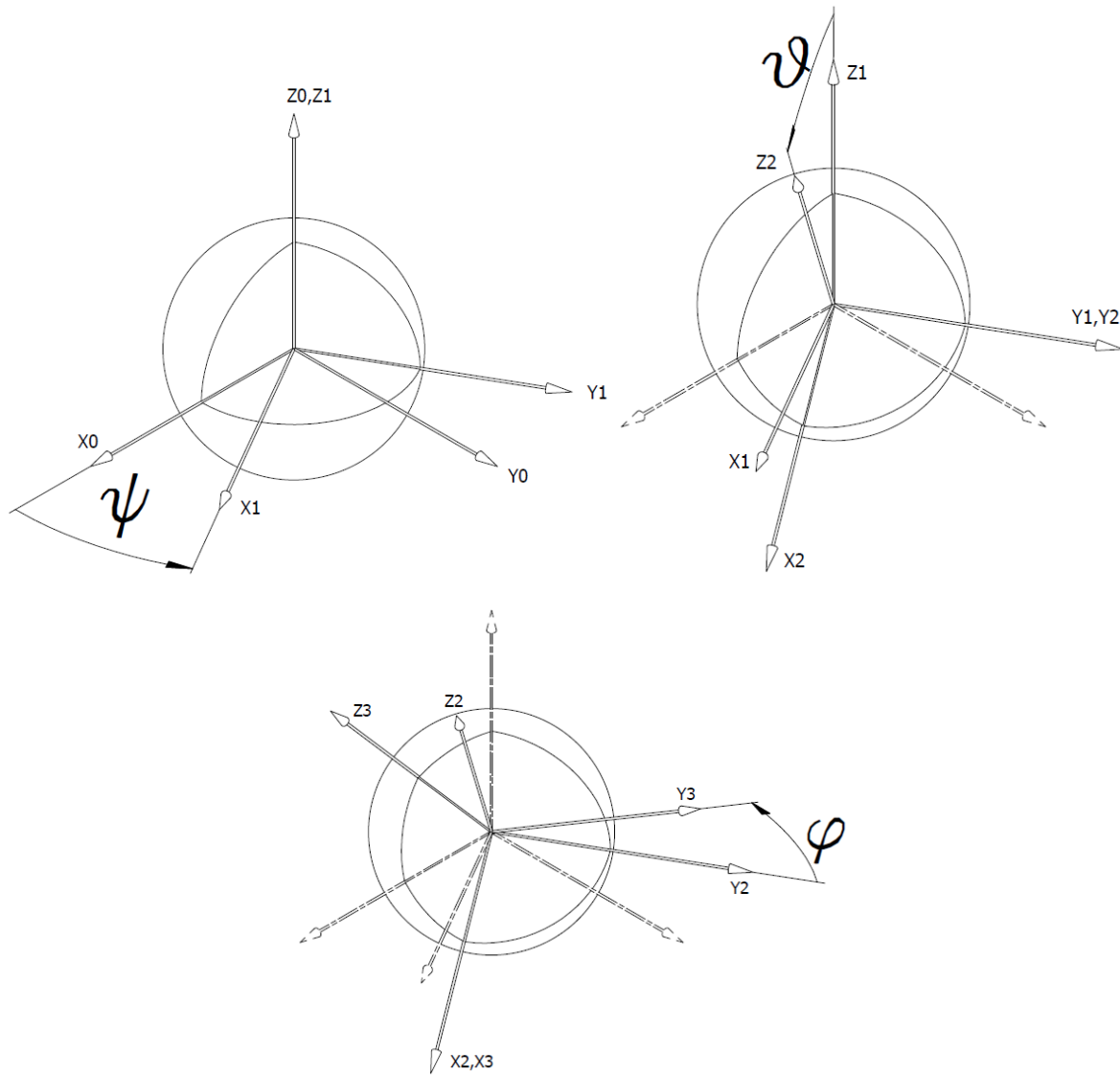


1/b. ábra: a β szög szemléltetése, és az $X^\beta Z^\beta$ sík felosztása.

Egy általános térbeli test 6 szabadsági fokkal rendelkezik, viszont az előbbi kényszerrel terhelt kosárlabda már csak öttel. Ez azt jelenti, hogy szükség van további három leíró koordinátára, melyeknek a gömb szöghelyzetét leíró Euler – szögeket választjuk. [4]

Az Euler – szögeket úgy definiáljuk, hogy a gömb tömeg középpontjához rögzített koordináta-rendszert elforgatjuk a három tengely körül, így létrehozva egy olyan rendszert, amely a gömbhöz rögzített. Ezt a három forgatást jellemezzük egy-egy szöggel, melyek skalár időfüggvények, és alkalmasak a vizsgált test szöghelyzetének leírására. Minden egyes forgatással létrehozunk egy új koordináta-rendszert, így egy olyan leírási módot kapunk, amely négy, egymásba ágyazott koordináta-rendszerből áll. A legkülső ezek közül a korábban említett R_0 , mely után sorra az R_1, R_2 és R_3 tagok jönnek, ahogy előrehaladunk a leírásban. Fontos megjegyezni, hogy a forgatások sorrendje nem felcserélhető.

A 2. ábrán feltüntettük a gömböt egy általános helyzetben, valamint a négy koordináta-rendszert a hozzájuk tartozó szögekkel.



2. ábra: a gömb szöghelyzetét leíró Euler - szögek

Első lépésként a függőleges Z tengely körül elforgatjuk a koordináta-rendszert pozitív irányban ψ szöggel. Az így létrehozott rendszer az $R1$, melynek tengelyeit X' -vel Y' -vel és Z' -vel jelöljük. Az $R0$ és $R1$ rendszerek között az $\mathbf{M}_1$ mátrix teremt kapcsolatot.

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1.3)$$

Egy általános $R1$ -ben értelmezett vektor felírható az $R0$ -ban, ha megszorozzuk balról a fenti mátrixszal.

Ezután az Y' tengely körül végzett forgatással beforgatjuk a rendszert ϑ szöggel. Ezzel az előbbivel analóg módon létrehozzuk az $R2$ rendszert, az X'' , Y'' és Z'' tengelyekkel és az $R2$ -ből $R1$ -be transzformáló $\mathbf{M}_2$ mátrixszal.

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) & 0 & \sin(\vartheta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\vartheta) & 0 & \cos(\vartheta) \end{bmatrix} \quad (2.1.4)$$

Végül az X'' tengely körüli forgatással definiáljuk azt az $R3$ rendszert, amely minden pillanatban együtt forog a gömbbel. A φ szöggel való forgatással értelmezett $X'''Y'''Z'''$ koordináta-rendszerből az $R2$ rendszerbe az $\mathbf{M}_3$ mátrix segítségével válthatunk.

$$\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad (2.1.5)$$

Az előbbieket ismeretében felírhatjuk a mechanikai modellünket leíró öt darab általános koordinátát.

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \psi \\ \vartheta \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (2.1.6)$$

2.2 A vonatkoztatási rendszerek jellemzése

A következőkben szeretnénk néhány sort szentelni a rendelkezésre álló hat leíró rendszer előnyeinek hangsúlyozására.

A test szögsebességét leíró $\boldsymbol{\omega}$ vektor három komponensből áll össze, melyek az egyes Euler – szögekhez tartozó elemi szögsebességek. Mindegyiket azokban a koordináta-rendszerekben egyszerű felírni, melyek között a szögek kapcsolatot teremtenek. Ez alapján vagy az $R1$ -ben vagy az $R2$ -ben érdemes a későbbi számításokat elvégezni.

Második gondolatként szeretnénk megjegyezni, hogy az $R0$, $R\alpha$ és $R1$ rendszerek közös tulajdonsága, hogy van párhuzamos tengelyük a gravitációs gyorsulással, ezért ezekben a külső erők teljesítményét könnyebb leírni.

Végezetül a test tehetetlenségi nyomatéki mátrixát vizsgáljuk meg. Mivel gömbhéjról van szó, ezért a mátrixban nem lesznek deviációs tagok, ha azt a súlyponton átmenő tengelyekre írjuk fel. Vagyis ez alapján bármelyik leíró rendszert választhatjuk.

Mindezeknek megfelelően egyenleteinket egészen a kvázisebességek bevezetéséig a fenti előnyöknek eleget tevő $R1$ rendszerben fogjuk felírni. Mindenek előtt a szögsebességet és a tehetetlenségi nyomaték mátrixot. A váltást megfelelő időben indokolni fogjuk.

A szögsebesség meghatározásához írjuk fel annak korábban említett három tagját a saját koordináta-rendszerükben.

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.2.1)$$

$$\boldsymbol{\vartheta} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\vartheta} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.2)$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.3)$$

Ezután felírható az szögsebesség a kiválasztott rendszerben.

$$\begin{aligned} \omega_{R1} &= \dot{\psi} + M_2 * \dot{\vartheta} + M_2 * M_3 * \dot{\phi} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\vartheta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) & 0 & \sin(\vartheta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\vartheta) & 0 & \cos(\vartheta) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} * \cos(\vartheta) \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} - \dot{\phi} * \sin(\vartheta) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Az előbbi egyenlet felírása során kihasználtuk, hogy az egyes szögsebesség tagok invariánsak a hozzájuk tartozó forgatási mátrixokra.

Ha a tehetetlenségi nyomatéki mátrixot a súlypontra írjuk fel, akkor egy konstanssal szorzott egységmátrixot kapunk, mivel a kosárlabdát gömbszimmetrikusnak modelleztük. Az említett konstans lehetséges értékeinek két határértéke van.

$$\Theta_S = Cm\rho^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.5)$$

Ahol

- m a gömb tömege
- R a gömb sugara

$$C = \frac{2}{5} \quad (2.2.6)$$

hogyha tömör gömböt feltételezünk, valamint

$$C = \frac{2}{3} \quad (2.2.7)$$

hogyha nulla falvastagságú gömbhéjjal számolunk.

Mivel ennek csak akkor lesz jelentősége, amikor összeállítjuk a kapott tagokból a mozgásegyenleteket, ezért ezt a paramétert egyenlőre nem rögzítjük.

3. A gördülési kényszer leírása

Az eddig elhangzottakban nem esett utalás a címben szereplő gördülés szóra. A következő sorokban szeretnénk pontosan definiálni, hogy mire gondolunk gördülés alatt, és hogy ezt miként vehetjük figyelembe a számítások során.

3.1 Gördülés

Azt már a mechanikai modellalkotás ismertetésénél elmondtuk, hogy a két test pontosan egy ponton érintkezik egymással. Amennyiben ebben a pontban a labdának van valamekkora relatív sebessége a gyűrűhöz képest, akkor csúszásról beszélünk, ha viszont a talppont minden pillanatban áll, akkor gördülésről. Jelen vizsgálatainkban gördülést fogunk feltételezni, de megjegyezzük, hogy a téma egyik folytatási lehetősége a megcsúszás vizsgálat.

3.2 A kinematikai kényszer

A kinematikai kényszer elnevezés arra utal, hogy a gördülési feltétel betartásával olyan egyenletekhez jutunk, melyek a sebességekre, vagyis az általános koordináták deriváltjaira vonatkoznak. Síkpéldák esetében jellemző, hogy ezek az egyenletek integrálhatóak, ezért egyértelmű kapcsolatot teremtenek a leíró koordináták között. Ekkor *honolóm* rendszerről beszélünk.

Ezek a kényszeregyenletek felírhatóak

$$f_i(\mathbf{q}, t) = 0 \quad (3.2.1)$$

alakban, ahol

- $\mathbf{q}$ az általános koordináták vektora
- $i = 1 \dots r$
- r az integrálható kényszerek száma.

Általános térbeli esetben viszont, ahogyan jelen példánkban is, az integrálhatóság nem teljesül, vagyis a kényszerek nem adnak közvetlen kapcsolatot az általános koordináták között. Emiatt ezeket az egyenleteket más módszerrel kell figyelembe venni. Ezt az esetet *anhonolóm* esetnek nevezzük, és egyenletei az előbb használt jelölésrendszerrel

$$f_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0 \quad (3.2.2)$$

alakban írhatók fel.[1]

Arról, hogy miként tudjuk érvényesíteni a kinematikai kényszereket, a későbbiekben lesz szó. De mielőtt erre sor kerülne, kitérünk arra, hogyan határoztuk meg magukat a kényszeregyenleteket.

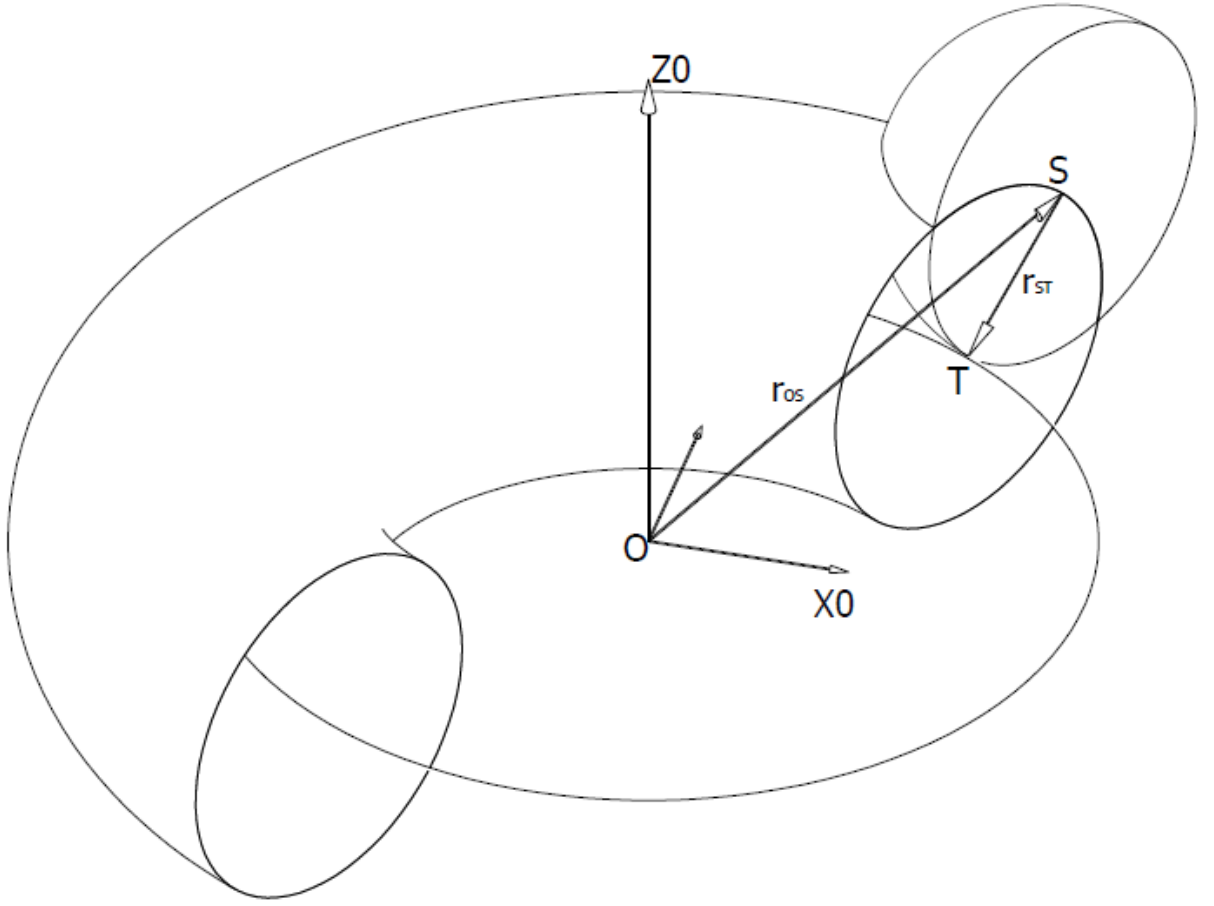
A T pont a gördülés miatt álló pont, ezért érvényes rá az alábbi képlet.

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{0} \quad (3.2.3)$$

A baloldalon található tagot a sebességre vonatkozó kinematikai alapegyenlet segítségével fogjuk felírni, a következő alakban.

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_S + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{ST} \quad (3.2.4)$$

A keresett sebességeket a helyvektorok idő szerinti deriváltjaiként fogjuk előállítani, ezért első lépésként meghatározzuk a szükséges $\mathbf{r}_{OS}$ és $\mathbf{r}_{ST}$ vektorokat az $R0$ rendszerben. A 3. ábra ezeket a vektorokat szemlélteti.



3. ábra: a kinematikai kényszer felírásához szükséges helyvektorok meghatározása

$$\mathbf{r}_{OS,R0} = \mathbf{M}_\alpha * \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{M}_\alpha * \mathbf{M}_\beta * \begin{bmatrix} \rho \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R + \rho * \cos(\beta)) * \cos(\alpha) \\ (R + \rho * \cos(\beta)) * \sin(\alpha) \\ -\rho * \sin(\beta) \end{bmatrix} \quad (3.2.5)$$

$$\mathbf{r}_{ST,R0} = \mathbf{M}_\alpha * \mathbf{M}_\beta * \begin{bmatrix} -\rho \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho * \cos(\alpha) * \cos(\beta) \\ -\rho * \sin(\alpha) * \cos(\beta) \\ \rho * \sin(\beta) \end{bmatrix} \quad (3.2.6)$$

Ahol

- ρ a gyűrű sugara
- az $\mathbf{r}_{OS,R0}$ vektor az O pontból mutat az S pontba, az $R0$ rendszerben felírva.

A későbbiekben is ezt a jelölésrendszert fogjuk alkalmazni.

Szeretnénk megjegyezni, hogy az $(R + \rho * \cos(\beta))$ mennyiség megegyezik az $\mathbf{r}_{OS,R0}$ vektor XY síkra eső merőleges vetületével. Mivel a későbbiekben visszatérő eleme lesz a leírt kifejezéseinknek, ezért érdemes bevezetni az

$$R' := R + \rho * \cos(\beta) \quad (3.2.7)$$

jelölést.

Ezután meghatároztuk a $\mathbf{v}_S$ sebességet az $\mathbf{r}_{OS}$ vektor deriválásával.

$$\mathbf{v}_{S,R0} = \frac{d}{dt} \mathbf{r}_{OS,R0} = \begin{bmatrix} -\dot{\alpha} * R' * \sin(\alpha) - \dot{\beta} * \rho * \cos(\alpha) * \sin(\beta) \\ \dot{\alpha} * R' * \cos(\alpha) - \dot{\beta} * \rho * \sin(\alpha) * \sin(\beta) \\ -\dot{\beta} * \rho * \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (3.2.8)$$

Mivel a 2.2 bekezdésben megállapítottuk, hogy legpraktikusabban az $R1$ rendszerben tudunk számolni, ezért a következő lépésben a szükséges három vektort átírtuk az M_1 mátrix segítségével. A számítás menetét az $\mathbf{r}_{ST,R1}$ vektoron mutatjuk be.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{ST,R1} &= \mathbf{M}_1^T * \mathbf{r}_{STR0} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -\rho * \cos(\alpha) * \cos(\beta) \\ -\rho * \sin(\alpha) * \cos(\beta) \\ \rho * \sin(\beta) \end{bmatrix} = \\ &= \rho * \begin{bmatrix} -\cos(\beta) \cos(\alpha - \psi) \\ -\cos(\beta) \sin(\alpha - \psi) \\ \rho * \sin(\beta) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

$$\mathbf{v}_{S,R1} = \begin{bmatrix} -\dot{\beta} * \rho * \cos(\alpha - \psi) * \sin(\beta) - \dot{\alpha} * R' * \sin(\alpha - \psi) \\ \dot{\alpha} * R' * \cos(\alpha - \psi) - \dot{\beta} * \rho * \sin(\alpha - \psi) * \sin(\beta) \\ -\dot{\beta} * \rho * \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (3.2.10)$$

Érdemes megfigyelni, hogy ahogy korábban az R' mennyiséghez tudtunk fizikai tartalmat rendelni, úgy a (3.2.9) egyenletben többször előforduló $(\alpha - \psi)$ szögnek is van szemléletes jelentése. Ugyanis így írható le az $R\alpha$ és az $R1$ rendszerek közti relatív szöghelyzet, vagyis ez egy „relatív Euler-szög”. (Emlékeztetőül: mindkét rendszert az $R0$ -ból képeztük egy Z tengely körüli pozitív forgatással) Ez a mennyiség is sokszor ki fog adódní, de nem láttuk szükségesnek külön elnevezni.

A (2.2.4), (3.2.9) és (3.2.10) egyenletekben meghatározott mennyiségek segítségével felírható a kinematikai kényszer, ha behelyettesítjük eredményeinket a (3.2.4) egyenletbe. A keresztszorzat és az összeadás elvégzése, valamint egyszerűsítések és összevonások után a (3.2.11) egyenlet adódik.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_T = 0 &= \\ &= \begin{bmatrix} -\left(R' \dot{\alpha} - \rho * \cos(\beta) (\dot{\psi} - \sin(\vartheta) * \dot{\phi})\right) * \sin(\alpha - \psi) - \dot{\beta} * \rho * \sin(\beta) \cos(\alpha - \psi) + \rho * \sin(\beta) \dot{\vartheta} \\ \cos(\alpha - \psi) \left(R' * \dot{\alpha} - \rho * \cos(\beta) * (\dot{\psi} - \sin(\vartheta) * \dot{\phi})\right) - \rho * \sin(\beta) (\cos(\vartheta) * \dot{\phi} + \sin(\alpha - \psi) \dot{\beta}) \\ -\rho * \cos(\beta) * (\dot{\beta} - \cos(\alpha - \psi) * \dot{\vartheta} + \cos(\vartheta) * \sin(\alpha - \psi) * \dot{\phi}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Ezt az egyenletet komponensenként felírva rendelkezésünkre áll 3 skalár egyenlet, melyek azonban tartalmazzák azt a geometriai kényszert is, amit a „tórusz szögek” alkalmazásakor korábban már érvényesítettünk. Vagyis a felírt három egyenlet közül csak kettő lehet lineárisan független, a harmadik pedig egy olyan kényszert fogalmaz meg, ami

mindenképp teljesül, azaz egy azonosságot. Ahhoz, hogy megtaláljuk a „kakukktójást”, átírjuk a $\mathbf{v}_T$ sebességet abba a rendszerbe, amelyiknek az egyik tengelye a talppontbeli felületi normálissal párhuzamos. Ez az $R\beta$ rendszer, ahol a várakozásoknak megfelelően az első komponens kinullázódik.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{SR\beta} &= \mathbf{M}_\beta^T * \mathbf{M}_\alpha^T * \mathbf{M}_1 * \mathbf{v}_{SR1} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ R'\dot{\alpha} - \rho * \cos(\beta) (\dot{\psi} - \sin(\vartheta) * \dot{\phi}) - \rho * \sin(\beta) (\cos(\vartheta) \cos(\alpha - \psi) \dot{\phi} + \sin(\alpha - \psi) \dot{\vartheta}) \\ -\rho(\dot{\beta} - \cos(\alpha - \psi)\dot{\vartheta} + \cos(\vartheta) \sin(\alpha - \psi) \dot{\phi}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

A megmaradt két egyenlet átírható vektor alakba.

$$\begin{bmatrix} R' \\ 0 \\ -\rho * \cos(\beta) \\ -\rho * \sin(\beta) \sin(\alpha - \psi) \\ \rho * \cos(\beta) \sin(\vartheta) - \rho * \sin(\beta) \cos(\vartheta) \cos(\alpha - \psi) \end{bmatrix}^T * \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.2.13)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\rho \\ 0 \\ \rho * \cos(\alpha - \psi) \\ -\rho * \cos(\vartheta) \sin(\alpha - \psi) \end{bmatrix}^T * \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.2.14)$$

4. Mozgásegyenletek meghatározása Appell – egyenletekkel

4.1 Appell – egyenletek komponensei

Korábban említettük, hogy az

$$f_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0 \quad (4.1.1)$$

alakú (3.2.13) és (3.2.14) egyenletek zárt alakban nem integrálhatóak, más módszer szerint kell érvényesíteni azokat. Erre egy lehetséges megoldás az Appell – egyenletek alkalmazása.

Az Appell – egyenletek használatakor az úgynevezett gyorsulási energia segítségével jellemezzük a vizsgált rendszert, szemben a Lagrange vagy a Routh - Voss módszerekkel megszokott kinetikus energiával. Ez a módszer alkalmas geometriai és kinematikai kényszerek kezelésére, valamint hatalmas előnye, hogy végeredményként egy elsőrendű közönséges differenciálegyenlet rendszert kapunk.

Először bemutatjuk az Appell – egyenletek általános alakját a (4.1.2) egyenletben, majd pár szóban részletezzük az egyenletben szereplő mennyiségeket. [2]

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\sigma}_i} = \Pi_i \quad (4.1.2)$$

ahol:

- S a gyorsulási energia
- σ_i az i -edik kvázisebesség
- Π_i a kvázierők vektorának i -edik komponense

4.1.1 Kvázisebességek

További eltérés az Appell- és a többi módszer között, hogy az előbbiben a mechanikai rendszert kvázisebességekkel jellemezzük. Nem ismert olyan eljárás, amely a kvázisebességek felvételében segítségünkre lenne, egyedül arra érdemes figyelni, hogy az általános koordináták könnyen kifejezhetőek legyenek majd a sebesség definíciókból.

Az azonban már megválaszolt kérdés, hogy mennyi a kvázisebességek szükséges és elégséges száma.

$$n = D * N - g - h = 6 * 1 - 1 - 2 = 3 \quad (4.1.1.1)$$

ahol:

- n a kvázisebességek száma
- N a rendszerben lévő mozgó testek száma
- g a geometriai és integrálható kinematikai kényszerek száma
- h a nem integrálható kinematikai kényszerek száma
- D a rendszer egy tagjához tartozó szabadsági fokok száma (síkbeli pontrendszerre 2, térbeli pontrendszerre és síkbeli, merev testekből álló rendszerre 3, valamint térbeli, merev testekből álló rendszerre 6)

A (4.1.1.1) egyenletben kiszámolt értéknek megfelelően három kvázisebességnek az ω vektor $R\beta$ -beli három komponensét választottuk.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\omega}_{R\beta} = \begin{bmatrix} \sin(\beta)(-\dot{\psi} + \sin(\vartheta) * \dot{\phi}) + \cos(\beta)(\cos(\vartheta)\cos(\alpha - \psi)\dot{\phi} + \sin(\alpha - \psi)\dot{\vartheta}) \\ \cos(\alpha - \psi)\dot{\vartheta} - \cos(\vartheta)\sin(\alpha - \psi)\dot{\phi} \\ \cos(\beta)(\dot{\psi} - \sin(\vartheta) * \dot{\phi}) + \sin(\beta)(\cos(\vartheta)\cos(\alpha - \psi)\dot{\phi} + \sin(\alpha - \psi)\dot{\vartheta}) \end{bmatrix} \quad (4.1.1.2)$$

Ezzel a definícióval felbontottuk a labda mozgását három tagra, nevezetesen egy saját tengely körüli „perdülésre” (σ_1), egy tapadási pont körüli „átesésre” (σ_2) és egy „keringésre” (σ_3).

A (4.1.1.2) egyenletet kifejezhetjük vektor alakban úgy, hogy az általános koordináta vektort egy mátrixszal szorozzuk. Ezt a mátrixot fogjuk felhasználni a következő lépésben.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin(\beta) & \cos(\beta)\sin(\alpha - \psi) & \cos(\beta)\cos(\vartheta)\cos(\alpha - \psi) + \sin(\beta)\sin(\vartheta) \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha - \psi) & -\cos(\vartheta)\sin(\alpha - \psi) \\ 0 & 0 & \cos(\beta) & \sin(\beta)\sin(\alpha - \psi) & \sin(\beta)\cos(\vartheta)\cos(\alpha - \psi) - \cos(\beta)\sin(\vartheta) \end{bmatrix} \quad (4.1.1.3)$$

Fontos, hogy a sok számítás közepette ne veszítsük el szem elől a célunkat. Továbbra is az a feladat, hogy le tudjuk írni a rendszerünket, de most már a kinematikai kényszerek figyelembevételével. Ehhez meghatároztuk az általános koordinátákat, azokkal ki tudtuk fejezni a kényszereket, valamint a kvázisebességeket. A következő lépésben kifordítjuk eddigi gondolatmenetünket, és a kvázisebességekkel fogjuk leírni az általános koordináták deriváltjait. Ehhez felírunk mátrixalakban egy egyenletrendszert, ami minden eddig elért eredményünket magába foglalja. Nevezetesen az első két egyenlet lesz a két kinematikai kényszer, az utánuk következő három pedig a kvázisebességek definíciója. Gyakorlatilag nincs más dolgunk, mint a (3.2.13), (3.2.14) és (4.1.1.3) egyenletekből összeírni azt a mátrixot, amivel megszorozzuk az általános koordináta vektort.

$$\begin{bmatrix} R' & 0 & -\rho * \cos(\beta) & -\rho * \sin(\beta)\sin(\alpha - \psi) & \rho * \cos(\beta)\sin(\vartheta) - \rho * \sin(\beta)\cos(\vartheta)\cos(\alpha - \psi) \\ 0 & -\rho & 0 & \rho * \cos(\alpha - \psi) & -\rho * \cos(\vartheta)\sin(\alpha - \psi) \\ 0 & 0 & -\sin(\beta) & \cos(\beta)\sin(\alpha - \psi) & \cos(\beta)\cos(\vartheta)\cos(\alpha - \psi) + \sin(\beta)\sin(\vartheta) \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha - \psi) & -\cos(\vartheta)\sin(\alpha - \psi) \\ 0 & 0 & \cos(\beta) & \sin(\beta)\sin(\alpha - \psi) & \sin(\beta)\cos(\vartheta)\cos(\alpha - \psi) - \cos(\beta)\sin(\vartheta) \end{bmatrix} \quad (4.1.1.4)$$

$$* \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Jelölje ezt a mátrixot A . Ha a (4.1.1.4) egyenletet balról megszorozzuk az A mátrix inverzével, pont a keresett összefüggést kapjuk. Azt azonban érdemes megfigyelni, hogy a szigmákat tartalmazó vektor első két eleme nulla, emiatt az általános koordináták deriváltjainak felírásakor érdektelenné válik az A^{-1} mátrix első két oszlopa. A fölösleges tagokat a (4.1.1.5) egyenletben X -szel jelöltük.

$$\begin{bmatrix}
X & X & 0 & 0 & \frac{\rho}{R'} \\
X & X & 0 & 1 & 0 \\
X & X & -\sin(\beta) + \cos(\beta) \tan(\vartheta) \cos(\alpha - \psi) & -\tan(\vartheta) \sin(\alpha - \psi) & \cos(\beta) + \cos(\alpha - \psi) \sin(\beta) \tan(\vartheta) \\
X & X & \cos(\beta) \sin(\alpha - \psi) & \cos(\alpha - \psi) & \sin(\beta) \sin(\alpha - \psi) \\
X & X & \cos(\beta) \cos(\alpha - \psi) \sec(\vartheta) & -\sec(\vartheta) \sin(\alpha - \psi) & \sin(\beta) \sec(\vartheta) \cos(\alpha - \psi)
\end{bmatrix} \quad (4.1.1.5)$$

$$* \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

Ezen összefüggés segítségével tehát leírtuk az általános koordináták deriváltjait annak a három koordinátának a segítségével, melyek már függetlenek egymástól. A következő kérdés, hogy tudjuk meghatározni az új koordinátákat, mint skalár időfüggvényeket.

4.1.2 Gyorsulási energia

Ahogy azt már említettük, az S -sel jelölt gyorsulási energia a rendszer állapotfüggvénye, melyet merev test esetén az alábbi képlettel lehet meghatározni. [2]

$$S = \frac{1}{2} m \mathbf{a}_S^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\Theta}_S \boldsymbol{\varepsilon} + (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\omega})^T \boldsymbol{\Theta}_S \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^2 * \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\Theta}_S \boldsymbol{\omega} \quad (4.1.2.1)$$

ahol

- m a vizsgált test tömege
- $\mathbf{a}_S$ a súlyponti gyorsulás
- $\boldsymbol{\omega}$ a szögsebesség
- $\boldsymbol{\varepsilon}$ a szöggyorsulás
- $\boldsymbol{\Theta}_S$ a súlyponti tehetetlenségi nyomatéki mátrix

Első látásra nehéz észrevenni, de fontos megjegyezni, hogy a harmadik tag felel a giroszkópikus hatás leírásáért, ami viszont a vizsgált modell gömbszimmetriája miatt nem lép fel. Ezt onnan is láthatjuk, hogy a zárójelben lévő keresztszorzat merőleges az $\boldsymbol{\omega}$ -ra, a $\boldsymbol{\Theta}_S \boldsymbol{\omega}$ vektor pedig párhuzamos vele. Így a kettő skalár szorzata nulla lesz.

Továbbá a negyedik tagban csak az $\boldsymbol{\omega}$ és annak vektorhossza szerepelteti a kvázisebességeket. Ez azért fontos, mert szemben a másik három tagban szereplő $\boldsymbol{\varepsilon}$ és $\mathbf{a}_S$ mennyiségekkel, az $\boldsymbol{\omega}$ -ban nem szerepelnek a kvázisebességek deriváltjai. A (4.1.2) egyenletben pedig bemutattuk, hogy a következő lépés a gyorsulási energia parciális deriválása lesz, pont a negyedik tagból hiányzó kvázisebesség deriváltak szerint.

Az előbbi két gondolatmenet következménye, hogy jelen példánkban a gyorsulási energia első két tagját kell csak figyelembe vennünk.

Ezen a ponton újabb lehetőség adódik kihasználni a vizsgált test gömbszimmetriáját, hiszen kiemelve a $\boldsymbol{\Theta}_S$ mátrix konstansát a második tagból, a szöggyorsulás négyzetét leíró kifejezést kapunk. Mindezeknek megfelelően a gyorsulási energiát az alábbi képlettel számíthatjuk.

$$S = \frac{1}{2} m \mathbf{a}_S^2 + \frac{1}{2} C m \rho^2 \boldsymbol{\varepsilon}^2 \quad (4.1.2.2)$$

Ehhez meg kell határoznunk az $\boldsymbol{\varepsilon}$ és $\mathbf{a}_S$ vektorokat.

A 2.2 fejezetben foglaltaknak megfelelően áttérünk az $R\beta$ -ra, mivel a három kinematikai feltételből itt esik ki a „fölsleges tag”.

A szöggyorsulást a szögsebesség deriváltjaként fogjuk előállítani. A művelet közben figyelni kell a forgó koordináta-rendszerben történő deriválás szabályaira is.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{R\beta} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{R\beta} + \boldsymbol{\omega}_{KR} \times \boldsymbol{\omega}_{R\beta} = \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_1 + \frac{R\sigma_2\sigma_3}{R'} \\ \dot{\sigma}_2 + \sigma_1\sigma_3 + \frac{\sigma_3(\rho\sigma_3\sin(\beta) - R\sigma_1)}{R'} \\ \dot{\sigma}_3 - \sigma_1\sigma_2 - \frac{\rho\sigma_2\sigma_3\sin(\beta)}{R'} \end{bmatrix} \quad (4.1.2.3)$$

Ahol $\boldsymbol{\omega}_{KR}$ az $R\beta$ koordináta-rendszer szögsebessége az R_0 -hoz képest.

$$\boldsymbol{\omega}_{KR} = \mathbf{M}_{\beta}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.1.2.4)$$

Rendelkezésünkre állt a súlypont helyvektora az $R\beta$ -ban felírva a korábbi számításokból, ezért a súlyponti gyorsulást két deriválással határoztuk meg.

$$\mathbf{r}_{S,R\beta} = \begin{bmatrix} R' \\ 0 \\ R * \sin(\beta) \end{bmatrix} \quad (4.1.2.5)$$

$$\mathbf{v}_{S,R\beta} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho\sigma_3 \\ -\rho\sigma_2 \end{bmatrix} \quad (4.1.2.6)$$

$$\mathbf{a}_{S,R\beta} = \rho * \begin{bmatrix} -\sigma_2^2 - \sigma_3^2 + \frac{R\rho\sigma_3^2}{R'} \\ \dot{\sigma}_3 - \frac{\rho\sigma_2\sigma_3\sin(\beta)}{R'} \\ -\dot{\sigma}_2 - \frac{\rho\sigma_3^2\sin(\beta)}{R'} \end{bmatrix} \quad (4.1.2.7)$$

A (4.1.2.3) és (4.1.2.7) egyenletek segítségével minden a rendelkezésünkre áll ahhoz, hogy felírjuk a gyorsulási energiát. Mivel azonban a képletbe csak behelyettesíteni kell, az eredményeket itt nem részletezzük, inkább eggyel továbblépünk, és meghatározzuk az Appell - egyenletekből hiányzó utolsó tagot.

4.1.3 Kvázierők

A Lagrange – egyenletek felírásának egyik lépése a külső erők teljesítményének meghatározása az általános koordináták függvényében, majd a kapott kifejezés felbontása az általános sebességek és az általános erő skaláris szorzatára. [1] Ennek segítségével tudjuk figyelembe venni a külső erők hatását a vizsgált rendszerre. Az Appell – egyenletek alkalmazásakor szintén ezt kell tenni, az egyetlen különbség, hogy mindezt a kvázisebességek terében. Ehhez első lépésként meghatározzuk a külső erők teljesítményét az általános koordináták segítségével, majd a (4.1.2) egyenlettel összhangban átírjuk azokat.

A tapadási pontban működő reakcióerőt tökéletes kényszerként modelleztük, melyről definíció szerint elmondható, hogy teljesítménye zérus. Ezen kívül egy erőt veszünk

figyelembe, a gravitációt, az általa kifejtett teljesítménnyel, amit a rövidebb leírás érdekében az $R0$ -ban írunk fel. (A teljesség kedvéért jegyezzük meg, hogy a teljesítmény koordináta-rendszer független mennyiség)

$$\begin{aligned} P_g &= \mathbf{G} * \mathbf{v}_{S,R0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix}^T * \begin{bmatrix} X \\ X \\ -\rho * \cos(\beta) \dot{\beta} \end{bmatrix} = g m \rho * \cos(\beta) \dot{\beta} = \\ &= g m \rho * \cos(\beta) \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ g m \rho * \cos(\beta) \\ 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \mathbf{\Pi} * \boldsymbol{\sigma} \end{aligned} \quad (4.1.3.1)$$

A kvázisebességek együttható mátrixának tagjait nevezzük kvázierőknek. Most már minden rendelkezésre áll az Appell – egyenletek felírásához.

4.2 Appell – egyenletek

A keresett összefüggések felírása mindezek után már csak türelem kérdése. A behelyettesítések után elvégeztük a deriválásokat, így kiadódott három, elsőrendű közönséges differenciálegyenlet.

$$C m \rho \left(\dot{\sigma}_1 + \frac{R \sigma_2 \sigma_3}{R'} \right) = 0 \quad (4.2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{m \rho^2 \left(\rho \left((1 + C) \dot{\sigma}_2 + C \sigma_1 \sigma_3 \right) \cos(\beta) + (1 + C) \left(\dot{\sigma}_2 R + \rho \sigma_3^2 * \sin(\beta) \right) \right)}{R'} &= \\ &= g m \rho * \cos(\beta) \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

$$m \rho^2 \left((1 + C) \dot{\sigma}_3 - C \sigma_1 \sigma_3 - \frac{(1 + C) \rho \sigma_2 \sigma_3 \sin(\beta)}{R'} \right) = 0 \quad (4.2.3)$$

Ezekből a kvázisebességek deriváltjaira vonatkozó egyenletek algebrai úton analitikusan meghatározhatóak. Ezek mellé állítva az (4.1.1.5) egyenlet öt komponensét rendelkezésünkre áll a rendszert leíró nyolc darab egyenlet.

$$\dot{\sigma}_1 = -\frac{R\sigma_2\sigma_3}{R + \rho * \cos(\beta)} \quad (4.2.4)$$

$$\dot{\sigma}_2 = \frac{\cos(\beta)(Rg - C\rho^2\sigma_1\sigma_3 + g\rho * \cos(\beta)) - \rho^2(1 + C)\sigma_3^2\sin(\beta)}{(R + \rho * \cos(\beta))(1 + C)\rho} \quad (4.2.5)$$

$$\dot{\sigma}_3 = \sigma_2 \left(\frac{C\sigma_1}{1 + C} + \frac{\rho\sigma_3 * \sin(\beta)}{R + \rho * \cos(\beta)} \right) \quad (4.2.6)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{\rho\sigma_3}{R + \rho * \cos(\beta)} \quad (4.2.7)$$

$$\dot{\beta} = \sigma_2 \quad (4.2.8)$$

$$\dot{\psi} = (\cos(\beta)\tan(\vartheta)\cos(\alpha - \psi) - \sin(\beta))\sigma_1 - \tan(\vartheta)\sin(\alpha - \psi)\sigma_2 + (\cos(\beta) + \cos(\alpha - \psi)\sin(\beta)\tan(\vartheta))\sigma_3 \quad (4.2.9)$$

$$\dot{\vartheta} = \cos(\beta)\sin(\alpha - \psi)\sigma_1 + \cos(\alpha - \psi)\sigma_2 + \sin(\beta)\sin(\alpha - \psi)\sigma_3 \quad (4.2.10)$$

$$\dot{\phi} = \cos(\beta)\cos(\alpha - \psi)\sec(\vartheta)\sigma_1 - \sec(\vartheta)\sin(\alpha - \psi)\sigma_2 + \sin(\beta)\sec(\vartheta)\cos(\alpha - \psi)\sigma_3 \quad (4.2.11)$$

5. Mozgásegyenletek meghatározása a Dinamika alapegyenletével

Amikor idáig elérkeztünk a számításokban, úgy döntöttünk, hogy levezetjük a (4.2.4-4.2.6) egyenleteket a Newton módszer segítségével is. A két fő ok, ami indokolja döntésünket a következő.

Először is azzal, hogy újra meghatározzuk ezeket az egyenleteket, ellenőrizzük azon számításaink helyességét, melyeket a 4.1.2 fejezettől a 4.2 fejezetig bezárólag ismertettünk.

Másrészről ahhoz, hogy elvégezhessük a labda leesés vagy megcsúszás vizsgálatát, szükség van a talppontbeli reakcióerő nagyságának ismeretére.

A Newton – egyenleteket is az $R\beta$ -ban fogjuk felírni a súlypontra. Ehhez ismeretlennek felvesszük a kényszererő komponenseit.

$$\mathbf{F}_K = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Ezután felírható a súlypontra ható nyomaték.

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_{TS} \times \mathbf{F}_K = \begin{bmatrix} -\rho \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ F_z \\ -F_y \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Valamint az impulzus derivált nyomatéka.

$$D_S = \Theta_S * \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times (\Theta_S * \boldsymbol{\omega}) = C m \rho^2 * \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.3)$$

Ahogy korábban is felhasználtuk a Θ_S mátrix gömbszimmetrikus jellegét, úgy most is szeretnénk hangsúlyozni, hogy a második tagban két párhuzamos vektor keresztszorzata szerepel, ezért ez egyenlő egy nullvektorral. $\boldsymbol{\varepsilon}$ kifejtett alakját a 4.1.2 fejezetben ismertettük.

Ekkor felírhatjuk a Newton egyenleteket a súlypontra.

$$[\dot{\mathbf{I}}, \mathbf{D}_A]_A = [\mathbf{F}, \mathbf{M}_A]_A \quad (5.4)$$

$$m\rho * \begin{bmatrix} -\sigma_2^2 - \sigma_3^2 + \frac{R\rho\sigma_3^2}{R'} \\ \dot{\sigma}_3 - \frac{\rho\sigma_2\sigma_3\sin(\beta)}{R'} \\ -\dot{\sigma}_2 - \frac{\rho\sigma_3^2\sin(\beta)}{R'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$C m \rho^2 * \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_1 + \frac{R\sigma_2\sigma_3}{R'} \\ \dot{\sigma}_2 + \sigma_1\sigma_3 + \frac{\sigma_3(\rho\sigma_3\sin(\beta) - R\sigma_1)}{R'} \\ \dot{\sigma}_3 - \sigma_1\sigma_2 - \frac{\rho\sigma_2\sigma_3\sin(\beta)}{R'} \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ F_z \\ -F_y \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

A (5.5) és (5.6) egyenletek algebrai rendezése után megkaptuk a kvázisebességekre vonatkozó összefüggéseket, melyek megegyeztek a 4.2 fejezetben meghatározottal.

$$\dot{\sigma}_1 = -\frac{R\sigma_2\sigma_3}{R + \rho * \cos(\beta)} \quad (5.7)$$

$$\dot{\sigma}_2 = \frac{\cos(\beta)(Rg - C\rho^2\sigma_1\sigma_3 + g\rho * \cos(\beta)) - \rho^2(1 + C)\sigma_3^2\sin(\beta)}{(R + \rho * \cos(\beta))(1 + C)\rho} \quad (5.8)$$

$$\dot{\sigma}_3 = \sigma_2 \left(\frac{C\sigma_1}{1 + C} + \frac{\rho\sigma_3 * \sin(\beta)}{R + \rho * \cos(\beta)} \right) \quad (5.9)$$

Valamint megkaptuk a reakcióerő komponenseire vonatkozó egyenleteket is.

$$F_x = m * \left(\frac{R\rho\sigma_3^2}{R + \rho * \cos(\beta)} - \rho(\sigma_2^2 + \sigma_3^2) - g * \sin(\beta) \right) \quad (5.10)$$

$$F_y = \frac{Cm\rho\sigma_1\sigma_2}{1 + C} \quad (5.11)$$

$$F_z = \frac{Cm * \cos(\beta) (gR + \rho^2\sigma_1\sigma_3 + g\rho * \cos(\beta))}{(1 + C)(R + \rho * \cos(\beta))} \quad (5.12)$$

Ezen a ponton már érdemes behelyettesíteni a C paraméter határértékeit, egyszerűsíteni azonban csak egy konstans szorzóval tudunk, ezért az új egyenleteket külön nem közöljük.

6. Stabilitásvizsgálat

Mielőtt elkezdénénk a stabilitásvizsgálatot, érdemes egy pillantást vetni a (4.2.4-4.2.11) egyenletrendszerre. A kvázisebességeket meghatározó (4.2.4-4.2.6) tagok csak a σ -tól és a β -tól függnak, ezért ezeket és a (4.2.8) egyenletet külön lehet választani a többitől. Ebben a fejezetben ezeknek a változóknak a viselkedésével foglalkozunk.

A másik négy ismeretlen meghatározható, ha a kvázisebességek és a β már ismert, azonban ezek úgynevezett ciklikus koordináták. Az ilyen tagok megjelenése a rendszer szimmetriájára utal, az Euler-szögek esetében a labda gömbszimmetriájára, az α esetében pedig a gyűrű forgásszimmetriájára. Mostani vizsgálataink szempontjából viselkedésük érdektelen, ezért az Euler-szögeket és az α -t meghatározó egyenleteket leválasztjuk, és csak a maradék négy koordinátát vizsgáljuk.

6.1 Egyensúlyi helyek keresése

A stabilitásvizsgálatot linearizálással fogjuk elvégezni. Ehhez meg kell határoznunk azokat az egyensúlyi helyeket, ahol vizsgálni akarjuk a labda viselkedését.

Ezek az egyensúlyi helyek olyan állapotok, melyek a négy dimenziós fázistérben konstansok, mi azonban sebességeket írtunk le a koordinátákkal, ezért végeredményben állandó sebességű mozgásokat fognak meghatározni.

Ha viszont figyelembe vesszük az előbb „elhanyagolt” négy koordinátát is, akkor a vizsgált nyolc dimenziós fázistérben már nem lesznek egyensúlyi helyzetek, mert az Euler-szögek és az α változhatnak.

A

$$\dot{\sigma}_i = f(\sigma_i, \beta) \quad i = 1, 2, 3 \quad (6.1.1)$$

$$\dot{\beta} = f(\sigma_i, \beta) \quad (6.1.2)$$

egyenletrendszernek pontosan ott van egyensúlyi helyzete, ahol a

$$\dot{\sigma}_i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (6.1.3)$$

$$\dot{\beta} = 0 \quad (6.1.4)$$

feltételek teljesülnek. [3] Vagyis keressük az ezekhez az állapotokhoz tartozó konstans megoldásokat.

Ezzel első ránézésre egy négy ismeretlenes, négy egyenletből álló egyenletrendszert kaptunk, ám egy kicsivel tovább vizsgálódva kiderül, hogy a helyzet ennyire nem egyszerű. Első lépésként érdemes a (6.1.4) feltételt megvizsgálni.

$$\dot{\beta} = \sigma_2 = 0 \quad (6.1.5)$$

Vagyis egy egyenletünk és egy ismeretlenünk ki is esett. Ennek azonban közvetlen következménye, hogy a $\dot{\sigma}_1$ és $\dot{\sigma}_3$ kvázisebesség deriváltakra vonatkozó feltételek automatikusan teljesülnek, mivel a (4.2.4) és (4.2.6) egyenletek tanulsága szerint ezek egyenes arányosságban állnak a σ_2 -vel. A $\dot{\sigma}_2$ viszont teljesen független tőle.

Ez alapján kimondható, hogy egyensúlyi mozgás csak akkor jöhet létre, ha a gömb szögsebességének X^β és Z^β irányába mutató komponense, más szavakkal a „perdülő” és a „keringő” mozgás állandó nagyságú, áteső mozgás pedig egyáltalán nincs.

Ezután nincs más dolgunk, mint a (4.2.5) egyenleten keresztül a $\dot{\sigma}_2$ -ra is érvényesíteni az egyensúlyi feltételt.

$$\dot{\sigma}_2 = \frac{\cos(\beta)(Rg - C\rho^2\sigma_1\sigma_3 + g\rho * \cos(\beta)) - \rho^2(1 + C)\sigma_3^2\sin(\beta)}{(R + \rho * \cos(\beta))(1 + C)\rho} = 0 \quad (6.1.6)$$

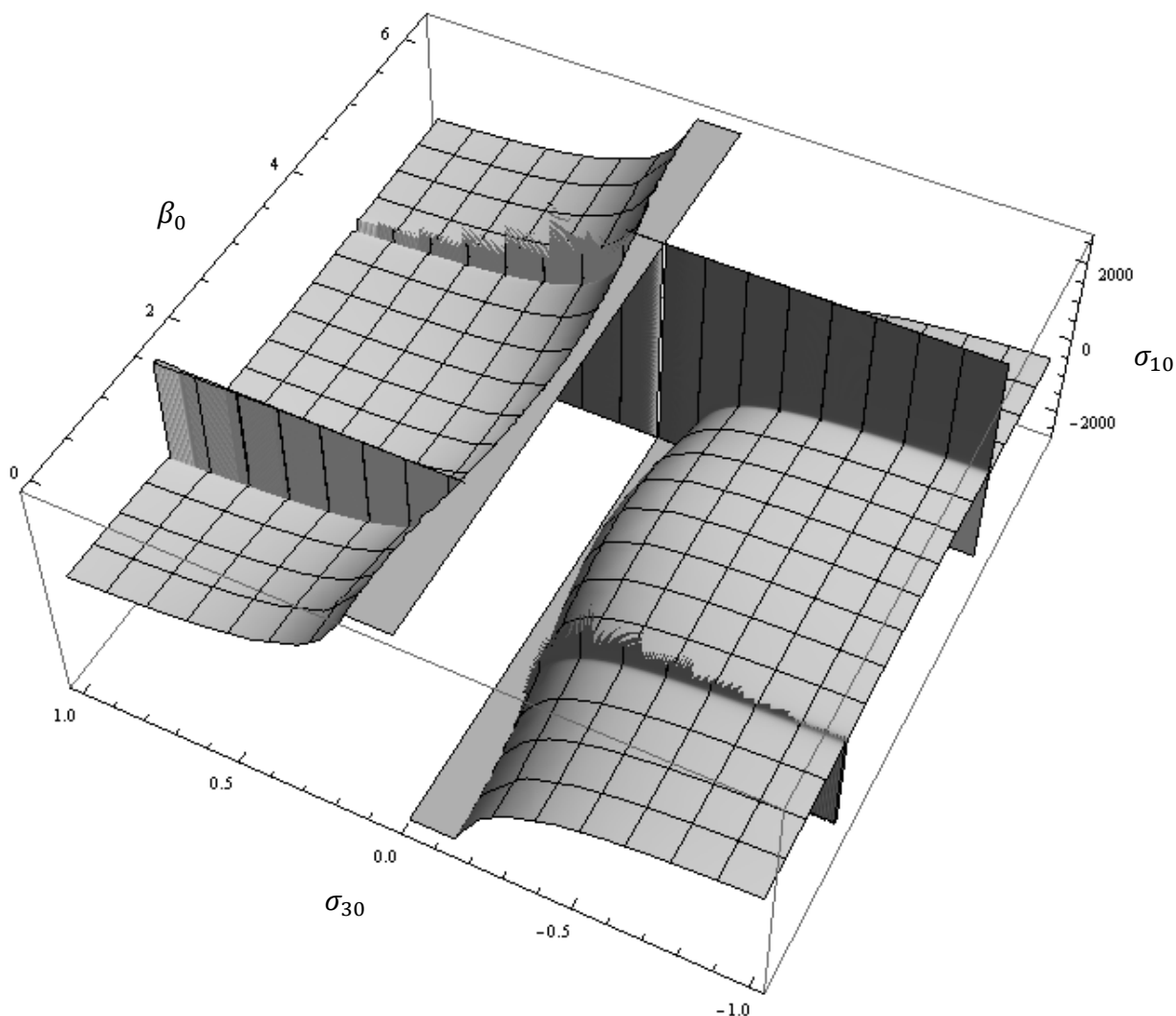
Végeredményként tehát eredeti várakozásainkkal ellentétben egy egyenletet kaptunk három ismeretlennel. Ebből kifejezhetőek az egyensúlyi helyzetek koordinátái egymásból, legkönnyebben a σ_{10} .

$$\sigma_{10} = \frac{g(R + \rho * \cos(\beta)) - \rho^2(1 + C)\sigma_{30}^2 * tg(\beta)}{C\rho^2\sigma_{30}} \quad (6.1.7)$$

A függvény grafikonját a 4. ábra szemlélteti. Az alkalmazott paraméterek konkrét értékét a FIBA előírásainak megfelelően az első táblázat tartalmazza [5]. Minden további ábra eszerint készült.

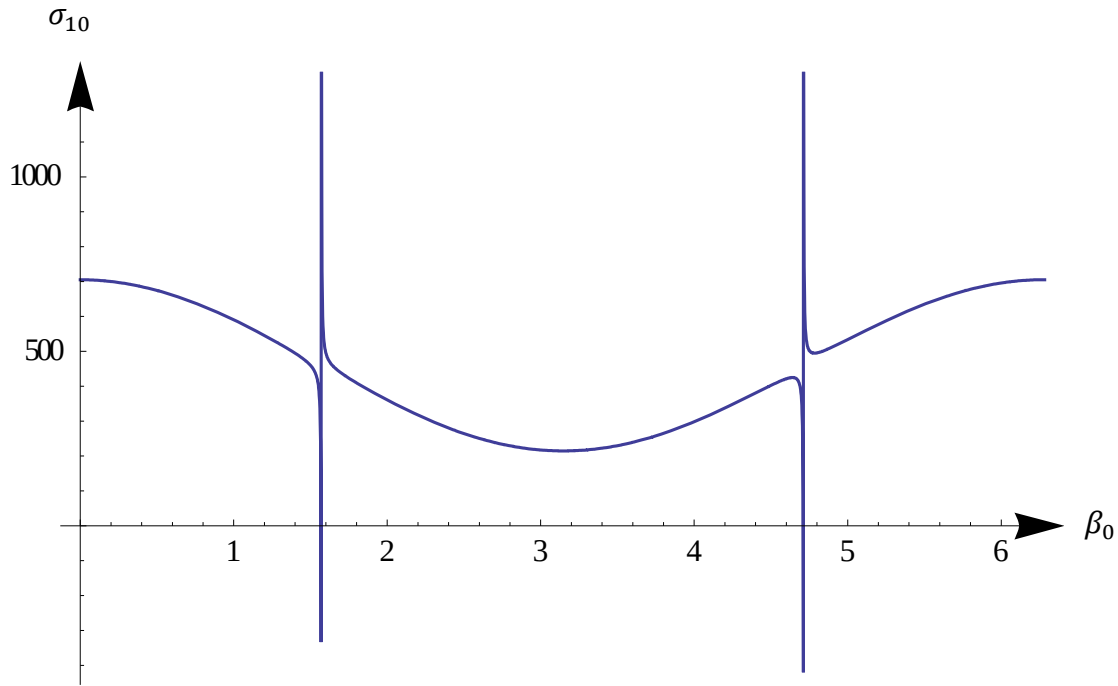
Megnevezés	Jelölés	Érték
Labda tömege	m	0,6 [kg]
Labda sugara	ρ	0,12 [m]
Gyűrű sugara	R	0,225 [m]
Nehézségi gyorsulás	g	9,81 $\left[\frac{m}{s^2}\right]$
Tehetetlenségi nyomatéki mátrixból kiemelt konstans	C	$\frac{2}{3}$ [1]

1. táblázat: az ábrák paramétereinek értékei



4. ábra: σ_{10} nagysága σ_{30} és β_0 függvényében.

Érdeemes megfigyelni, hogy a $\sigma_{30} = 0$ egyenes környezetében a „perdülő” mozgás nagysága meredeken emelkedik, úgyhogy ezek a pontok hiába stabilak elméletileg, a gyakorlatban kevésbé kivitelezhetőek. Ezért ezeket a területeket ki fogjuk hagyni az eredmények összegzésénél. Hogy szemléltessük a függvény viselkedését, bemutatjuk σ_{10} értékét egy metszetben az 5. ábrán.



5. ábra: σ_{10} nagysága β_0 függvényében $\sigma_{30} = 0,5 [SI]$ értéknél.

A σ_{10} meredek emelkedése a $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$ és $\beta_0 = \frac{3\pi}{2}$ metszeteknél is tapasztalható (alsó és felső holtpont, lásd: 1/b ábra). A viselkedés magyarázata, hogy adott σ_{30} esetén az új egyenlet

$$\sigma_{10} = c_1 + c_2 * \cos(\beta_0) - c_3 * \tan(\beta_0) \quad (6.1.8)$$

alakú. Azonban a c_3 kitevő nagyságrendekkel kisebb a másik kettőnél, ezért a harmadik tag csak ott jelentkezik számottevően, ahol a tangens függvény végtelenhez közelít. Ezért a továbbiakban ezeket a területeket sem fogjuk figyelembe venni.

Továbbá az 5. ábráról az is kiderül, hogy a β_0 nevezetes értékeinél is előjel váltás történik, ahogy az a σ_{30} esetében a 4. ábrán látszik. Emiatt feltételezhető, hogy a labdát nem lehet majd átbillenteni két, az előjelváltás külön oldalán lévő egyensúlyi helyzet között.

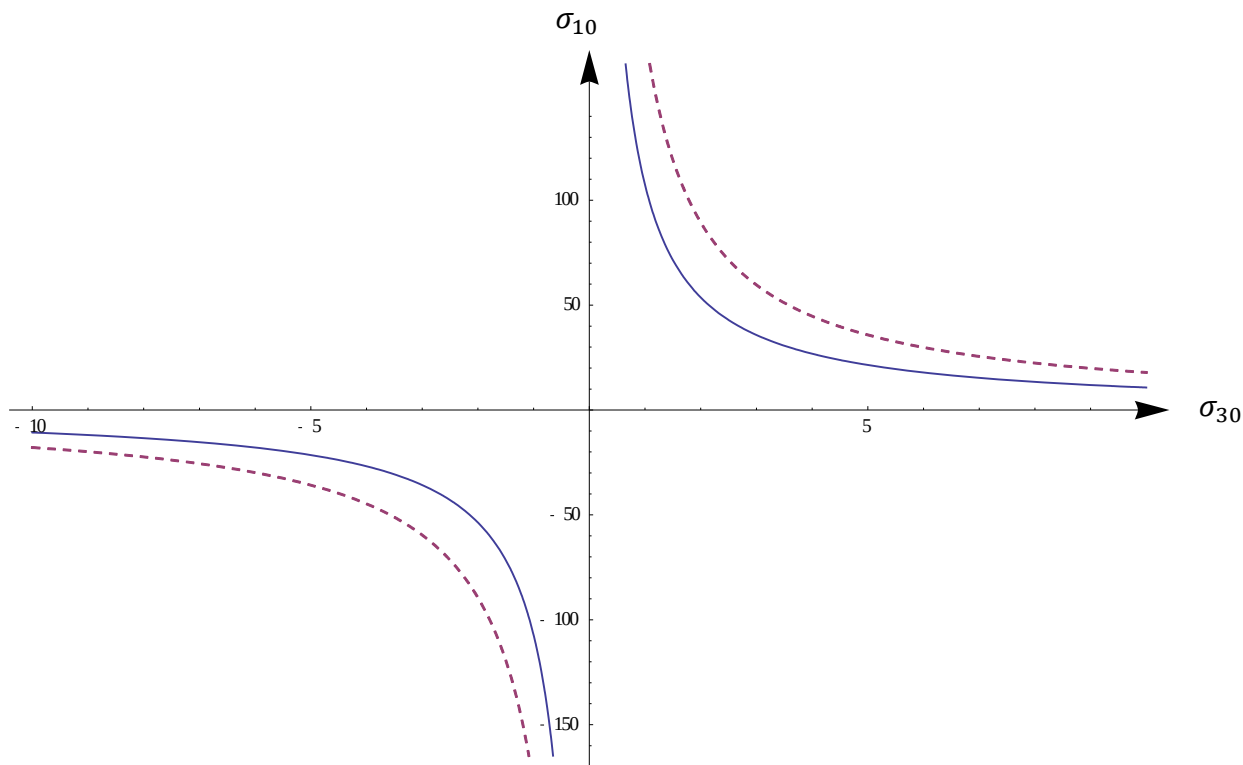
6.2 β_0 speciális értékei

Ezután megvizsgáltuk azokat a stabil mozgásokat, melyek a labdát a gyűrű külső és belső oldalán mozgatják.

A belső holtponthban β_0 értéke π (1/b ábra), amit behelyettesítve a (6.1.7) egyenletbe az alábbi adódik.

$$\sigma_{10} = \frac{g(R - \rho)}{C\rho^2\sigma_{30}} \quad (6.2.1)$$

Vagyis a 4. ábrán szemléltetett $\sigma_{10}(\sigma_{30}, \beta_0)$ függvény ezen metszete tiszta hiperbolikus jellegű. (Az átrendezések közben kihasználtuk, hogy $R \neq \rho$) A kapott kifejezés grafikonját a 6. ábra szemlélteti.



6. ábra: gyűrű belső holtpontján való gördüléshez tartozó egyensúlyi helyzetek lehetséges kezdeti feltételei. A folytonos vonal a gömbhéjra, a szaggatott a tömör gömbre vonatkozik.

Ez a gyakorlat szempontjából legérdekesebb eset. A 6. ábrán az látható, hogy minél gyorsabban gördül körbe a labda a gyűrűn (σ_{30}), annál lassabban kell „pördülnie” (σ_{10}) ahhoz, hogy mozgása stabil maradjon.

Kiszámolhatjuk az F_x erőkomponens értékét ugyan ebben a pontban, így el tudjuk dönteni, hogy az adott mozgás létezik-e, vagy sem. Ehhez eredményeinket behelyettesítjük az (5.10) egyenletbe.

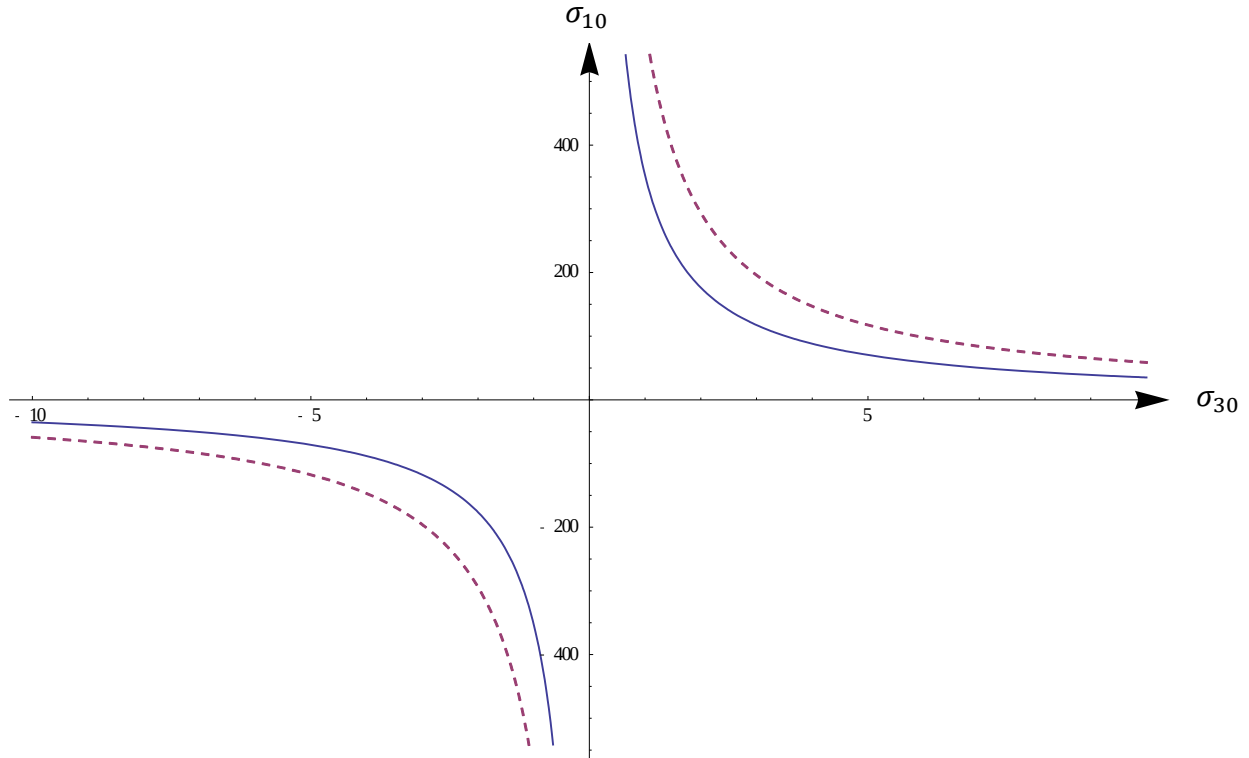
$$F_{x(\beta_0=\pi)} = \frac{m\rho^2}{R-\rho} \sigma_{30}^2 \quad (6.2.2)$$

Látható, hogy a kényszererő előjelét csak a geometria határozza meg, mivel azonban az $R > \rho$ egyenlőtlenség minden esetben fennáll, ezért csak pozitív lehet, vagyis ez a mozgás mindenképp létezik.

Azonban ha nem ragaszkodunk a kosárlabda példájához, és képzeletben egy gyűrűt beleteszünk egy gömb belsejébe, akkor az előbbi egyenlőség nem teljesül. Ekkor a reakcióerő negatív. Viszont azáltal, hogy a gyűrűt a labda belsejébe képzeljük, valójában megfordítottuk a két felületet, ezért a kényszererő is előjelet vált. Ekkor az eredmény egy olyan mozgás lesz, amit úgy lehet szemléltetni, mintha a gyűrű „hullahopp karikázna” a gömbbel.

A (6.2.1) egyenlethez hasonló összefüggés adódik a kosár külső oldalán történő egyensúlyi mozgás vizsgálatakor. β_0 ekkor egyelő nullával (1/b ábra), σ_{10} pedig szintén hiperbolikusan függ σ_{30} -tól. A grafikonok a 7. ábrán láthatóak.

$$\sigma_{10} = \frac{g(R+\rho)}{C\rho^2\sigma_{30}} \quad (6.2.3)$$



7. ábra: gyűrű külső holtpontján való gördüléshez tartozó egyensúlyi helyzetek lehetséges kezdeti feltételei. A folytonos vonal a gömbhéjra, a szaggatott a tömör gömbre vonatkozik.

A kényszererő értéke ekkor csak negatív lehet, ilyen mozgás nem valósulhat meg.

$$F_{x(\beta_0=0)} = -\frac{m\rho^2}{R+\rho}\sigma_{30}^2 \quad (6.2.4)$$

6.3 Linearizálás

Ahogy azt a 6.1 fejezetben ígértük, nem elégszünk meg az egyensúlyi helyzetek felkutatásával. Ebben az alfejezetben bemutatjuk, hogyan döntöttük el az egyes esetekről, hogy stabil vagy instabil egyensúlyt írnak le.

Első lépésként linearizáljuk a négy differenciálegyenletet egy általános pont körül. Ekkor felírjuk a változókat

$$\sigma_i = \sigma_{ik} + \sigma_{i0} \quad i = 1, 2, 3 \quad (6.3.1)$$

$$\beta = \beta_k + \beta_0 \quad (6.3.2)$$

alakban, majd ezeket behelyettesítjük a (4.2.4-4.2.6) és (4.2.8) egyenletekbe. Ezután meghatározzuk az így kapott négy kifejezés elsőfokú Taylor – polinomját.

$$\begin{aligned} f(\sigma_{1k}, \sigma_{2k}, \sigma_{3k}, \beta_k) \cong & f(0,0,0,0) + \frac{\partial f(0,0,0,0)}{\partial \sigma_{1k}}(\sigma_{1k} - 0) + \frac{\partial f(.)}{\partial \sigma_{2k}}(\sigma_{2k} - 0) + \\ & + \frac{\partial f(.)}{\partial \sigma_{3k}}(\sigma_{3k} - 0) + \frac{\partial f(.)}{\partial \beta_k}(\beta_k - 0) \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

Az eredmény négy olyan kifejezés, amelyeket összerendezhetünk mátrixos alakba.

$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma}_{1k} \\ \dot{\sigma}_{2k} \\ \dot{\sigma}_{3k} \\ \dot{\beta}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{R}{R'}\sigma_{30} & 0 & 0 \\ -\frac{C\rho\sigma_{30} * \cos(\beta_0)}{(1+C)R'} & 0 & K_3 & K_4 \\ 0 & \frac{C\sigma_{10}}{1+C} + \frac{\rho\sigma_{30} * \sin(\beta_0)}{R'} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sigma_{1k} \\ \sigma_{2k} \\ \sigma_{3k} \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad (6.3.4)$$

(A K_3 és K_4 komponensek túl hosszúak ahhoz, kiírjuk őket.) A Routh-Hurwitz kritérium szerint az így módon jellemzett rendszer akkor stabil, ha a mátrix karakterisztikus polinomjára teljesül, hogy a

$$\lambda^4 + C_3\lambda^3 + C_2\lambda^2 + C_1\lambda + C_0 \quad (6.3.5)$$

alakban felírt polinom minden együtthatója pozitív, és minden Hurwitz – determináns pozitív.[3] A polinomot a (6.3.6) egyenletnek megfelelően kell kiszámítani.

A cél ezeknek a feltételeknek az érvényesítése. A rövidebb leírás érdekében a mátrix komponenseit átjelöljük.

$$\det[\mathbf{A} - \lambda * \mathbf{I}] = \det \begin{bmatrix} -\lambda & K1 & 0 & 0 \\ K2 & -\lambda & K3 & K4 \\ 0 & K5 & -\lambda & 0 \\ 0 & K6 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2(\lambda^2 - K_1K_2 - K_3K_5 - K_4K_6) \quad (6.3.6)$$

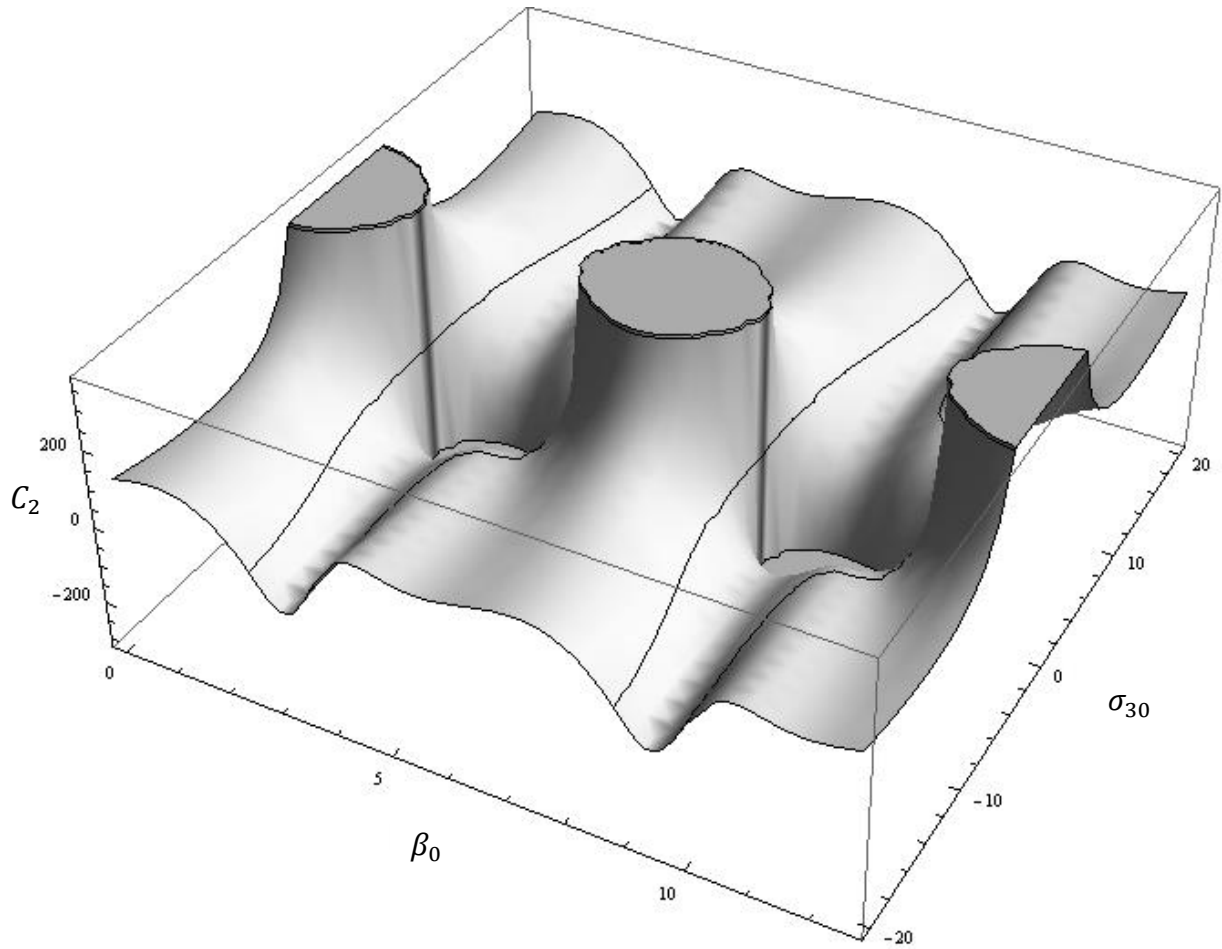
Ahol

- $\mathbf{A}$ a vizsgált mátrix
- $\mathbf{I}$ az egységmátrix

Ebből az egyenletből látható, hogy a C_2 kivételével minden tényező nulla, valamint hogy a karakterisztikus polinomból a kiemelés után egy másodfokú polinom marad, ezért a determinánsokat nem kell vizsgálni. Összességében csak egy feltételnek kell eleget tenniük a kezdeti értékeknek.

$$C_2 = -K_1K_2 - K_3K_5 - K_4K_6 > 0 \quad (6.3.7)$$

Szemléltetés gyanánt megrajzoltuk a $C_2(\sigma_{30}, \beta_0)$ függvény grafikonját a 8. ábrára.



8. ábra: a $C_2(\sigma_{30}, \beta_0)$ függvény grafikonja. A fekete görbén kívüli pontok stabil egyensúlyi helyzetekhez tartoznak.

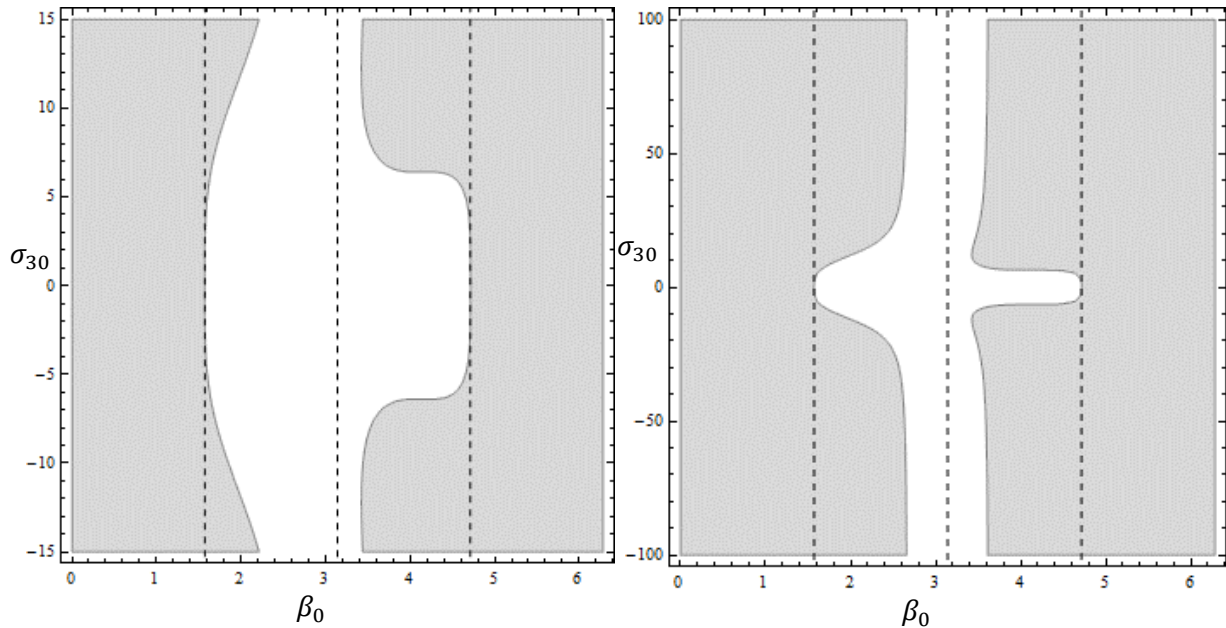
A vizsgálati tartományok:

$$\beta_0 \in [0, 4\pi] \quad (6.3.8)$$

$$\sigma_{30} \in [-20, 20] \quad (6.3.9)$$

$$C_2 \in (-\infty, \infty) \quad (6.3.10)$$

Az ábrán a fekete vonal jelzi a nullával egyenlő pontokat. A görbén kívüli területen a feltétel teljesül, ezért ezek stabil egyensúlyi helyzetek. Mivel a lényeges információ a $C_2 = 0$ síkban van, ezért ezt a metszetet külön is megjelenítjük a 9. ábrán.



9. ábra: a (6.3.7) feltétel teljesülésének vizsgálata. A szürke terület pontjai stabil egyensúlyi helyzetet jelölnek.

A szaggatott vonalak a $\beta_0 = \left\{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$ pozíciókban vannak.

Érdeemes külön – külön is megvizsgálni az alacsony és magas „keringési” sebességű eseteket.

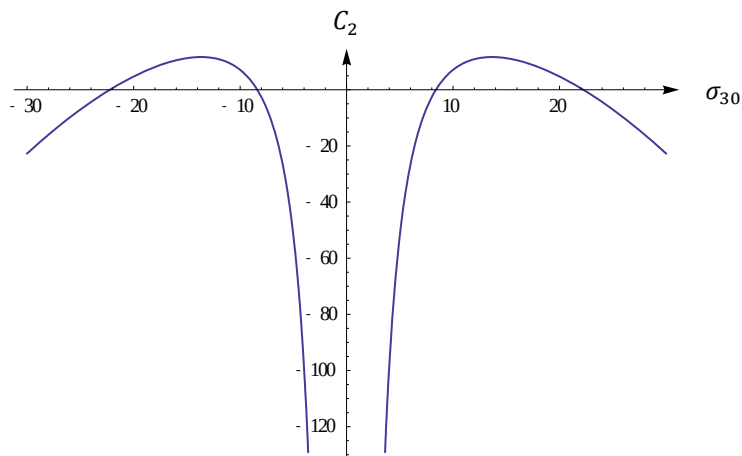
Előbbinél a II és III sík negyedben csak instabil mozgás lehetséges, azonban ahogy növeljük a „keringési” sebességet, bizonyos tartományok „stabilizálódnak”. Továbbá olyan β_0 értékek is vannak, amik újra instabillá válnak, mint például a $\beta_0 = 3,5$ [rad]. Erre mutat példát a 10. ábra.

Ahogy növeljük a σ_{30} -t, a $C_2 = 0$ -hoz tartozó értékek konvergálnak. Az a sáv, ami a végtelenben instabil marad valahol

$$\beta_0 \in [2.6657, 3.6174] \quad (6.3.11)$$

körül van.

Az I és a IV sík negyed mindenképp stabil.



10. ábra: C_2 előjelének változása $\beta_0 = 3,5$ [rad] esetén

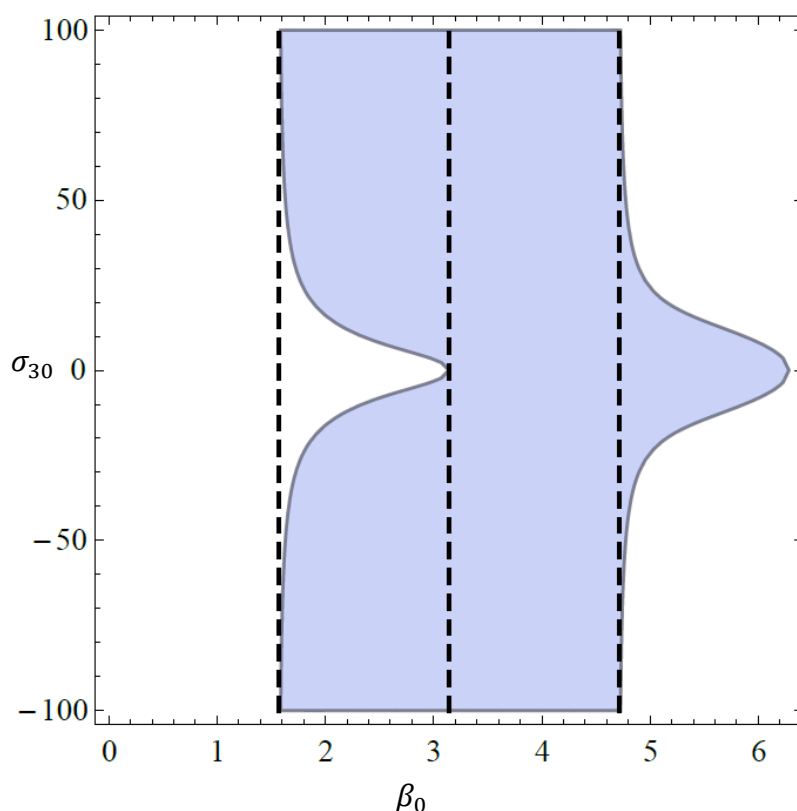
7. Leesés vizsgálat

A 6.2 fejezetben már megvizsgáltunk két speciális helyzetet aszerint, hogy az ébredő reakcióerő alapján kivitelezhető-e a mozgásuk. Ebben a fejezetben általánosítjuk ezt a vizsgálatot.

Ehhez át kell rendeznünk az (5.10) egyenletet, majd megfigyelni, hogy milyen kezdeti feltétel esetén milyen előjelet vesz fel az eredmény. Az új feltétel az alábbi alakot ölti.

$$-\frac{\rho^2 * \cos(\beta_0)}{R + \rho * \cos(\beta_0)} \sigma_{30}^2 > g * \sin(\beta_0) \quad (7.1)$$

Megjegyezzük, hogy a jobb oldalon álló kifejezés a nehézségi erő X^β tengelyre merőleges komponense, vagyis az a tag, amelyik „lelőki” a labdát a gyűrűről. A 11. ábrán besatíroztuk azokat a pontokat, melyek eleget tesznek a feltételnek.



11. ábra: a leesés vizsgálat eredménye. A sötét területen található kezdeti feltételek megvalósulhatnak a reakcióerő szerint vizsgálva.

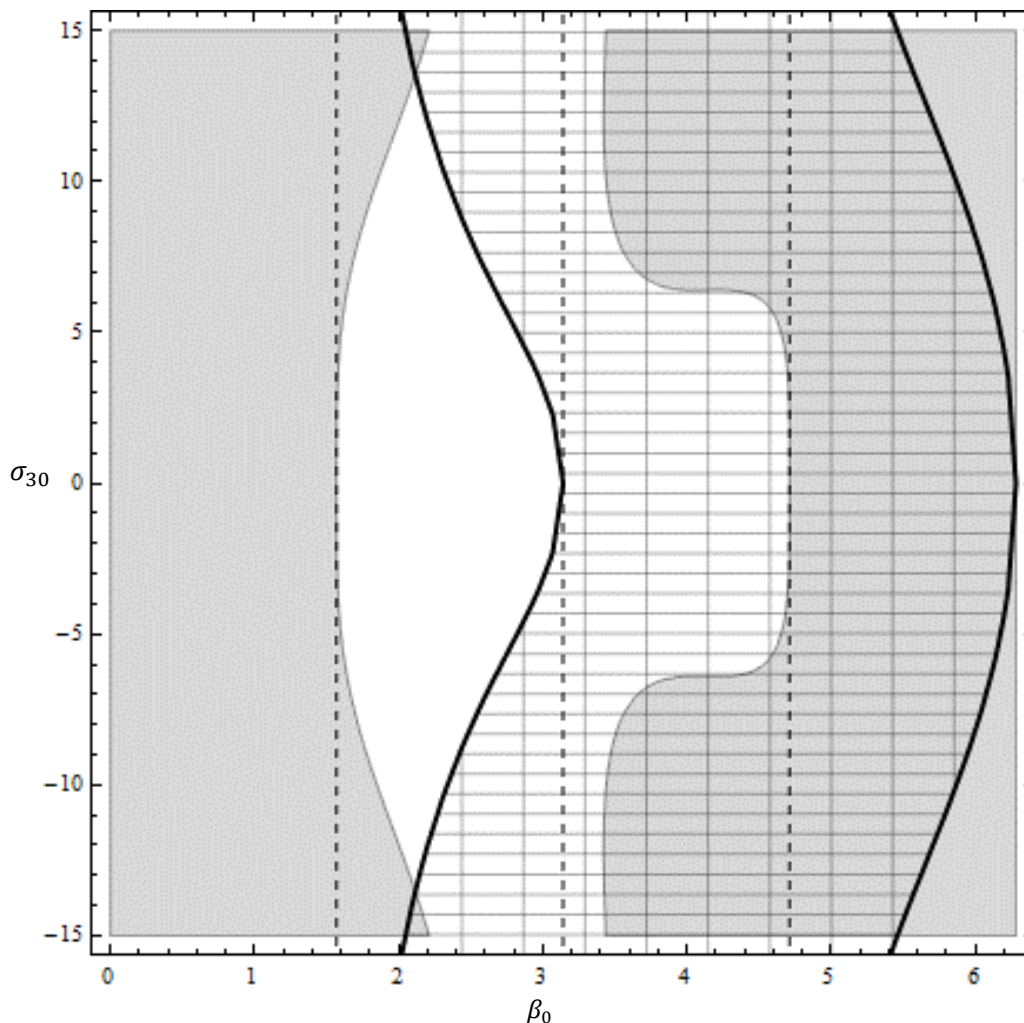
Itt is röviden elemezzük az ábra jellegzetes tartományait.

Kis σ_{30} -nál leginkább a nehézségi erőből származik a kényszererő, ami akkor lesz pozitív, ha „ráhelyezzük” a labdát a gyűrűre. Itt a két szélsőérték az, amikor a labda a külső és a belső holtpontban van, vagyis az 1/b ábra értelmében ekkor $\beta = \{\pi, 2\pi\}$.

A másik esetben pedig a kényszererő egyre inkább a labdára ható centripetális erőből származik. Első ránézésre gondolhatnánk azt, hogy a II sík negyedben nem létezhet olyan eset, hogy a labda nem esik le, a 11. ábra tanulsága szerint azonban a „keringő” mozgás stabilizálhatja az itteni mozgásokat is. Ahhoz, hogy láthassuk, hogy ténylegesen mi történik

ilyenkor, további vizsgálatok szükségesek. Ahogy az a 11. ábráról leolvasható, ebben az esetben a szélsőértékek a felső és az alsó holtponthoz konvergálnak. $\beta = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

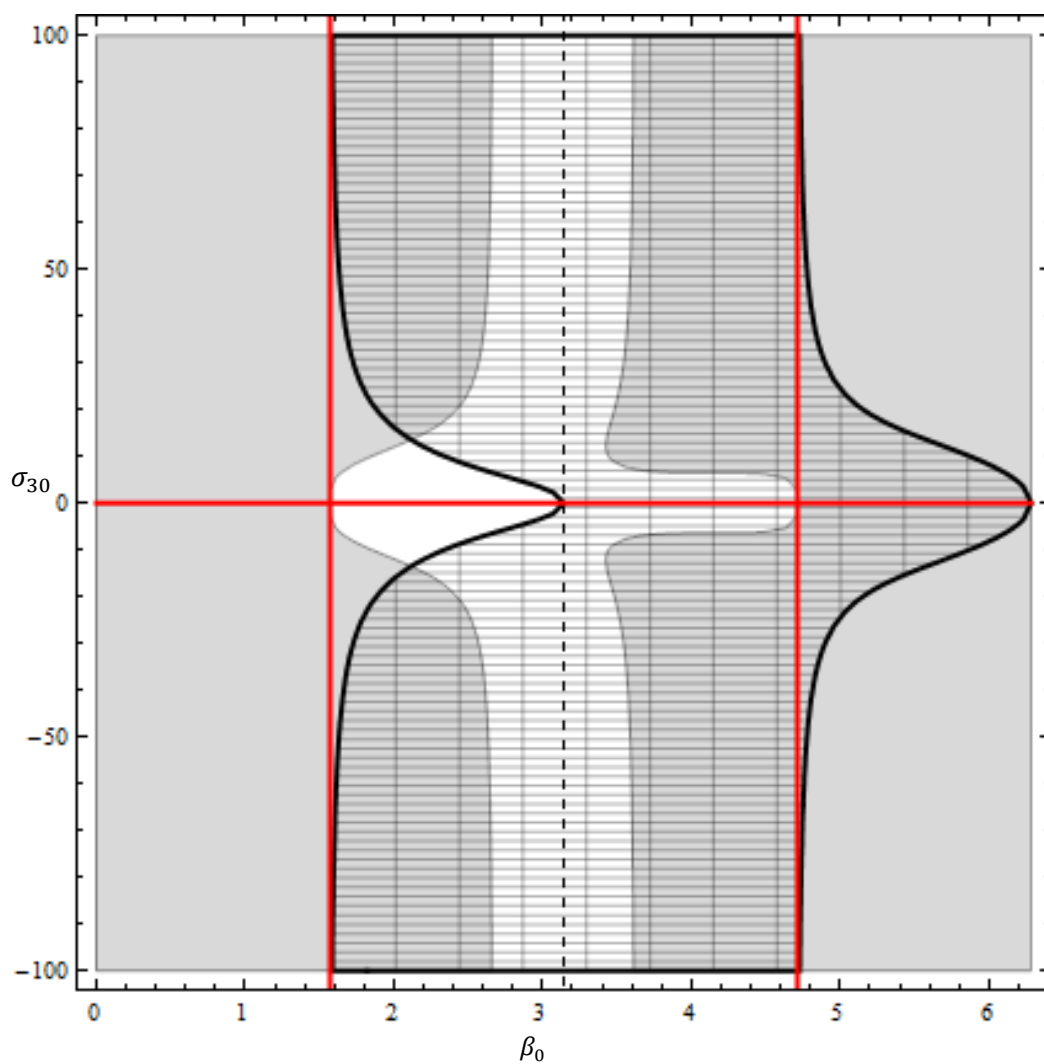
Ezután összegeztük a stabilitás és a leesés vizsgálat eredményeit a 12. ábrán. A franciakockás terület a reakcióerőre vonatkozó feltételt veszi figyelembe.



12. ábra: A stabilitás és a leesés vizsgálat eredményei. A négyzethálós területen a reakcióerő pozitív, ezért az ottani mozgások megvalósíthatóak, míg a sötétített területen a stabil egyensúlyi mozgások vannak.

Végezetül a 13. ábrára pirossal berajzoltuk azt a három esetet, amiről a 6.1 fejezetben beláttuk, hogy elméletileg léteznek, mégis kivitelezhetetlenek. Az ott megállapított három egyenes négy területre osztja a (σ_{30}, β_0) fázisteret, és ezek között a labda nem tud áthaladni, mert a σ_{10} -nak itt szakadása van. (A teljesség kedvéért jegyezzük meg, hogy minden kiszámolt eredményünk periodikus a β_0 -ra 2π szerint, ezért a két - két szélső terület összetartozik.)

A számunkra érdekes terület a $\beta \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ tartomány, ami az 1/b ábrának megfelelően a gyűrű belső oldala, ugyanis nagyrészt itt találhatók azok az esetek, amelyek minden feltételnek eleget tesznek, valamint itt figyelhető meg, ahogy a labdát stabilizálja a forgómozgás.



13. ábra: A stabilitás- és a leesés vizsgálat eredményei. A négyzethálós területen a reakcióerő pozitív, ezért az ottani mozgások megvalósíthatóak, míg a sötétített területen a stabil egyensúlyi mozgások vannak. A piros vonalak a nehezen kivitelezhető eseteket jelölik.

8. Összefoglalás

A legelső feladat, ami a dolgozat elkészüléséhez vezetett, mechanikai ismereteim alapos növelése volt. Utánanéztem a Routh – Voss egyenleteknek, a stabilitás vizsgálatoknak, majd pár héttel később az Appell – egyenleteknek is, és megoldottam olyan egyszerű síkbeli példákat az újonnan tanult módszerekkel, mint a roller és az érme gördülése síkban. Amikor már kezdtem átlátni, hogy mikor mit csinállok, és melyik változónak mi a szerepe, akkor elővettem a térben gördülő érme örök klasszikusát, és gömbszeletnek modellezve nekiveselkedtem újonnan szerzett legjobb tudásom szerint. Pár hétre rá megszülettek a mozgásegyenletek. Ez volt a döntő jel arra, hogy nekiveselkedhetek a kosárlabdának.

Miközben hosszas satírozások közepette eljutottam az egyenletek összeállításáig a Routh-Voss - módszerrel, úgy döntöttem, hogy ez zsákutca lesz. Az egyenletek nem fértek el egy fektetett A4-es lap két sorában. Úgyhogy mire eljutottam a kész mozgásegyenletekig az Appell-, majd a Newton - egyenletekkel, megint rengeteg új ismeretet szereztem, melyek döntő többsége a türelemről és bizonyos rózsákról szólt.

Innen már egyenes út vezetett a stabilitás- és a leesés vizsgálatig. Az eredmények megdöbbenetettek. Amikor belekezdtem az egész munkába, még nem sejtettem, hogy a természet ilyen elegánsan viselkedik.

Majd következett a munka legjava, a dokumentáció készítés. Megint csak sok meglepetés várt rám, és utólag elmondhatom, hogy még szívesen finomítanék az eredményen.

Végezetül szeretnék pár szót szólni a téma eddig lezáratlan kérdéseiről. A modelleket finomítva figyelembe vehetjük a súrlódást, a közegellenállást vagy egyéb légköri jelenségeket. A mozgásegyenletekkel a hátunk mögött felrajzolhatjuk a labda pályáját numerikus módszerekkel, valamint elvégezhetjük a megcsúszás vizsgálatot. A leesés vizsgálat alapján felírhatjuk a labda pályáját szabadesés közben, és kiszámíthatjuk, hogy mozgása során visszatér-e a gyűrűre. Esetleg figyelembe vehetjük a palánkot is. Nem utolsó sorban pedig hátra van az elért eredmények kísérleti igazolása is.

Ha módosítjuk a geometriát, és egy tórusz belsejében gördülő gömböt veszünk alappéldának, felírhatjuk a golyóscsapágyban üzem közben ébredő erőket, vagy a Rzeppa - féle tengelykapcsoló kinematikáját. Ha a gyűrűt függőlegesen „hullámoztatjuk”, akkor leírhatjuk azt az ügyességi játékot, amikor a kosarasok a karjukon körbe-körbe gurítják a labdát. És a lehetőségeknek határtalanok. Azt azonban elmondhatom, hogy sikerült leírni egy térbeli rendszer működését.

Köszönöm mindenkinek, aki hozzájárult ennek az eredménynek az eléréséhez.

9. Irodalomjegyzék

- [1] Béda Gy. – Stépán G.: Analitikus mechanika, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2000
- [2] F. Gantmacher: Lectures in Analytical Mechanics, MIR Publishers, 1975
- [3] Gyurkovics É.: Differenciálegyenletek és Numerikus Megoldásaik Mérnököknek egyetemi jegyzet, Budapest, 2013
- [4] Budó Á.: Mechanika, Tankönyv Kiadó, Budapest, 1990
- [5] 2014 Official Basketball Rules, FIBA Central Board, Barcelona, 2014

10. Tartalomjegyzék

1. Bevezető	2
2. Modellalkotás és leíró koordináták	3
2.1 Általános koordináták és vonatkoztatási rendszerek	3
2.2 A vonatkoztatási rendszerek jellemzése	7
3. A gördülési kényszer leírása	9
3.1 Gördülés	9
3.2 A kinematikai kényszer	9
4. Mozgásegyenletek meghatározása Appell – egyenletekkel	13
4.1 Appell – egyenletek komponensei	13
4.1.1 Kvázisebességek	13
4.1.2 Gyorsulási energia	15
4.1.3 Kvázierők	16
4.2 Appell – egyenletek	17
5. Mozgásegyenletek meghatározása a Dinamika alapegyenletével	19
6. Stabilitásvizsgálat	21
6.1 Egyensúlyi helyek keresése	21
6.2 β_0 speciális értékei	24
6.3 Linearizálás	26
7. Leesés vizsgálat	30
8. Összefoglalás	33
9. Irodalomjegyzék	34
10. Tartalomjegyzék	35