

Anyagnövekedés elméleti és numerikus elemzése

TDK dolgozat

Várnai Péter BSc IV. évf.

Témavezető:

Dr. Szabó László egyetemi tanár

**Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Műszaki Mechanikai Tanszék**

2014

TARTALOMJEGYZÉK

1. Bevezetés	1
1.1. Előszó	1
1.2. A tartalom rövid áttekintése	2
1.3. A dolgozatban használt jelölések	3
1.3.1. Fontosabb fizikai mennyiségek	3
1.3.2. Matematikai műveletek és operátorok	3
2. Szakirodalom áttekintése	5
2.1. A növekedés modellezésének fejlődése	5
2.2. Alkalmazási lehetőségek	7
3. Elméleti alapok összefoglalása	9
3.1. A kontinuummechanika alapjai	9
3.1.1. A mozgás kinematikája	9
3.1.2. Alakváltozási tenzorok	10
3.1.3. Feszültségtenzorok és egyensúlyi egyenlet	11
3.1.4. Hiperelasztikus anyagmodellek	11
3.2. Anyagnövekedés	13
3.2.1. A növekedés kinematikája	13
3.2.2. Növekedési szabadenergia függvény	15
3.2.3. Anyagmodellek	16
3.2.4. Növekedési folyamatok leírása	19
4. Végeselemes eljárás	21
4.1. Hu–Washizu-féle variációs elv	21
4.2. Newton–Raphson iteráció	23
4.3. Diszkretizáció	24

4.4.	A növekedés időbeli szimulációja	25
4.5.	Validáció	26
4.5.1.	Egytengelyű húzás	26
4.5.2.	Egyszerű nyírás	29
5.	A végelelemes program alkalmazása	33
5.1.	Rebarbara növekedése	33
6.	Összefoglalás	37
6.1.	Eredmények összegzése	37
A	Mellékletek	39
A1.	Rugalmas érintő tenzorok	39
A2.	A végelelemes algoritmus folyamatábrája	41
	IRODALOMJEGYZÉK	43

1. FEJEZET

Bevezetés

1.1. Előszó

A biológiai tudományok fejlődésével egyre nagyobb szerepet kap a növekedéssel kapcsolatos jelenségek tanulmányozása. A testben végbemenő növekedési folyamatok megismerése ugyanis nemcsak segít bizonyos betegségek kialakulási okainak a feltárásában, hanem lehetőséget teremt új kezelési eljárások kifejlesztésére is.

A különböző szövetek növekedését különböző növekedési mechanizmusok vezérlik, amelyek még napjainkig sincsenek teljes mértékben feltérképezve. Többek között megkülönböztethetünk térfogati, felületi, és vonalmenti növekedést, illetve ezeknek valamilyen kombinációját. A növekedés időbeli folyamatát pedig a test mechanikai és termikus állapota, illetve egyéb (pl. kémiai) tényezők befolyásolhatják. A szövetek viselkedését csak ezeknek a növekedési törvényeknek az ismeretében tudjuk megbízhatóan leírni.

A tudományág fejlődésében és eredményeinek gyakorlati alkalmazásában elengedhetetlen szerepet játszanak a növekedés modellezésére kifejlesztett végeselemes eljárások. Ezek egyrészt megkönnyítik a javasolt növekedési törvények tesztelését és helyességük ellenőrzését, másrészt pedig lehetővé teszik a gyakorlatban bonyolultabb geometriával rendelkező és általános terheléseknek kitett testek viselkedésének a kvantitatív elemzését. A jelen dolgozat fő célja a növekedés modellezésére szolgáló végeselemes módszerek elméletének megismerése, illetve ezek egyikének megvalósítása.

1.2. A tartalom rövid áttekintése

A dolgozatban a növekedési folyamatok modellezésének elméletét három fő fejezeten keresztül mutatjuk be.

A bevezetést követő második fejezetben, a *Szakirodalom áttekintése* során először megismerkedünk a növekedési folyamatok leírásának fejlődésével a kezdetektől egészen napjainkig, majd gyakorlatból vett példák segítségével rátérünk a tudományág eredményeinek alkalmazási lehetőségeire. A fejezet fő célja, hogy az olvasó egy átfogó képet kapjon a növekedés modellezésének történelmi háttéréről és mai állásáról.

A harmadik fejezet az *Elméleti alapok összefoglalása*, amelyben röviden felidézzük a legfontosabb kontinuummechanikai fogalmakat és összefüggéseket. Ezt követően részletesen bemutatjuk a lágyszövetek modellezésére használt alakváltozási gradiens szorzat alakú szétbontásának vagy másnéven multiplikatív dekompozíciónak az elvét, valamint a különböző növekedési típusokat és törvényeket. A jelen munkában megvalósított végelelemes program közel összenyomhatatlan anyagok modellezésére alkalmas; az őket leíró egyenleteket is ebben a fejezetben fejtjük ki.

Végül a negyedik fejezet során ismertetjük azokat a variációs elveket, amelyekkel felírhatjuk a test egyensúlyi alakjának meghatározásához szükséges egyenleteket, továbbá bemutatjuk az ezek megoldására szolgáló Newton–Raphson iterációt. Az elkészített végelelemes program helyességét egyszerű mintapéldákon keresztül validáljuk az analitikus megoldásokkal való összevetéssel.

A dolgozat végén egy botanikából vett jelenség reprodukálásával mutatjuk be a program egy alkalmazási lehetőségét.

1.3. A dolgozatban használt jelölések

1.3.1. Fontosabb fizikai mennyiségek

$\mathbf{F}$	Alakváltozási gradiens tenzor
J	Az alakváltozási gradiens Jacobi-determinánsa
$\mathbf{C}$	Jobb oldali Cauchy–Green-féle deformációs tenzor
$\mathbf{b}$	Bal oldali Cauchy–Green-féle deformációs tenzor
$\mathbf{E}$	Lagrange-féle alakváltozási tenzor
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Kis alakváltozások tenzora
$\mathbf{d}$	Alakváltozás-sebesség tenzor
$\mathbf{P}$	Első Piola–Kirchhoff-féle feszültségtenzor
$\mathbf{S}$	Második Piola–Kirchhoff-féle feszültségtenzor
$\boldsymbol{\sigma}$	Cauchy-féle feszültségtenzor
$\boldsymbol{\mathcal{C}}$	Lagrange-féle negyedrendű rugalmassági érintő tenzor
$\boldsymbol{\varsigma}$	Euler-féle negyedrendű rugalmassági érintő tenzor
Ψ	Szabadenergia függvény vagy rugalmas potenciál
μ, λ	Lamé paraméterek
p	Hidrosztatikai nyomás
κ	Térfogati rugalmassági modulusz
λ^g	Növekedési szorzó
α, σ_0	Növekedési törvény konstansai

1.3.2. Matematikai műveletek és operátorok

A dolgozat során általánosan a pillanatnyi konfigurációban értelmezett mennyiségeket kisbetűvel, míg a kezdeti konfigurációban értelmezett mennyiségeket nagybetűvel jelöljük. A vektorokat és mátrixokat vastag betűk, míg a negyedrendű tenzorokat kalligrafikus betűk jelzik.

A dolgozat során használt matematikai műveletek:

$\mathbf{A}^T$	Mátrix transzponáltja	$\text{tr}(\mathbf{A})$	Mátrix nyoma
$\mathbf{A}^{-1}$	Mátrix inverze	$\det(\mathbf{A})$	Mátrix determinánsa
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i$		$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_{ij} = A_{ik} B_{kj}$	
$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j$		$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij}$	
$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{ijkl} = A_{ij} B_{kl}$		$(\boldsymbol{\mathcal{C}} : \mathbf{A})_{ij} = \mathcal{C}_{ijkl} A_{kl}$	

A fontosabb matematikai operátorok:

$\text{grad}(), \nabla$	Gradiens
$\text{div}()$	Divergencia
$DX[u]$	Íránymenti derivált
$\Phi_*[], \Phi_*^{-1}[]$	<i>Push forward</i> és <i>pull back</i> transzformáció

2. FEJEZET

Szakirodalom áttekintése

2.1. A növekedés modellezésének fejlődése

A biológiai növekedés tanulmányozása a XX. század elején kezdődött elsősorban D’Arcy Thompson munkásságával. A tudományág alapművének tekinthető „On Growth and Form” című könyvében a növekedés alakra gyakorolt hatását vizsgálta meg részletesebben [25]. Bizonyos élőlények illetve részeik ugyanis a fejlődésük során jól definiált geometriával rendelkező alakot vesznek fel, és e folyamatok jellemzése megkövetelte az alakváltozásnak egy tudományos megközelítésű matematikai leírását. Eleinte tehát a növekedést egy makroszkopikus folyamatként vizsgálták. A sejtbiológia és a biokémia fejlődésével azonban elkezdett terjedni és napjainkra kialakult az a nézet, hogy a biológiai folyamatokat molekuláris kölcsönhatások vezérlik; ebből adódóan pedig a növekedés leírásában a hangsúly a sejtek szintjén történő tömegnövekedésre helyeződött át [2]. A növekedés modern kontinuummechanikájában mindkét felfogás — a növekedés mint alak-, illetve mint tömegbeli változás — fontos szerepet kap, és gyakran együtt van jelen. Kezdetekben azonban a kettő elmélete a kemény- és a lágy szövetek vizsgálatával külön úton fejlődött.

A növekedés sejt-szintű, tömegnövekedésbeli értelmezése keményszövetek (pl. csontok) tanulmányozásával kezdődött [19]. A keményszövetek az igénybevételük során általában csak kis mértékben deformálódnak, ezért leírásukhoz elegendő pontosságú egy lineáris kinematikai megfogalmazás. Az alakváltozás helyett így a szöveten belül lezajló, sűrűségváltozással járó tömegnövekedés kap elsődleges szerepet. Ezek a biológiai folyamatok gyakran megkövetelik a többfázisú rendszerekre kidolgozott keverékek kontinuum elméletének alkalmazását; ekkor a keményszövet növekedése az egyes fázisok közötti anyagcsere révén írható le [7]. Egy másik megközelítésben a szövetet egyfázisú nyitott termodinamikai rendszerként modellezzük, amely-

ben a sűrűségprofil alakulását tömegforrások befolyásolják [16]. Mindkét esetben tehát megjelenik egy újabb szabadsági fokként a sűrűség, amelynek időbeli változását a tömegmegmaradás és különböző növekedési törvények határozzák meg. Keményszövetek modellezésére használt algoritmusok összehasonlításáról és stabilitásáról különböző típusú végelemek és integrálási sémák esetén Kuhl et al. munkájában olvashatunk bővebben [15].

A lágyszövetek a bennük nagy arányban jelen lévő víznek köszönhetően mechanikailag közel összenyomhatatlan anyagként viselkednek [17], azonban a keményszövetekkel ellentétben viszonylag könnyen deformálhatóak. Modellezésüknél így a legnagyobb kihívást a nemlineáris kinematika és a növekedés során a szövetbe épülő újabb anyagi pontok (összenyomhatatlan sejtek) által okozott alakváltozás leírása jelenti. Ez utóbbi probléma megoldásában nagy előretörésnek számított az úgynevezett növekedési konfiguráció gondolata [11]. A növekedési konfiguráció lehetővé teszi annak az alakváltozásnak a leírását, amelyet kizárólag a növekedés hatására megjelenő és eltűnő anyagi pontok hoznak létre. Az elv matematikai megfogalmazása a műanyagok esetéhez hasonlóan az alakváltozási gradiens tenzor szorzat alakú szétbontásán alapszik [21]. Ennél a módszernél az alakváltozás folyamatát szintén növekedési törvényekkel írjuk le, ám ezek a növekedési konfiguráció időbeli alakulására vonatkoznak, és nem a sejtek szintjén történő tömegnövekedésre. A dolgozatban ezt a módszert ismertetjük részletesen, majd megvalósítunk egy rá épülő végeselemes eljárást.

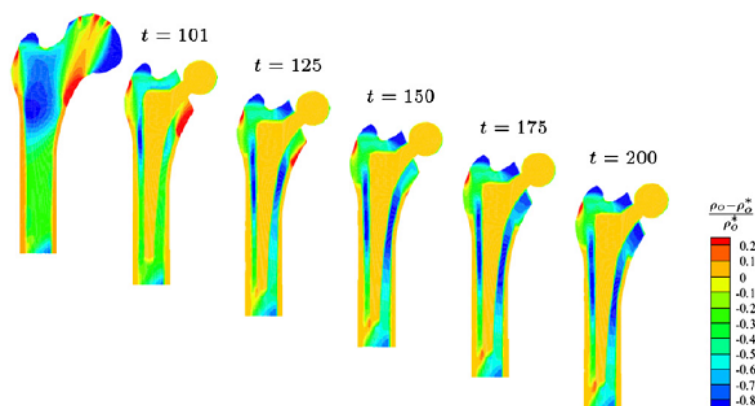
A növekedési folyamatok modellezésének a fentiekben bemutatott fejlődési íve természetesen csupán egy általános irányvonal amely mentén a tudományág haladt. Az elmúlt évtizedek során számos egyéb területről és módszerről születtek még fontos eredmények. Többek között kiemelhetjük a felületi növekedés matematikai leírásával foglalkozó munkákat [22], [23], amelyekben úgynevezett *növekedési sebességvektorok* segítségével sikeresen jósolták meg különböző szarvak, agancsok, illetve kagylók növekedését. Az összenyomható szövetek leírásánál pedig fontos szerepet kaptak a sejt-szintű tömegnövekedés és a makroszkopikus alakváltozás együttes hatását összekapcsoló kutatások [9], [18].

Napjainkra számos kiforrott módszer alakult ki a különböző típusú szövetek különböző növekedési folyamatainak modellezésére. Az utóbbi években több cikk jelent meg ezek összefoglalásáról és rendszerezéséről, valamint a tudományág korunkbeli kihívásairól [3], [14], [19]. Ezek közül talán a legfontosabb a biológusokkal való kommunikáció az egyes növekedési törvények kísérleti úton történő meghatározása és validálása érdekében, hogy a meglévő végeselemes eljárások minél előbb gyakorlati alkalmazást nyerhessenek.

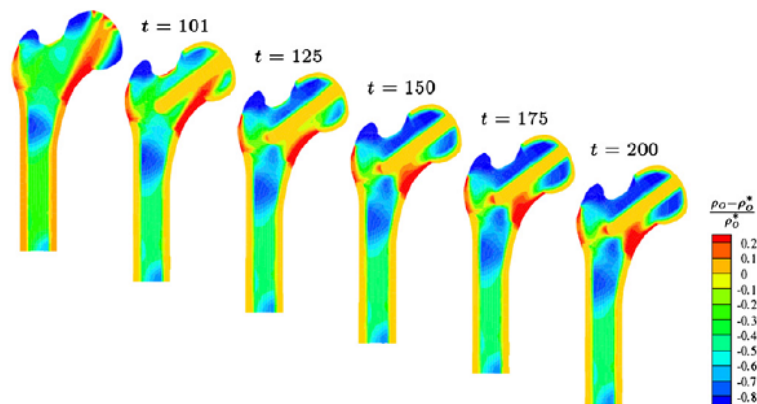
2.2. Alkalmazási lehetőségek

A növekedési jelenségek vizsgálatának egyik kiemelkedő alkalmazási területe az orvostudomány. A növekedés modellezése újszerűsége miatt egyelőre főleg betegségek kialakulásainak és hatásainak megismerését segítette nagymértékben elő; gyakorlati alkalmazásoknak még csak a csíráival találkozhatunk. Azonban nem szabad alábecsülni a megismerés jelentőségét, hiszen ezáltal jutunk hozzá ahhoz a tudáshoz, amit a jövőben orvosi célokra is hasznosítani lehet.

A csontok terhelés hatására bekövetkező sűrűségváltozásának modellezésével sok csontritkulással kapcsolatos jelenség megjósolhatóvá vált. Ilyen például az úrhajósok súlytalanságbeli állapotából adódó csontvesztesége [16]. Fény derült arra is, hogy a hagyományos csípőprotézisek miért okoznak lokális csontritkulást a csontra jutó terhelés csökkentésével. Ez lehetővé tette olyan implantátumok kifejlesztését, amelyek akár személyre szabottan gátolják a ritkulás bekövetkezését [3]. A régi és az új típusú protézisek által okozott sűrűségprofil változást az 1.a,b ábrákon láthatjuk. Egy másik kutatócsoport munkájában az alanyok csontjainak egészségügyi állapotát a testtartásuk alapján határozták meg [20]. A módszer fejlesztésével elkerülhetővé válhat a napjainkban használt csontsűrűség profil felvételéhez szükséges röntgensugaras eljárás. Szorosan ide kapcsolódnak azok a munkálatok is, amelyek a sportolók szervezetében nagy terhelés hatására kialakuló krónikus ízületi problémák eredetének feltárásával foglalkoznak [24].



1.a ábra. Régi típusú csípőprotézis hatása a sűrűségprofilra [3].
A csont közepénél erőteljes ritkulás figyelhető meg az idő során.



1.b ábra. Új típusú csípőprotézis hatása a sűrűségprofilra [3].

Az előző példával ellentétben itt már nem következik be nagymértékű csontitkulás.

A csontok vizsgálatából a növekedés numerikus modellezésének nemrég egy másik érdekes alkalmazási területe fejlődött ki. Az alapgondolat az evolúcióból ered, miszerint a csontokban olyan növekedési mechanizmusok alakultak ki, amelyekkel képesek jól alkalmazkodni a rájuk eső terhelések elviselésére. Ha egy élettelen, mechanikus struktúrát a numerikus modellezés szintjén engedünk nőni, akkor a csonthoz hasonló módon adott terhelés mellett az alakja és sűrűségprofilja egy ideálisabb állapot irányába változik. Így végső soron a növekedés modellezése megteremti a struktúrák tervezésének és optimalizálásának a lehetőségét is [27].

A lágyszövetek térfogati és felszíni növekedésének modellezése is egyre több területen nyer felhasználást. Égési sérülések, születési rendellenességek, illetve egyéb, sebészeti beavatkozást igénylő műtétek után a regenerációhoz hozzátartozik a sebhely bőrrel való lefedése. A bőr növekedésének szimulációjával lehetőség nyílik a folyamat irányítására és a seb által hagyott nyom láthatóságának csökkentésére [6]. A szívkamrák és az artériák falvastagságának változása különböző szívbetegségek és érrendszerbeli problémák kialakulásához vezethet; a halálesetek egyik leggyakoribb okozói pedig még napjainkban is a szívbetegségek [12]. Érthető tehát, hogy az ilyen simaizomból álló szövetek növekedési folyamatainak a vizsgálata kiemelkedő fontosságú, hiszen ezek megértése segíthet új kezelési eljárások kifejlesztésében valamint az eddigiek javításában [1], [13]. Hasonló a motivációja azoknak a kutatásoknak, amelyek a rövidlátás és a zöldhályog kialakulásának okait próbálják növekedési modellek segítségével magyarázni [8].

3. FEJEZET

Elméleti alapok összefoglalása

3.1. A kontinuummechanika alapjai

A dolgozat megértéséhez szükséges alapvető kontinuummechanikai fogalmak és kifejezések ismeretét az író feltételezi az olvasó részéről. A legfontosabb mennyiségeket és összefüggéseket azonban a könnyebb átláthatóság kedvéért ebben a fejezetben röviden összefoglaljuk, követve Bonet és Wood nemlineáris kontinuummechanikáról szóló könyvének logikáját [5].

3.1.1. A mozgás kinematikája

A kontinuummechanika deformálható testek mozgásának leírásával és mechanikai jellemzésével foglalkozik. A testeket végtelen mennyiségű anyagi pont összetételeként képzeljük el, amelyek alakváltozás előtti és utáni pozíciója között matematikailag egy Φ leképezés teremt kapcsolatot:

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}, t). \quad (3.1)$$

A test $\mathbf{X}$ koordinátákkal leírt helyzetét nevezzük a *kezdeti-* vagy *referencia konfigurációnak*, amely viszonyítási alapként szolgál a test deformációját és egyéb jellemzőit leíró egyenletek megfogalmazásához. A test alakváltozás során felvett új alakja alkotja az $\mathbf{x}$ koordináták által leírt *pillanatnyi konfigurációt*. A továbbiakban a két konfiguráció kinematikai jellemzőinek megkülönböztetésére a helyvektorokhoz hasonlóan kis- és nagybetűket használunk.

A kezdeti és a pillanatnyi konfigurációban értelmezett kinematikai és mechanikai mennyiségek egymás közötti átszámítására szolgálnak az úgynevezett *push forward* és *pull back* műveletek:

$$\mathbf{x} = \Phi_*[\mathbf{X}] = \Phi(\mathbf{X}, t); \quad \mathbf{X} = \Phi_*^{-1}[\mathbf{x}] = \Phi^{-1}(\mathbf{x}, t). \quad (3.2)$$

A bevezetett Φ_* egy olyan *operátor*, amelynek jelentése és kiszámítási módja magától az operandusától függ. A fenti egyenletben például a helyvektorok átszámításához maga a Φ leképezés alkotja a végrehajtandó műveletet. A *push forward* és *pull back* koncepciók használata jelentős mértékben le fogja egyszerűsíteni az összetettebb kifejezések átszámítását a különböző konfigurációk között.

3.1.2. Alakváltozási tenzorok

A test deformáció előtti és utáni jellemzőinek összevetéséhez szükség van olyan mennyiségekre, amelyek az elszenvedett alakváltozás mértékét írják le. Ezek alapjául szolgál az $\mathbf{F}$ *alakváltozási gradiens tenzor*:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}}, \quad (3.3)$$

amelynek determinánsa

$$J = \det \mathbf{F}. \quad (3.4)$$

Segítségével kifejezhetők a kezdeti és a pillanatnyi konfigurációban értelmezett elemi vektorok, felületvektorok és térfogatelemek közötti kapcsolatok:

$$d\mathbf{x} = \Phi_*[d\mathbf{X}] = \mathbf{F}d\mathbf{X}; \quad (3.5a)$$

$$d\mathbf{a} = \Phi_*[d\mathbf{A}] = J\mathbf{F}^{-T}d\mathbf{A}; \quad (3.5b)$$

$$dv = \Phi_*[dV] = JdV. \quad (3.5c)$$

Az alakváltozási gradiens felhasználásával egyéb mennyiségeket is definiálhatunk az alakváltozás mértékének jellemzésére. Ezek közül a legfontosabbak a *jobb* és *bal oldali Cauchy–Green-féle deformációs tenzorok*:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T, \quad (3.7)$$

illetve a *Lagrange- vagy Green-féle alakváltozási tenzor*:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}). \quad (3.8)$$

3.1.3. Feszültségtenzorok és egyensúlyi egyenlet

A deformálódó testben ébredő feszültségek kapcsolatot teremtenek a test egy adott pontján átmenő elemi felületek és a rájuk ható erővektorok között. Matematikai megfogalmazásban a különböző feszültségtenzorok a $d\mathbf{A}$ vagy $d\mathbf{a}$ felületvektorokat képzik le a kezdeti vagy pillanatnyi konfigurációban értelmezett $d\mathcal{F}$ vagy $d\mathbf{f}$ erőkre. Az így definiálható tenzorok közül a legfontosabbak a *Cauchy-féle feszültségtenzor*:

$$d\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{a}, \quad (3.9a)$$

és az *első és második Piola–Kirchhoff-féle feszültségtenzorok*:

$$d\mathbf{f} = \mathbf{P} d\mathbf{A}, \quad (3.9b)$$

$$d\mathcal{F} = \mathbf{S} d\mathbf{A}, \quad (3.9c)$$

amelyek kifejezhetőek $\boldsymbol{\sigma}$ segítségével:

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{S} = J\Phi_*^{-1}[\boldsymbol{\sigma}] = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}. \quad (3.11)$$

Az utóbbi egyenletben $\mathbf{S}$ és $\boldsymbol{\sigma}$ kapcsolatát az úgynevezett *Piola-transzformáció* adja, amely egy térfogati skálázással ötvözi a *push forward* vagy *pull back* műveleteket.

A kontinuummechanika alapegyenlete egy terhelés alá helyezett test egyensúlyi állapotának a feltételét írja le. A testre ható külső erők egyensúlyából levezethető ennek differenciális formája:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g} = \mathbf{0}, \quad (3.12)$$

ahol $\mathbf{g}$ az egységnyi tömegre ható térfogati erő. A fenti egyenlet végeselemes megfogalmazása teszi lehetővé a test egyensúlyi alakjának meghatározását. A külső nyomatékok egyensúlyából a jól ismert $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$ azonosság következik, azaz a Cauchy-féle feszültségtenzor szimmetriája.

3.1.4. Hiperelasztikus anyagmodellek

Különböző anyagú testekben ébredő feszültségek és a testek alakváltozásának mértéke közötti kapcsolatot különböző anyagtörvényekkel írjuk le. Az elmúlt évtizedek során számos ilyen törvény alakult ki az anyagok viselkedésének minél pontosabb közelítéséhez.

Hiperelasztikus anyagoknál a testben ébredő feszültségek egyértelmű függvényei a pillanatbeli deformációnak. Ilyenkor az anyag viselkedését a kezdeti konfiguráció egységnyi térfogatának az alakváltozásához szükséges Ψ *szabadenergia függvénnnyel* vagy más néven *rugalmas potenciállal* jellemezhetjük. Egy gyakran használt anyagmodell az úgynevezett összenyomható Neo-Hooke anyagtörvény:

$$\Psi(\mathbf{C}) = \frac{\mu}{2} (\text{tr } \mathbf{C} - 3) - \mu \ln J + \frac{\lambda}{2} (\ln J)^2, \quad (3.13)$$

ahol a μ és λ anyagi jellemzők az úgynevezett *Lamé paraméterek*. A törvény egyes összenyomhatatlan anyagok viselkedését is jól leírja. A $J = 1$ feltétel behelyettesítésével:

$$\Psi(\mathbf{C}) = \frac{\mu}{2} (\text{tr } \mathbf{C} - 3). \quad (3.14)$$

Az összenyomhatatlanság feltételét azonban a végeselemes eljárás során gyakran nehéz szigorúan biztosítani. Közel összenyomhatatlan anyagok esetén az alakváltozáshoz szükséges energiát egy torzulásból és egy térfogatváltozásból származó részre bontjuk:

$$\Psi(\mathbf{C}) = \hat{\Psi}(\mathbf{C}) + U(J). \quad (3.15)$$

A lágszövetek akár 60–70%-ban vízből állnak, így első megközelítésben mechanikailag ilyen típusú anyagnak tekinthetők. A jelen munka során is a fenti anyagtörvényt fogjuk alkalmazni és részletesebben a 3.2.3. fejezetben foglalkozunk vele.

A szabadenergia függvény ismeretében összenyomható és közel összenyomhatatlan anyagok esetén a második Piola–Kirchhoff-féle feszültségtenzort az

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} \quad (3.16)$$

összefüggéssel számíthatjuk ki az alakváltozás függvényében. A végeselemes eljárás során alkalmazandó Newton–Raphson iteráció keretén belül szükségünk lesz a fenti kapcsolat linearizálására:

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = 4 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}}, \quad (3.17)$$

ahol bevezettük a $\mathbf{C}$ *Lagrange-féle rugalmassági érintő tenzort*, amelynek a pillanatnyi konfigu-

rációbeli megfelelője az *Euler-féle rugalmassági érintő tenzor*:

$$\boldsymbol{\varsigma} = J^{-1} \Phi_*[\boldsymbol{\mathcal{C}}]; \quad (3.18a)$$

$$\varsigma_{ijkl} = J^{-1} \sum_{I,J,K,L=1}^3 F_{iI} F_{jJ} F_{kK} F_{lL} \mathcal{C}_{IJKL}. \quad (3.18b)$$

3.2. Anyagnövekedés

Az alábbi fejezet során részletesen bemutatjuk a lágyszövetek térfogati növekedésének modellezésére használt multiplikatív dekompozíció elvét. Az elv matematikai megfogalmazásával először Rodriguez et al. (1994) cikkében találkozhatunk [21], a lágyszövetekre való alkalmazáshoz szükséges alap gondolatok pedig Liu et al. (2014) munkájából származnak [17].

3.2.1. A növekedés kinematikája

A növekedési jelenségek figyelembevételéhez első lépésként szükség van a növekedés kinematikai leírására. Ennek módja korántsem egyértelmű, hiszen növekedés közben folyamatosan anyagi pontok adódnak hozzá a testhez illetve távolodnak el a testről. A folyamat kezeléséhez a gyakorlatban leginkább elterjedt módszer az alakváltozás felosztása egy rugalmas és egy növekedésből származó komponensre az alakváltozási gradiens szorzat alakú szétbontásával [21]:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^g, \quad (3.19)$$

ahol $\mathbf{F}^e$ az eddig megszokott módon a rugalmas deformációt leíró tenzor, az $\mathbf{F}^g$ tényező pedig az úgynevezett *növekedési tenzor*. A tenzorok determinánsai között a fenti egyenlethez hasonló módon fennáll, hogy

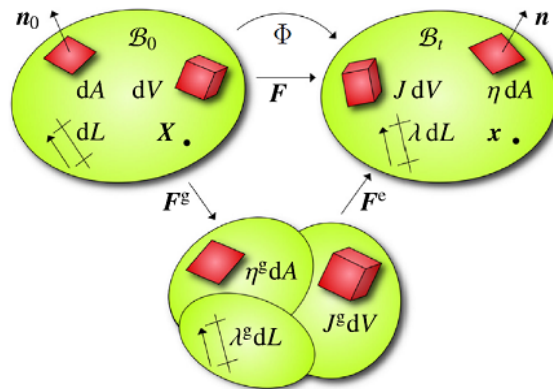
$$J = J^e J^g, \quad (3.20)$$

ahol $J^e = \det \mathbf{F}^e$ és $J^g = \det \mathbf{F}^g$.

A növekedési tenzor fogalmának megértéséhez tekintsük a 2. ábrát. A kezdeti $\mathcal{B}_0$ és a pillanatnyi $\mathcal{B}_t$ konfiguráción kívül itt megjelenik egy harmadik közbenső $\mathcal{B}^g$, úgynevezett *növekedési konfiguráció*. A növekedési konfiguráció a már növekvő és terhelés alatt lévő test egy olyan elképzelt állapota, amelyben a test minden pontja lokálisan feszültségmentes. Ez az állapot a kezdetihez képest tehát kizárólag a növekedés hatására megjelenő és eltűnő anyagi pontokban térhet el. A két konfiguráció közötti leképezést az $\mathbf{F}^g$ tenzor írja le, amely szemléletes fizikai jelentése eszerint az, hogy megadja az egyes elemi térfogatrészek alakjának pusztán az anyagnövekedés hatására bekövetkező változását. Növekedés nélkül $\mathbf{F}^g = \mathbf{I}$, különben pedig $\mathbf{F}^g$

konkrét alakja a növekedés típusától függ; ezekről később, a 3.2.4. fejezetben lesz szó. Az egyes konfigurációkban értelmezett mennyiségek közötti transzformációk kezelésére Φ_* operátorhoz hasonlóan bevezetjük a Φ_*^e rugalmas és a Φ_*^g növekedési *push forward*, illetve ezek inverzével a megfelelő *pull back* operátorokat. Adott típusú mennyiségek esetén ezek alakja megegyezik Φ_* alakjával, csak az általuk képviselt műveleteket $\mathbf{F}$ helyett rendre $\mathbf{F}^e$ -vel és $\mathbf{F}^g$ -vel kell végrehajtani.

A növekedési konfiguráció általában kinematikailag inkompatibilis, azaz túlfedések és szakadások jelennek meg benne. Az alakváltozás rugalmas komponense biztosítja azt a további deformációt, amely ebből az állapotból a test egy összefüggő és egyensúlyban lévő végleges alakját hozza létre. Az alakváltozási gradiens szorzat alakú szétbontásának elvével ezáltal a szövetek tehermentes állapotában a növekedés hatására ébredő belső feszültségeket is meg tudjuk határozni [26]. A módszer további fontos előnye, hogy lehetővé teszi a növekedés leírását a kezdeti konfiguráció megtartása mellett. Így a peremfeltételek és terhelések megadása a növekedés nélküli esethez hasonlóan nagyon egyszerűen kezelhető.



2. ábra. A kezdeti, pillanatnyi, és növekedési konfigurációk értelmezése [14].

A testekben tehát az alakváltozás növekedésből származó részét egy adott időpillanatban az $\mathbf{F}^g$ növekedési tenzor jellemzi, amelynek értéke pontról pontra eltérő lehet. A növekedési folyamat során $\mathbf{F}^g$ értéke időben is változik, és így a test helyzete és alakja is minden időpillanatban más lesz. Ez azonban egy nagyon lassú folyamat, sebessége elhanyagolható a rugalmas deformációéhoz képest. A gyakorlatban ez annyit jelent, hogy $\mathbf{F}^g$ értéket állandónak tekinthetjük a (3.12) egyenlet által megszabott pillanatnyi egyensúly beálltáig.

A rugalmas alakváltozás leírására szolgáló mennyiségeket a továbbiakban $\mathbf{F}^e$ -hez hasonlóan a felső e indexszel fogjuk jelölni; így az alakváltozás mértékére bevezethetjük a különböző

alakváltozási tenzorok rugalmas megfelelőit:

$$\mathbf{C}^e = \mathbf{F}^{eT} \mathbf{F}^e; \quad \mathbf{b}^e = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{eT}, \quad (3.21)$$

illetve

$$\mathbf{E}^e = \frac{1}{2} (\mathbf{C}^e - \mathbf{I}). \quad (3.22)$$

A növekvő testben ébredő feszültségeket alapvetően ezekkel a mennyiségekkel határozhatjuk meg; közülük $\mathbf{C}^e$ és $\mathbf{E}^e$ egyszerű algebrai átalakítások után felírhatók $\mathbf{C}$ és $\mathbf{E}$ függvényében:

$$\mathbf{C}^e = \Phi_*^{-1}[\Phi_*[\mathbf{C}]] = \mathbf{F}^{g^{-T}} \mathbf{C} \mathbf{F}^{g^{-1}}; \quad (3.23)$$

$$\mathbf{E}^e = \mathbf{F}^{g^{-T}} \mathbf{E} \mathbf{F}^{g^{-1}} + \frac{1}{2} (\mathbf{F}^{g^{-T}} \mathbf{F}^{g^{-1}} - \mathbf{I}). \quad (3.24)$$

3.2.2. Növekedési szabadenergia függvény

A 3.1.4. fejezetben bevezettük a Ψ szabadenergia függvényt, amely megadja a rugalmas alakváltozás hatására felhalmozódó energiát a testben. Növekedés esetén a test a növekedési konfigurációhoz képest szenved rugalmas alakváltozást, és így a Ψ^e rugalmas potenciált is ebben a konfigurációban tudjuk hasonlóképpen értelmezni. Például, közel összenyomhatatlan Neo-Hooke anyag esetén a (3.15) egyenlet az alábbi formát ölti:

$$\Psi^e(\mathbf{C}^e) = \hat{\Psi}^e(\mathbf{C}^e) + U^e(J^e). \quad (3.25)$$

Itt azonban Ψ^e nem a növekedési konfiguráció egységnyi térfogatára vonatkozik, hanem a kezdeti konfiguráció egy infinitezimális elemének a növekedés utáni térfogatára. A kezdeti konfiguráció egységnyi térfogatában felhalmozódó energiát a Ψ^g *növekedési szabadenergia függvény*nel tudjuk megadni [17]:

$$\Psi^g = J^g \Psi^e. \quad (3.26)$$

Az alakváltozás szorzat alakú szétbontásának elvével ezt úgy képzelhetjük el, hogy mivel a meg-növekedett térfogat minden pontja ugyanakkora rugalmas alakváltozást szenved, ezért benne J^g -szer annyi energia halmozódik fel, mint növekedés nélkül.

A szabadenergia függvényt azért fontos definiálnunk a kezdeti konfiguráción, mert itt a testben felhalmozódó teljes energiát meg lehet határozni Ψ^g térfogati integráljával. Ezt a növekedési konfiguráción nem tudnánk megtenni annak inkompatibilitása miatt. A testben felhalmozódó energiára az egyensúlyi egyenlet integrál alakjának a felírásához használt variációs elvek megfogalmazásánál lesz szükségünk.

3.2.3. Anyagmodellek

A növekedési szabadenergia függvény ismeretében a (3.16) egyenlettel meghatározhatjuk a kezdeti konfiguráción értelmezett második Piola–Kirchhoff-féle feszültségtenzort:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi^g}{\partial \mathbf{C}}. \quad (3.27)$$

Az összetett függvények deriválására vonatkozó láncszabály alapján

$$\mathbf{S} = 2 J^g \frac{\partial \Psi^e}{\partial \mathbf{C}^e} : \frac{\partial \mathbf{C}^e}{\partial \mathbf{C}} = J^g \mathbf{F}^{g^{-1}} \left(2 \frac{\partial \Psi^e}{\partial \mathbf{C}^e} \right) \mathbf{F}^{g^{-T}}. \quad (3.28)$$

A kapott kifejezést (3.11)-el összevetve láthatjuk, hogy a zárójelben szereplő mennyiség a növekedési konfigurációbeli második Piola–Kirchhoff-féle feszültségtenzorral azonosul:

$$\mathbf{S}^e \equiv 2 \frac{\partial \Psi^e}{\partial \mathbf{C}^e} = J^{g^{-1}} \Phi_*^g[\mathbf{S}]. \quad (3.29)$$

Könnnyen belátható, hogy $\mathbf{S}^e$ és a Cauchy-féle feszültség között szintén a Piola-transzformáció teremti meg a kapcsolatot:

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \Phi_*[\mathbf{S}] = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \quad (3.30a)$$

$$= J^{e^{-1}} J^{g^{-1}} (\mathbf{F}^e \mathbf{F}^g) \left(J^g \mathbf{F}^{g^{-1}} \mathbf{S}^e \mathbf{F}^{g^{-T}} \right) \left(\mathbf{F}^{g^T} \mathbf{F}^{e^T} \right) \quad (3.30b)$$

$$= J^{e^{-1}} \mathbf{F}^e \mathbf{S}^e \mathbf{F}^{e^T} = J^{e^{-1}} \Phi_*^e[\mathbf{S}^e]. \quad (3.30c)$$

Az $\mathbf{S}^e$ feszültségtenzornak a $\mathbf{C}^e$ rugalmas alakváltozástól való függését a (3.17) egyenlettel analóg módon a

$$\mathbf{C}^e = 2 \frac{\partial \mathbf{S}^e}{\partial \mathbf{C}^e} \quad (3.31)$$

rugalmassági érintő tenzor bevezetésével írhatjuk le, amelynek kapcsolatát a kezdeti és pillanatnyi konfiguráció mennyiségeivel az alábbi összefüggések adják:

$$\mathbf{C}^e = J^{g^{-1}} \Phi_*^g[\mathbf{C}] = J^e \Phi_*^{e^{-1}}[\boldsymbol{\varsigma}], \quad (3.32)$$

ahol az egyes transzformációk indexes formája:

$$\mathcal{C}_{ijkl}^e = \sum_{I,J,K,L} J^{g^{-1}} F_{iI}^g F_{jJ}^g F_{kK}^g F_{lL}^g \mathcal{C}_{IJKL}, \quad (3.33a)$$

$$\varsigma_{ijkl} = \sum_{I,J,K,L} J^{e^{-1}} F_{iI}^e F_{jJ}^e F_{kK}^e F_{lL}^e \mathcal{C}_{IJKL}^e. \quad (3.33b)$$

Közel összenyomhatatlan Neo-Hooke anyagok

Az előző fejezetben ismertetett elméleti összefüggések általános anyagokra érvényesek, azonban e TDK munka keretén belül csak egy kiválasztott anyagtörvényre vonatkozó számításokat valósítottuk meg *MATHEMATICA* környezetben. Az alábbiakban kifejtjük a közel összenyomhatatlan Neo-Hooke anyagokat leíró egyenleteket, előkészítve beépítésüket egy véges-elemes eljárás keretébe.

A közel összenyomhatatlan Neo-Hooke anyagtörvényből származó rugalmas potenciált (3.25)-el definiáltuk, azonban a benne szereplő mennyiségeket itt bővebben kifejtjük Bonet és Wood nyomán [5]. Az egyenletben a kalappal ellátott $\hat{\Psi}^e$ mennyiség az alakváltozási energia torzulásból származó része (*deviatoric component*):

$$\hat{\Psi}^e(\mathbf{C}^e) = \frac{\mu}{2} \left(\text{tr } \hat{\mathbf{C}}^e - 3 \right), \quad (3.34)$$

ahol

$$\hat{\mathbf{C}}^e = \det(\mathbf{C}^e)^{-1/3} \mathbf{C}^e = J^{e^{-2/3}} \mathbf{C}^e. \quad (3.35)$$

Az alakváltozási energia térfogatváltozásból származó komponense az $U^e(J^e)$ volumetrikus tag, amelyet gyakran az alábbi módon adunk meg [5]:

$$U^e(J^e) = \frac{1}{2} \kappa (J^e - 1)^2. \quad (3.36)$$

Itt κ egy skálárértékű szám, az úgynevezett *bulk modulusz*, amely a rugalmas térfogatváltozás büntetésével kényszeríti ki az összenyomhatatlanságot. Minél nagyobbra választjuk κ értékét, annál jobban érvényesül az anyag összenyomhatatlan jellege.

A rugalmas potenciált (3.29)-be helyettesítve kifejezhetjük a rugalmas második Piola–Kirchhoff-féle feszültségi tenzort:

$$\mathbf{S}^e = 2 \frac{\partial \Psi^e}{\partial \mathbf{C}^e} \quad (3.37a)$$

$$= 2 \frac{\partial \hat{\Psi}^e}{\partial \mathbf{C}^e} + 2 \frac{dU^e}{dJ^e} \frac{\partial J^e}{\partial \mathbf{C}^e} \quad (3.37b)$$

$$= \mu J^{e-2/3} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{C}^{e-1} \right) + p J^e \mathbf{C}^{e-1} \quad (3.37c)$$

$$= \mathbf{S}^{e'} + p J^e \mathbf{C}^{e-1}, \quad (3.37d)$$

amely a (3.25) szabadenergia függvényhez hasonlóan szintén két részre választható szét. A felbontást a kezdeti és pillanatnyi konfigurációban értelmezett feszültségeken is elvégezhetjük:

$$\mathbf{S} = J^g \Phi_*^{g-1} \left[\mathbf{S}^{e'} + p J^e \mathbf{C}^{e-1} \right] \quad (3.38a)$$

$$= \mathbf{S}' + p J \mathbf{C}^{-1}, \quad (3.38b)$$

valamint

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{e-1} \Phi_*^e \left[\mathbf{S}^{e'} + p J^e \mathbf{C}^{e-1} \right] \quad (3.39a)$$

$$= \mu J^{e-5/3} \left(\mathbf{b}^e - \frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{b}^e \cdot \mathbf{I} \right) + p \mathbf{I} \quad (3.39b)$$

$$= \boldsymbol{\sigma}' + p \mathbf{I}. \quad (3.39c)$$

A fenti képletekben bevezetett

$$p = \frac{dU^e}{dJ^e} = \kappa (J^e - 1) \quad (3.40)$$

menyiség megfeleltethető a belső hidrosztatikai nyomásnak.

Hasonlóan az eddigiekhez, a rugalmas érintő tenzorok is több komponensre bonthatóak [5]:

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}^e = 2 \frac{\partial \mathbf{S}^e}{\partial \mathbf{C}^e} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}^{e'}}{\partial \mathbf{C}^e} + 2 \frac{\partial p J^e \mathbf{C}^{e-1}}{\partial \mathbf{C}^e} \quad (3.41a)$$

$$= 4 \frac{\partial^2 \hat{\Psi}^e}{\partial \mathbf{C}^e \partial \mathbf{C}^e} + 2p \frac{\partial J^e \mathbf{C}^{e-1}}{\partial \mathbf{C}^e} + 2 J^e \mathbf{C}^{e-1} \otimes \frac{\partial p}{\partial \mathbf{C}^e} \quad (3.41b)$$

$$= \hat{\boldsymbol{\mathcal{C}}}^e + \boldsymbol{\mathcal{C}}_p^e + \boldsymbol{\mathcal{C}}_\kappa^e, \quad (3.41c)$$

illetve

$$\mathfrak{s} = J^{e^{-1}} \Phi_*^g [\mathcal{C}^e] = \hat{\mathfrak{s}} + \mathfrak{s}_p + \mathfrak{s}_\kappa; \quad (3.42)$$

$$\mathcal{C} = J^g \Phi_*^{g^{-1}} [\mathcal{C}^e] = \hat{\mathcal{C}} + \mathcal{C}_p + \mathcal{C}_\kappa. \quad (3.43)$$

Az egyes tenzorokra vonatkozó képleteket a *Melléklet A1.* pontjában fejtettük ki.

3.2.4. Növekedési folyamatok leírása

A növekedésnek többféle fajtája, módja létezik, amelyeket az $\mathbf{F}^g$ növekedési tenzor alakjának megfelelő megválasztásával írhatunk le; a növekedés időbeli lefolyásának jellemzésére pedig különböző növekedési törvények szolgálnak.

A növekedési típusok egyik legegyszerűbb esete a térfogati növekedés, amely során az anyag a tér minden irányában egyforma mértékben nő [9]:

$$\mathbf{F}^g = \lambda^g \mathbf{I}. \quad (3.44a)$$

Itt λ^g a növekedés mértékével arányos skaláris *növekedési szorzó*. Térfogati növekedés jellemzi például artériák, tumorok, és gyümölcsök növekedését. Izotróp felületi növekedés esetén az anyag csak az $\mathbf{n}_0$ normálisú felület síkjában nő [14]:

$$\mathbf{F}^g = \lambda^g \mathbf{I} + [1 - \lambda^g] \mathbf{n}_0 \otimes \mathbf{n}_0, \quad (3.44b)$$

ahol az $\mathbf{n}_0$ vektor a kezdeti konfigurációban van értelmezve. Légutak falának, a bőrnek, és a szívbillentyűk növekedését $\mathbf{F}^g$ fenti alakja írja le megfelelően. Végül szálirányú növekedés esetén a test csak az $\mathbf{n}_0$ irány mentén nő. Ekkor a növekedési tenzor alakja [14]:

$$\mathbf{F}^g = \mathbf{I} + [\lambda^g - 1] \mathbf{n}_0 \otimes \mathbf{n}_0, \quad (3.44c)$$

amely alkalmas többek között egyes növények és izomszálak növekedésének leírására. A növekedésnek számos egyéb típusa is létezik, pl. az anizotróp növekedés, vagy a fenti három eset összevonásából adódó kombinált növekedés.

A növekedés időbeli lefolyását az $\mathbf{F}^g$ tenzor idő szerinti deriváltjára vonatkozó törvényekkel írhatjuk le. A különböző szövetekben lezajló különböző növekedési folyamatok bonyolultságából és sokféleségéből eredően ezek a törvények a mai napig nincsenek teljes mértékben feltérképezve és rendszerezve. A növekedés mértékét befolyásoló tényezők közé tartozik maga az $\mathbf{F}^g$ tenzor,

a test mechanikai és termikus állapota, továbbá számos egyéb tényező és külvilági inger pl. fényhatások, anyagkoncentrációk, hormonok és gének érvényesülése, stb. [19]. Ezen utóbbi mennyiségek figyelembevétele megköveteli a dolgozatban ismertetettnél egy általánosabb anyag-leírást, termodinamikai és keverékelméleti egyenletekkel kiegészítve. A növekedési tenzor és a mechanikai állapot hatása azonban a jelen munka keretén belül is érvényesülhet. A növekedési törvényt ekkor az alábbi formában fogalmazhatjuk meg [17]:

$$\dot{\mathbf{F}}^g = f(\mathbf{F}^g, \mathbf{M}). \quad (3.45)$$

A fenti egyenletben f az $\mathbf{F}^g$ növekedési tenzor és az $\mathbf{M}$ mechanikai jellemzők összességének egy tetszőleges függvénye. Például az artériák és a szív falvastagságának növekedése a vérnyomás által létrehozott feszültségektől függ; a bőr és izomrostok növekedését pedig a megnyúlásuk mértéke vezérli [14].

A különböző növekedési mechanizmusok összefoglalását és csoportosítását az elmúlt évek során többen is megkísérelték. Ellen Kuhl 2014-ben megjelent cikke egy átfogó képet ad a napjainkig feltérképezett biológiai rendszerek növekedési folyamatairól, és ajánlatot olvasni az itt nem részletezett jelenségek alaposabb megismeréséhez [14].

4. FEJEZET

Végeselemes eljárás

A 3.1.3. fejezetben tárgyalt egyensúlyi feltétel a (3.12)-es differenciális formájában nem építhető be egy végeselemes eljárásba. Ehhez szükségünk van az egyenlet integrál alakjára, amely felírható a virtuális munka elvének vagy variációs módszerek alkalmazásával. A variációs megfogalmazás könnyen lehetővé teszi az úgynevezett *volumetric locking* jelenség elkerülését is, így a következőkben ezt a megközelítést mutatjuk be Bonet és Wood (2008) nyomán [5]. A kidolgozott végeselemes algoritmus folyamatábrája a *Melléklet A2.* pontjában található.

4.1. Hu–Washizu-féle variációs elv

Egy test egyensúlyának feltételét először Newton révén a testre ható külső erők és nyomatékok egyensúlyával azonosították. Később elterjedt egy másik megfogalmazás, amely energetikai szemszögből közelítette meg a kérdést. A kontinuummechanikában a variációs elvek alkalmazásánál felírjuk a test belső és potenciális energiáját integrál alakban, és megköveteljük, hogy ez a funkcionál az egyensúlyi állapotban minimális legyen. Az összenyomhatatlanság feltétele azonban gyakran a végeselemes eljáráson belül a rendszer mesterségesen merev viselkedéséhez vezet. Ennek a *volumetric locking* néven ismert jelenségnek az elkerülésére egy gyakran alkalmazott módszer az energia torzulási és térfogati komponenseinek a kinematikailag független leírása egy úgynevezett Hu–Washizu funkcionál segítségével [5]:

$$\Pi_{HW}(\Phi, \bar{J}^e, p) = \int_V J^g \left[\hat{\Psi}^e(\mathbf{C}^e) + U^e(\bar{J}^e) \right] dV + \int_V J^g p (J^e - \bar{J}^e) dV - \Pi_{ext}(\Phi). \quad (4.1)$$

A fenti egyenletben a (3.25)-ös rugalmas potenciált J^g -vel súlyoztuk (3.26) alapján a növekedés figyelembevételére. A bevezetett $\bar{J}^e$ változó teszi lehetővé a rugalmas energia $\hat{\Psi}^e$ torzulási és U^e

térfogati komponensének a kinematikailag független kezelését; a $\bar{J}^e = J^e$ feltétel teljesüléséről pedig a p Lagrange-féle multiplikátor gondoskodik. A külső erők potenciálját $\Pi_{ext}(\Phi)$ -vel jelöltük, és az integrálást a nagybetűs jelöléshez híven a kezdeti konfigurációban kell végrehajtani.

A (4.1) funkcionál stacionaritásának feltétele, hogy a Φ , $\bar{J}^e$, és p változók szerinti variációja zérus legyen. Az egyes variációk végrehajtása során a 3.2.1. fejezetben részletezett okok miatt $\mathbf{F}^g$ értékét időben állandónak tekinthetjük. A Π_{HW} függvény egy tetszőleges $\delta \mathbf{v}$ elmozdulásmező iránymenti deriváltjából megkapjuk az egyensúly feltételének integrál alakját [5]:

$$D\Pi_{HW}(\Phi, \bar{J}^e, p)[\delta \mathbf{v}] = \int_V J^g \left(\mathbf{S}^{el} + p J^e \mathbf{C}^{e-1} \right) : D\mathbf{E}^e[\delta \mathbf{v}] dV - D\Pi_{ext}(\Phi)[\delta \mathbf{v}] = 0, \quad (4.2)$$

avagy a pillanatnyi konfigurációban felírva:

$$D\Pi_{HW}(\Phi, \bar{J}^e, p)[\delta \mathbf{v}] = \int_v (\boldsymbol{\sigma}' + p\mathbf{I}) : \delta \mathbf{d} dv - D\Pi_{ext}(\Phi)[\delta \mathbf{v}] = 0. \quad (4.3)$$

Az egyenletben szereplő két tag megfeleltethető rendre a belső és a külső virtuális munkának.

A variációt elvégezve $\bar{J}^e$ szerint:

$$D\Pi_{HW}(\Phi, \bar{J}^e, p)[\delta \bar{J}^e] = \int_V J^g \left(\frac{dU^e}{d\bar{J}^e} - p \right) \delta \bar{J}^e dV = 0, \quad (4.4)$$

ahol a stacionaritás feltétele, hogy az integrál bármely $\delta \bar{J}^e$ mellett eltűnjön, azaz:

$$p = \frac{dU^e}{d\bar{J}^e} = \kappa (\bar{J}^e - 1). \quad (4.5)$$

Látható, hogy a p Lagrange-féle multiplikátor a hidrosztatikai nyomás szerepét játssza a (3.40)-es egyenlethez hasonlóan.

Végül a variációt végrehajtva δp szerint:

$$D\Pi_{HW}(\Phi, \bar{J}^e, p)[\delta p] = \int_V J^g (J^e - \bar{J}^e) \delta p dV = 0. \quad (4.6)$$

Ez utóbbi egyenlet $\bar{J}^e$ értékének meghatározására szolgál, azonban a $\bar{J}^e = J^e$ megoldás esetén nem élünk a független kinematikai leírás lehetőségével. A *mean dilatation technique* néven ismert módszer esetén $\bar{J}^e$ és p értékeit illetve variációit J^e -vel ellentétben az integrálási tartományon belül állandónak feltételezzük [5]. Ez a változóknak elegendő szabadságot biztosít a

rendszer merev viselkedésének az elkerüléséhez. Az egyenletből $\bar{J}^e$ -t kifejezve a

$$\bar{J}^e = \frac{\int_V J dV}{\int_V J^g dV} = \frac{v}{v^g} \quad (4.7)$$

összefüggés adódik. $\bar{J}^e$ fizikailag az anyagrésznek a pillanatnyi és a növekedési konfigurációban elfoglalt térfogatának arányát adja meg.

4.2. Newton–Raphson iteráció

A végeselemes eljárás keretén belül a (4.2) illetve (4.3) egyenletek megoldását keressük az úgynevezett Newton–Raphson iterációval. Egy általános $\Phi_n^p \neq \Phi$ leképezéssel leírható $\mathbf{x}_n^p$ próbamegoldás esetén az említett nemlineáris egyenletek nem teljesülnek, azonban a lineáris

$$D\Pi_{HW}(\Phi_n^p, \bar{J}^e, p) [\delta \mathbf{v}] + D^2\Pi_{HW}(\Phi_n^p, \bar{J}^e, p) [\delta \mathbf{v}, \mathbf{u}] = 0 \quad (4.8)$$

egyenlet segítségével könnyen meghatározhatjuk azt az elemi $\mathbf{u}$ elmozdulásmezőt, amellyel a $\mathbf{x}_{n+1}^p = \mathbf{x}_n^p + \mathbf{u}$ próbamegoldás már közelebb áll a valódihoz. Ezáltal létrehozhatunk egy olyan iterációs eljárást, amely során egyre jobban közelítjük a test egyensúlyi alakját leíró $\mathbf{x}$ mezőt. Az iterációnak akkor vetünk véget, ha a reziduális hiba egy megadott küszöbérték alá csökken, vagy ha adott számú iteráció után nem érjük el a konvergencia feltételeit.

Az eljárás megvalósításához értelemszerűen szükségünk van a (4.2) és a (4.3) egyenletekben szereplő mennyiségek linearizálására egy tetszőleges elmozdulás irányába. A részletes levezetés megtalálható Bonet és Wood könyvében [5]. A belső virtuális munka linearizáltja a pillanatnyi konfiguráció mennyiségeivel felírva:

$$D^2\Pi_{int}(\Phi_n^p, \bar{J}^e, p) [\delta \mathbf{v}, \mathbf{u}] = \int_v \delta \mathbf{d} : (\hat{\boldsymbol{\zeta}} + \boldsymbol{\varsigma}_p) : \boldsymbol{\varepsilon} dv + \int_v \boldsymbol{\sigma} : [(\boldsymbol{\nabla} \mathbf{u})^T \boldsymbol{\nabla} \delta \mathbf{v}] dv + \bar{\kappa} v (\overline{\text{div}} \delta \mathbf{v}) (\overline{\text{div}} \mathbf{u}), \quad (4.9)$$

ahol bevezettük a

$$\bar{\kappa} = \kappa \frac{v}{v^g} \quad (4.10)$$

jelölést és a $\overline{\text{div}}$ operátort, amely megadja egy adott mennyiség divergenciájának az átlagát a vizsgált térfogatrészben.

A testre ható külső erők általános esetben függhetnek a test alakjától pl. nyomás esetén. A dolgozat során azonban csak pontszerű erőterheléseket vettünk figyelembe, amelyek esetén

$D^2\Pi_{ext}[\delta\mathbf{v}, \mathbf{u}]$ zérus lesz, azaz nem jelenik meg a (4.8) egyenletben. Így tehát

$$D^2\Pi_{HW}[\delta\mathbf{v}, \mathbf{u}] = D^2\Pi_{int}[\delta\mathbf{v}, \mathbf{u}], \quad (4.11)$$

és a Newton–Raphson iteráció (4.8) alapegyenletében szereplő mennyiségeket a (4.3) és (4.9) képletekkel tudjuk kiszámítani.

4.3. Diszkretizáció

Egy végeselemes eljárás felépítésében az egyik legfontosabb lépés a test geometriájának a diszkretizációja. A diszkretizáció során a testet behálózunk, és a test jellemzőit a háló csomópontjaiban felvett értékek lineáris interpolációjával közelítjük. Az interpolációt leíró N_a formafüggvényeknek a pillanatnyi konfigurációbeli tér három iránya szerinti deriváltjait rendre $N_{a,1}$, $N_{a,2}$, és $N_{a,3}$ jelöli. A megvalósított eljárásban 8 csomópontos *hexa elemeket* használtunk a geometria felbontására; ezen elemek csomópontjainak számozása, illetve a rájuk vonatkozó formafüggvények megtalálhatóak pl. Bonet és Wood könyvében [5].

A Newton–Raphson iteráció alapját képező (4.8) egyenlet diszkretizálás után a jól ismert

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{r} \quad (4.12)$$

alakra hozható, ami a végeselemes megfogalmazás alapegyenlete. Az egyenlet jobb oldalán szereplő $\mathbf{r}$ mennyiség a test nemegyensúlyi helyzetéből eredő, csomópontokban fellépő reziduális erőket jelöli, amelyeket a csomópontokra ható külső és belső erők különbségéből számíthatunk ki:

$$\mathbf{r} = \mathbf{f} - \mathbf{t}. \quad (4.13)$$

Egy adott a csomóponttra ható erők e térfogatelemből származó részét az

$$\mathbf{f}_a^{(e)} = \int_{v^{(e)}} N_a \mathbf{g} dv + \int_{\partial v^{(e)}} N_a \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} da \quad (4.14)$$

és a

$$\mathbf{t}_a^{(e)} = \int_{v^{(e)}} \boldsymbol{\sigma} \nabla N_a dv \quad (4.15)$$

összefüggések adják [5]; a globális erővektorokat ezeknek az egész testre kiterjedő összegzésével kapjuk meg. A jelen munka során kidolgozott végeselemes eljárás *MATHEMATICA* implemen-

tációjában azonban, mint ahogy már korábban említettük, nincs lehetőség térfogati és felület mentén eloszló terhelés megadására; így az $\mathbf{f}$ külső erők vektora megegyezik a csomópontokra ható erőköl összeállított vektorral.

A $\mathbf{K}$ érintő merevségi mátrix a (4.9) egyenletnek megfelelően három alkotórészre bontható:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_c + \mathbf{K}_\sigma + \mathbf{K}_\kappa, \quad (4.16)$$

ahol az egyes tagok rendre a mátrix *konstitutív*, *kezdeti feszültség*, és *dilatációs* komponensei. Egy adott térfogatelem hozzájárulását a mátrixokhoz $\mathbf{K}^e$ -vel jelöljük, amelynek a $\mathbf{K}_{ab}^e$ almátrixsza megadja, hogyan módosulnak az a csomópontban fellépő reziduális erők a b csomópont elmozdulásának hatására. $\mathbf{K}_{ab}^e$ különböző komponenseinek értékei:

$$[\mathbf{K}_{c,ab}^{(e)}]_{ij} = \int_{v^{(e)}} \sum_{k,l=1}^3 N_{a,k} \boldsymbol{\varsigma}_{ijkl} N_{b,l} dv, \quad (4.17a)$$

$$[\mathbf{K}_{\sigma,ab}^{(e)}]_{ij} = \int_{v^{(e)}} \sum_{k,l=1}^3 N_{a,k} \boldsymbol{\sigma}_{kl} N_{b,l} \delta_{ij} dv, \quad (4.17b)$$

$$[\mathbf{K}_{\kappa,ab}^{(e)}]_{ij} = \bar{\kappa} v^{(e)} \bar{N}_{a,i} \bar{N}_{b,j}, \quad (4.17c)$$

ahol az i és j indexek a tér három irányát jelzik és 1–3-ig futnak. A (4.17c) egyenletben a felülvonás a formafüggvények deriváltjainak az elem térfogatára vett átlagát jelöli:

$$\bar{N}_{a,i} = \frac{1}{v^{(e)}} \int_{v^{(e)}} N_{a,i} dv. \quad (4.18)$$

A (4.12) egyenletben szereplő $\mathbf{K}$ érintő merevségi mátrix és $\mathbf{r}$ reziduális erővektor tehát a (4.14), (4.15) és (4.17) egyenletek segítségével meghatározható a test egy adott $\mathbf{x}_n^p$ csomóponti helyvektor által leírt helyzetében. A képletekben szereplő integrálokat numerikus közelítéssel, Gauss-kvadraturákkal számíthatjuk ki [5]. A Newton–Raphson iteráció alkalmazásával ezáltal közelíteni tudjuk a növekvő test egy adott időpillanatban felvett $\mathbf{x}$ egyensúlyi alakját.

4.4. A növekedés időbeli szimulációja

A növekedés folyamatának modellezése megköveteli a növekedés időbeli szimulációját, amely során $\mathbf{F}^g$ változását követjük nyomon Δt időlépésenként. Egy adott t időpillanatban a növekedési tenzor értéke a test egy tetszőleges pontjában $\mathbf{F}_t^g$. A Newton–Raphson iterációban szereplő integrálok közelítő kiszámításához $\mathbf{F}_t^g$ értékét elegendő csak az integrálási pontokban tárolni

belső változóként. Miután egy adott időpillanatban meghatároztuk a test egyensúlyi alakját, ismertté válnak a növekedési törvény (3.45) jobb oldalán szereplő mechanikai jellemzők értékei is. Explicit Euler-típusú integrálási sémát alkalmazva a növekedési tenzor a következő szimulált időpillanatban egyszerűen meghatározható:

$$\mathbf{F}_{t+\Delta t}^g = \mathbf{F}_t^g + \dot{\mathbf{F}}_t^g \Delta t. \quad (4.19)$$

Egy fokkal bonyolultabb, ám stabilabb működésű az implicit Euler-típusú integrálás:

$$\mathbf{F}_{t+\Delta t}^g = \mathbf{F}_t^g + \dot{\mathbf{F}}_{t+\Delta t}^g \Delta t, \quad (4.20)$$

amely (általában) egy nemlineáris egyenletet jelent $\mathbf{F}_{t+\Delta t}^g$ -re, és szintén egy iterációs eljárás segítségével oldható meg.

A megvalósított *MATHEMATICA* programba kezdetnek az explicit integrálási sémát építettük be, ugyanis az időlépés csökkentésével a szimuláció pontossága elvileg tetszőleges mértékben növelhető, és egyelőre nem volt elsődleges szempont a program rövid futásideje.

4.5. Validáció

A kidolgozott végeselemes eljárás helyességének ellenőrzése két egyszerű mintapéldán keresztül, az eredményeknek az analitikus számításokkal való összevetésével történt. A két mintapélda során a (3.44a) egyenlettel megadott izotróp térfogati növekedést feltételeztünk az alábbi növekedési törvénnyel:

$$\dot{\lambda}^g = \alpha (\text{tr } \boldsymbol{\sigma} - \sigma_0). \quad (4.21)$$

A fenti egyenletben α a növekedés sebességét határozza meg, a test pedig a σ_0 egyensúlyi egyenértékű feszültség tartására törekszik. Az anyag összenyomhatatlanságának érvényesítésére a κ bulk modulusz értékét a végeselemes eljárásban gyakorlatilag végtelennek vettük.

4.5.1. Egytengelyű húzás

Az első mintapélda során egy tömb alakú összenyomhatatlan Neo-Hooke anyag x -tengely irányú húzását vizsgáljuk.

Egytengelyű igénybevétel esetén az alakváltozási gradiens a terhelés szimmetriájából adódóan

az alábbi formát ölti:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

A fenti egyenlet és $\mathbf{F}^g = \lambda^g \mathbf{I}$ alakjának ismeretében kifejezhető az alakváltozás rugalmas komponense:

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{F} \mathbf{F}^{g^{-1}} = \frac{1}{\lambda^g} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

Az összenyomhatatlanság megköveteli a

$$\det \mathbf{F}^e = \frac{\lambda_1 (\lambda_2)^2}{(\lambda^g)^3} = 1 \quad (4.24)$$

feltétel teljesülését, aminek segítségével a λ_2 megnyúlás kifejezhető λ_1 és λ^g függvényében:

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{(\lambda^g)^3}{\lambda_1}}. \quad (4.25)$$

A rugalmas bal oldali Cauchy–Green-féle deformációs tenzor ekkor:

$$\mathbf{b}^e = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{eT} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda^g}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda^g}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda^g}{\lambda_1} \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

amelynek ismeretében a (3.39b) egyenlet felhasználásával meghatározható a Cauchy-féle feszültségtenzor:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda^g}\right)^2 - \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{b}^e + p & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda^g}{\lambda_1} - \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{b}^e + p & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda^g}{\lambda_1} - \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{b}^e + p \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

A p belső hidrosztatikai feszültség meghatározásához felhasználjuk a $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ perem-

feltételeket:

$$\frac{\lambda^g}{\lambda_1} - \frac{1}{3} \operatorname{tr} \mathbf{b}^e + p = 0 \quad \implies \quad p = \frac{1}{3} \operatorname{tr} \mathbf{b}^e - \frac{\lambda^g}{\lambda_1}. \quad (4.28)$$

A kapott kifejezést behelyettesítve a $\boldsymbol{\sigma}$ feszültség (4.27) képletébe egyedül az x -irányú komponens marad nemzérus értékű:

$$\sigma_{11} = \mu \left[\left(\frac{\lambda_1}{\lambda^g} \right)^2 - \frac{\lambda^g}{\lambda_1} \right]. \quad (4.29)$$

Végül a fenti egyenletet behelyettesítve a (4.21) növekedési törvénybe, eljutunk a növekedési folyamatot leíró differenciálegyenlethez:

$$\dot{\lambda}^g = \alpha (\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} - \sigma_0) = \alpha \cdot \mu \left[\left(\frac{\lambda_1}{\lambda^g} \right)^2 - \frac{\lambda^g}{\lambda_1} \right] - \alpha \sigma_0. \quad (4.30)$$

A mintapéldában egy $\mu = 20 \text{ MPa}$, $\alpha = 0.02 \text{ MPa}^{-1} \text{ s}^{-1}$, és $\sigma_0 = 0 \text{ MPa}$ tulajdonságokkal rendelkező anyagot feltételezünk. Az egytengelyű húzást az x -irányú megnyúlás előírásával valósítottuk meg:

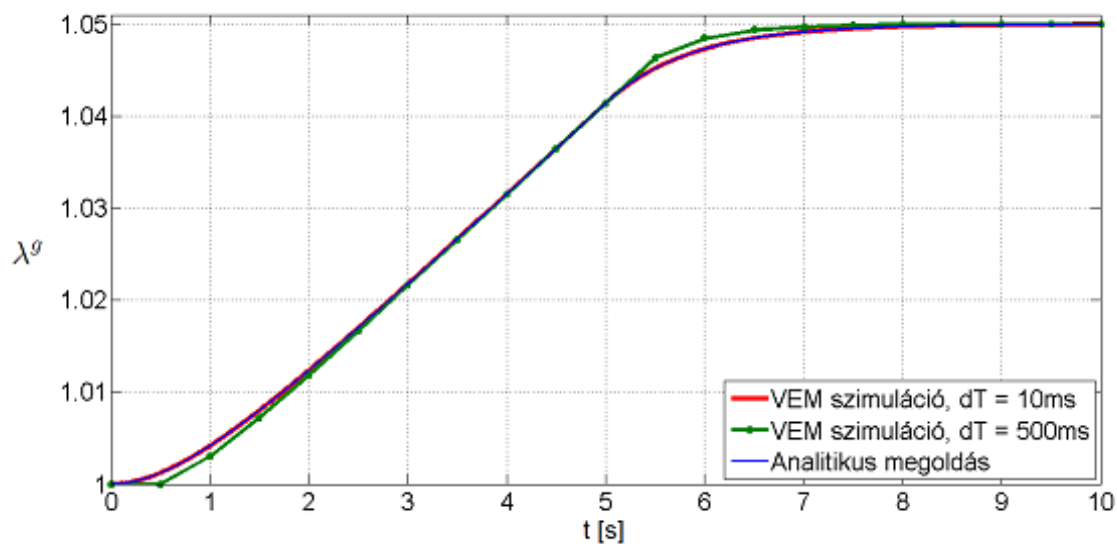
$$\lambda_1(t) = \begin{cases} \lambda_1 = 1 + 0.01t, & t < 5 \text{ s} \\ \lambda_1 = 1.05, & t \geq 5 \text{ s} \end{cases}. \quad (4.31)$$

Az analitikus eredményeket a $\lambda_1(t)$ függvény ismeretében a (4.30) egyenlet numerikus integrálásával kaphatjuk meg. A növekedési szorzó és az axiális feszültség időfüggvényeit, illetve ezek összevetését a *MATHEMATICA* program eredményeivel a 3.a és 3.b ábrák mutatják. Látható módon a növekedési szorzó tart a (4.30) egyenlet stacionárius, $\dot{\lambda}^g = 0$ feltételből kiszámítható $\lambda^g = 1.05$ értékéhez, és a két eredmény gyakorlatilag teljesen megegyezik.

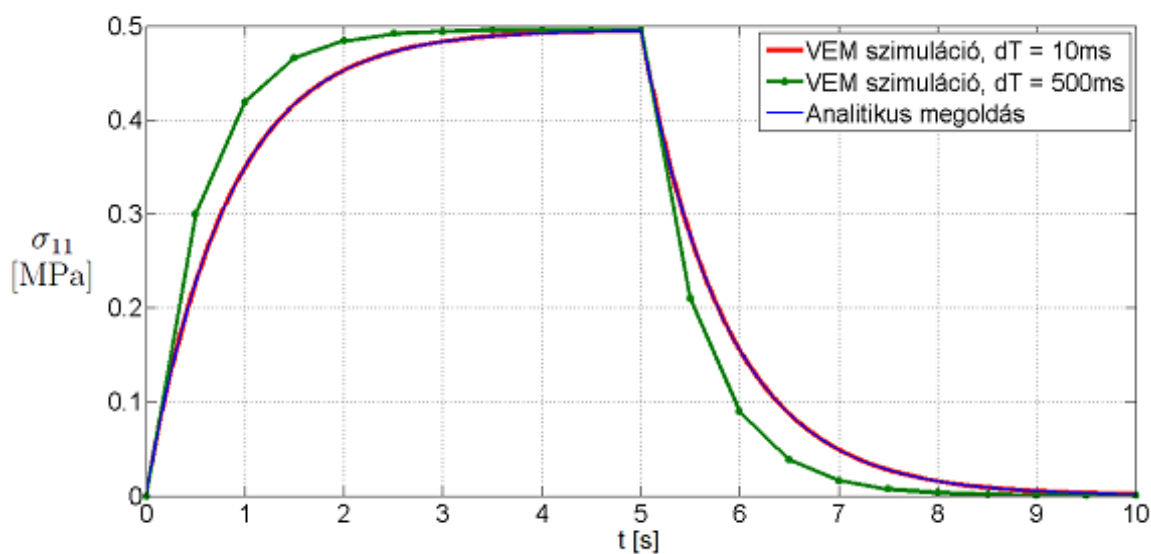
Érdemes megjegyezni, hogy a növekedés elhanyagolásával, azaz $\alpha = 0$ esetén visszkapjuk a síkfeszültség állapotú összenyomhatatlan Neo-Hooke anyagok egytengelyű húzásából ismert

$$\sigma_{11} = \mu \left[(\lambda_1)^2 - \frac{1}{\lambda_1} \right] \quad (4.32)$$

összefüggést [5], azaz a végeselemes program alkalmas növekedés nélküli anyagok modellezésére is.



3.a ábra. A növekedési szorzó időbeli alakulása egytengelyű húzás esetén.



3.b ábra. A húzófeszültség időfüggvénye egytengelyű igénybevétel esetén.

4.5.2. Egyszerű nyírás

A második mintapélda során egy síkfeszültség állapotú tömb alakú összenyomhatatlan Neo-Hooke anyag egyszerű nyírását vizsgáljuk.

A nyírás során megszabjuk a test alakját az xy -síkban; az alakváltozási gradiens tehát

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

ahol γ a nyírás mértékével arányos. A vizsgált térfogati növekedés az előző példához hasonlóan izotróp, $\mathbf{F}^g = \lambda^g \mathbf{I}$. Az alakváltozás rugalmas komponense ekkor:

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{F} \mathbf{F}^{g^{-1}} = \frac{1}{\lambda^g} \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

A rugalmas összenyomhatatlanság feltételét felírva

$$\det \mathbf{F}^e = \frac{\lambda_3}{(\lambda^g)^3} = 1, \quad (4.35)$$

amiből könnyen kifejezhetjük a λ_3 megnyúlást a növekedési szorzóval:

$$\lambda_3 = (\lambda^g)^3. \quad (4.36)$$

A fenti egyenletekből a rugalmas bal oldali Cauchy–Green-féle deformációs tenzor:

$$\mathbf{b}^e = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{eT} = \frac{1}{(\lambda^g)^2} \begin{bmatrix} 1 + \gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda^g)^6 \end{bmatrix}, \quad (4.37)$$

amelynek ismeretében az (3.39b) egyenlet felhasználásával kifejezhető a Cauchy-féle feszültségtenzor:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mu}{(\lambda^g)^2} \begin{bmatrix} 1 + \gamma^2 - \text{tr } \mathbf{b}^e + p & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 - \text{tr } \mathbf{b}^e + p & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda^g)^6 - \text{tr } \mathbf{b}^e + p \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

A síkfeszültségi állapot által szabott $\sigma_{33} = 0$ peremfeltétel segítségével meghatározhatjuk a hidrosztatikai nyomást:

$$p = \text{tr } \mathbf{b}^e - (\lambda^g)^6. \quad (4.39)$$

Így végül a Cauchy-féle feszültség síkbeli, nemzérus komponensei:

$$\bar{\sigma} = \frac{\mu}{(\lambda^g)^2} \begin{bmatrix} 1 + \gamma^2 - (\lambda^g)^6 & \gamma \\ \gamma & 1 - (\lambda^g)^6 \end{bmatrix}. \quad (4.40)$$

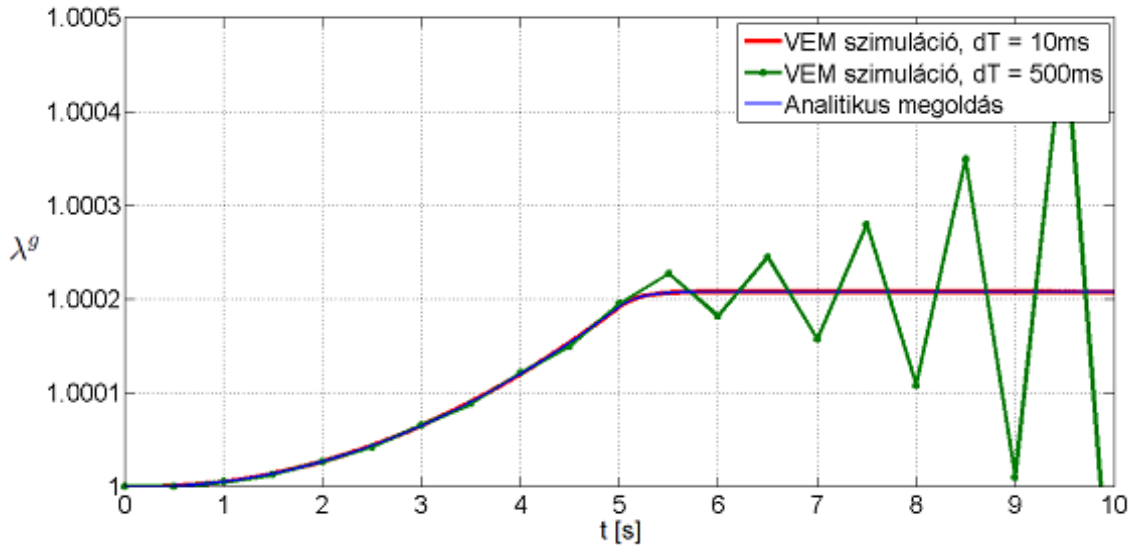
A fenti egyenletet behelyettesítve a (4.21) növekedési törvénybe megkapjuk a növekedési folyamatot leíró differenciálegyenletet:

$$\dot{\lambda}^g = \alpha (\text{tr } \sigma - \sigma_0) = \alpha \cdot \frac{\mu}{(\lambda^g)^2} [\gamma^2 + 2 - 2(\lambda^g)^6] - \alpha \sigma_0. \quad (4.41)$$

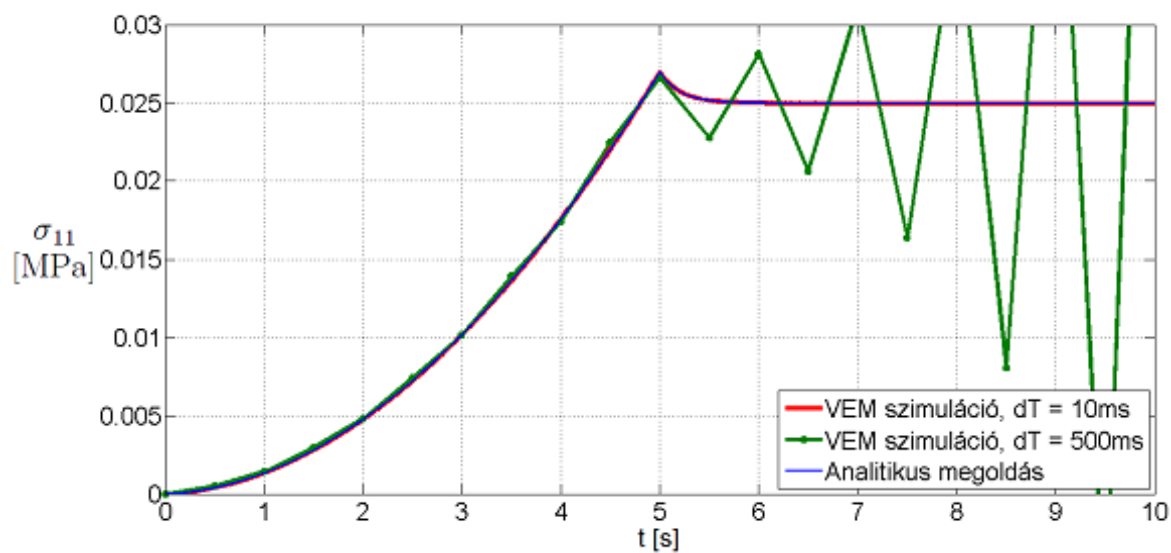
Az anyagi jellemzők értékei az előző mintapéldával megegyezően $\mu = 20 \text{ MPa}$, $\alpha = 0.02 \text{ MPa}^{-1}\text{s}^{-1}$, és $\sigma_0 = 0 \text{ MPa}$. A nyírás megvalósításához γ értékét írtuk elő az időben:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma = 0.01t, & t < 5 \text{ s} \\ \gamma = 0.05, & t \geq 5 \text{ s} \end{cases}. \quad (4.42)$$

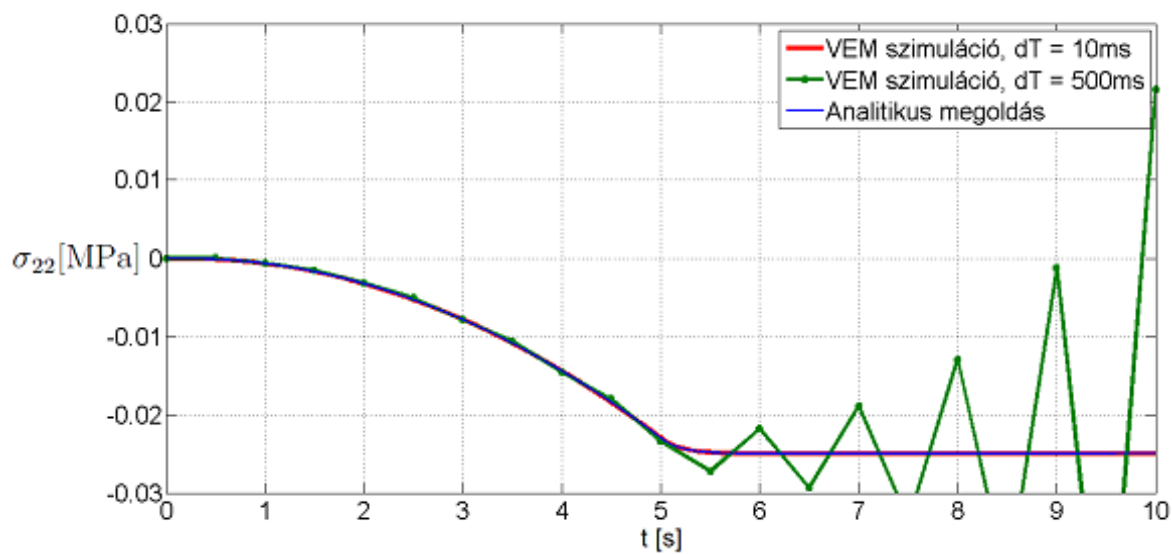
Az analitikus eredményeket $\gamma(t)$ ismeretében a (4.41) egyenlet numerikus integrálásával kaphatjuk meg. A növekedési szorzó és a különböző feszültségek időfüggvényeit, illetve ezek összevetését a *MATHEMATICA* program eredményeivel a 4.a, 4.b, és 4.c ábrák mutatják. Látható módon a növekedési szorzó tart a (4.41) egyenlet stacionárius, $\dot{\lambda}^g = 0$ feltételből kiszámítható $\lambda^g \approx 1.000208$ értékéhez, és a két számítás teljesen megegyezik. Az explicit integrálási sémából adódóan viszonylag nagy időlépés esetén stabilitási problémák lépnek fel.



4.a ábra. A növekedési szorzó időbeli alakulása egyszerű nyírás esetén.



4.b ábra. A σ_{11} feszültség változása az időben egyszerű nyírás esetén.



4.c ábra. A σ_{22} feszültség időfüggvénye egyszerű nyírás esetén.

5. FEJEZET

A végeselemes program alkalmazása

A megvalósított végeselemes eljárás gyakorlati alkalmazását csábító lenne egy orvostudományból vett példán keresztül szemléltetni. Sajnos azonban a *MATHEMATICA* környezetbeli implementáció nem elegendően gyors ahhoz, hogy összetett geometriájú, bonyolultabb testekre — pl. szívre, artériákra — belátható időn belül lefuttassa a számításokat. Holland et al. (2013) munkája nyomán [10] azonban egy botanikából ismert példával bemutatjuk, hogy a program már ebben az egyszerű formájában is képes bizonyos természeti jelenségek reprodukálására.

5.1. Rebarbara növekedése

A rebarbara egy lágyszárú növény, amelynek számos fajtát termesztik gyógynövényként vagy emberi fogyasztásra. A növény felismerhető nagy, háromszög alakú leveleiről, illetve az ezeket tartó lilás színű húsos száráról. A szár hosszirányú növekedése során a külső rétegek lassabban nőnek a belső rétegeknél, és ennek következtében a szárban belső reziduális feszültségek ébrednek. Így képes elegendően bemerevedni ahhoz, hogy a nagy leveleit elbírja. Az egyes rétegek eltérő növekedési sebességét kimutathatjuk a külső réteg lehámozásával; ekkor ugyanis ez a réteg összehúzódik és elhajlik kifelé, miközben a szár belseje megnyúlik és elvékonyodik az 5. ábrán látható módon.

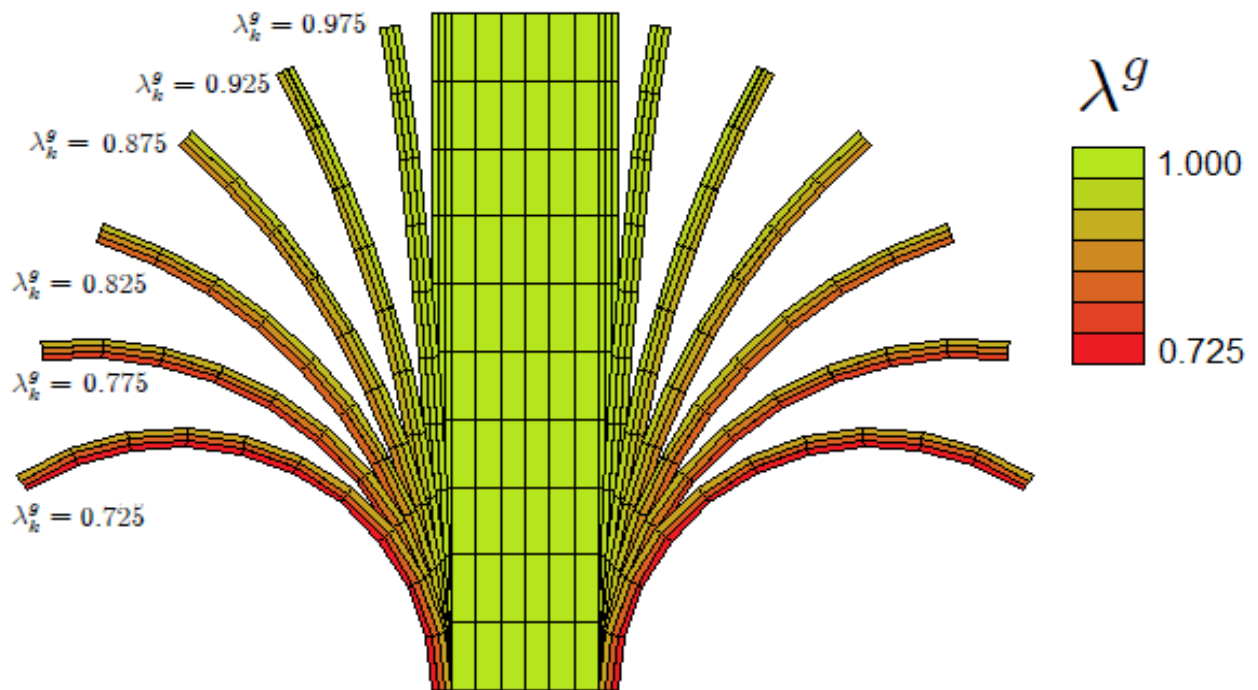


5 ábra. A rebarbara szár külső rétegének elhajlása és a belsejének megnyúlása a felszín lehámozása után. [10].

A jelenség reprodukálásához a végeselemes szimuláció során a rebarbara egy téglatest alakú, síkalakváltozási állapotú vékony metszetének a növekedését vizsgáltuk. A geometria szimmetriáját kihasználva elegendő egy ilyen metszet felét behálózni; ekkor peremfeltételként a szár alján lévő pontok mellett a szimmetriatengelyen elhelyezkedők megfelelő szabadsági fokait is le kell kötni. A szárat felépítő lágyszövetet közel összenyomhatatlan anyagnak tekintettük $\mu = 0.385 \text{ MPa}$ és $\kappa = 0.834 \text{ MPa}$ anyagjellemzőkkel [10]. A szálirányú növekedést egy (3.44c) alakú növekedési tenzorral írhatjuk le; a növekedés irányának az y -tengelyt választva ennek alakja:

$$\mathbf{F}^g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

A λ^g növekedési szorzó a szár belsejében nagyobb, mint a külső rétegekben, hiszen ott gyorsabban nő a szövet. Alapvetően ez az eltérés okozza a felszíni réteg kihajlását illetve a szár bemerevedését. A végeselemes szimuláció során a belső szálak megnyúlását egységnyinek választottuk, a szár felszínét pedig három vékony rétegre bontottuk, amelyekben kifelé haladva λ^g értéke lineárisan lecsökken a legkülső rétegben felvett λ_k^g értékig. A 6. ábrán ábrázoltuk a kihajló réteg egyensúlyi alakját különböző λ_k^g növekedési szorzók esetén; a kapott eredmények összhangban vannak az 5. ábrán látható képekkel. A szimulációt úgy is lefuttattuk, hogy a felszínt nem engedtuk a szár belsejétől leválni; ekkor a külső rétegek magukkal húzzák a belsőket, és a szár a tapasztalatoknak megfelelően összezsugorodik a 7. ábrán látható módon.



6 ábra. A rebarbara szár külső rétegének kihajlása különböző növekedési szorzók esetén.



7. ábra. A szár összehúzódása és bemerevedése $\lambda_k^g = 0.725$ esetén.

Az ábra alsó felében feltüntettük a növekedésmentes állapotot a kettő összehasonlításához.

6. FEJEZET

Összefoglalás

6.1. Eredmények összegzése

A dolgozat elsődleges célja az anyagnövekedés végeselemes modellezésének megismerése volt; a témában bármilyen nemű további fejlesztés kivitelezéséhez ugyanis ez alapvető fontossággal bír. A szakirodalomkutatás révén sikerült feltérképezni a tudományág mai helyzetét, és egy átfogó képet kaptunk a növekedés leírásának különböző lehetőségeiről. Ezek közül részletesen megvizsgáltuk az alakváltozási tenzor szorzat alakú felbontásán alapuló módszer elméleti hátterét, amelynek megvalósítására kidolgoztunk egy végeselemes eljárást *MATHEMATICA* környezetben. A program helyességéről egyszerű mintapéldákon keresztül győződünk meg, a gyakorlati felhasználásának lehetőségét pedig a rebarbara növekedése során tapasztalható jelenségek reprodukálásával szemléltettük.

A jelen munka során tehát összességében nyomon követhettük egy végeselemes eljárás kifejlesztésének a teljes folyamatát, az alapgondolatoktól egészen a megvalósításig. A növekedés modellezésén kívül a nemlineáris kontinuummechanika módszereit, pl. a megoldásra használt Newton–Raphson iterációt is megismertük. A megszerzett tapasztalatok és tudás nagymértékben elősegítik további kutatások és fejlesztések kivitelezését a végeselemes módszerek tudományának területén.

Fejlesztési lehetőségek

A dolgozat során bemutatott végeselemes módszert és ennek *MATHEMATICA* implementációját korántsem tekinthetjük egy befejezett munkának. Rövid távon a legfontosabb feladat a program felgyorsítása és megírása pl. az ilyen célokra gyakran használt Fortran programozási nyelvben, esetleg kihasználva a GPGPU programozás lehetőségét és előnyeit. Ezáltal képesek

lennénk sokkal több szabadsági fokú, bonyolultabb testek viselkedésének a részletes elemzésére. A programban továbbá egyelőre nem tudunk megadni felszín és térfogat mentén megoszló külső terheléseket; ezt a hiányosságot is minél hamarabb pótolni kell.

Hosszabb távon alapvetően a növekedés modellezésére elterjedt egyéb módszerek részletes megismerése jelent továbblépési lehetőséget. A dolgozatban bemutatott multiplikatív dekompozíció elvével önmagában ugyanis nem lehet pl. a szövetek belső szerkezetének és sűrűségének megváltozásával járó folyamatokat vizsgálni. Emiatt érdemes lenne utánanézni a nyílt rendszerek termodinamikáján vagy keverékelméleteken alapuló módszereknek, illetve hogy ezek miként kapcsolhatóak össze a multiplikatív dekompozíció elvével. A megvalósított végeselemes eljárások kísérletekkel való összevetése és validálása is sok kutatási lehetőséget biztosít, amelyek akár egy tudományos jelentőségű publikáció elkészítéséhez is vezethetnek.

A MELLÉKLET

Mellékletek

A1. Rugalmas érintő tenzorok

Az alábbiakban kifejtjük a 3.2.3. fejezetben tárgyalt, közel összenyomhatatlan Neo-Hooke anyagok rugalmas érintő tenzorait a növekedési és a pillanatnyi konfigurációban [5]:

$$\mathbf{C}^e = \widehat{\mathbf{C}}^e + \mathbf{C}_p^e + \mathbf{C}_\kappa^e; \quad (\text{A1})$$

$$\widehat{\mathbf{C}}^e = \frac{2}{3}\mu \det(\mathbf{C}^e)^{-1/3} \left[\text{tr}(\mathbf{C}^e) \mathbf{I} - \mathbf{I} \otimes \mathbf{C}^{e-1} - \mathbf{C}^{e-1} \otimes \mathbf{I} + \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{C}^e) \mathbf{C}^{e-1} \otimes \mathbf{C}^{e-1} \right], \quad (\text{A2})$$

$$\mathbf{C}_p^e = p J^e \left[\mathbf{C}^{e-1} \otimes \mathbf{C}^{e-1} - 2 \mathbf{I} \right], \quad (\text{A3})$$

$$\mathbf{C}_\kappa^e = \kappa J^{e2} \mathbf{C}^{e-1} \otimes \mathbf{C}^{e-1}, \quad (\text{A4})$$

ahol a bevezetett $\mathcal{I}$ negyedrendű tenzor:

$$\mathcal{I} = -\frac{\partial \mathbf{C}^{e-1}}{\partial \mathbf{C}^e}, \quad (\text{A5})$$

$$\mathcal{I}_{IJKL} = \frac{1}{2} \left[\left(\mathbf{C}^{e-1} \right)_{IK} \left(\mathbf{C}^{e-1} \right)_{JL} + \left(\mathbf{C}^{e-1} \right)_{IL} \left(\mathbf{C}^{e-1} \right)_{JK} \right]. \quad (\text{A6})$$

A rugalmas érintő tenzor a pillanatnyi konfigurációban:

$$\mathbf{\varsigma} = \widehat{\mathbf{\varsigma}} + \mathbf{\varsigma}_p + \mathbf{\varsigma}_\kappa; \quad (\text{A7})$$

$$\widehat{\mathbf{\varsigma}} = \frac{2}{3}\mu J^{e-5/3} \left[\text{tr}(\mathbf{b}^e) \boldsymbol{\iota} - \mathbf{b}^e \otimes \mathbf{I} - \mathbf{I} \otimes \mathbf{b}^e + \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{b}^e) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right], \quad (\text{A8})$$

$$\mathbf{\varsigma}_p = p [\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - 2 \boldsymbol{\iota}], \quad (\text{A9})$$

$$\mathbf{\varsigma}_\kappa = \kappa J^e \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}, \quad (\text{A10})$$

ahol a bevezetett $\boldsymbol{\iota}$ negyedrendű tenzor:

$$\boldsymbol{\iota} = \Phi_*^e[\boldsymbol{\mathcal{I}}], \quad (\text{A11})$$

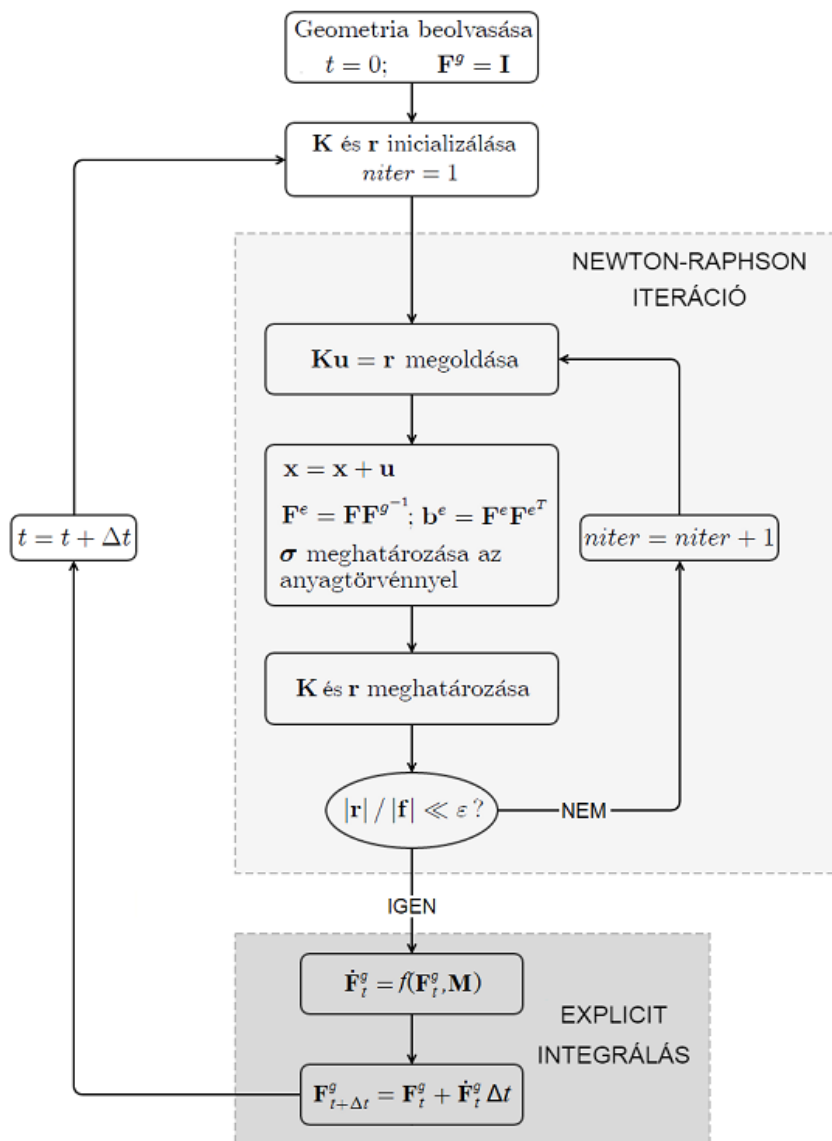
$$\iota_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \quad (\text{A12})$$

A végeselemes eljárás során a $\hat{\boldsymbol{\varsigma}}$ és $\boldsymbol{\varsigma}_p$ érintő tenzorok pillanatnyi konfigurációbeli alakját használjuk a számításokhoz; ezek indexes formája:

$$\hat{\varsigma}_{ijkl} = \frac{2}{3}\mu J^{e^{-5/3}} \left[\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{b}^e) (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - b_{ij}^e \delta_{kl} - \delta_{ij} b_{kl}^e + \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{b}^e) \delta_{ij} \delta_{kl} \right], \quad (\text{A13})$$

$$\boldsymbol{\varsigma}_p = p (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (\text{A14})$$

A2. A végeselemes algoritmus folyamatábrája



A2. A végeselemes eljárás algoritmusának a folyamatábrája.

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] ALASTRUE, V., MARTINEZ, M. A., and DOBLARE, M. Modelling adaptative volumetric finite growth in patient-specific residually stressed arteries. *Journal of Biomechanics*, 2008, vol. 41, no. 8, p.1773-1781.
- [2] ALBERTS, B., JOHNSON, A., LEWIS, J., RAFF, M., ROBERTS, K., and WALTER, P. Molecular biology of the cell. 5th ed. Garland Science, 2007. 1392 p. ISBN-13: 978-0815341055
- [3] AMBROSI, D., ATESHIAN, G. A., ARRUDA, E. M., COWIN, S. C., DUMAIS, J., GORIELY, A., HOLZAPFEL, G. A. ET AL. Perspectives on biological growth and remodeling. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2011, vol. 59, no. 4, p. 863-883.
- [4] MARTINE, B. A. and GORIELY, A. Growth and instability in elastic tissues. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2005, vol. 53, no.10, p. 2284-2319.
- [5] BONET, J. and WOOD, R. Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis. 2nd ed. Cambridge University Press, 2008. 318 p. ISBN-13 978-0-521-83870-2.
- [6] BUGANZA TEPOLE, A., JOSEPH PLOCH, C., WONG, J., GOSAIN, A. K., and KUHL, E. Growing skin: a computational model for skin expansion in reconstructive surgery. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2011, vol. 59, no. 10, p. 2177-2190.
- [7] COWIN, S. C., and HEGEDUS, D. H. Bone remodeling I: theory of adaptive elasticity. *Journal of Elasticity*, 1976, vol. 6, no. 3, 313-326.
- [8] GRYTZ, R., GIRKIN, C. A., LIBERTIAUX, V., and DOWNS, J. C. Perspectives on biomechanical growth and remodeling mechanisms in glaucoma. *Mechanics Research Communications*, 2012, vol. 42, p. 92-106.
- [9] HIMPEL, G., KUHL, E., MENZEL, A., and STEINMANN, P. Computational modelling of isotropic multiplicative growth. *Comp Mod Eng Sci*, 2005, vol. 8, p. 119-134.
- [10] HOLLAND, M. A., KOSMATA, T., GORIELY, A., and KUHL, E. On the mechanics of thin films and growing surfaces. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2013, doi. 1081286513485776.

- [11] HSU, F.H. The influences of mechanical loads on the form of a growing elastic body. *Journal of Biomechanics*, 1968, vol. 1, no. 4, p. 303-311.
- [12] JEMAL, A., WARD, E., HAO, Y., and THUN, M. Trends in the leading causes of death in the United States, 1970-2002. *Jama*, 2005, vol. 294, no. 10, p. 1255-1259.
- [13] KLEPACH, D., LEE, L. C., WENK, J. F., RATCLIFFE, M. B., ZOHDI, T. I., NAVIA, J. L., GUCCIONE, J. M. ET AL. Growth and remodeling of the left ventricle: A case study of myocardial infarction and surgical ventricular restoration. *Mechanics Research Communications*, 2012, vol. 42, p. 134-141.
- [14] KUHL, E. Growing matter: A review of growth in living systems. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2014, vol. 29, p. 529-543.
- [15] KUHL, E., MENZEL, A., and STEINMANN, P. Computational modeling of growth. *Computational Mechanics*, 2003, vol. 32, no. 1-2, p. 71-88.
- [16] KUHL, E., and STEINMANN, P. Theory and numerics of geometrically non-linear open system mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, vol. 58, no. 11, p. 1593-1615.
- [17] LIU, Y., ZHANG, H., ZHENG, Y., ZHANG, S., CHEN, B.: A Nonlinear Finite Element Model for the Stress Analysis of Soft Solids with a Growing Mass. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, vol. 57, no. 17, p. 2964–2978
- [18] LUBARDA, V. A., and HOGER, A. On the mechanics of solids with a growing mass. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, vol. 39, no. 18, p. 4627-4664.
- [19] MENZEL, A., and KUHL, E. Frontiers in growth and remodeling. *Mechanics Research Communications*, 2012, vol. 42, p. 1-14.
- [20] PANG, H., SHIWALKAR, A. P., MADORMO, C. M., TAYLOR, R. E., ANDRIACCHI, T. P., and KUHL, E. Computational modeling of bone density profiles in response to gait: a subject-specific approach. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, 2012, vol. 11, no. 3-4, p. 379-390.
- [21] RODRIGUEZ, E. K., HOGER, A., and MCCULLOCH, A. D. Stress-dependent finite growth in soft elastic tissues. *Journal of Biomechanics*, 1994, vol. 27, no. 4, p. 455-467.
- [22] SKALAK, R., FARROW, D. A. , and HOGER, A. Kinematics of surface growth. *Journal of Mathematical Biology*, 1997, vol. 35, no. 8, p. 869-907.

- [23] SKALAK, R., DASGUPTA, G., MOSS, M., OTTEN, E., DULLEMEIJER, P., and VILMANN, H. Analytical description of growth. *Journal of Theoretical Biology*, 1982, vol. 94, no. 3, p. 555-577.
- [24] TAYLOR, R. E., ZHENG, C., JACKSON, R. P., DOLL, J. C., CHEN, J. C., HOLZBAUR, K. R. S., BESIER, T., and KUHL, E. The phenomenon of twisted growth: Humeral torsion in dominant arms of high performance tennis players. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 2009, vol. 12, no. 1, p. 83-93.
- [25] THOMPSON, D. W. On growth and form. 2nd ed. Cambridge University Press, 1942. 1116 p. ISBN-13: 978-1463587352
- [26] VOLOKH, K. Y. Stresses in growing soft tissues. *Acta Biomaterialia*, 2006, vol. 2, no. 5, p. 493-504.
- [27] WAFFENSCHMIDT, T., and MENZEL, A. Application of an anisotropic growth and remodelling formulation to computational structural design. *Mechanics Research Communications*, 2012, vol. 42, p. 77-86.