

M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Gépészmérnöki Kar

Műszaki Mechanikai Tanszék

Elektroaktív anyagok analitikus, numerikus és kísérleti vizsgálata

Szerző: Sótér Gábor

MSc I. évfolyam

2014

Konzulens:

Dr. Szabó László

Műszaki Mechanikai Tanszék

Tartalomjegyzék

1. BEVEZETÉS	1
1.1. A dolgozat előzményeinek összefoglalása	1
1.2. A dolgozat rövid tartalmi áttekintése	2
1.3. A dolgozatban alkalmazott jelölések	3
1.3.1. Fizikai mennyiségek	3
1.3.2. Matematikai operátorok, műveletek	4
1.3.3. Mértékegységek	4
2. SZAKIRODALMI ÁTTEKINTÉS	5
2.1. Az elektro-elasztikus anyagmodellek áttekintése	5
2.2. Izogeometrikus analízis	6
2.3. Alkalmazási lehetőségek	7
3. AZ ELMÉLETI ALAPOK ÁTTEKINTÉSE	13
3.1. Kontinuummechanikai összefoglaló	13
3.1.1. Referencia és pillanatnyi konfiguráció	13
3.1.2. Alakváltozási gradiens és deformációs tenzorok	15
3.1.3. Feszültségtenzorok	15
3.2. Hiperelasztikus testek anyagmodelljei	16
3.3. Az elektromos tér mezőegyenleteinek összefoglalása	18
3.3.1. Alapfogalmak bevezetése	18
3.3.2. Az elektrosztatika első és második egyenlete	19
3.4. Az elektro-elasztikus anyagmodellek bemutatása	19
3.4.1. Elektro-elasztikus Neo-Hooke anyagtvörvény	19
3.5. Egyensúlyi egyenlet	20

4. A NUMERIKUS SZÁMÍTÁSI MODELL	23
4.1. Izogeometrikus analízis	23
4.1.1. Geometriai modellezés	23
4.1.2. A szimulációhoz szükséges mennyiségek előkészítése	33
4.2. A virtuális munka elve	35
4.3. Alapegyenletek	36
4.4. A nemlineáris számítási eljárás ismertetése	38
5. ANALITIKUS MEGOLDÁSOK	43
6. ANALITIKUS ÉS NUMERIKUS EREDMÉNYEK ÖSSZEHA-SONLÍTÁSA	49
7. KÍSÉRELETI VIZSGÁLATOK	53
7.1. Felhasznált anyagok és eszközök	53
7.2. Körkörös aktuátor elkészítése	55
7.3. Körkörös aktuátor alakváltozásának mérése	56
8. MÉRÉSI ÉS NUMERIKUS EREDMÉNYEK ÖSSZEHA-SONLÍTÁSA	59
9. ÖSSZEFOGLALÁS	63
9.1. A dolgozat eredményeinek összefoglalása	63
9.2. A dolgozat eredményeinek továbbfejlesztési lehetőségei	63
9.3. Köszönetnyilvánítás	64
A. Anyagmodellek összefüggései	65
A.1. Az anyagmodell levezetett összefüggései	65
A.1.1. Energiafüggvény deriváltjai	65
A.1.2. Konstitutív érintő tenzorok a kezdeti konfiguráción	66
A.1.3. Konstitutív érintő tenzorok a pillanatnyi konfiguráción	67
A.1.4. Feszültségtenzor és elektromos eltolás vektor	70
IRODALOMJEGYZÉK	71

Első fejezet

BEVEZETÉS

1.1. A dolgozat előzményeinek összefoglalása

Elektroaktív anyagoknak nevezzük azokat a polimereket, melyek elektromos hatásra alakválnak. Fő felhasználási területük a lágy robotika, mely olyan rugalmas, lágy anyagokkal és struktúrákkal foglalkozik, melyek többek között lehetővé teszik az ember-gép interakciót.

A dolgozat megírásánál az volt a célom, hogy egy átfogó képet adjak az elektroaktív anyagok terén szerzett tapasztalataimról, így a dolgozat egyaránt érinti az ezen anyagokból készült aktuátorok gyártását, tesztelését, továbbá szimulációjukhoz szükséges fizikai összefüggéseket és numerikus módszereket.

2013 őszén egy korábbi TDK dolgozat keretében összefoglaltam az elektroaktív anyagok fizikai hátterét, illetve bemutattam a numerikus szimulációjukhoz szükséges nemlineáris véges-elemes algoritmust, melyet analitikus megoldásokkal validáltam. Az eredményeket továbbfejlesztve BSc szakdolgozatomban különböző elektroaktív aktuátorok véges-elemes modelljeit és a szimulációjuk eredményét mutattam be. A jelenlegi dolgozat tartalmaz olyan részeket, melyeket az előbb említett munkáimban már közöltem, ellenben ezek elengedhetetlenek a teljes megértéshez.

2014 tavaszán a véges-elemes kódot továbbfejlesztettem izogeometrikus eljárássá, mely immáron lehetővé teszi komplex, bonyolult geometriájú elektroaktív aktuátorok egyszerű numerikus modellezését.

2014 nyarán Campus Hungary ösztöndíjjal részt vehettem egy hét hetes nyári szakmai gyakorlaton az Egyesült Királyságban található Bristol Robotics Laboratory intézményében, ahol lehetőséget kaptam az elektroaktív anyagok gyártási és tesztelési folyamatainak eljsajátítására. Ezen tapasztalatok alapján kiegészítettem a numerikus eljárásomat olyan algoritmusokkal, ame-

lyek elengedhetetlenek a valós aktuátorok szimulációihoz.

1.2. A dolgozat rövid tartalmi áttekintése

A dolgozat hét fő fejezetre tagolódik: *Szakirodalmi áttekintés*, *Elméleti alapok áttekintése*, *Numerikus számítási modell*, *Analitikus megoldások*, *Analitikus és numerikus eredmények összehasonlítása*, *Kísérleti vizsgálatok*, *Mérési és numerikus eredmények összehasonlítása*.

Először a téma szakirodalmának áttekintése történik: bemutatásra kerülnek az elektro-elasztikus probléma fizikai hátterével illetve az izogeometrikus anyagokkal foglalkozó munkák, továbbá az elektroaktív anyagok legújabb alkalmazási lehetőségei.

A következő, *Elméleti alapok áttekintése* című fejezetben tisztázásra kerülnek az alapvető kontinuummechanikai és elektrosztatikai összefüggések, megtörténik az elektro-elasztikus anyagmodell illetve a kapcsolt problémára felhasznált egyensúlyi egyenlet leírása.

A *Numerikus számítási modell* fejezet először a virtuális munka elvének kapcsolt problémára történő felírásával foglalkozik. Ezután bemutatásra kerülnek a nemlineáris végelelemes eljáráshoz felhasznált mennyiségek (merevségi mátrix, belső erővektor stb.), az alkalmazott iterációs algoritmus, továbbá az izogeometrikus analízis összefüggései és implementációjának főbb lépései.

Az *Analitikus és numerikus megoldások* fejezet olyan példát ír le, mely esetén a megoldást két lépésben, először egy mechanikai, majd egy elektromos terhelési lépéssel kell keresni.

A *Kísérleti vizsgálatok* fejezet a Bristol Robotics Laboratory intézményében szerzett tapasztalatokat foglalja össze.

Az utolsó *Mérési és numerikus eredmények összehasonlítása* című fejezet bemutatja a leggyártott aktuátor izogeometrikus modelljét és összehasonlítja a numerikus számítás eredményeit a mért adatokkal.

1.3. A dolgozatban alkalmazott jelölések

1.3.1. Fizikai mennyiségek

F	Alakváltozási gradiens tenzor
C	Jobb oldali Cauchy-Green-féle deformációs tenzor
b	Finger-féle deformációs tenzor
J	Az alakváltozási gradiens determinánsa
E	Elektromos térerősség vektor
D	Elektromos eltolási vektor
P	Polarizációs vektor
μ_0	A vákuum permeabilitása
μ, λ	Lamé-féle állandók
K	Összenyomhatósági modulus
c_1, c_2	Anyagtörvény konstansai
ε_0	A vákuum permittivitása
I	Másodrendű egységtenzor
K	Merevségi mátrix
l	A sebességgradiens
T	Első Piola-Kirchhoff-féle feszültségtenzor
S	Második Piola-Kirchhoff-féle feszültségtenzor
σ	Cauchy-féle feszültségtenzor
σ^{tot}	Teljes feszültségtenzor a pillanatnyi konfiguráción
$\mathbf{T}^{tot}$	Teljes feszültségtenzor a kezdeti konfiguráción
u	Elmozdulás vektor
ϕ	Elektromos potenciál

1.3.2. Matematikai operátorok, műveletek

A következő táblázatok a dolgozatban alkalmazott legfontosabb műveleteket, matematikai mennyiségeket és definíciókat tartalmazzák.

$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j$	
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i$	
$(\mathbf{C} \cdot \mathbf{D})_{ij} = C_{ik} D_{kj}$	
$\mathbf{C} : \mathbf{D} = C_{ij} D_{ij}$	
$(\mathbf{C} \boxtimes \mathbf{D})_{ijkl} = C_{ik} D_{jl}$	
$(\mathbb{A} : \mathbf{D})_{ij} = A_{ijkl} D_{kl}$	
grad, Grad	Gradiens operátor
<i>div, Div</i>	Divergencia operátor
rot, Rot	Rotáció operátor

Itt $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokat, $\mathbf{C}$ és $\mathbf{D}$ másodrendű, $\mathbb{A}$ negyedrendű tenzorokat jelent, továbbá a nagybetűvel kezdődő operátorok a kezdeti konfiguráción, míg a kisbetűvel kezdődő operátorok a pillanatnyi konfiguráción vannak értelmezve.

δ_{ij}	Kronecker delta
ε_{ijk}	Levi-Civita szimbólum
$()^T$	transzponált
$\det()$	determináns
$\text{tr}()$	trace (első skalárinvariáns)
$()^{-1}$	inverz

1.3.3. Mértékegységek

Fizikai mennyiség	Mértékegység neve	Jelölés
Elmozdulás	Méter	$[m]$
Erő	Newton	$[N]$
Töltésmennyiség	Coulomb	$[C]$
Mechanikai feszültség	Pascal	$[Pa]$
Elektromos feszültség	Volt	$[V]$

Második fejezet

SZAKIRODALMI ÁTTEKINTÉS

2.1. Az elektro-elasztikus anyagmodellek áttekintése

Az elektro-elasztikus témakörrel foglalkozó publikációk száma az 1900-as évek második felétől napjainkig exponenciális növekedést mutat. Elsők között Toupin írta le ezen anyagok viselkedését [36],[37],[38]. Nagy alakváltozásokkal foglalkozott, munkájában többek között az elektro- és magnetooptikai hatást, az elektro-elasztikus feszültségtenzor felépítését továbbá ezen problémák variációs és egyensúlyi egyenleteit vizsgálta. 1963-ban Jordan és Eringen foglalta össze a termo-magneto-elektro-elasztikus anyagokat leíró egyenleteket [11],[12]. Eringen további munkássága meghatározó volt ezen a területen: olyan energiafüggvényt írt le (illetve hozzájuk tartozó konstitutív egyenleteket), melynek változóiban egyaránt szerepeltek mechanikai és elektromos jellemzők [9], továbbá variációs egyenleteket fogalmazott meg. 1965-ben Eringen és Dixon elkészítették a Dixon-Eringen modellt, a vezetőképessé polarizálható és felmágnesezhető testet, mely izotróp elektro-elasztikus tulajdonsággal rendelkezik [10]. A korai kutatók közé tartozott Mindlin, aki az elektro-elasztikus anyagok polarizációjával foglalkozott, továbbá az ioncserén alapuló elektroaktív kristályok mechanikáját írta le [56],[57].

1989-ben jelent meg az első kapcsolt feladatokat összefoglaló könyv [8], mely számos problémakört érintett, így az elektro- ill. magneto-elasztikus anyagok, mágneses hatásra aktiválódó folyadékok, emlékező anyagok is említésre kerülnek. Rajagopal, Wineman és Ruzicka nemlineáris elektroaktív anyagok és viszkózus elektoreológiai folyadékok matematikai leírásával foglalkozott, munkájukban felhasználták Eringen eredményeit, továbbfejlesztették azokat. Az általuk publikált anyagokban analitikus megoldásokat közölnek egyszerű terhelési esetekre [53], [54], [55].

Az elektro-elasztikus egyenletek, melyek a dolgozat elméleti alapjait képezik az új évezredben

kerültek tisztázásra. Jelentős eredményeket ért el a Dorfmann-Ogden szerzőpáros [13],[14], akik újrafogalmazták azokat kontinuummechanikai és az elektromágneses teret leíró egyenletek, melyek nagy alakváltozásra érvényesek, továbbá olyan energiafüggvényt használtak, melyben az elektromos térerősség vektor és az alakváltozási gradiens szerepelt változóként. Ezt Dorfmann továbbfejlesztette: felírástól függően az energiafüggvény tartalmazhatja a polarizáció vagy az elektromos eltolás vektorát is [15]. Bustamante átdolgozta Dorfmann és Ogden elméletét, transzverzálisan izotróp anyagokra alkalmazta azt [23]. Később hárman együtt dolgoztak tovább, variációs egyenleteket fogalmaztak meg illetve az elektromos hatásból származó testre ható erőt és az ebből kialakuló Maxwell-feszültségi tenzort vizsgálták [24],[25]. Az anyag fizikai leírásának egy egészen új módja található Skatulla publikációjában, melyben már az alakváltozási gradiens szintjén felbontják a problémát külön mechanikai és elektromos hatásra [58]. Az elektro-elasztikus anyagok végeselemes leírásának úttörői a nürnbergi egyetem kutatói Duc-Khoi Vu és Paul Steinmann. Számos publikációjukban foglalkoznak ezen témával, a dolgozat végeselemes tartalma is ezekre épül [40],[41],[42],[43],[44],[45].

2.2. Izogeometrikus analízis

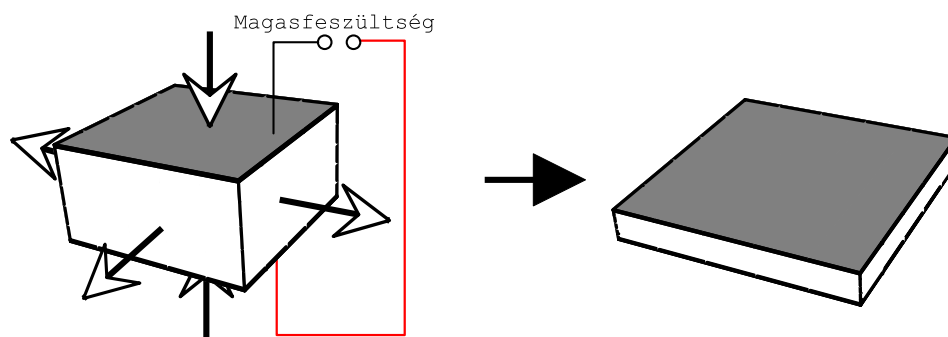
Az izogeometrikus analízis a legújabb szimulációs módszerek közé tartozik. Előnye, hogy a numerikus szimulációhoz szükséges mennyiségek előállításához nincs szükség a hagyományos végeselemes eljárásoknál alkalmazott hálózási műveletre, hiszen a szimulációhoz ugyanazokat a geometriát leíró mennyiségeket használjuk, mint a geometriai modellezéshez. Az eljárást Thomas J.R. Hughes, a University of Texas kutatója és csapata fejlesztette ki. Az első publikációt [71] 2005-ben jelentették meg a témában, melyben a modern számítógépes modellezés és végeselemes szimuláció technikáit egy eljárásba integrálták. A legtöbb mai számítógépes modellező program nem-uniform racionális B-spline (NURBS) alapú görbéket, felületeket és testeket használ a geometria leírásához. Ezen geometriai objektumok matematikai hátterét részletesen tárgyalja Piegl és Tiller könyve [73], mely alapkőnek tekinthető a témában.

Azon tudományterületek, melyekben végeselemes, vagy ahhoz hasonló numerikus eljárásokat használata mindennapos dolognak számított, azok most egy új, hatékonyabb eljárással lettek gazdagabbak, így az izogeometrikus analízis hatékonyságát többek között rugalmasságtani [79], képlékenységtani [78], rezgéstani [74], illetve áramlástan [75], [76], [77] problémák megoldásánál is vizsgálták.

Az izogeometrikus analízis alapművének a T.J.R. Hughes, J.A.Cottrell illetve Y. Bazilevs által írt ”*Isogeometric analysis: Towards integration CAD and FEA*” című könyv tekinthető [72].

2.3. Alkalmazási lehetőségek

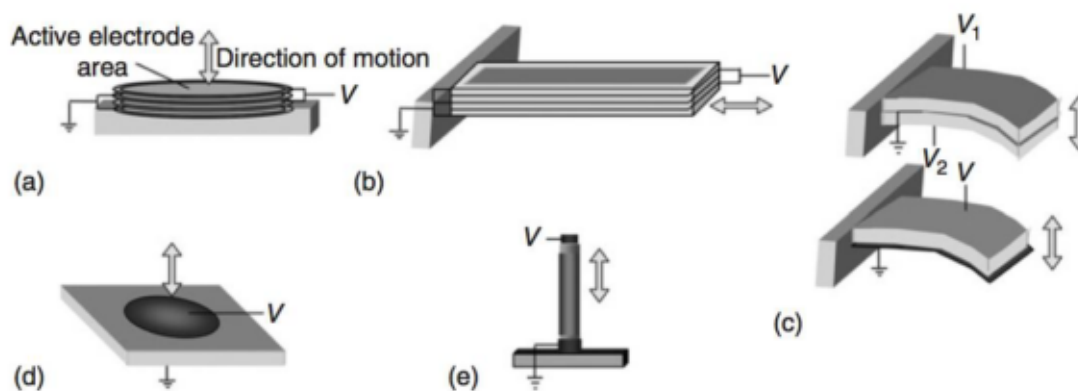
Az elektroaktív anyagok két fő csoportra oszthatók: beszélhetünk ionos illetve dielektromos elektroaktív polimerről. Előbbi alakváltozását az elektromos áram hatására létrejött ionelmozdulás hozza létre, aktiválásukhoz jellemzően kis feszültségre (3-5 V) van szükség, az alakváltozás, illetve az aktuátor által kifejtett erő szintén kicsi [61]. Többnyire nedves környezetben kell tárolni őket (ioncserélt víz), ellenben elvesztik az elektroaktív tulajdonságukat. Ezzel szemben a dielektromos anyagok nagy alakváltozásra és erő kifejtésre képesek, habár ezek eléréséhez magasfeszültség (3-5 kV) alkalmazása szükséges [61]. A jellemzően nagyon vékony, legtöbb esetben előnyújtott dielektrikum (20-50 μm) mindkét oldalát vezető, deformálódni képes anyag borítja, melyek egy nagyfeszültségű tápegység ellentétes kimenteihez kapcsolódnak. A két oldal között megjelenő elektrosztatikus erő hatására a dielektrikum vastagsága csökken, s mivel ezen anyagok inkompresszibilis tulajdonsággal rendelkeznek, jelentősen kitágulnak oldalirányba (2.1. ábra).



2.1. ábra. Dielektromos elektroaktív anyagok működési elve

Ezt a jelenséget felhasználva számos, különböző struktúrájú dielektromos elektroaktív aktuátor létezik (2.2. ábra). A dolgozat csak a dielektromos elektroaktív anyagok témakörével foglalkozik.

A dielektromos anyagok alkalmazási lehetőségeit számos mű (például: [63], [64],[65]) tárgyalja, azonban fontos megjegyezni, hogy ezek egyelőre csak prototípusként léteznek, hiszen az elektroaktív aktuátorokat többnyire olyan területekre szánják, melyeknél az emberek közvetlen kapcsolatot létesíthetnek velük, ellenben az ezekhez szükséges magasfeszültség mellett ez egyelőre nem kivitelezhető. A következőkben a legújabb fejlesztések kerülnek bemutatásra.



2.2. ábra. Elektroaktív aktuátorok típusai: (a) torony, (b) tárguló, (c) hajló, (d) sík, (e) cső elrendezés [61]

Elektroaktív hangszóró [66]

A Harvard University kutatói kifejlesztettek egy olyan átlátszó, nyújtható, vezető anyagot, melyet feltéve a dielektrikumra elektroaktív aktuátor készíthető. Dielektrikumként a dolgozatban bemutatott VHB 4910 anyagot alkalmazták. Egységugrás feszültségfüggvényt alkalmaztak, melyet magas frekvenciával kapcsolnak ki és be, ezáltal elérve, hogy a hangot produkáljon az aktuátor. A nagyfeszültségű táp bemenetét a számítógép audio kimenetére kapcsolták, s mindezek ezáltal létrehoztak egy sík, átlátszó hangszórót (2.3. ábra).

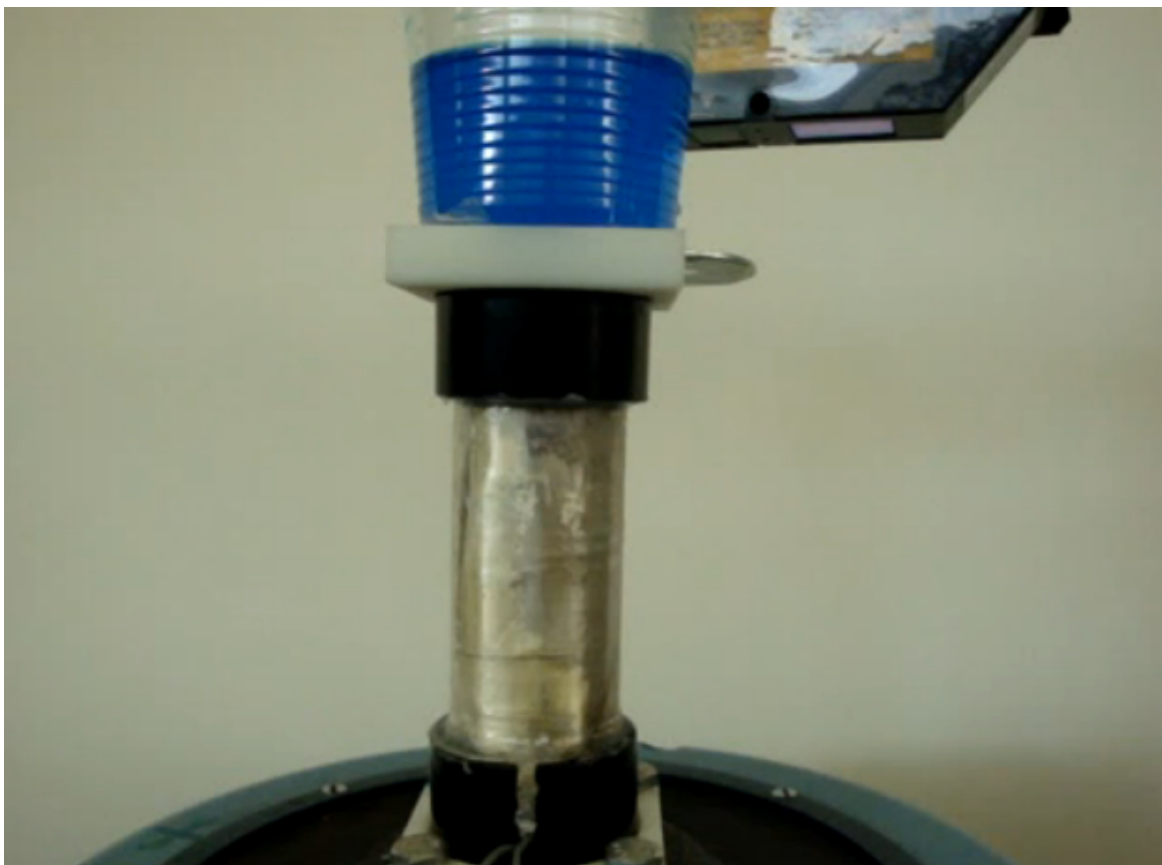


2.3. ábra. Elektroaktív hangszóró

A találmány lehetőséget ad az ablakok aktív hangszigetelésére anélkül, hogy bármilyen nem átlátszó anyagot alkalmaznánk.

Elektroaktív rezgéscsillapító [69]

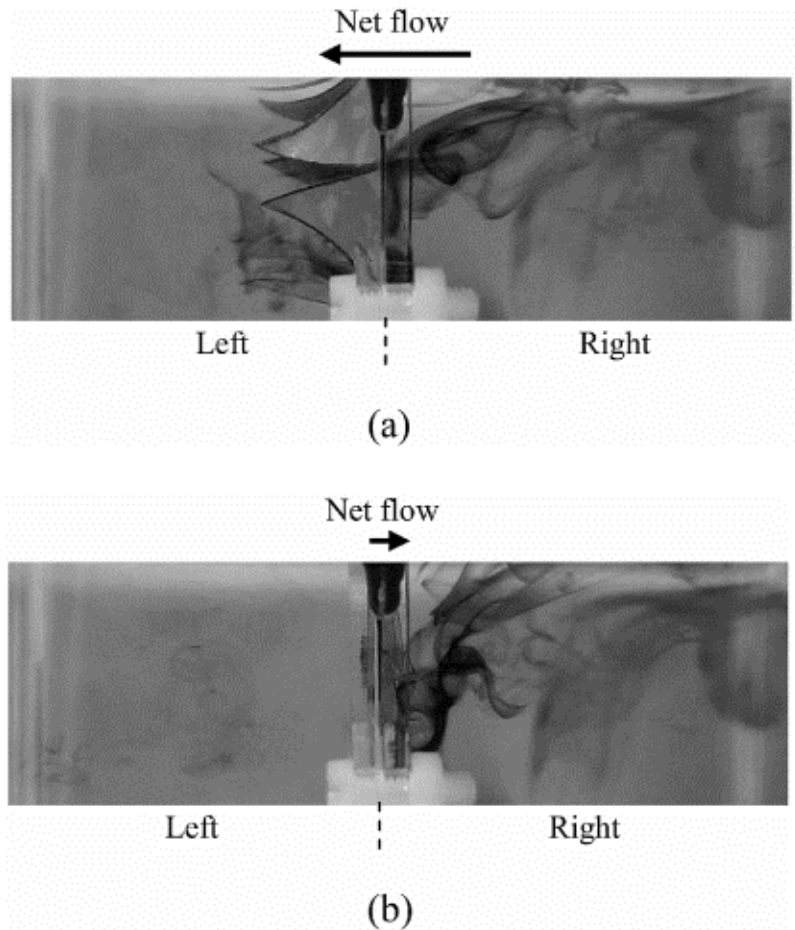
Elektroaktív anyagból készült rezgéscsillapító alkalmazásával lehetőség van kis amplitúdójú rezgések csillapítására. A témában már több cikk is született (például: [68]), a rezgéscsillapítók struktúrája pedig többnyire megegyezik a 2.2. ábrán látható (a) vagy (e) elrendezéssel.



2.4. ábra. Elektroaktív rezgéscsillapító

Elektroaktív szelep [70]

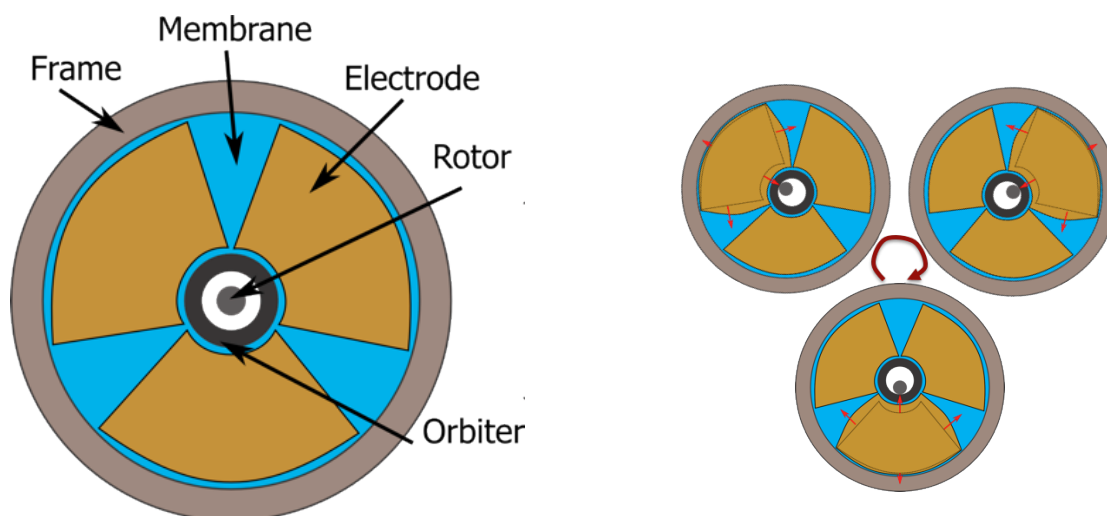
A 2.2. ábrán látható "hajló" aktuátort alkalmazva két közeg szeparálását és egybenyitását végezhetjük el, ha egy cső keresztmetszetét elektroaktív körcekkel fedjük le. Habár a szelep elkészítése ionikus elektroaktív anyagból készült, dielektromos változata is reprodukálható.



2.5. ábra. Elektroaktív szelep (a) nyitott (b) zárt állapotban

Elektroaktív motor [67]

Ha a dielektrikumra a 2.6. ábrán látható elrendezésben helyezzük fel a vezető anyagot, majd ezeket a területeket folyamatosan egymás után aktiváljuk, akkor az aktuátor közepén található rotor forgómozgásba kezd.



2.6. ábra. Elektroaktív motor működési elve

Harmadik fejezet

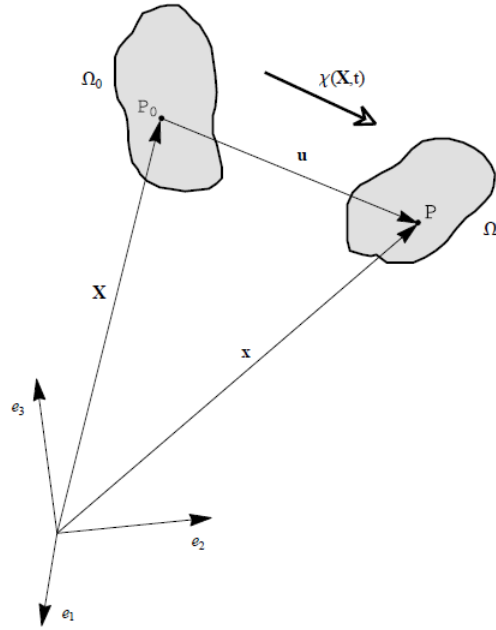
AZ ELMÉLETI ALAPOK ÁTTEKINTÉSE

3.1. Kontinuummechanikai összefoglaló

A fejezetben a dolgozat tématerületéhez kapcsolódó legfontosabb kontinuummechanikai ismeretanyagok és alapegyenletek kerülnek bemutatásra. Az összefoglaló a következő irodalmakra támaszkodik: [6], [5] és [3].

3.1.1. Referencia és pillanatnyi konfiguráció

A kontinuummechanika időbeli változásokat vizsgál. Az anyagi test $t = 0$ időpillanathoz tartozó állapota a kezdeti állapot (Ω_0). A kontinuummechanikai egyenletek megfogalmazásához szükség van egy olyan állapotra, amelyhez viszonyítva azok felírhatók, ennek neve referencia konfiguráció. A dolgozatban a kezdeti és referencia állapot megegyezik.



3.1. ábra. A pillanatnyi és referencia konfiguráció értelmezése

A test egy tetszőleges, $t > 0$ időpillanathoz tartozó állapota a pillanatnyi konfiguráció(Ω_t). Vizsgált test pontjait egy meghatározott időpillanatban azoknak helyvektorai határozzák meg. Ezen helyvektor jele a kezdeti konfiguráción $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3$, a pillanatnyi konfiguráción $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. A pillanatnyi konfiguráción értelmezett helyvektor ekkor a $\chi(\mathbf{X}, t)$ mozgásfüggvény segítségével egyértelműen felírható:

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \quad (3.1)$$

A test egy pontjának a kezdeti konfigurációban és a pillanatnyi konfigurációban értelmezett helyvektorának különbsége az elmozdulásvektor:

$$\mathbf{u} = \chi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} . \quad (3.2)$$

3.1.2. Alakváltozási gradiens és deformációs tenzorok

A $\kappa(\mathbf{X}, t)$ mozgásfüggvény gradiense az

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \kappa(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \quad (3.3)$$

alakváltozási gradiens, melynek determinánsa

$$J \equiv \det(\mathbf{F}) > 0. \quad (3.4)$$

Az alakváltozási gradiens segítségével a kezdeti és pillanatnyi konfiguráció összetartozó anyagi vonalelem és felületelem vektorai, valamint térfogatelemei az alábbiak szerint összerendelhetők:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}, \quad d\mathbf{a} = J \mathbf{F}^{-T} \cdot d\mathbf{A}, \quad dv = J dV. \quad (3.5)$$

Itt a kisbetűvel jelzett geometriai mennyiségek a pillanatnyi, míg a nagybetűsek a referencia konfiguráción értendők.

Az alakváltozási gradiens segítségével megadható referencia konfiguráción értelmezett jobb oldali Cauchy-Green-féle deformációs tenzor

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}, \quad (3.6)$$

illetve a pillanatnyi konfiguráción értelmezett a bal oldali Cauchy-Green-féle (Finger-féle) deformációs tenzor

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T. \quad (3.7)$$

3.1.3. Feszültségtenzorok

A pillanatnyi konfiguráción értelmezett $d\mathbf{f}$ erővektor és a $d\mathbf{a}$ felületelem vektor között a kapcsolatot a Cauchy-féle feszültségtenzor

$$d\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{a} \quad (3.8)$$

teremti meg.

Az első Piola-Kirchhoff-féle feszültségi tenzor ($\mathbf{T}$) a pillanatnyi konfiguráción értelmezett elemi erővektor ($d\mathbf{f}$) és a referencia konfiguráción értelmezett felületelem vektor ($d\mathbf{A}$) között

teremt kapcsolatot

$$d\mathbf{f} = \mathbf{T} \cdot d\mathbf{A}, \quad (3.9)$$

míg a második Piola-Kirchhoff-féle feszültségtenzor a

$$d\mathbf{f}_0 = \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} \quad (3.10)$$

összefüggés szerint van definiálva, ahol

$$d\mathbf{f}_0 = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{f}. \quad (3.11)$$

Ezen mennyiségek egymásba átszámolhatók a következő transzformációk segítségével:

$$\sigma = \frac{1}{J} \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^T = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T, \quad (3.12)$$

illetve

$$\mathbf{T} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}. \quad (3.13)$$

3.2. Hiperelasztikus testek anyagmodelljei

A dolgozatban vizsgált testek anyagi viseelkedése hiperelasztikus modellekkel írhatók le. A következőkben röviden összefoglaljuk a hiperelasztikus testek anyagmodelljeire vonatkozó legfontosabb összefüggéseket.

A konstitutív egyenlet, esetünkben a feszültségtenzor és az alakváltozási tenzor közti kapcsolat megadható a kezdeti, a pillanatnyi konfigurációkon, valamint értelmezhető a két konfiguráció között az alábbiak szerint

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}}, \quad \sigma = 2J^{-1} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{b}} \mathbf{b}, \quad \mathbf{T} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}, \quad (3.14)$$

ahol W az alakváltozási energia függvény.

Izotróp esetben a W függvény megadása történhet az alakváltozási tenzorok invariánsai segítségével (pl. $W(I_C, II_C, III_C)$), vagy a főnyúlásokkal ($W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$). Az előbbi esetben (3.14)₁ képlet általános alakja

$$\mathbf{S} = 2I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3} \mathbf{C}^{-1} + 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \mathbf{I} - 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{C}, \quad (3.15)$$

ahol I_i ($i = 1, 2, 3$) a jobb oldali Cauchy–Green-féle deformációs tenzor skalárinvariánsai:

$$I_1 = \text{tr} \mathbf{C}, \quad I_2 = \frac{1}{2} (I_1^2 - \text{tr} \mathbf{C}^2), \quad I_3 = \det \mathbf{C}. \quad (3.16)$$

Szokásos még az alakváltozási energia függvényt felbontani egy térfogatváltozás mentes (isochoric vagy deviatoric rész) és egy volumetrikus részre

$$W = W_{iso}(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3) + W_{vol}(J), \quad (3.17)$$

ahol a $\bar{\lambda}_a$ főnyúlások a deviátoros alakváltozáshoz kapcsolhatók. Ekkor, első lépésként az alakváltozási gradiens szorzat alakú felbontása kerül bevezetésre az

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{iso} \mathbf{F}_{vol}, \quad \mathbf{F}_{iso} = J^{-1/3} \mathbf{F}, \quad \mathbf{F}_{vol} = J^{1/3} \mathbf{I} \quad (3.18)$$

formában, amely segítségével a módosított jobb oldali Cauchy–Green-féle deformációs tenzor a

$$\mathbf{C}_{iso} = \mathbf{F}_{iso}^T \mathbf{F}_{iso} = J^{-2/3} \mathbf{C}$$

képlet szerint adható meg. Így a $\mathbf{C}_{iso}$ tenzor sajátértékei: $\bar{\lambda}_a^2$.

A második Piola-Kirchhoff-féle feszültségi tenzor ekkor az

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} = 2 \underbrace{\frac{\partial W_{vol}(J)}{\partial \mathbf{C}}}_{\mathbf{S}_{vol}} + 2 \underbrace{\frac{\partial W_{iso}(\mathbf{C}_{iso})}{\partial \mathbf{C}}}_{\mathbf{S}_{iso}} = \mathbf{S}_{vol} + \mathbf{S}_{iso}. \quad (3.19)$$

alakban adható meg, ahol az $\mathbf{S}_{vol}$ és $\mathbf{S}_{iso}$ feszültségtenzorok értelmezése:

$$\mathbf{S}_{vol} = 2 \frac{\partial W_{vol}(J)}{\partial \mathbf{C}} = J \underbrace{\frac{dW_{vol}(J)}{dJ}}_p \mathbf{C}^{-1} = Jp \mathbf{C}^{-1}, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{S}_{iso} = 2 \frac{\partial W_{iso}(\mathbf{C}_{iso})}{\partial \mathbf{C}} = J^{-2/3} \underbrace{\left(\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} \right)}_{\mathbb{P}} : \underbrace{2 \frac{\partial W_{iso}(\mathbf{C}_{iso})}{\partial \mathbf{C}_{iso}}}_{\bar{\mathbf{S}}} = J^{-2/3} \mathbb{P} : \bar{\mathbf{S}}. \quad (3.21)$$

Az utóbbiakban részletezett felbontáshoz kapcsolódóan néhány további összefüggést lehet megadni:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} = \frac{J}{2} \mathbf{C}^{-1}, \quad \frac{\partial J^{-2/3}}{\partial \mathbf{C}} = -\frac{1}{3} J^{-2/3} \mathbf{C}^{-1} \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial (J^{-2/3} \mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = J^{-2/3} \underbrace{\left(\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{C} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right)}_{\mathbb{P}^T} = J^{-2/3} \mathbb{P}^T \quad (3.23)$$

$$\text{dev} \bar{\mathbf{S}} = \mathbb{P} : \bar{\mathbf{S}} \quad (3.24)$$

$$\text{dev} \bar{\mathbf{S}} : \mathbf{C} = 0. \quad (3.25)$$

A linearizált variációs elvek felírásakor a fenti anyagegyenletek linearizálása is szükség van. Ez a növekményes alakban történő megadást jelenti az alábbi formában:

$$d\mathbf{S} = \mathbb{D} : d\mathbf{E}, \quad (3.26)$$

ahol $\mathbb{D}$ a negyedrendű rugalmassági érintő tenzor, melyet $\mathbf{S}$ -nek $\mathbf{E}$ szerinti deriváltja definiál

$$\mathbb{D} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = 4 \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{C}^2}. \quad (3.27)$$

A pillanatnyi konfiguráción (3.26)-nek a

$$\dot{\sigma} = \mathbf{c} : \mathbf{d}, \quad (3.28)$$

egyenlet felel meg, ahol $\dot{\sigma}$ a Truesdell-féle feszültség-sebesség

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma} - \mathbf{l}\sigma - \sigma \mathbf{l}^T + (\text{tr} \mathbf{l}) \sigma, \quad (3.29)$$

itt a $\mathbf{l}$ sebességgradiens.

3.3. Az elektromos tér mezőegyenleteinek összefoglalása

A fejezetben bemutatásra kerülnek az elektrosztatikus tér mezőegyenletei, összefüggései.

3.3.1. Alapfogalmak bevezetése

Az elektromos tér az annak intenzitását és irányát megadó vektorok segítségével jellemezhető. Két vektor egyértelműen definiálja az elektromos teret, míg az egyik csak a teret létrehozó hatással arányos, a másik a teret kitöltő közeg villamos tulajdonságait is figyelembe veszi. Az elektromos teret jellemző két vektor az elektromos térerősség ($\mathbf{E}$) és elektromos eltolási vektor

($\mathbf{D}$), köztük a kapcsolatot pedig az alábbi egyenlet teremti meg:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E} , \quad (3.30)$$

melyben ε_0 a vákuum permittivitását ($\varepsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12} [C^2 N^{-1} m^{-2}]$), ε_r az anyag relatív permittivitását jelöli, $\mathbf{P}$ pedig a közeg polarizációja.

Az elektromos térerősség az elektromos potenciál (ϕ) gradiensének mínusz egyszerese:

A dolgozatban a $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ és $\mathbf{P}$ a kezdeti, míg a $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$ és $\mathbf{p}$ a pillanatnyi konfiguráción értelmezett mennyiségek.

3.3.2. Az elektrosztatika első és második egyenlete

Sztatikus térben a Maxwell-egyenletek a következő alakban írhatók fel (a mágneses tér hatását figyelmen kívül hagyva):

$$\text{Rot}(\mathbf{E}) = \text{rot}(\mathbf{e}) = \mathbf{0}, \quad \text{Div}(\mathbf{D}) = \text{div}(\mathbf{d}) = 0. \quad (3.31)$$

Elektro-elasztikus anyagtörvény modellezésénél elektromos oldalról ezen egyenleteknek kell teljesülnie.

3.4. Az elektro-elasztikus anyagmodellek bemutatása

Az elektro-elasztikus anyagok tudományos háttérében olyan energiafüggvények állnak, melyekben egyszerre vannak jelen a kontinuummechanikai illetve elektromos mennyiségek és anyagjellemzők.

A szakirodalomban található energiafüggvények mechanikai oldalról vagy az alakváltozási gradiensről ($\mathbf{F}$), vagy pedig a jobb oldali Cauchy-Green deformációs tenzortól ($\mathbf{C}$) függenek, az elektromos változó pedig egyaránt lehet az elektromos eltolási vektor ($\mathbf{D}$), a polarizációs vektor ($\mathbf{P}$), illetve az elektromos térerősség vektor ($\mathbf{E}$). A dolgozatban felhasználásra kerül a szakirodalomban megtalálható elektro-elasztikus Neo-Hooke anyagtörvény [40].

3.4.1. Elektro-elasztikus Neo-Hooke anyagtörvény

A dolgozatban alkalmazott elektro-elasztikus Neo-Hooke alakváltozási energiafüggvény a jobb oldali Cauchy-Green deformációs tenzor és az elektromos térerősség vektorának függvénye. Ez azt jelenti, hogy az energia függvények $\mathbf{C}$ illetve $\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}$ invariánsainak függvényei:

$$\Omega = \Omega(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) , \quad (3.32)$$

ahol az invariánsok a következőképpen vannak definiálva:

$$I_1 = \mathbf{C} : \mathbf{I} , \quad I_2 = \mathbf{C} : \mathbf{C} , \quad I_3 = \det(\mathbf{C}) , \quad (3.33)$$

$$I_4 = \mathbf{I} : (\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}) , \quad I_5 = \mathbf{C} : (\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}) , \quad I_6 = \mathbf{C}^2 : (\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}) . \quad (3.34)$$

Látható, hogy míg az I_1, I_2, I_3 invariánsok a tisztán mechanikai, az I_4 a tisztán elektromos, az I_5 és I_6 invariánsok pedig a kapcsolt tagok az energiafüggvényben. Szokás az energiafüggvényt így is megadni

$$\Omega(\mathbf{C}, \mathbf{E}) = \Omega^{mech}(\mathbf{C}) + \Omega^{elect}(\mathbf{C}, \mathbf{E}) . \quad (3.35)$$

Ekkor a $\Omega^{mech}(\mathbf{C})$ a mechanikai, $\Omega^{elect}(\mathbf{C}, \mathbf{E})$ pedig az elektromos és kapcsolt részre vonatkozó elemeket tartalmazza. A dolgozatban az elektromos és kapcsolt tag minden esetben megegyezik, mechanikai részük ellenben eltérő. A dolgozatban alkalmazott energiafüggvény mechanikai része az

$$\Omega^{mech}(\mathbf{C}) = \frac{\mu}{2} [\mathbf{C} : \mathbf{I} - \ln(\det(\mathbf{C})) - 3] + \frac{\lambda}{8} [\ln(\det(\mathbf{C}))]^2 , \quad (3.36)$$

alakban, míg az elektromos és kapcsolt részeket tartalmazó tag az

az elektromos és kapcsolt részeket tartalmazó tag pedig az

$$\Omega^{elect}(\mathbf{C}, \mathbf{E}) = c_1 \mathbf{I} : (\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}) + c_2 \mathbf{C} : (\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}) - \frac{J \varepsilon_r \varepsilon_0}{2} \mathbf{C}^{-1} : (\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}) \quad (3.37)$$

alakban adható meg.

Az egyenletekben a μ és λ a Lamé-féle állandókat jelölik, míg a c_1 és c_2 paraméterek az anyag elektromos és kapcsolt tulajdonságait tartalmazzák.

Az egyes feszültségtenzorok, illetve merevségi mátrix számításához szükséges mennyiségek mindkét csoport esetén a konstitutív egyenletek segítségével számíthatók:

$$\mathbf{D} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{E}}, \quad \mathbf{S}^{tot} = \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{C}}, \quad \mathbf{\Theta} = 4 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mathbf{C} \otimes \partial \mathbf{C}}, \quad \mathbf{\Pi} = -2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mathbf{E} \otimes \partial \mathbf{C}}, \quad \mathbf{\Gamma} = -\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mathbf{E} \otimes \partial \mathbf{E}} . \quad (3.38)$$

3.5. Egyensúlyi egyenlet

Elektro-elasztikus problémáknál az egyensúlyi egyenlet [15]:

ahol σ^{tot} a pillanatnyi konfiguráción értelmezett teljes feszültségtenzort jelöli, mely felbontható egy mechanikai illetve egy elektromos terhelésből keletkező feszültségtenzorra (Maxwell-feszültségi tenzor), tehát

$$\sigma^{tot} = \sigma + \sigma^{Maxwell}. \quad (3.39)$$

Negyedik fejezet

A NUMERIKUS SZÁMÍTÁSI MODELL

4.1. Izogeometrikus analízis

A fejezet bemutatja az izogeometrikus analízis alapfogalmait, illetve a geometriai modellezés főbb technikáit.

4.1.1. Geometriai modellezés

Az izogeometrikus analízis során a geometria leírását nem-uniform racionális B-spline (NURBS) görbék, felületek és testek segítségével határozzuk meg. Ezen mennyiségek alapeleme a B-spline görbe, így a geometriai modell megértéséhez elengedhetetlen ezen görbe részletes tárgyalása.

B-spline görbe

A B-spline görbe egy approximáló görbe, mely interpolálja a kezdő- és végpontokat. Egyértelmű megadásához szükség van bázisfüggvényekre és kontrollpontokra. A bázisfüggvények különböző fokszámú függvények lehetnek, jelölésük a dolgozatban egydimenziós esetre $N_{i,p}(\xi)$, ahol i a bázisfüggvény számát, p a fokszámát, ξ pedig a függvény paraméterét jelöli. Meghatározása a Cox-de Boor rekurziós formulával történik, melynek definíciója $p = 0$ esetén

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{egyéb esetben,} \end{cases} \quad (4.1)$$

$p > 0$ esetben pedig

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi). \quad (4.2)$$

Fontos megjegyezni, hogy az előforduló $\frac{0}{0}$ tört értéke nulla. A definícióban megjelenő ξ_i mennyiséget csomóértéknek nevezzük. Több csomóérték úgynevezett csomóvektort alkot, mely egy nem csökkenő számokból álló egydimenziós vektor

$$\Xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n+p+1}), \quad (4.3)$$

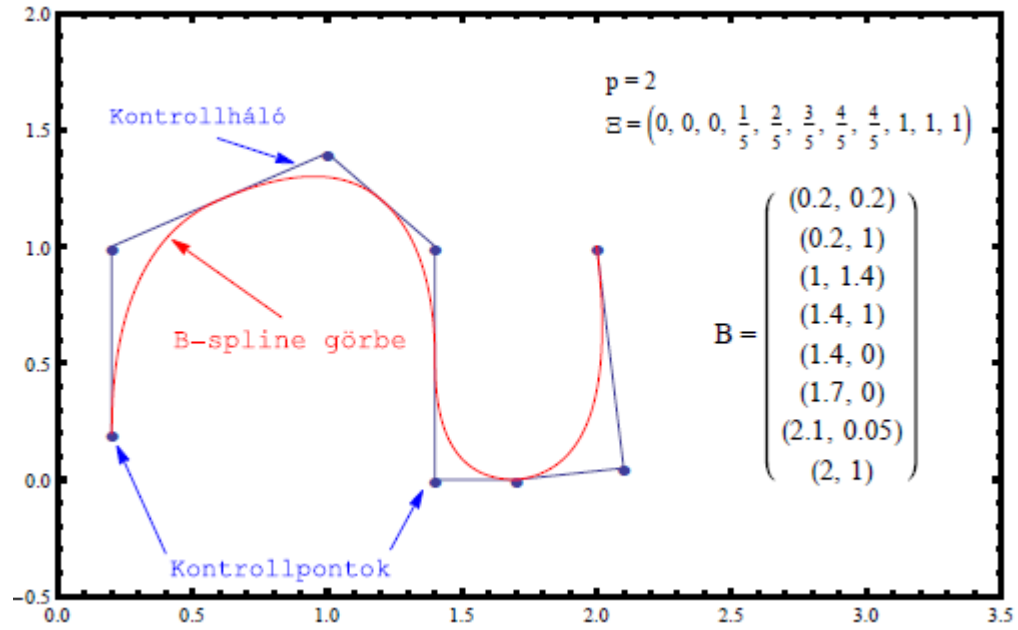
ahol n a kontrollpontok számát jelöli. Ha a csomóvektor szomszédos elemei közötti különbség megegyezik, a csomóvektor uniform, ha nem, akkor nem-uniform, továbbá a csomóvektor nyitott, ha a legkisebb és legnagyobb értékű csomóértéke $p+1$ -szer ismételve van, ellenkező esetben zárt. Belátható, hogy ha a csomóvektor nyitott, akkor nem-uniform is egyben.

A B-spline görbe definíció szerint

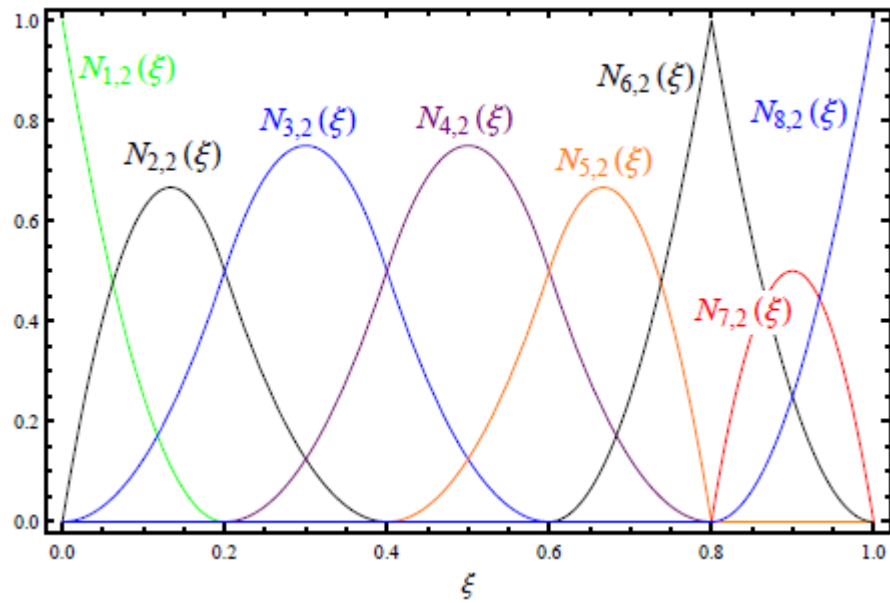
$$\mathbf{C}(\xi) = \mathbf{N}_p(\xi) \cdot \mathbf{B} = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \mathbf{B}_i, \quad (4.4)$$

ahol $\mathbf{B}$ a kontrollpontokat tartalmazó vektor (melynek egy eleme egy kontrollpont összes koordinátáját tartalmazza). A kontrollpontok által meghatározott alakzatot kontrollpoligonnak vagy kontrollhálónak szokás nevezni. A 4.1. és 4.2. ábra egy példán keresztül szemlélteti a fentiekben tárgyalt mennyiségeket.

Magasabb dimenziók esetén a csomóvektorok megkülönböztetésére a Ξ , F és $\mathcal{L}$ karaktereket használjuk.



4.1. ábra. B-spline görbe példa



4.2. ábra. Az előző ábrán bemutatott B-spline görbe bázisfüggvényei

B-spline felület és test

A $\mathbf{B}_{i,j}$ kontrollpontok, Ξ és F csomóvektorok továbbá p és q fokszámú bázisfüggvények által meghatározott B-spline felületet az

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = (\mathbf{N}_p(\xi) \otimes \mathbf{M}_q(\eta)) : \mathbf{B} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) \mathbf{B}_{i,j} \quad (4.5)$$

összefüggés definiálja. Látható, hogy ekkor a kontrollpontokat tartalmazó tömb egy mátrixnak feleltethető meg, a két egydimenziós bázisfüggvényből pedig a diadikus szorzat alkot egy kétdimenziós bázist.

Magasabb dimenzió esetén újbóli diadikus szorzatok alkalmazása kapcsolja össze a bázisfüggvényeket, így a B-spline testek az

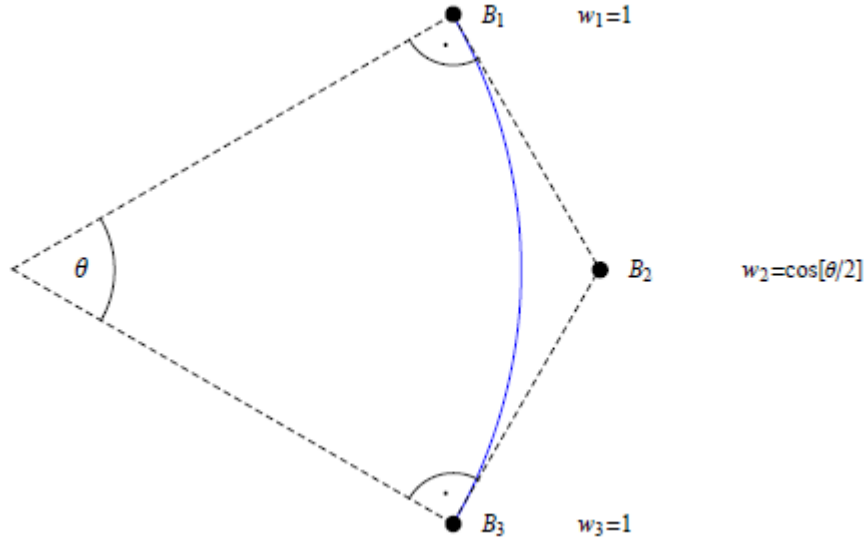
$$\mathbf{S}(\xi, \eta, \zeta) = (\mathbf{N}_p(\xi) \otimes \mathbf{M}_q(\eta) \otimes \mathbf{L}_r(\zeta)) : \mathbf{B} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) L_{k,r}(\zeta) \mathbf{B}_{i,j,k} \quad (4.6)$$

összefüggéssel írhatók le. Ebben az esetben a kontrollpontokat tartalmazó tömb $\mathbf{B}$ egy olyan harmadrendű tenzor mátrix reprezentációjaként képzelhető el, melynek egy-egy eleme egy-egy kontrollpont meghatározásához szükséges mindhárom koordinátát tartalmazza.

NURBS

Mivel a B-spline felületek és testek által létrehozható alakzatok száma igencsak korlátos, így az izogeometrikus analízis (továbbá a legtöbb tervezőrendszer) nem-uniform racionális B-spline (NURBS) felületek és testek segítségével írja le a modellezendő objektumok geometriáját. NURBS alakzatok segítségével számos, a mérnöki gyakorlatban előforduló geometriai primitív (körív, ellipszis, henger stb.) egzakt modellezése lehetséges. Ezek létrehozása másodfokú görbék, projektív transzformáció segítségével történik: egy négydimenziós térben, (x, y, z, w) koordinátarendszerben értelmezett B-spline görbét az origóból centrálisan levetítjük a $w = 1$ hipersíkra, s így vetületeként racionális B-spline görbét kapunk. A w értékeket súlyoknak vagy alakparamétereknek szokás nevezni. Minden kontrollpont rendelkezik egy (általában pozitív értékű) súllyal, a súly értékét növelve pedig a görbe az adott kontrollpont felé fog mozogni.

Körív esetén a súlyok meghatározása a 4.3. ábrán látható módon történik.



4.3. ábra. Súlyok meghatározása körív esetén

A NURBS görbék, felületek és testek bázisainak (i) , (i, j) és (i, j, k) komponensi

$$\mathbf{R}_i^p(\xi) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{N_{\alpha,p}(\xi)w_{\alpha}}, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{R}_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^m \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_i}{N_{\alpha,p}(\xi)M_{\beta,q}(\eta)w_{\alpha,\beta}}, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{R}_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^m \sum_{\gamma=1}^l \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_i}{N_{\alpha,p}(\xi)M_{\beta,q}(\eta)L_{\gamma,r}(\zeta)w_{\alpha,\beta,\gamma}} \quad (4.9)$$

egyenletekkel definiálhatók, majd az előzőekben leírtakhoz hasonlóan a NURBS görbék, felületek és testek a

$$\mathbf{C}(\xi) = \mathbf{R}^p(\xi) \cdot \mathbf{B}, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = \mathbf{R}^{p,q}(\xi, \eta) : \mathbf{B}, \quad (4.11)$$

$$\mathbf{S}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{R}^{p,q,r}(\xi, \eta, \zeta) : \mathbf{B} \quad (4.12)$$

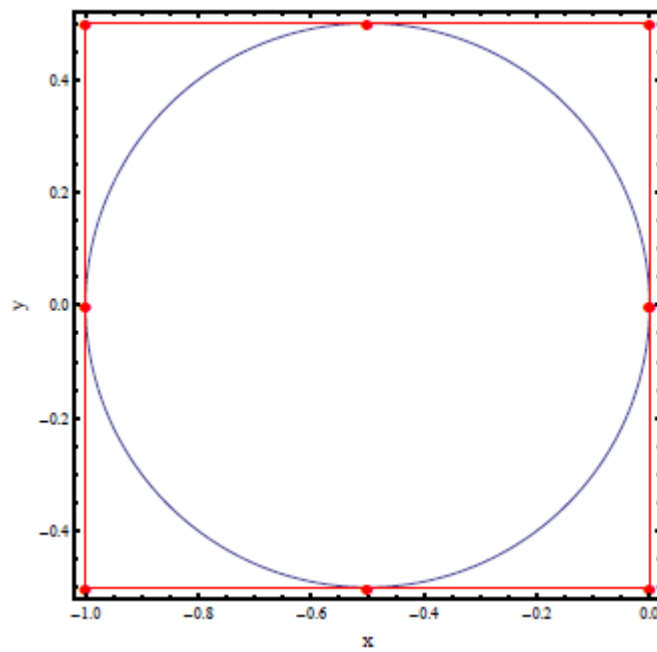
kifejezésekkel adhatók meg. Fontos, hogy a bázisfüggvények definícióiban szereplő i, j, k mennyiségek a bázisfüggvényeket tartalmazó tenzor komponenseit jelölik, így a jobb oldali kifejezéseknél nem alkalmazzuk az Einstein-féle összegkonvenciót.

A következőkben példát adunk egy-egy NURBS görbére, felületre, illetve testre.

$$\Xi = (0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4)$$

$$p = 2$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} (0, 0) \\ (0, 0.5) \\ (-0.5, 0.5) \\ (-1, 0.5) \\ (-1, 0) \\ (-1, -0.5) \\ (-0.5, -0.5) \\ (0, -0.5) \\ (0, 0) \end{bmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{bmatrix}$$



4.4. ábra. NURBS görbe

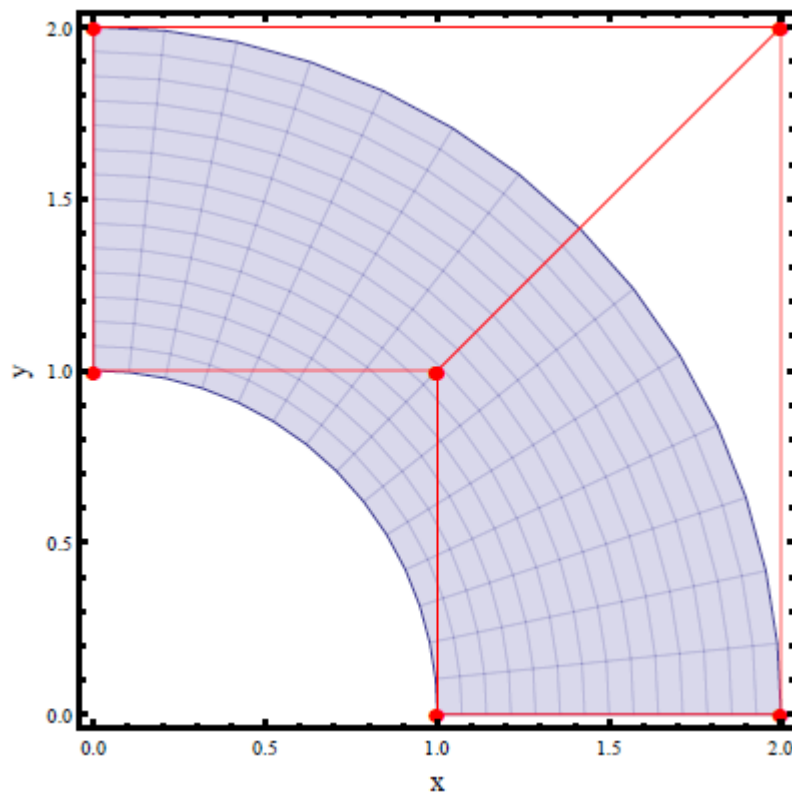
$$\Xi = (0, 0, 0, 1, 1, 1)$$

$$F = (0, 0, 1, 1)$$

$$p = 2$$

$$q = 1$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} (1, 0) & (2, 0) \\ (1, 1) & (2, 2) \\ (0, 1) & (0, 2) \end{bmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

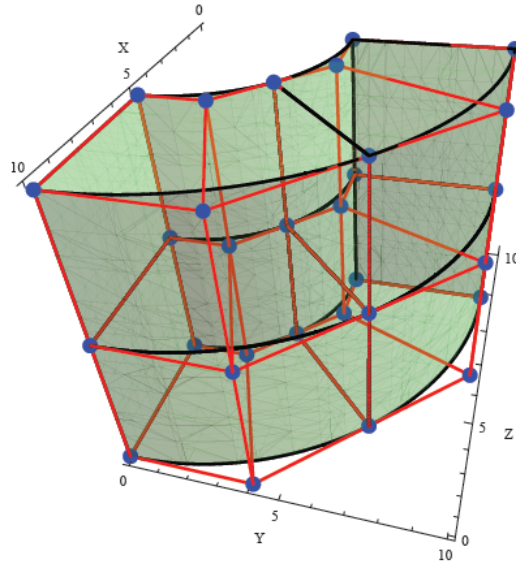


4.5. ábra. NURBS felület

$$\Xi = (0, 0, 0, 0.5, 0.5, 1, 1, 1), \quad F = (0, 0, 1, 1)$$

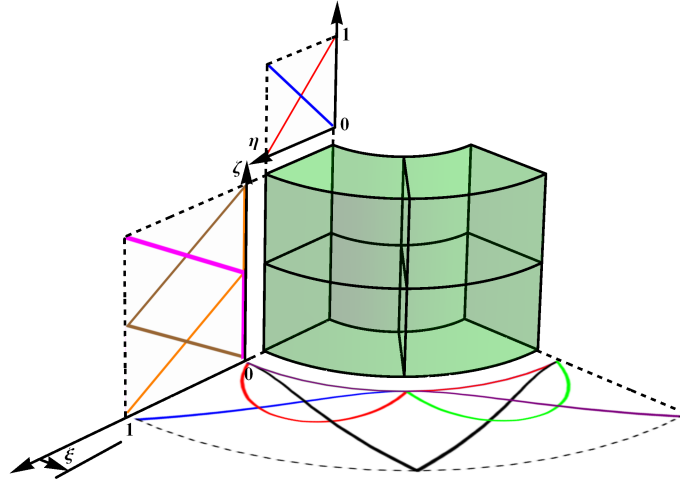
$$p = 2, q = 1, r = 1$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} (5, 0, 0) \\ (5, 0, 5) \\ (5, 0, 10) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (10, 0, 0) \\ (10, 0, 5) \\ (10, 0, 10) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} (5, 5tg(\pi/8), 0) \\ (5, 5tg(\pi/8), 5) \\ (5, 5tg(\pi/8), 10) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (10, 10tg(\pi/8), 0) \\ (10, 10tg(\pi/8), 5) \\ (10, 10tg(\pi/8), 10) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} (5/\sqrt{2}, 5/\sqrt{2}, 0) \\ (5/\sqrt{2}, 5/\sqrt{2}, 5) \\ (5/\sqrt{2}, 5/\sqrt{2}, 10) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (5/\sqrt{2}, 5/\sqrt{2}, 0) \\ (5/\sqrt{2}, 5/\sqrt{2}, 5) \\ (5/\sqrt{2}, 5/\sqrt{2}, 10) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} (5tg(\pi/8), 5, 0) \\ (5tg(\pi/8), 5, 5) \\ (5tg(\pi/8), 5, 10) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (10tg(\pi/8), 10, 0) \\ (10tg(\pi/8), 10, 5) \\ (10tg(\pi/8), 10, 10) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} (0, 5, 0) \\ (0, 5, 5) \\ (0, 5, 10) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (0, 10, 0) \\ (0, 10, 5) \\ (0, 10, 10) \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$



4.6. ábra. NURBS test

A fenti példában bemutatott NURBS test modellezése során alkalmazott (ξ, η, ζ) paraméterhármast úgy kell elképzelni, mintha hengerkoordináta-rendszer koordinátái lennének. Ezt szemlélteti a 4.7. ábra.



4.7. ábra. Bázisfüggvények és koordináták értelmezése

A fenti összefüggések mellett a numerikus szimulációhoz szükség van a bázisfüggvények deriváltjaira is. Ennek levezetését csak egydimenziós esetre mutatjuk be, magasabb dimenziók esetén hasonlóan történik a deriváltak elkészítése.

A (4.7) kifejezés ξ paraméter szerinti deriváltja a

$$\frac{d\mathbf{R}_i^p(\xi)}{d\xi} = w_i \frac{W(\xi)N'_{i,p}(\xi) - W'(\xi)N_{i,p}(\xi)}{(W(\xi))^2} \quad (4.13)$$

alakban írható fel, ahol

$$N'_{i,p} = \frac{d}{d\xi} N_{i,p}, \quad (4.14)$$

illetve $W(\xi)$ súlyfüggvény kifejezhető, mint

$$W(\xi) = \sum_{\alpha=1}^n N_{\alpha,p}(\xi)w_{\alpha}. \quad (4.15)$$

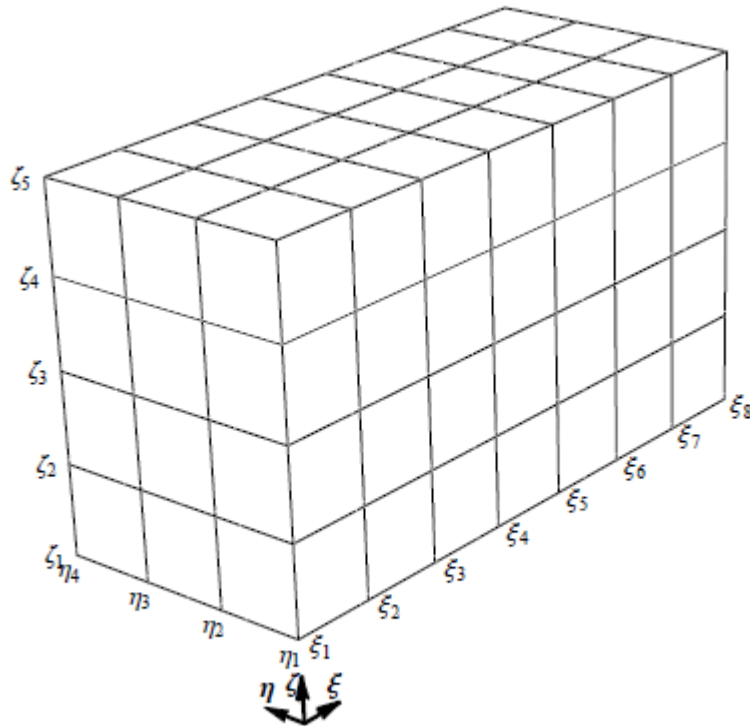
A súlyfüggvény deriváltja:

$$W'(\xi) = \sum_{\alpha=1}^n N'_{\alpha,p}(\xi) w_{\alpha}. \quad (4.16)$$

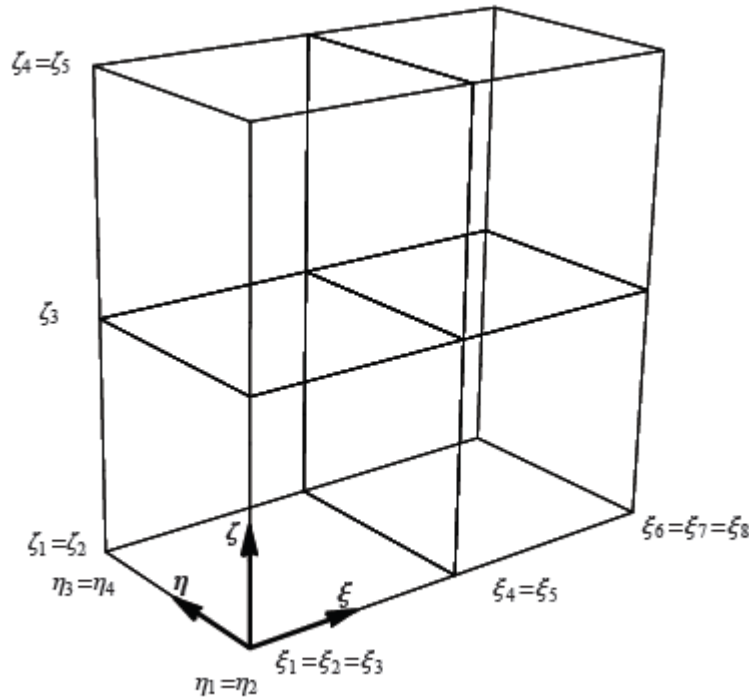
Fizikai, paraméter és index mező

A NURBS modell ugyan a fizikai mezőben ábrázolva adja vissza azt az alakzatot, amelyet modellezni szeretnénk, de a szimulációhoz szükséges mennyiségek egyszerűbben adhatók meg, ha NURBS modellt transzformáció segítségével az úgynevezett paraméter illetve index mezőben kezeljük. Háromdimenziós geometria esetén mind a két térben a (ξ, η, ζ) paraméter hármas definiál egy-egy derékszögű koordinátarendszert.

Míg az index tér esetén minden egyes csomóérték külön koordinátértéket jelöl, addig a paraméter térben csak az egyes csomóvektorok különböző csomóértékei jelölnek egy-egy koordinátaértéket. A jobb megértés érdekében a 4.7. ábrán látható NURBS test index és paraméter térben történő ábrázolását a 4.8. és 4.9. ábra mutatja.



4.8. ábra. NURBS test ábrázolása index térben



4.9. ábra. NURBS test ábrázolása paraméter térben

4.1.2. A szimulációhoz szükséges mennyiségek előkészítése

Az izogeometrikus analízis a numerikus számítás a végelem módszerhez hasonlóan történik: a geometriát elemekre osztjuk fel, az elemi merevségi mátrixot és belső erővektort numerikus integrálással számítjuk ki, majd ezeket felhasználva megoldjuk az egész rendszerre vonatkozó linearizált egyenletet. Így a szimuláció előtt mindenféleképpen be kell azonosítani az egyes elemeket, illetve a hozzájuk tartozó kontrollpontokat és bázisfüggvényeket.

A szimuláció elemszámának meghatározásához be kell vezetni a szegmens fogalmát. Minden olyan csomóérték pár, melyre teljesül, hogy egy csomóvektorban egymás szomszédai, továbbá értékük nem megegyező, egy-egy szegmenst határoz meg (tehát a paraméter tér két szomszédos koordinátaértéke egy szegmenst határol). Az elemszám egydimenziós esetben szegmens számával, magasabb dimenziók esetén pedig az egyes szegmens számok szorzataival egyezik meg. Így a 4.7. ábrán látható test négy elemből áll, hiszen a $\Xi = (0, 0, 0, 0.5, 0.5, 1, 1, 1)$ kettő, a $F = (0, 0, 1, 1)$ egy, míg a $\mathcal{L} = (0, 0, 0.5, 1, 1)$ csomóvektor két szegmensre osztható, így az elemek száma: $2 \times 1 \times 2 = 4$.

Az egyes elemeket meghatározó kontrollpontok és bázisfüggvények a [72] könyvben leírt algoritmussal választhatók ki. Az eljárás lényege, hogy a NURBS koordináták (ξ, η, ζ) segítségével az index térben lépkedve kiválasztja az

$$\Omega^e = [\xi_i \times \xi_{i+1}] \times [\eta_j \times \eta_{j+1}] \times [\zeta_k \times \zeta_{k+1}] \quad (4.17)$$

elemet (ahol $i \geq p + 1$, $j \geq q + 1$ és $k \geq r + 1$), majd ezekhez hozzárendeli a kontrollpontokat és bázisfüggvényeket, melyekhez előzetesen globális azonosítószámokat rendel a könnyebb kezelhetőség érdekében. Az azonosítószámok kiosztása az előbb említett NURBS koordináták alapján történik: a $\{\xi, \eta, \zeta\} = \{1, 1, 1\}$ koordinátahármashoz például az $A = 1$, a $\{\xi, \eta, \zeta\} = \{1, 1, 2\}$ koordinátahármashoz pedig $A = 2$ globális azonosítószám tartozik. Ez az azonosítás megadja a lehetőséget arra, hogy egyszerre legyen könnyű a numerikus implementálás (a bázisfüggvények tömbbe rendezésénél harmadrendű tenzor helyett egy vektor is elegendő), illetve különböző tömbök "vizuális" kezelése (a szimulációhoz szükséges peremfeltételek megadásánál például egyszerűbb magasabb rendű tenzorokat alkalmazni, mint vektorokat, ezt a későbbiekben egy példával szemléltetjük).

Fontos megjegyezni, hogy NURBS alakzat elemszáma megadható az index térben (ekkor (4.17) definíció alapján történik az elemek meghatározása), illetve a paraméter térben (ekkor a csomószakaszok határozzák meg az elemeket). A két elemszám a legtöbb esetben nem egyezik meg egymással (4.8. és 4.9. ábra), hiszen az index térben vett elemek között található olyan, amelynek a paraméter (és fizikai) térben nulla a térfogata. Így a szimuláció előtt ezen elemek "kiszűrése" szükséges, melyet numerikus térfogatszámítással (Gauss pontokra számított térfogatok összege) végeztünk el. Ezután az adatok egy tömbbe rendezése szükséges, mely így tartalmazza minden elem a paraméter illetve index térben értelmezett sorszámát, az elemekhez kapcsolódó kontrollpontokat, bázisfüggvényeket és azok globális azonosítóit. A tömb struktúrája a következő:

Sorszám a paraméter térben	Sorszám az index térben	Bázisfüggvények	Kontrollpontok	Bázisfüggvények globális azonosítói
1				
2				
$\vdots$				

Az elemekhez tartozó bázisfüggvények és kontrollpontok kiválasztása után a bázisfüggvények globális koordinátarendszereből lokális koordinátarendszerbe történő transzformálása szükséges

a numerikus integráláshoz. Ez a

$$\xi = \xi_i + (\xi' + 1) \frac{(\xi_{i+1} - \xi_i)}{2}, \quad (4.18)$$

$$\eta = \eta_j + (\eta' + 1) \frac{(\eta_{j+1} - \eta_j)}{2}, \quad (4.19)$$

$$\zeta = \zeta_k + (\zeta' + 1) \frac{(\zeta_{k+1} - \zeta_k)}{2} \quad (4.20)$$

paramétertranszformációkkal valósul meg. Ezen egyenletek minden elemre más és más transzformációhoz vezetnek, illetve összhangban állnak a (4.17) egyenlet jelöléseivel. A ξ', η', ζ' paraméterek az egyes elemek lokális koordinátarendszerének komponensei, értékük a $[-1, 1]$ intervallumba esik.

4.2. A virtuális munka elve

A numerikus számítás a virtuális munka elvén alapul, mely azt mondja ki, hogy a külső és belső erők virtuális munkájának egyenlőnek kell lennie, vagyis

$$\delta W = \delta W_b - \delta W_k = 0. \quad (4.21)$$

Mivel kapcsolt feladat megoldása történik, ezért ezt az egyenletet a mechanikai és az elektromos részre egyaránt fel kell írni. *Megjegyzés: a virtuális munka elvének felírása, az egyenletekben szereplő mennyiségek és matematikai operátorok a pillanatnyi konfiguráción értendők.*

Mechanikai terhelés esetén

$$\delta W_k^m = \int_v \mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{u} \, dv + \int_a \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, da, \quad (4.22)$$

ahol $\delta \mathbf{u}$ a virtuális elmozdulást, $\mathbf{q}$ a térfogati, $\mathbf{t}$ a felületi terhelést jelöli egységnyi térfogatra/felületre. A belső erők virtuális munkája a

$$\delta W_b^m = \int_v \sigma^{tot} : grad \delta \mathbf{u} \, dv \quad (4.23)$$

kifejezéssel számolható.

Az elektromos terhelésből adódó virtuális munkánál szintén megkülönböztetünk térfogati és felületi terhelést:

$$\delta W_k^e = \int_v \delta \phi \, \varrho_0^f \, dv + \int_a \delta \phi \, \tilde{\varrho}_0^f \, da, \quad (4.24)$$

ahol ϱ_0^f az egységnyi térfogatra jutó szabad töltéssűrűség, $\tilde{\varrho}_0^f$ pedig az egységnyi felületre jutó szabad töltéssűrűség, $\delta\phi$ pedig az elektromos potenciál variációja. A belső erők munkája ekkor:

$$\delta W_b^e = \int_v \text{grad}(\delta\phi) \cdot \mathbf{d} \, dv. \quad (4.25)$$

4.3. Alapegyenletek

Az izogeometrikus számítás linearizált egyenlete a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{uu} & \mathbf{K}^{u\phi} \\ (\mathbf{K}^{u\phi})^T & \mathbf{K}^{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}^u \\ \mathbf{r}^\phi \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

alakban írható fel [40]. Az érintő merevségi mátrix négy tagból áll, a $\mathbf{K}^{uu}$, a $\mathbf{K}^{u\phi}$ és a $\mathbf{K}^{\phi\phi}$ rendre az érintő merevségi mátrix mechanikai, kapcsolt és elektromos részeinek szubmátrixait jelölik.

Az ismeretlen mennyiségeket tartalmazó vektor, illetve az erővektor is két (egy mechanikai $\Delta \mathbf{u}$ ill. $\mathbf{r}^u$ és egy elektromos $\Delta \phi$ ill. $\mathbf{r}^\phi$) részre bontható.

A (4.26) egyenletben szereplő mennyiségek a (4.22), (4.23), (4.24) és (4.25) egyenletek linearizálása és diszkretizálása [5] után előállíthatók.

A (α, β) csomópontokhoz tartozó szubmátrixokat a következő összefüggések definiálják:

$$(\mathbf{K}^{uu})_{\alpha\beta} = \int (\mathbf{B}_\alpha^u)^T \mathbf{k}_{m,v} \mathbf{B}_\beta^u \, dv, \quad (4.27)$$

$$(\mathbf{K}^{u\phi})_{\alpha\beta} = \int (\mathbf{B}_\alpha^u)^T \mathbf{k}_{me,v} \mathbf{B}_\beta^\phi \, dv, \quad (4.28)$$

$$(\mathbf{K}^{\phi\phi})_{\alpha\beta} = - \int (\mathbf{B}_\alpha^\phi)^T \mathbf{k}_{e,v} \mathbf{B}_\beta^\phi \, dv, \quad (4.29)$$

amely egyenletekben a $\mathbf{k}_{m,v}$, $\mathbf{k}_{me,v}$ és $\mathbf{k}_{e,v}$ mátrixok a konstitutív egyenletek (3.38) pillanatnyi konfigurációra való transzformáltjainak Voigt-jelölés szerinti mátrixai (részletes leírás az A.3.3-as mellékletben).

A $\mathbf{B}_i^u$ és $\mathbf{B}_i^\phi$ mátrixok az elmozdulás-alakváltozás kapcsolatát leíró (megadó) transzformációs mátrixok, amelyek összhangban állnak a geometria egyenletekkel

$$\mathbf{B}_i^u = \begin{bmatrix} N_{i,1}^u & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,2}^u & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,3}^u \\ N_{i,2}^u & N_{i,1}^u & 0 \\ 0 & N_{i,3}^u & N_{i,2}^u \\ N_{i,3}^u & 0 & N_{i,1}^u \end{bmatrix}, \quad (4.30)$$

illetve

$$\mathbf{B}_i^\phi = \begin{bmatrix} N_{i,1}^u \\ N_{i,2}^u \\ N_{i,3}^u \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

Az egyenletekben megjelenő $N_{i,1}^u, N_{i,2}^u$ illetve $N_{i,3}^u$ mennyiségek a bázisfüggvények globális deriváltjai.

A $\mathbf{k}_m$ tenzor felbontható anyagi és geometriai részre:

$$\mathbf{k}_m = \mathbf{k}_m^{mat} + \mathbf{k}_m^{geom}. \quad (4.32)$$

Pillanatnyi konfigurációra való transzformálás után:

$$\begin{aligned} (\mathbf{k}_m^{mat})_{ijkl} &= \frac{1}{J} F_{iI} F_{jJ} \Theta_{IJKL} F_{kK} F_{lL}, \\ (\mathbf{k}_m^{geom})_{ijkl} &= \delta_{ik} \sigma_{jl}^{tot}, \\ (\mathbf{k}_{me})_{ijk} &= \frac{1}{J} F_{iI} \Pi_{IJK} F_{jJ} F_{kK}, \\ (\mathbf{k}_e)_{ij} &= \frac{1}{J} F_{iI} \Gamma_{IJ} F_{jJ}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

A (4.26) egyenlet jobb oldalán található mennyiség kifejezhető a belső és külső erővektor különbségével:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}^u \\ \mathbf{r}^\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^u \\ \mathbf{f}^\phi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{s}^u \\ \mathbf{s}^\phi \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

A belső erővektor felépítése egy elemre:

$$\mathbf{s}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_e^u \\ \mathbf{s}_e^\phi \end{bmatrix}, \quad (4.35)$$

ahol $(\sigma_v^{tot}$ a pillanatnyi konfiguráción értelmezett teljes feszültségtenzor Voigt-féle átírását jelöli)

$$\mathbf{s}_e^u = \int (\mathbf{B}_e^u)^T \sigma_v^{tot} dv, \quad (4.36)$$

illetve

$$\mathbf{s}_e^\phi = \int (\mathbf{B}_e^\phi)^T \mathbf{d}_v dv, \quad (4.37)$$

míg a külső terhelés vektora egy elemre

$$\mathbf{f}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_e^u \\ \mathbf{f}_e^\phi \end{bmatrix}, \quad (4.38)$$

ahol

$$\mathbf{f}_e^u = \int_{\partial B_t^e} (\mathbf{N}_e^u)^T \sigma^{tot} \cdot \mathbf{n} da + \int_{B_t^e} (\mathbf{N}_e^u)^T \mathbf{b}_t dv, \quad (4.39)$$

illetve

$$\mathbf{f}_e^\phi = \int_{\partial B_t^e} (\mathbf{N}_e^\phi)^T \mathbf{d} \cdot \mathbf{n} da + \int_{B_t^e} (\mathbf{N}_e^\phi)^T \varrho_t^f dv. \quad (4.40)$$

4.4. A nemlineáris számítási eljárás ismertetése

A dolgozatban bemutatott nemlineáris számítási eljárás háromdimenziós esetre vonatkozik.

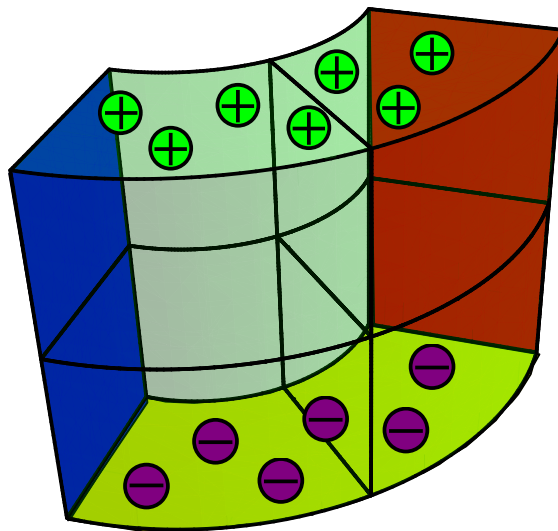
Az elemi és globális merevségi mátrix illetve belső erővektor implementálása az előző fejezet részben leírt egyenletek alapján történt. A merevségi mátrix és belső erővektor numerikus integrálása $2 \times 2 \times 2$ -es Gauss integrálással történt. Az implementálásnál előre kiszámítottuk az egyes elemek Gauss pontjaiban a lokális bázisfüggvények deriváltjainak értékét, majd egy tömbbe helyeztük őket. Így az egyes elemi merevségi mátrixok és belső erővektorok gyorsan számíthatók, hiszen az integrálás során egyszerűen csak hivatkozni kell a létrehozott tömb értékeire, nem pedig kiszámolni őket.

Az egyes kontrollpontok négy szabadságfokkal (három mechanikai és egy elektromos) rendelkeznek, ezeket kontrollváltozónak is szokás nevezni.

A mechanikai illetve elektromos szimulációk során elsőfajú (Dirichlet-féle) peremfeltételek alkalmazása elegendő volt mindegyik, a dolgozatban bemutatott problémához. A globális

mennyiségek szerkezete megegyezik az (4.26) egyenletben szereplő mennyiségekével, ellenben a peremfeltételek megadása ilyen formában nagy elemszám esetén hosszú és bonyodalmas folyamat. Ezért a *Szimulációhoz szükséges mennyiségek előkészítése* alfejeztben leírt azonosítás segítségével, a szabadságfokokat tartalmazó vektor egy jól átlátható, struktúrált tömbbé alakítható, ezáltal kényelmessé téve a peremfeltételek megadását. Ehhez párosul a geometriai modellt, a kontrollpontokat, illetve a szabadságfokokat tartalmazó háromdimenziós ábra.

A peremfeltételek megadásának egy szemléletes példája a 4.7. ábrán látható NURBS test elektro-elasztikus szimulációja. A felső és alsó felületek közé potenciálkülönbséget írunk elő, továbbá az 4.10. ábrán látható módon a felső felület kivételével minden sík felületet megtámasztunk (a felület normálisával párhuzamos elmozdulás nem engedélyezett).



4.10. ábra. Peremfeltételek: a sárga, kék s piros színek a felületre merőleges irányú elmozdulás gátlását, míg a zöld és lila golyók a pozitív és negatív töltéseket jelölik

A szabadságfokok tömbje ekkor egy negyedrendű tenzor mátrix reprezentációjának feleltethető meg, szerkezete pedig:

$$BC = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{x} & \boxed{x} & \boxed{p} \\ 31 & \boxed{x} & 33 & 101 \\ 61 & \boxed{x} & 63 & \boxed{-p} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 16 & \boxed{x} & \boxed{x} & \boxed{p} \\ 46 & \boxed{x} & 48 & 106 \\ 76 & \boxed{x} & 78 & \boxed{-p} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & 5 & \boxed{x} & \boxed{p} \\ 34 & 35 & 36 & 102 \\ 64 & 65 & 66 & \boxed{-p} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 19 & 20 & \boxed{x} & \boxed{p} \\ 49 & 50 & 51 & 107 \\ 79 & 80 & 81 & \boxed{-p} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 7 & 8 & \boxed{x} & \boxed{p} \\ 37 & 38 & 39 & 103 \\ 67 & 68 & 69 & \boxed{-p} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 22 & 23 & \boxed{x} & \boxed{p} \\ 52 & 53 & 54 & 108 \\ 82 & 83 & 84 & \boxed{-p} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 10 & 11 & \boxed{x} & \boxed{p} \\ 40 & 41 & 42 & 104 \\ 70 & 71 & 72 & \boxed{-p} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 25 & 26 & \boxed{x} & \boxed{p} \\ 55 & 56 & 57 & 109 \\ 85 & 86 & 87 & \boxed{-p} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \boxed{x} & 14 & \boxed{x} & \boxed{p} \\ \boxed{x} & 44 & 45 & 105 \\ \boxed{x} & 74 & 75 & \boxed{-p} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \boxed{x} & 29 & \boxed{x} & \boxed{p} \\ \boxed{x} & 59 & 60 & 110 \\ \boxed{x} & 89 & 90 & \boxed{-p} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

4.11. ábra. Peremfeltételek mátrixa: a sárga, kék s piros színek a felületre merőleges irányú elmozdulás gátlását, míg a zöld és lila színek a pozitív és negatív töltéseket jelölik

A következő peremfeltételek megadása lehethéges:

- szabadságfok megfogása, jelölése: " x ",
- előírt elmozdulás, jelölése: " $d+t$ " ill. " $d-t$ " (a t helyére kerül az elmozdulás értéke)
- illetve előírt elektromos potenciál, jelölése: " p " ill. " $-p$ " (általában elég két abszolútértékben megegyező, de ellentétes előjelű potenciálérték előírása)

A későbbi, dolgozatban tárgyalt problémák során olyan hengersizmetrikus feladatok numerikus szimulációját fogjuk bemutatni, melyeknél az elemszám radikális mértékben csökkenthető, ha az úgynevezett Multi-Point Constraint problémára kifejlesztett Master-Slave módszert alkalmazzuk.

Az eljárás lényege, hogy párokba (esetleg nagyobb csoportokba) rendezzük a szabadságfokokat majd kényszerkapcsolatot írunk elő közöttük az

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}\hat{\mathbf{u}} \quad (4.41)$$

egyenlet által, ahol $\mathbf{u}$ az eredeti, összes szabadságfokot tartalmazó vektor, $\hat{\mathbf{u}}$ a *master* szabadságfokokat tartalmazó vektor, $\mathbf{T}$ pedig a kényszerkapcsolatot tartalmazó mátrix.

Ekkor linearizált a egyenlet (4.26) a

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}, \quad (4.42)$$

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{T}^T \mathbf{f} \quad (4.43)$$

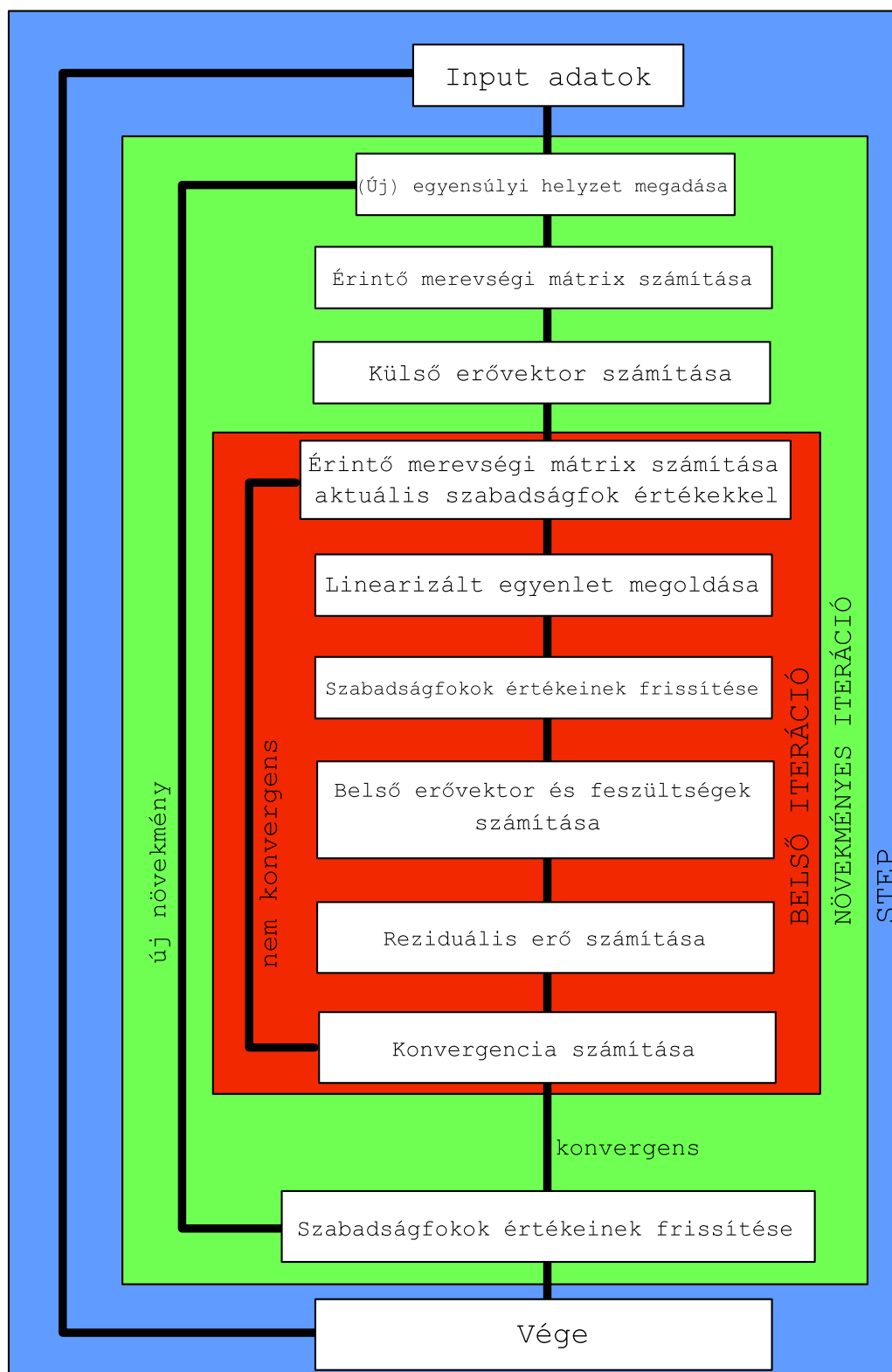
átalakításokkal leegyszerűsíthető, így a szimuláció csak *master* szabadságfokok ($\hat{\mathbf{u}}$ elemei) felhasználásával történik. A

$$\hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{F}}$$

transzformált linearizált egyenlet megoldása után az eredeti szabadságfokokat tartalmazó vektor a (4.41) egyenlet segítségével visszaállítható.

A hengerszimmetrikus feladatoknál eddig maximum a negyedére lehetett csökkenteni a modell méretét, hiszen a peremfeltételeket derékszögű koordinátarendszerben kellett megadni. Ellenben a bemutatott eljárással tovább csökkenthető a számítási modell mérete, hiszen most már elég csak egy szeletet modellezni a hengerből, a ferde felületen pedig szögfüggvénnyel kapcsolatot teremteni az egyes kontrollpontok szabadságfokai között. Az *Analitikus és numerikus eredmények összehasonlítása* fejezetben egy példán keresztül is bemutatjuk a Master-Slave módszert és hatékonyságát. Megjegyezzük, hogy az eljárást nemlineáris problémára alkalmazva, a konvergencia vizsgálatához a reziduális erővektoron is el kell végezni a (4.43) transzformációt, ugyanis ellenkező esetben a reziduum egy pozitív konstanshoz, nem pedig nullához fog konvergálni.

A numerikus megoldás során használt Newton-Raphson iteráció konvergenciája a reziduális erő normájának vizsgálatával, tolerancia beállításával lett elvégezve, az eljárás folyamata a 4.12. ábrán látható.

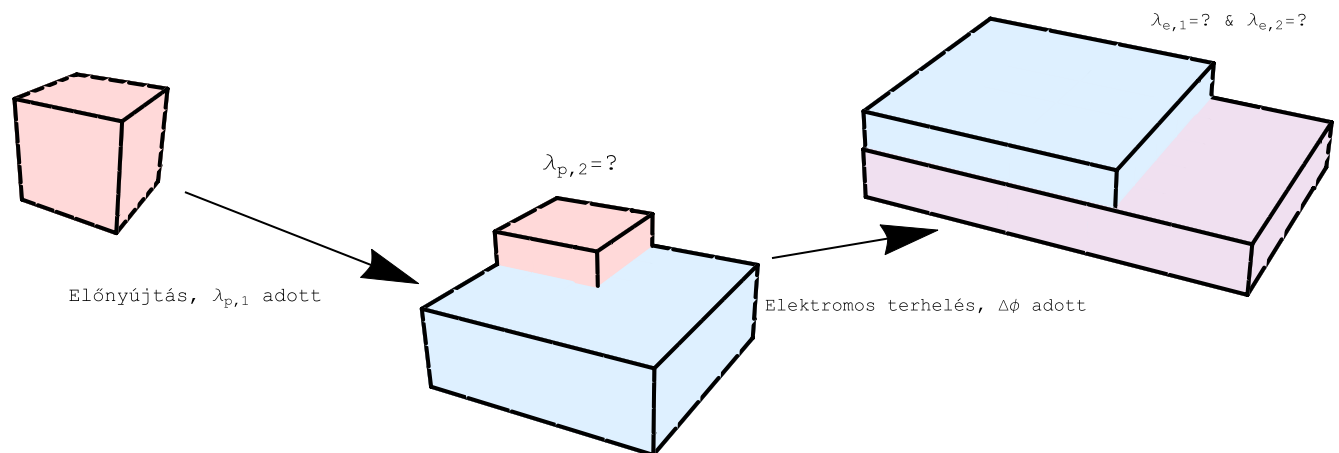


4.12. ábra. A nemlineáris eljárás folyamatábrája

Ötödik fejezet

ANALITIKUS MEGOLDÁSOK

Mivel a dielektromos elektroaktív aktuátorok elkészítése során a dielektrikumot legtöbb esetben előnyújtják, numerikus modellezését két lépésben kell megoldani: először előírt elmozdulásmezővel kiszámítjuk az előnyújtás során keletkezett belső erő és feszültségértékeket, második lépésben pedig elektromos terhelést írunk elő. Az így összeállított numerikus algoritmus tesztelését a következőkben bemutatott analitikus megoldással végeztük el.



5.1. ábra. A kétlépéses folyamat

A vizsgált test egy egységnyi oldalhosszakkal rendelkező kocka. Derékszögű koordinátarendszerben az előnyújtás során x és y irányban előírt az elmozdulás értéke, z irányban pedig szabad az alakváltozás. Ekkor az alakváltozási gradiens az

$$\mathbf{F}_p = \begin{bmatrix} \lambda_{p,1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{p,1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{p,2} \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

alakban írható fel (a "p" index az angol *prestretch* kifejezésre utal), ahol $\lambda_{p,1}$ az előírt nyújtás, tehát itt a feladatban, mint megadott mennyiség szerepel.

Az elektro-elasztikus szimulációnál az előnyújtás végállapotából indulunk ki. Az egyik megnyújtott irányban az alakváltozás nem engedélyezett, a második megnyújtott irányban az alakváltozás szabad, a harmadik irányban pedig potenciálkülönbséget írunk elő. Így ezen a lépés alakváltozási gradiensének mátrixa:

$$\mathbf{F}_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{e,1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{e,2} \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

ahol $\lambda_{e,1}$ és $\lambda_{e,2}$ mind keresett mennyiségek. Agy a két lépés alakváltozási gradiense:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_p \cdot \mathbf{F}_e \quad (5.3)$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_{p,1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{p,1} \lambda_{e,1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{p,2} \lambda_{e,2} \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Az anyagtörvényből levezetett Cauchy-féle feszültség a

$$\sigma = \frac{\mu}{J}(\mathbf{b} - \delta) + \frac{\lambda}{J} \ln(\mathbf{J})\delta + \frac{2c_2}{J}((\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}) \otimes (\mathbf{e} \cdot \mathbf{b})) - \frac{\varepsilon}{4}((\mathbf{e} \cdot \mathbf{e})\delta + 2\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) \quad (5.5)$$

alakban írható fel. Az elektromos terhelést az egyszerűség kedvéért a kezdeti konfiguráción megadva

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta\phi \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

összefüggésre jutunk, melyben $\Delta\phi$ a megadott potenciálkülönbség.

A kapcsolat a kezdeti és pillanatnyi konfiguráción értelmezett elektromos térerősség vektora között:

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{e}. \quad (5.7)$$

Tehát a megadott mennyiségek a $\Delta\phi$ potenciálkülönbség és a $\lambda_{p,1}$ előnyújtás, a keresett mennyiségek pedig a $\lambda_{p,2}$, $\lambda_{e,1}$ és $\lambda_{e,2}$ nyúlások, továbbá a Cauchy-féle feszültség ezenöt változó függvénye, tehát

$$\sigma = \sigma(\lambda_{p,1}, \lambda_{p,2}, \lambda_{e,1}, \lambda_{e,2}, \Delta\phi). \quad (5.8)$$

A feladat megoldásához két meggondolás szükséges: az első, hogy az előnyújtás során nem keletkezik z-irányban feszültség, illetve nincs elektromos hatásból eredő alakváltozás, tehát

$$\sigma_{33}(\lambda_{p,1}, \lambda_{p,2}, 1, 1, 0) = 0, \quad (5.9)$$

ebből az egyenletből $\lambda_{p,2}$ kiszámítható.

A második meggondolás az elektro-elasztikus számításra vonatkozik: egyrészt azt már az előnyújtás utáni geometrián kell számolni, továbbá azokban az irányokban, ahol szabad az alakváltozás (y-, illetve z-irány), nem keletkezik feszültség, tehát

$$\sigma_{22}(\lambda_{p,1}, \lambda_{p,2}, \lambda_{e,1}, \lambda_{e,2}, \Delta\phi) = 0, \quad (5.10)$$

$$\sigma_{33}(\lambda_{p,1}, \lambda_{p,2}, \lambda_{e,1}, \lambda_{e,2}, \Delta\phi) = 0, \quad (5.11)$$

amely egyenletekben $\lambda_{e,1}$ és $\lambda_{e,2}$ keresett, $\lambda_{p,1}$ és $\Delta\phi$ megadott mennyiségek, $\lambda_{p,2}$ értéke pedig a (5.9) egyenletből ismert, így az egyenletrendszer megoldható.

(5.9) egyenlet megoldása

Behelyettesítve és egyszerűsítve

$$\mu (\lambda_{p,2}^2 - 1) + \lambda \ln (\lambda_{p,1}^2 \lambda_{p,2}) = 0. \quad (5.12)$$

További átalakításokat elvégezve

$$\mu (\lambda_{p,2}^2 - 1) + \lambda \ln (\lambda_{p,1}^2) + \lambda \ln (\lambda_{p,2}) = 0, \quad (5.13)$$

$$\mu \lambda_{p,2}^2 + \frac{\lambda}{2} \ln (\lambda_{p,2}^2) + \lambda \ln (\lambda_{p,1}^2) - \mu = 0. \quad (5.14)$$

$\frac{\lambda}{2}$ -vel leosztva

$$\underbrace{\frac{2\mu}{\lambda}}_a \lambda_{p,2}^2 + \ln(\lambda_{p,2}^2) + \underbrace{2 \ln(\lambda_{p,1}^2) - \frac{2\mu}{\lambda}}_b = 0. \quad (5.15)$$

$$a\lambda_{p,2}^2 + \ln(\lambda_{p,2}^2) + b = 0. \quad (5.16)$$

Ez az egyenlet a Lambert-féle függvény segítségével zárt alakban megoldható:

$$\lambda_{p,2}(\lambda_{p,1}) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\text{ProductLog}(ae^{-b})}, \quad (5.17)$$

ahol

$$a = \frac{2\mu}{\lambda}, \quad (5.18)$$

illetve

$$b = 2 \ln(\lambda_{p,1}^2) - \frac{2\mu}{\lambda}. \quad (5.19)$$

(5.10) és (5.11) egyenletek megoldása

Az (5.10)-et egyszerűsítve az

$$\varepsilon \Delta \phi^2 \lambda_{e,1} \lambda_{e,2}^3 \lambda_{p,1}^2 \lambda_{p,2}^3 + 4\mu \lambda_{e,1}^2 \lambda_{p,1}^2 - 4\mu + 4\lambda \ln(\lambda_{e,1} \lambda_{e,2} \lambda_{p,1}^2 \lambda_{p,2}) = 0 \quad (5.20)$$

egyenlet, míg a (5.11) egyenletet egyszerűsítve a

$$8c_2 \Delta \phi^2 \lambda_{e,2}^2 \lambda_{p,2}^2 + 3\varepsilon \Delta \phi^2 \lambda_{e,1} \lambda_{e,2}^3 \lambda_{p,1}^2 \lambda_{p,2}^3 - 4\mu + 4\mu \lambda_{e,2}^2 \lambda_{p,2}^2 + 4\lambda \ln(\lambda_{e,1} \lambda_{e,2} \lambda_{p,1}^2 \lambda_{p,2}) = 0 \quad (5.21)$$

egyenlet adódik.

A megoldás első lépéseként a fenti két egyenletet vonjuk ki egymásból:

$$8c_2 \Delta \phi^2 \lambda_{e,2}^2 \lambda_{p,2}^2 + 2\varepsilon \Delta \phi^2 \lambda_{e,1} \lambda_{e,2}^3 \lambda_{p,1}^2 \lambda_{p,2}^3 + 4\mu (\lambda_{e,2}^2 \lambda_{p,2}^2 - \lambda_{e,1}^2 \lambda_{p,1}^2) = 0. \quad (5.22)$$

Az egyszerűség kedvéért alkalmazzuk az $\varepsilon = 0$ összefüggést. Így a fenti egyenlet

$$8c_2 \Delta \phi^2 \lambda_{e,2}^2 \lambda_{p,2}^2 + 4\mu (\lambda_{e,2}^2 \lambda_{p,2}^2 - \lambda_{e,1}^2 \lambda_{p,1}^2) = 0. \quad (5.23)$$

$\lambda_{e,2}$ -t kifejezve

$$\lambda_{e,2} = \sqrt{\frac{4\mu \lambda_{e,1}^2 \lambda_{p,1}^2}{\lambda_{p,2}^2 (8c_2 \Delta \phi^2 + 4\mu)}}, \quad (5.24)$$

majd behelyettesítve az (5.20) egyenletbe ($\varepsilon = 0!$)

$$4\mu\lambda_{e,1}^2\lambda_{p,1}^2 - 4\mu + 4\lambda \ln \left(\lambda_{e,1} \sqrt{\frac{4\mu\lambda_{e,1}^2\lambda_{p,1}^2}{\lambda_{p,2}^2(8c_2\Delta\phi^2 + 4\mu)}} \lambda_{p,1}\lambda_{p,2} \right) = 0. \quad (5.25)$$

Ezt tovább alakítva

$$4\mu\lambda_{p,1}^2\lambda_{e,1}^2 - 4\mu + 4\lambda \ln \left(\lambda_{e,1}^2 \sqrt{\frac{4\mu\lambda_{p,1}^2}{\lambda_{p,2}^2(8c_2\Delta\phi^2 + 4\mu)}} \lambda_{p,1}\lambda_{p,2} \right) = 0, \quad (5.26)$$

$$\underbrace{\frac{\mu}{\lambda}\lambda_{p,1}^2\lambda_{e,1}^2 + \ln(\lambda_{e,1}^2)}_{a'} + \underbrace{\ln \left(\sqrt{\frac{4\mu\lambda_{p,1}^2}{\lambda_{p,2}^2(8c_2\Delta\phi^2 + 4\mu)}} \lambda_{p,1}\lambda_{p,2} \right) - \frac{\mu}{\lambda}}_{b'} = 0. \quad (5.27)$$

$$a'\lambda_{e,1}^2 + \ln(\lambda_{e,1}^2) + b' = 0. \quad (5.28)$$

Végül

$$\lambda_{e,1} = \frac{1}{\sqrt{a'}} \sqrt{\text{ProductLog}(a'e^{-b'})}. \quad (5.29)$$

Megjegyzés: $\varepsilon \neq 0$ esetben a (5.10) és (5.11) egyenletek numerikus megoldása szükséges.

Hatodik fejezet

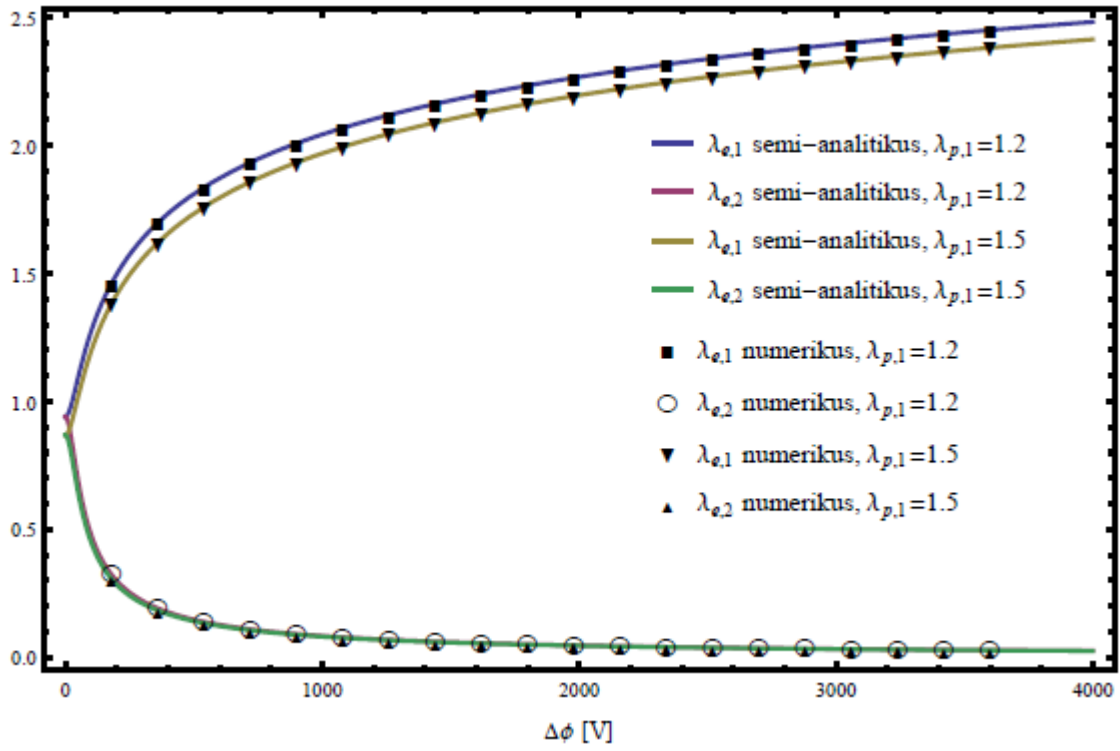
ANALITIKUS ÉS NUMERIKUS EREDMÉNYEK ÖSSZEHASONLÍTÁSA

Az előző fejezetben bemutatott számítás izogometrikus implementálása során egy darab, a nyolccsomópontos, lineáris, izoparaméteres hexahedron elemmel teljesen ekvivalens NURBS elem került felhasználásra, a felhasznált anyagparamétereket az 1. táblázat foglalja össze.

$$\begin{aligned} \mu &= 5 \cdot 10^6 \text{ [Pa]}, & \lambda &= \frac{20}{3} \cdot 10^6 \text{ [Pa]}, & c_1 &= 10 \left[\frac{\text{Pa m}^2}{\text{V}^2} \right], \\ c_2 &= 6 \left[\frac{\text{Pa m}^2}{\text{V}^2} \right], & \varepsilon_r \varepsilon_0 &= 5 \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ [C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-2}] \end{aligned}$$

1. táblázat - Felhasznált anyagjellemzők

A numerikus és semi-analitikus eredmények összehasonlítása a 6.1. ábrán látható, az eredmények jó egyezést mutatnak.

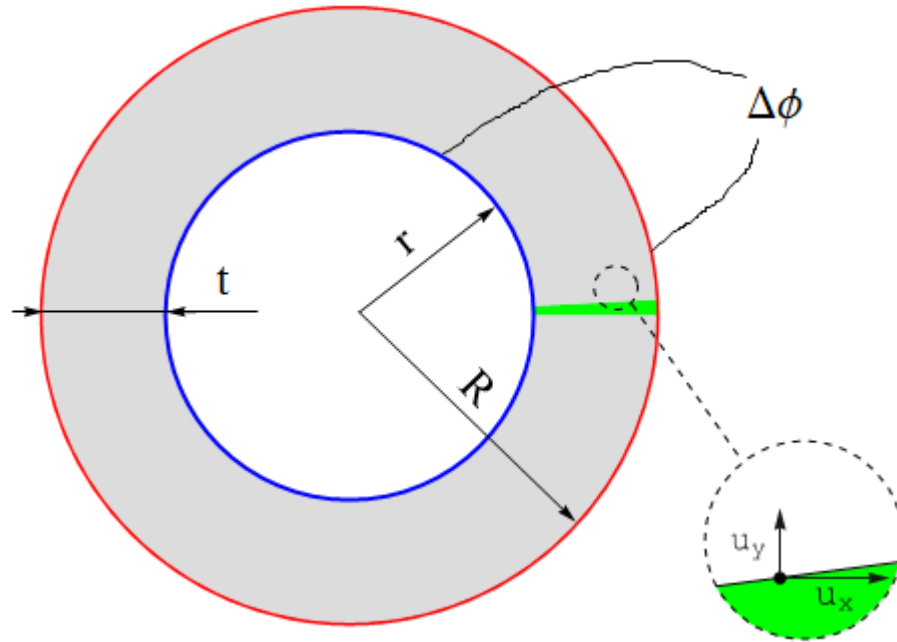


6.1. ábra. Numerikus és semi-analitikus eredmények összehasonlítása különböző előnyújtás értékekkel

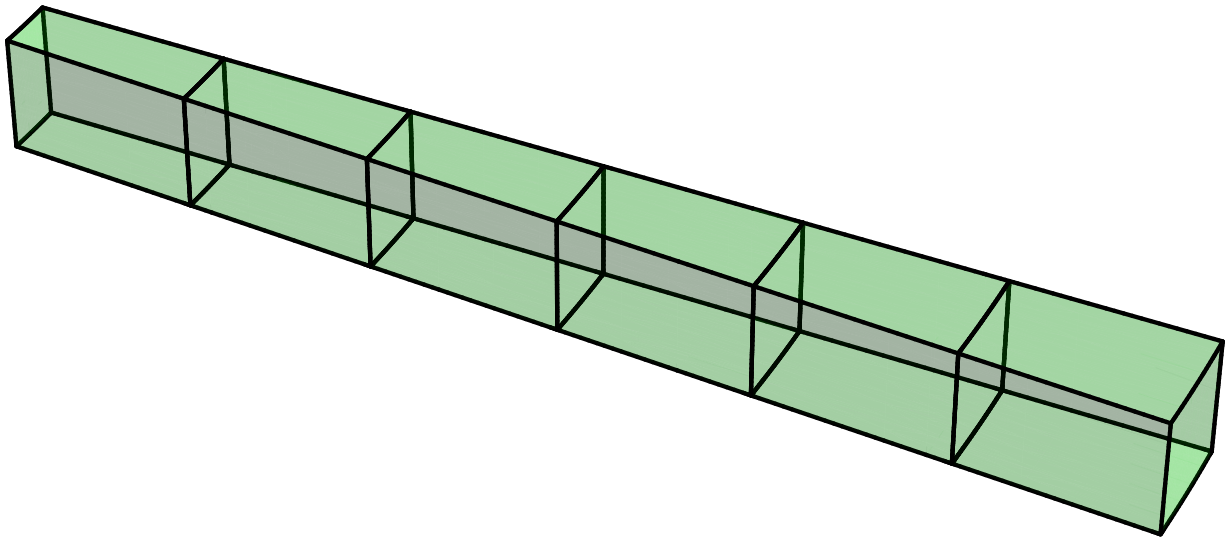
A Master-Slave módszert az elektroaktív vastagfalú cső példáján teszteltük. A cső belső és külső fala közé potenciálkülönbséget írtunk elő, továbbá gátoltuk mind a két fal elmozdulását. A 6.2. ábrán látható zöld területet modelleztük, a ferde megtámasztást Master-Slave módszerrel írtuk elő: a ferde falon mindegyik kontrollpont x-irányú elmozdulása master, míg az y-irányú elmozdulások slave szabadságfok. A kényszerkapcsolat közöttük az

$$u_y = u_x \operatorname{tg}(\theta), \quad (6.1)$$

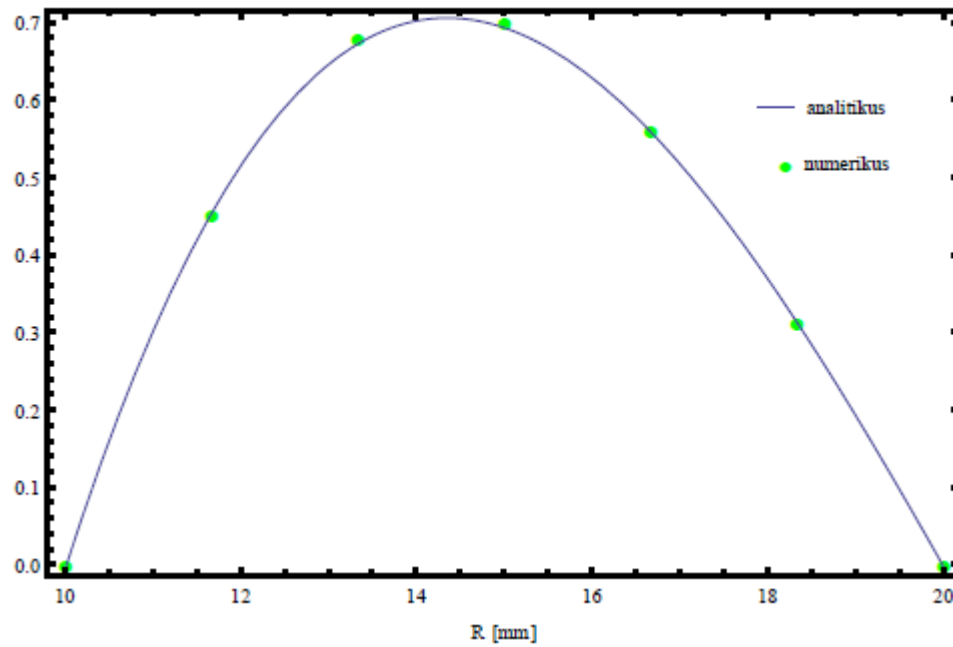
egyenlettel fejezhető ki, ahol θ a nyílásszöveget jelöli.



6.2. ábra. Vastagfalú cső - Master-Slave módszer



6.3. ábra. Vastagfalú cső izogeometrikus modellje



6.4. ábra. Az analitikus és numerikus eredmények összehasonlítása

Az analitikus megoldás a szakirodalomból ismert, ezt hasonlítottuk össze a numerikus számítás eredményével, mely során radiális irányban hat, míg a többi irányban egy elemet alkalmaztunk (6.3. ábra). A felhasznált anyagjellemzők megegyeznek az 1. táblázat értékeivel, a geometriai méretek pedig: $R = 20 \text{ mm}$, $r = 10 \text{ mm}$. Az eredmények összehasonlítása a 6.4. ábrán látható.

Hetedik fejezet

KÍSÉRELETI VIZSGÁLATOK

A fejezet bemutatja a dielektromos elektroaktív anyagból készült körkörös aktuátor komponenseit, elkészítésének folyamatát, illetve alakváltozásának mérését.

7.1. Felhasznált anyagok és eszközök

Az aktuátor legfontosabb komponense a 3M által gyártott VHB 4905 dielektrikum (7.1. ábra).

Kiváló elektromos és mechanikai tulajdonságainak köszönhetően ezt az anyagot alkalmazzák a legtöbbször dielektromos elektroaktív aktuátorok készítéséhez. A VHB 4905 dielektrikum tulajdonságait a 2. táblázat foglalja össze.

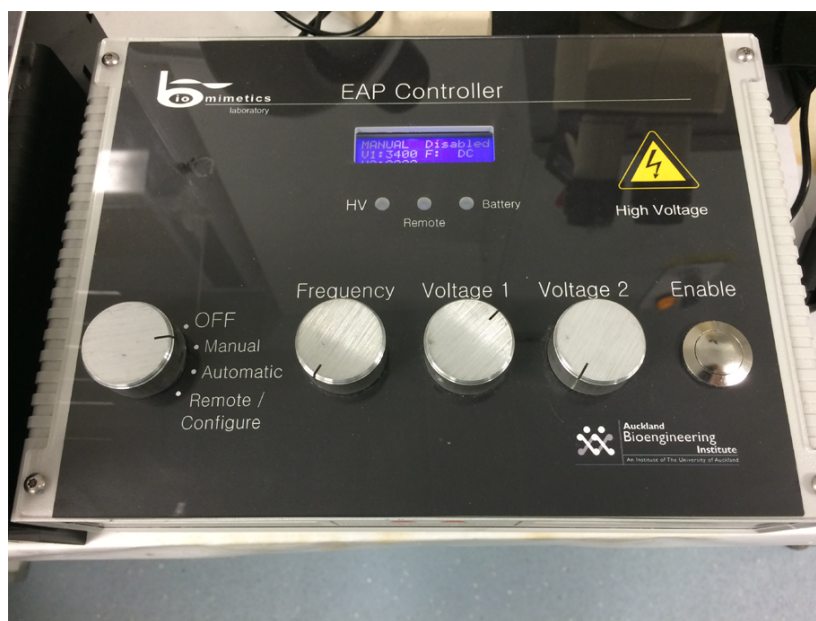


7.1. ábra. Felhasznált anyagok balról jobbra: MG Chemicals vezetőképessé kenőanyag, VHB 4905 dielektrikum, réztartalmú ragasztószalag

Young-modulus [kPa]	220
Poisson tényező [-]	0.49
Relatív permittivitás [-]	4.8
Vastagság [mm]	0.5

2. táblázat - A VHB 4905 dielektrikum tulajdonságai

A dielektrikum kétdimenziós Hoberman mechanizmussal lett megnyújtva, a vezető rétegek pedig az MG Chemicals által gyártott széntartalmú vezetőképes kenőanyaggal (7.1. ábra) lettek kialakítva. Az akturátor működéséhez szükséges DC nagyfeszültséget a University of Auckland által forgalmazott EAP Controller biztosította (7.2. ábra). A tápegység kimeneti feszültségtartománya 0-5 kV.



7.2. ábra. Nagyfeszültségű tápegység

A nagyfeszültségű táp és a kenőanyag közti kapcsolatot réztartalmú ragasztószalag teremti meg (7.1. ábra).

7.2. Körkörös aktuátor elkészítése

A körkörös aktuátor elkészítésének lépései:



(a) 5×5 cm-es VHB 4905 levágása



(b) A dielektrikum ráhelyezése a mechanizmusra



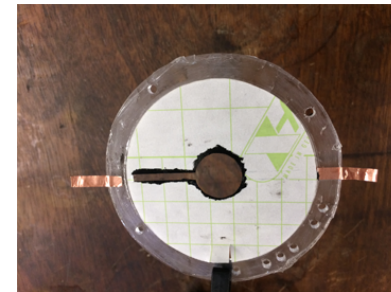
(c) Előnyújtás



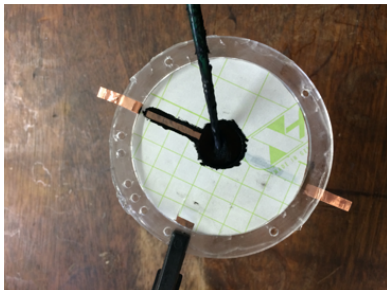
(d) Réztartalmú ragasztószalag felhelyezése



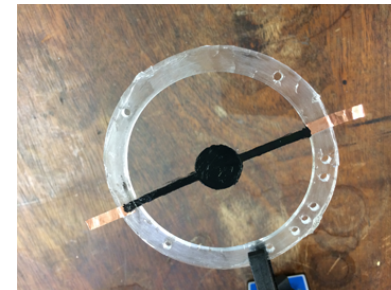
(e) Előnyújtott dielektrikum felragasztása a keretre



(f) A dielektrikum ráhelyezése a mechanizmusra



(g) Vezető rétegek kialakítása

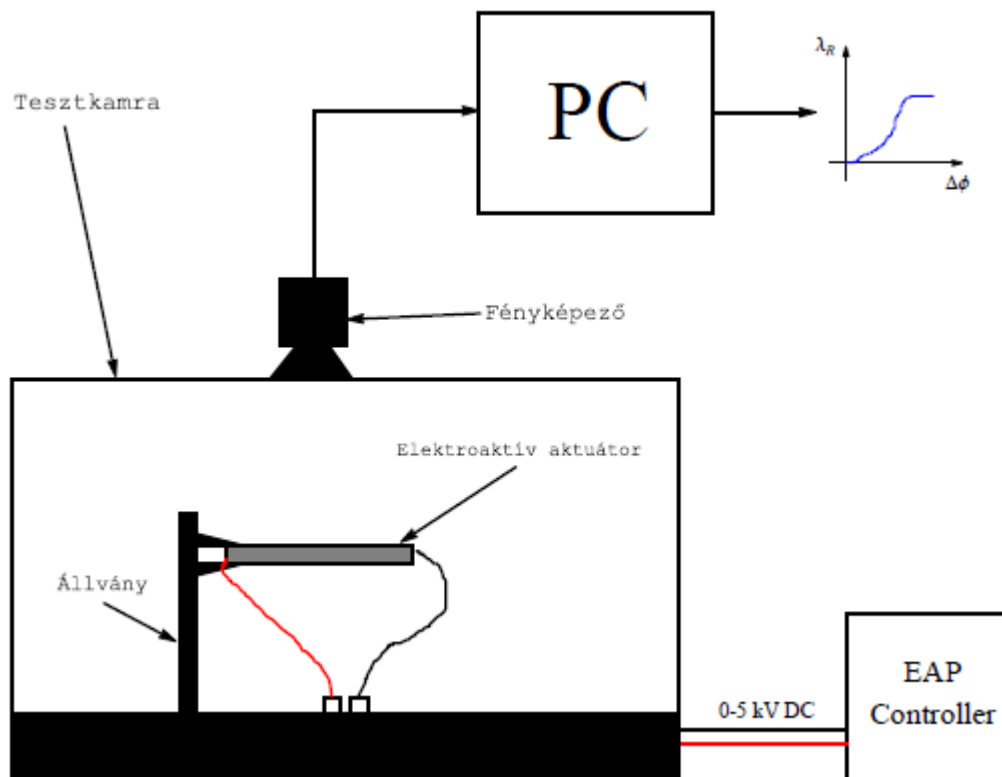


(h) A kész aktuátor

Az elkészített aktuátor külső átmérője 80 mm, míg az aktív rész átmérője 30 mm.

7.3. Körkörös aktuátor alakváltozásának mérése

A körkörös aktuátor nem lép ki a síkból az alakváltozása során, ezért képfeldolgozó eljárások segítségével az aktív terület (fekete kenőanyaggal bevont kör) deformációja mérhető. A mérés elvi felépítése a 7.4. ábrán látható.



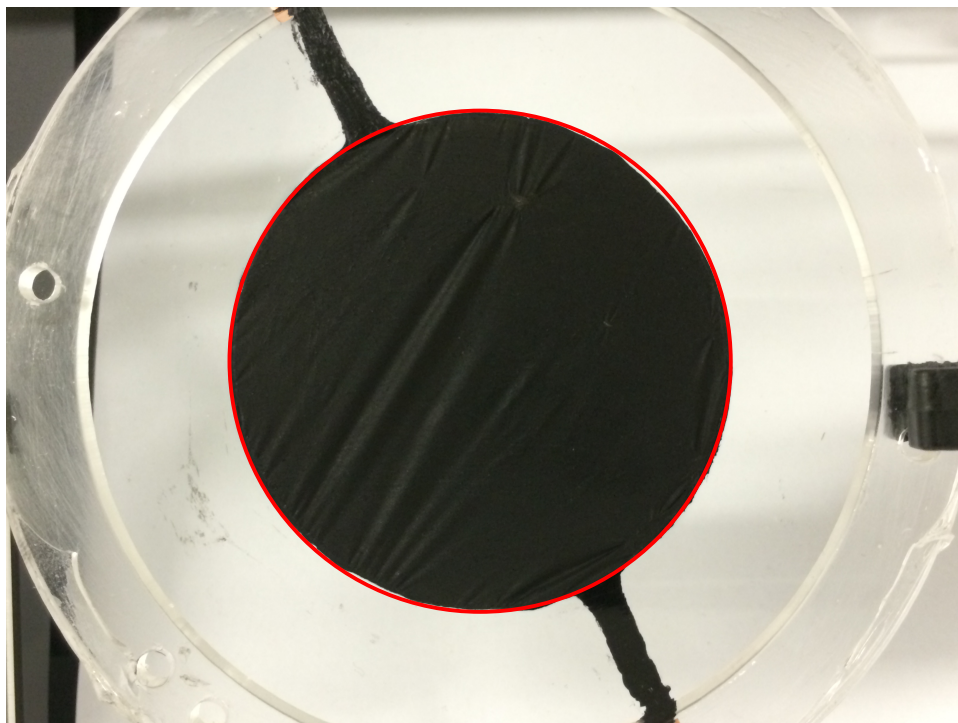
7.4. ábra. A mérés elvi vázlata

Az egyes terhelési esetekhez tartozó fényképeket a Wolfram Mathematica beépített képfeldolgozó algoritmusai segítségével értékeltük ki. Az algoritmus teljesen automatikusan képes megtalálni az aktív terület határait, melyeknek sugarát körillesztő algoritmussal számítottuk ki. Az algoritmus eredményeit és a mérés kiértékelését a következő ábrák mutatják be.

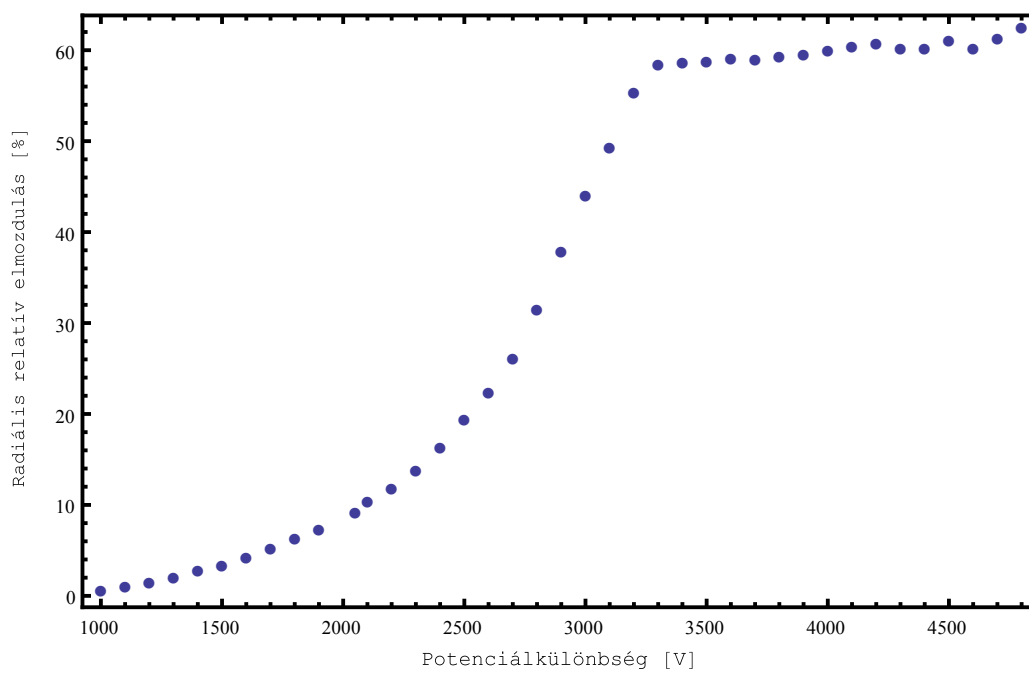
A relatív radiális elmozdulás definíciója:

$$u_{rel} = \frac{(r_A - R_A)}{R_A} 100, \quad (7.1)$$

ahol R_A az aktív terület kezdeti, r_A pedig az aktív terület aktuális sugara.



7.5. ábra. A képfeldolgozó algoritmus egyik eredménye, az ábrán a program által számolt kör pirossal van jelölve

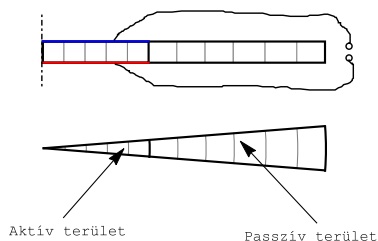


7.6. ábra. A mérés eredménye

Nyolcadik fejezet

MÉRÉSI ÉS NUMERIKUS EREDMÉNYEK ÖSSZEHAISONLÍTÁSA

A fejezetben bemutatásra kerül az előzőekben tárgyalt elektroaktív körkörös aktuátor modellje. A szimulációt két lépésre osztottuk, először az előnyújtást, majd az elektro-elasztikus hatást szimuláltuk. Előbbinél tisztán mechanikai Neo-Hooke anyagmodellt, utóbbinál pedig elektro-elasztikus Neo-Hooke anyagmodellt használtunk, az anyagparaméterek megegyeznek a 2. táblázatban felsorolt értékekkel.



8.1. ábra. Az aktuátor elektro-elasztikus szimulációjának modellje

A vastagfalú cső modelljéhez hasonlóan forgásszimmetrikus a probléma, így csak egy körcikket modelleztünk. A nyílásszög és a vastagság irányában egy, míg radiális irányban 160 elemet használtunk. Az előnyújtás és az elektro-elasztikus szimulációhoz szimmetria peremfeltételt

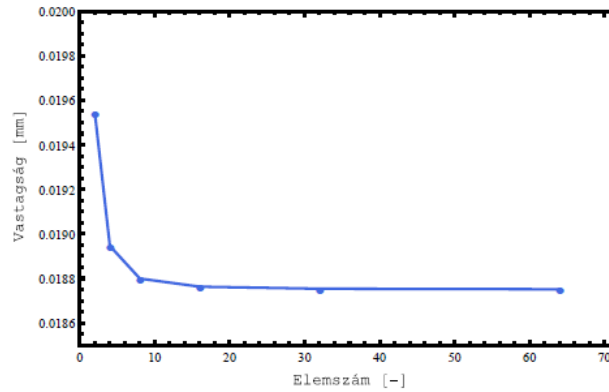
írtunk elő a vastagság illetve a nyílásszög irányában. A külső átmérőnél található kontrollpontoknál az előnyújtás esetében előírt elmozdulást, míg az elektro-elasztikus szimulációnál befogást alkalmaztunk. Az elektro-elasztikus feladat izogeometrikus modellje a 8.1. ábrán látható.

Az előnyújtás során nem ismert a kezdeti állapot, hiszen az előnyújtott dielektrikumból kivágunk egy darabot, ezért az előnyújtás során mérni kell a deformáció mértékét. Ez a Hoberman mechanizmus belső átmérőjének mérésével lehetséges: kezdetben az átmérő 30 mm, míg előnyújtott állapotban 155 mm volt. Mivel a merev keret belső átmérője 80 mm, kiszámolható a szimulációhoz szükséges kezdeti átmérő d_0 és a szükséges előírt radiális irányú elmozdulás u_r :

$$d_0 = \frac{30}{155}80 \approx 15.48 \text{ mm}, \quad (8.1)$$

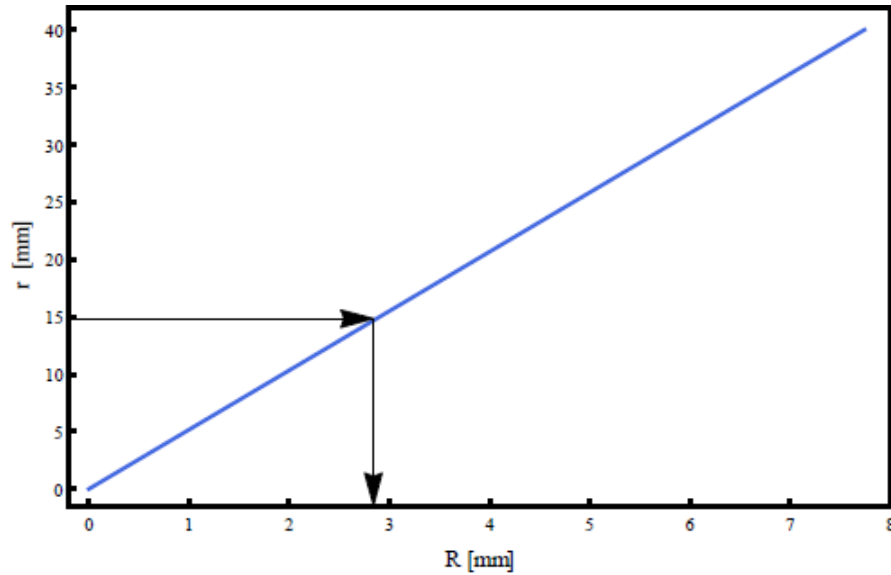
$$u_r = (155 - d_0)/2 \approx 32.25 \text{ mm}. \quad (8.2)$$

A szimuláción elemszám függetlenségi vizsgálatot végeztem, melynek eredménye a 8.2. ábrán látható. Az elemszámot minden lépésben dupláztam, jól látható, hogy 64 elem alkalmazása már megfelelőnek bizonyul.



8.2. ábra. Az előnyújtás elemszám függetlenségi vizsgálata

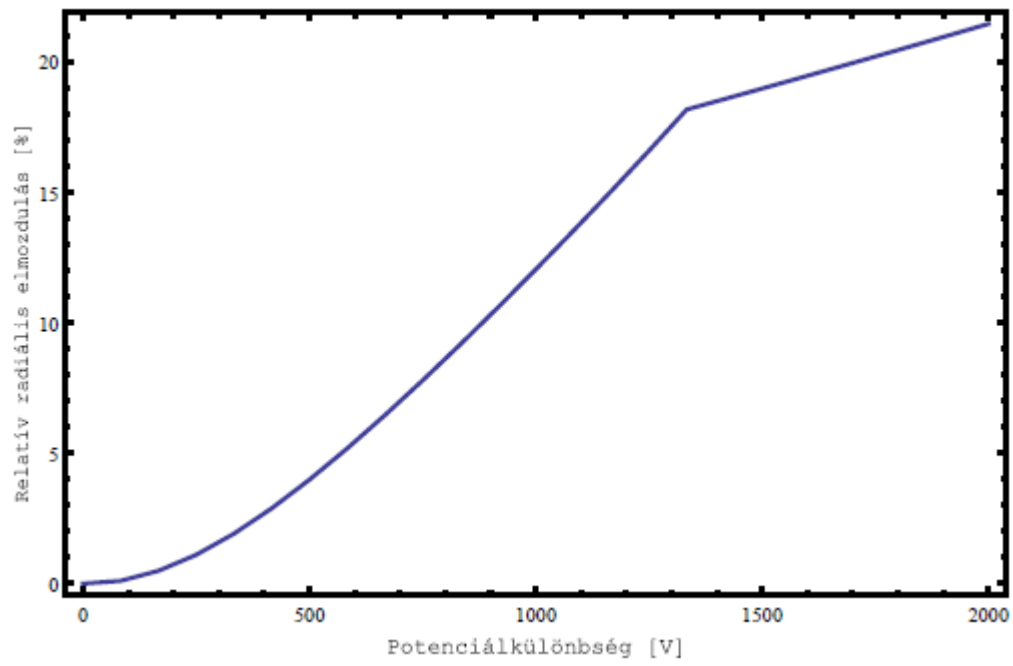
Mivel a kontrollpontok radiális elmozdulása lineáris (8.3. ábra), kiszámolható, hogy hova kell elhelyezni az aktív terület határát a szimuláció előtt, hogy az az előnyújtás után 15 mm-re helyezkedjen el az origótól (az aktuátor elkészítésénél erre a területre vittük fel a vezető anyagot, tehát ez adott mennyiség volt).



8.3. ábra. Az előnyújtás eredménye

Az elektroaktív szimulációhoz a kezdeti feltételek az előnyújtás során számított mennyiségekből származtathatók (feszültségértékek, elmozdulásértékek stb.). Mivel két anyagparaméter c_1 és c_2 értéke ismeretlen, ezért kezdetben becslés segítségével határoztuk meg őket. Többszöri futtatás eredménye igazolta, hogy a c_1 konstans csupán az elektromos mennyiségek között teremt kapcsolatot, értéke nem befolyásolja a deformációt. Ellenben a c_2 konstans értéke hatással van az alakváltozásra, így ennek a paraméternek a változtatásával beállítható a deformáció mértéke.

A 8.4 ábrán látható, hogy a szimuláció eredménye jellegre megegyezik a mérésből megállapított görbével (7.6 ábra), az értékbeli különbség pedig a c_2 paraméter megfelelő beállításával redukálható, azonban ez a feladat a dolgozat jelenlegi keretein belül nem volt megvalósítható.



8.4. ábra. A szimuláció eredménye

Kilencedik fejezet

ÖSSZEFOGLALÁS

9.1. A dolgozat eredményeinek összefoglalása

A dolgozat egy másfél éves kutatómunka eredménye, mely magába foglalja az elektroaktív anyagok gyártásának, alkalmazásának és számítógépes szimulációjának a témakörét.

A számítógépes szimuláció saját fejlesztésű, izogeometrikus kódon alapul, melynek implementálását Wolfram Mathematica programban végeztük el. A kódot a programon belül lefordítottuk C nyelvre, mely a szimuláció idejének csökkenését eredményezte.

A numerikus eljárásba olyan modulok beépítését végeztük el, melyek megteremtik azoknak a fizikai jelenségeknek a szimulációját, melyet a valóságban végzünk el az anyagon. Így lehetőség van az elektro-elasztikus szimuláció előtt a radiális nyújtást szimulálni, illetve Master-Slave módszer felhasználásával hengersizmetrikus problémák esetén kevesebb elemszámot alkalmazni. Az új eljárások megbízhatóságának igazolására analitikusan megoldható feladatokat dolgoztunk ki, illetve használtunk fel szakirodalomban megtalálható példák segítségével.

A dolgozatban bemutatásra került egy valós elektroaktív aktuátor gyártási folyamatának bemutatása, továbbá a mérési módszer, melynek segítségével mérhető az aktuátor alakváltozása.

A mérési és numerikus eredmények összehasonlítása során megállapítható, hogy az eredmények jellegre egyeznek, azonban értékben lényeges különbség van köztük. Ez az ismeretlen anyagparaméternek köszönhető, melyet további kutatás során kívánunk meghatározni.

9.2. A dolgozat eredményeinek továbbfejlesztési lehetőségei

A dolgozat témája nagy területet foglal össze, így számos fejlesztési lehetőséget hordoz magában.

Az izogeometrikus analízis implementálását egyelőre Wolfram Mathematica programban

végeztük el, s ugyan lefordítottuk C nyelvre, a szimulációs idő nem mondható kevésnek. 160 elemmel számolva a körkörös aktuátor példáját közel egy óra kell a programnak személyi számítógépen az eredmények kiszámítására, melyet a további vizsgálatok eredményessége végett mindenképpen csökkenteni kell.

A szimuláció egyelőre csak egy patch-ből álló geometria futtatását teszi lehetővé, a bonyolult geometriával rendelkező aktuátorok esetében ez kevés, úgyhogy egy több patch-et is futtatni képes eljárás implementálása tervbe van véve. Ez a dolgozatban bemutatott Master-Slave módszer segítségével már könnyen elvégezhető (a két patch összekapcsolódó felületeit, szakaszait vagy pontjait kényszerkapcsolatok segítségével egyesítjük).

Mivel a körkörös aktuátor vastagsága nagyságrendekkel kisebb mint a sugara, ezért mindenféleképp növelni kell az elemszámot a modellezés során, különösképp ügyelve az aktív és passzív terület közti határra, mely modellezése során a legjobb megoldás magasabb fokú bázisfüggvények, illetve az elemek közti átmenet fokszámának növelése. Ezután már lehetőség lesz az ismeretlen anyagparaméterek meghatározására. Megjegyezzük, hogy a szakirodalomban még nem található olyan publikáció, mely sikeresen illesztett volna anyagmodellt elektroaktív anyagra, az összes ezzel foglalkozó cikk csak részleges eredményeket ért el.

A körkörös aktuátor egyszerűen modellezhető analitikusan is, hiszen hengerszimmetrikus problémáról van szó. Az analitikus megoldás elengedhetetlen a numerikus eredmények megértéséhez, ezért tervezzük ennek a feladatnak a megoldását.

9.3. Köszönetnyilvánítás

A kutatásom során számos olyan segítséget kaptam, melyek nélkül nem jutottam volna el a dolgozatban leírt eredményekig. Így köszönettel tartozom konzulensemnek Dr. Szabó Lászlónak a folyamatos szakmai támogatásáért, Hénop Gábornak az izogeometrikus analízis témakörében nyújtott segítségéért, Dr. Bende Margitnak, Dr. Kovács Ádámnak és Dr. Stépán Gábornak a szakmai gyakorlat megpályázása során tett erőfeszítéseikért. Köszönet illeti a Campus Hungary szervezetet, mely a szakmai gyakorlat pénzügyi háttérét teremtette meg, a Bristol Robotics Laboratory kutatóit, akik mindenben segítségemre voltak, továbbá a családom tagjait, akik mellettem álltak és biztosították a nyugodt munka lehetőségét.

A. függelék

Anyagmodellek összefüggései

A fejezet a dolgozatban felhasznált három különböző elektro-elasztikus Neo-Hooke anyagmodell esetére a merevségi mátrix és belső erővektor számításához szükséges mennyiségeket tartalmazza.

A.1. Az anyagmodell levezetett összefüggései

A.1.1. Energiafüggvény deriváltjai

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{C}} \right)_{KL} &= \frac{\mu}{2} (\delta_{KL} - C_{KL}^{-1}) + \frac{1}{4} \lambda \ln(\det(\mathbf{C})) C_{KL}^{-1} + c_2 E_K E_L \\ &\quad - \frac{\varepsilon_0}{2} E_I E_J \left(\frac{J}{2} C_{IJ}^{-1} C_{KL}^{-1} + \frac{J}{2} (C_{IK}^{-1} C_{JL}^{-1} + C_{IL}^{-1} C_{JK}^{-1}) \right), \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mathbf{C} \otimes \partial \mathbf{C}} \right)_{IJKL} &= \frac{\mu}{4} (C_{IK}^{-1} C_{JL}^{-1} + C_{IL}^{-1} C_{JK}^{-1}) + \frac{\lambda}{4} (\ln(\det(J)) (C_{IK}^{-1} C_{JL}^{-1} \\ &\quad + C_{IL}^{-1} C_{JK}^{-1}) + C_{IJ}^{-1} C_{KL}^{-1}) - \frac{\varepsilon_0 J}{8} E_P E_Q (C_{KL}^{-1} C_{IJ}^{-1} C_{PQ}^{-1} \\ &\quad + C_{IK}^{-1} C_{JL}^{-1} C_{PQ}^{-1} + C_{IL}^{-1} C_{JK}^{-1} C_{PQ}^{-1} + C_{IJ}^{-1} C_{PK}^{-1} C_{QL}^{-1} \\ &\quad + C_{IJ}^{-1} C_{PL}^{-1} C_{QK}^{-1} + C_{KL}^{-1} C_{PI}^{-1} C_{QJ}^{-1} + C_{QJ}^{-1} C_{PK}^{-1} C_{IL}^{-1} \\ &\quad + C_{QJ}^{-1} C_{PK}^{-1} C_{IK}^{-1} + C_{PI}^{-1} C_{QK}^{-1} C_{JL}^{-1} + C_{PI}^{-1} C_{QL}^{-1} C_{JK}^{-1} \\ &\quad + C_{KL}^{-1} C_{PJ}^{-1} C_{QI}^{-1} + C_{QI}^{-1} C_{PK}^{-1} C_{JL}^{-1} + C_{QI}^{-1} C_{PL}^{-1} C_{JK}^{-1} \\ &\quad + C_{PJ}^{-1} C_{QK}^{-1} C_{IL}^{-1} + C_{PJ}^{-1} C_{QL}^{-1} C_{IK}^{-1}), \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{E}}\right)_I = 2c_1E_I + 2c_2C_{PI}E_I - \frac{\varepsilon_0J}{2}(C_{IQ}^{-1}E_Q + C_{PI}^{-1}E_P), \quad (\text{A.3})$$

$$\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial\mathbf{E}\otimes\partial\mathbf{E}}\right)_{IJ} = 2c_1\delta_{IJ} + 2c_2C_{IJ} - \varepsilon_0JC_{IK}^{-1}, \quad (\text{A.4})$$

$$\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial\mathbf{E}\otimes\partial\mathbf{C}}\right)_{IJK} = c_2(\delta_{KI}E_J + \delta_{IJ}E_K) - \frac{\varepsilon_0J}{2}E_Q(C_{IK}^{-1}C_{QL}^{-1} + C_{IL}^{-1}C_{QK}^{-1} + C_{KL}^{-1}C_{IQ}^{-1}). \quad (\text{A.5})$$

A.1.2. Konstitutív érintő tenzorok a kezdeti konfiguráción

$$\begin{aligned} \Theta_{IJKL} = & \mu (C_{IK}^{-1}C_{JL}^{-1} + C_{IL}^{-1}C_{JK}^{-1}) + \lambda(-\ln(\det(J)))(C_{IK}^{-1}C_{JL}^{-1} + C_{IL}^{-1}C_{JK}^{-1}) + \\ & + C_{IJ}^{-1}C_{KL}^{-1}) - \frac{\varepsilon_0J}{2}E_PE_Q(C_{KL}^{-1}C_{IJ}^{-1}C_{PQ}^{-1} + C_{IK}^{-1}C_{JL}^{-1}C_{PQ}^{-1} \\ & + C_{IL}^{-1}C_{JK}^{-1}C_{PQ}^{-1} + C_{IJ}^{-1}C_{PK}^{-1}C_{QL}^{-1} + C_{IJ}^{-1}C_{PL}^{-1}C_{QK}^{-1} + C_{KL}^{-1}C_{PI}^{-1}C_{QJ}^{-1} \\ & + C_{QJ}^{-1}C_{PK}^{-1}C_{IL}^{-1} + C_{QJ}^{-1}C_{PK}^{-1}C_{IK}^{-1} + C_{PI}^{-1}C_{QK}^{-1}C_{JL}^{-1} + C_{PI}^{-1}C_{QL}^{-1}C_{JK}^{-1} \\ & + C_{KL}^{-1}C_{PJ}^{-1}C_{QI}^{-1} + C_{QI}^{-1}C_{PK}^{-1}C_{JL}^{-1} + C_{QI}^{-1}C_{PL}^{-1}C_{JK}^{-1} + C_{PJ}^{-1}C_{QK}^{-1}C_{IL}^{-1} \\ & + C_{PJ}^{-1}C_{QL}^{-1}C_{IK}^{-1}), \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\Pi_{IJK} = -2c_2(\delta_{KI}E_J + \delta_{IJ}E_K) + \varepsilon_0JE_Q(C_{IJ}^{-1}C_{QK}^{-1} + C_{IK}^{-1}C_{QJ}^{-1} + C_{JK}^{-1}C_{IQ}^{-1}), \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{\Gamma}_{IJ} = -2c_1\delta_{IJ} - 2c_2C_{IJ} + \varepsilon_0JC_{IK}^{-1}, \quad (\text{A.8})$$

$$S_{IJ}^{tot} = \frac{\mu}{2}(\delta_{IJ} - C_{IJ}^{-1}) + \frac{1}{4}\lambda \ln(\det(\mathbf{C}))C_{IJ}^{-1} + c_2E_IE_J - \quad (\text{A.9})$$

$$- \frac{\varepsilon_0J}{4}E_PE_Q(C_{IJ}^{-1}C_{PQ}^{-1} + C_{PI}^{-1}C_{QJ}^{-1} + C_{PJ}^{-1}C_{QI}^{-1}), \quad (\text{A.10})$$

$$D_I = -2c_1E_I - 2c_2C_{PI}E_I + \frac{\varepsilon_0J}{2}(C_{IQ}^{-1}E_Q + C_{PI}^{-1}E_P). \quad (\text{A.11})$$

A.1.3. Konstitutív érintő tenzorok a pillanatnyi konfiguráción

A 4.33 egyenletben bevezetett mennyiségek összenyomható Neo-Hooke anyagmodell esetén:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{k}_m^{mat})_{ijkl} &= \left(\frac{\mu - \lambda \ln(J)}{J} \right) (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \left(\frac{\lambda}{J} \right) (\delta_{ij}\delta_{lk}) \\
&\quad - \frac{\varepsilon_0}{2} (\delta_{lk}\delta_{ij}E_P F_{Pc}^{-1} E_Q F_{Qc}^{-1} + \delta_{il}\delta_{jk}E_P F_{Pc}^{-1} E_Q F_{Qc}^{-1} \\
&\quad + \delta_{ik}\delta_{jl}E_P F_{Pc}^{-1} E_Q F_{Qc}^{-1} + \delta_{ij}E_P F_{Pl}^{-1} E_Q F_{Qk}^{-1} \\
&\quad + \delta_{ij}E_P F_{Pk}^{-1} E_Q F_{Ql}^{-1} + \delta_{lk}E_P F_{Pi}^{-1} E_Q F_{Qj}^{-1} \\
&\quad + \delta_{ik}E_P F_{Pl}^{-1} E_Q F_{Qj}^{-1} + \delta_{il}E_Q F_{Qj}^{-1} E_P F_{Pk}^{-1} \\
&\quad + \delta_{jk}E_P F_{Pi}^{-1} E_Q F_{Ql}^{-1} + \delta_{jl}E_P F_{Pi}^{-1} E_Q F_{Qk}^{-1} \\
&\quad + \delta_{lk}E_P F_{Pj}^{-1} E_Q F_{Qi}^{-1} + \delta_{jk}E_P F_{Pl}^{-1} E_Q F_{Qi}^{-1} \\
&\quad + \delta_{jl}E_P F_{Pk}^{-1} E_Q F_{Qi}^{-1} + \delta_{ik}E_P F_{Pj}^{-1} E_Q F_{Ql}^{-1} \\
&\quad + \delta_{il}E_P F_{Pj}^{-1} E_Q F_{Qk}^{-1}) \\
&= \left(\frac{\mu - \lambda \ln(J)}{J} \right) (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \left(\frac{\lambda}{J} \right) (\delta_{ij}\delta_{lk}) \\
&\quad - \frac{\varepsilon_0}{2} (\delta_{lk}\delta_{ij}e_c e_c + \delta_{il}\delta_{jk}e_c e_c + \delta_{ik}\delta_{jl}e_c e_c \\
&\quad + 2\delta_{ij}e_l e_k + 2\delta_{lk}e_i e_j + 2\delta_{ik}e_l e_j \\
&\quad + 2\delta_{il}e_j e_k + 2\delta_{jk}e_i e_l + 2\delta_{jl}e_i e_k),
\end{aligned} \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{k}_m^{geom})_{ijkl} &= \delta_{ik} \left(\frac{\mu}{J} F_{jN} F_{lN} - \frac{\mu}{J} \delta_{jl} + \frac{\lambda}{J} \ln(J) \delta_{jl} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2c_2}{J} F_{jM} F_{lN} E_M E_N \right. \\
&\quad \left. - \frac{\varepsilon_0}{4} E_P E_Q (\delta_{jl} F_{Pn}^{-1} F_{Qn}^{-1} + F_{Pj}^{-1} F_{Ql}^{-1} + F_{Pl}^{-1} F_{Qj}^{-1}) \right) \\
&= \delta_{ik} \left(\frac{\mu}{J} b_{jl} - \frac{\mu}{J} \delta_{jl} + \frac{\lambda}{J} \ln(J) \delta_{jl} + \frac{2c_2}{J} F_{jM} F_{lN} e_a F_{aM} e_b F_{bN} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\varepsilon_0}{4} F_{aP} e_a F_{bQ} e_b (\delta_{jl} F_{Pn}^{-1} F_{Qn}^{-1} + F_{Pj}^{-1} F_{Ql}^{-1} + F_{Pl}^{-1} F_{Qj}^{-1}) \right) \quad (A.13) \\
&= \delta_{ik} \left(\frac{\mu}{J} b_{jl} - \frac{\mu}{J} \delta_{jl} + \frac{\lambda}{J} \ln(J) \delta_{jl} + \frac{2c_2}{J} b_{ja} b_{lb} e_a e_b \right. \\
&\quad \left. - \frac{\varepsilon_0}{4} (\delta_{jl} e_a e_a + 2e_j e_l) \right) \\
&\hat{=} \mathbf{I} \boxtimes \left(\frac{\mu}{J} \mathbf{b} + \left(\frac{\lambda}{J} \ln(J) - \frac{\mu}{J} \right) \mathbf{I} + \frac{2c_2}{J} ((\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}) \otimes (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\varepsilon_0}{4} (\mathbf{I} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) + \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{k}_{me})_{ijk} &= -\frac{2c_2}{J} (F_{iP} F_{kP} F_{jN} E_N + F_{iM} F_{jM} F_{kP} E_P) \\
&\quad + \varepsilon_0 E_Q (\delta_{ij} F_{Qk}^{-1} + \delta_{ik} F_{Qj}^{-1} + \delta_{jk} F_{Qi}^{-1}) \\
&= -\frac{2c_2}{J} (b_{ik} b_{ja} e_a + b_{ij} b_{ka} e_a) \quad (A.14) \\
&\quad + \varepsilon_0 (\delta_{ij} e_k + \delta_{ik} e_j + \delta_{jk} e_i),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{k}_e)_{ij} &= -\frac{2c_1}{J} (F_{iP} F_{jP}) - \frac{2c_2}{J} (F_{bP} F_{bK} F_{iP} F_{jK}) + \varepsilon_0 \delta_{ij} \\
&= -\frac{2c_1}{J} (b_{ij}) - \frac{2c_2}{J} (b_{bi} b_{bj}) + \varepsilon_0 \delta_{ij} \quad (A.15) \\
&\hat{=} -\frac{2c_1}{J} \mathbf{b} - \frac{2c_2}{J} \mathbf{b}^2 + \varepsilon_0 \mathbf{I}
\end{aligned}$$

A merevségi mátrix számítása a (4.27),(4.28) és (4.29) egyenletekben történik, az ehhez szükséges mennyiségek a Voigt-jelölés segítségével állíthatók elő:

$$\mathbf{k}_m \rightarrow \mathbf{k}_{m,v} = \begin{bmatrix} (\mathbf{k}_m)_{1111} & (\mathbf{k}_m)_{1122} & (\mathbf{k}_m)_{1133} & (\mathbf{k}_m)_{11(12)} & (\mathbf{k}_m)_{11(23)} & (\mathbf{k}_m)_{11(31)} \\ (\mathbf{k}_m)_{2211} & (\mathbf{k}_m)_{2222} & (\mathbf{k}_m)_{2233} & (\mathbf{k}_m)_{22(12)} & (\mathbf{k}_m)_{22(23)} & (\mathbf{k}_m)_{22(31)} \\ (\mathbf{k}_m)_{3311} & (\mathbf{k}_m)_{3322} & (\mathbf{k}_m)_{3333} & (\mathbf{k}_m)_{33(12)} & (\mathbf{k}_m)_{33(23)} & (\mathbf{k}_m)_{33(31)} \\ (\mathbf{k}_m)_{(12)11} & (\mathbf{k}_m)_{(12)22} & (\mathbf{k}_m)_{(12)33} & (\mathbf{k}_m)_{(12)(12)} & (\mathbf{k}_m)_{(12)(23)} & (\mathbf{k}_m)_{(12)(31)} \\ (\mathbf{k}_m)_{(23)11} & (\mathbf{k}_m)_{(23)22} & (\mathbf{k}_m)_{(23)33} & (\mathbf{k}_m)_{(23)(12)} & (\mathbf{k}_m)_{(23)(23)} & (\mathbf{k}_m)_{(23)(31)} \\ (\mathbf{k}_m)_{(31)11} & (\mathbf{k}_m)_{(31)22} & (\mathbf{k}_m)_{(31)33} & (\mathbf{k}_m)_{(31)(12)} & (\mathbf{k}_m)_{(31)(23)} & (\mathbf{k}_m)_{(31)(31)} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.16})$$

ahol az indexben használt zárójel értelmezése:

$$(\mathbf{k}_m)_{11(12)} = \frac{(\mathbf{k}_m)_{1112} + (\mathbf{k}_m)_{1121}}{2}, \quad (\text{A.17})$$

továbbá

$$\mathbf{k}_{me} \rightarrow \mathbf{k}_{me,v} = \begin{bmatrix} (\mathbf{k}_{me})_{111} & (\mathbf{k}_{me})_{112} & (\mathbf{k}_{me})_{113} & (\mathbf{k}_{me})_{1(12)} & (\mathbf{k}_{me})_{1(23)} & (\mathbf{k}_{me})_{1(31)} \\ (\mathbf{k}_{me})_{211} & (\mathbf{k}_{me})_{212} & (\mathbf{k}_{me})_{213} & (\mathbf{k}_{me})_{2(12)} & (\mathbf{k}_{me})_{2(23)} & (\mathbf{k}_{me})_{2(31)} \\ (\mathbf{k}_{me})_{311} & (\mathbf{k}_{me})_{312} & (\mathbf{k}_{me})_{313} & (\mathbf{k}_{me})_{3(12)} & (\mathbf{k}_{me})_{3(23)} & (\mathbf{k}_{me})_{3(31)} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.18})$$

$$\mathbf{k}_e \rightarrow \mathbf{k}_{e,v} = \begin{bmatrix} (\mathbf{k}_e)_{11} & (\mathbf{k}_e)_{12} & (\mathbf{k}_e)_{13} \\ (\mathbf{k}_e)_{21} & (\mathbf{k}_e)_{22} & (\mathbf{k}_e)_{23} \\ (\mathbf{k}_e)_{31} & (\mathbf{k}_e)_{32} & (\mathbf{k}_e)_{33} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.19})$$

A.1.4. Feszültségtenzor és elektromos eltolás vektor

A belső erővektorhoz szükséges mennyiségek összenyomható Neo-Hooke anyagmodell esetén:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{tot} &= \frac{\mu}{J} F_{in} F_{jn} - \frac{\mu}{J} \delta_{ij} + \frac{\lambda}{J} \ln(J) \delta_{ij} + \frac{2}{J} c_2 F_{im} F_{jn} E_m E_n \\
&\quad - \frac{\varepsilon_0}{4} E_p E_q (\delta_{ij} F_{pn}^{-1} F_{qn}^{-1} + F_{pi}^{-1} F_{qj}^{-1} + F_{pj}^{-1} F_{qi}^{-1}) \\
&= \frac{\mu}{J} b_{ij} - \frac{\mu}{J} \delta_{ij} + \frac{\lambda}{J} \ln(J) \delta_{ij} + \frac{2}{J} c_2 b_{ia} e_a b_{jb} e_b - \frac{\varepsilon_0}{4} (\delta_{ij} e_a e_a + 2 e_i e_j) \quad (\text{A.20}) \\
&= \frac{\mu}{J} \mathbf{b} - \frac{\mu}{J} \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} \ln J \right) \delta + \frac{2}{J} c_2 (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} \cdot \mathbf{b}) - \frac{\varepsilon_0}{4} [(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) \delta + 2 \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_i &= \frac{1}{J} (-2 c_1 F_{iM} E_M - c_2 (F_{iM} C_{MN} E_N + F_{iM} C_{MN} E_N) + \varepsilon_0 F_{Qi}^{-1} E_Q) \\
&= \frac{1}{J} (-2 c_1 b_{ij} e_j - 2 c_2 b_{ij}^2 e_j + \varepsilon_0 e_i) \quad (\text{A.21}) \\
&= \frac{1}{J} (-2 c_1 \mathbf{b} \cdot \mathbf{e} - 2 c_2 \mathbf{b}^2 \cdot \mathbf{e} + \varepsilon_0 \mathbf{e}) = -\frac{2}{J} (c_1 \mathbf{b} + c_2 \mathbf{b}^2 - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \delta) \cdot \mathbf{e}
\end{aligned}$$

A feszültségtenzor Voigt-jelölés szerinti vektora:

$$\sigma^{tot} \rightarrow \sigma_v^{tot} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{tot} & \sigma_{22}^{tot} & \sigma_{33}^{tot} & \sigma_{12}^{tot} & \sigma_{23}^{tot} & \sigma_{31}^{tot} \end{bmatrix}^T, \quad (\text{A.22})$$

az elektromos eltolás vektora pedig

$$\mathbf{d} \rightarrow \mathbf{d}_v = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix}^T. \quad (\text{A.23})$$

Irodalomjegyzék

- [1] Böhlke, T: Höhere Technische Festigkeitslehre Skript, (2012)
- [2] Böhlke, T: Mathematische Methoden der Festigkeitslehre Skript, (2012)
- [3] Hughes, T.J.R.: The finite element method, (1987)
- [4] Bhatti, M. A.: Fundamental finite element analysis and applications, (2005)
- [5] Bonet, J., Wood, R.: Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis, Second Edition, (2008)
- [6] Holzapfel, G.A.: Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering, Wiley, (2000)
- [7] Fodor György: Elektromágneses terek, Műegyetemi Kiadó, (1993)
- [8] Eringen, A.C., Maugin, G.A.: Electrodynamics of continua. Volume 1 – Foundations and solid media, Springer- Verlag, New York, (1989)
- [9] Eringen, A.C.: On the foundations of electroelastostatics, Int. J. Engng. Sci. Vol. 1, pp. 127-153, (1963)
- [10] Eringen, A.C , Dixon, R.C.: A dynamical theory of polar elastic dielectric, Int. J. Engn. Sci., 3:359-398, (1965)
- [11] Jordan, N.F., Eringen, A.C.: On the static nonlinear theory of electromagnetic thermoe-
lastic solids I., Int. J. Engng Sci. 2, 59-95, (1963)
- [12] Jordan, N.F., Eringen, A.C.: On the static nonlinear theory of electromagnetic thermoe-
lastic solids II., Int. J. Engng Sci. 2, 98-114, (1963)
- [13] Dorfmann, A., Ogden, R.W.: Nonlinear electroelastic deformations. Journal of Elasticity,
82 (2). pp. 99-127, (2006)
- [14] Dorfmann, A., Ogden R.W.: Nonlinear electroelasticity. Acta Mechanica 174:167-183,
(2005)

- [15] Dorfmann, A.: Modeling Nonlinear Electroelastic Materials in R.W. Ogden et al. (eds.), Mechanics and Electrodynamics of Magneto- and Electro-elastic Materials, Series CISM, Udine, Vol. 527, pp. 57–105, (2011)
- [16] Dorfmann, A., Ogden, R.W.: Nonlinear electroelastostatics: Incremental equations and stability. International Journal of Engineering Science, 48 (1). pp. 1-14, (2010)
- [17] Dorfmann, A., and Ogden, R.W.: Some problems in nonlinear magnetoelasticity. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, 56 (4). pp. 718-745, (2005)
- [18] Dorfmann, A., Ogden, R.W., Saccomandi, G.: The effect of rotation on the nonlinear magnetoelastic response of a circular cylindrical tube. International Journal of Solids and Structures, 42 (13). pp. 3700-3715, (2005)
- [19] Dorfmann, A., Ogden, R.W.: Nonlinear magnetoelastic deformations. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 57 (4). pp. 599-622, (2004)
- [20] Dorfmann, A., Ogden, R.W.: Nonlinear magnetoelastic deformations of elastomers. Acta Mechanica, 167 (1-2). pp. 13-28, (2004)
- [21] Dorfmann, A., Ogden, R.W., Saccomandi, G.: Universal relations for non-linear magnetoelastic solids. International Journal of Non-Linear Mechanics, 39 (10). pp. 1699-1708, (2004)
- [22] Dorfmann, A., Ogden, R.W.: Magnetoelastic modelling of elastomers, European Journal of Mechanics A: Solids, 22 (4). pp. 497-507, (2003)
- [23] Bustamante R.: Transversely isotropic non-linear electro-active elastomers, Acta Mech 206, 237-259, (2009)
- [24] Bustamante, R., Dorfmann, A., Ogden, R.W.: On the electric body forces and Maxwell stresses in nonlinearly electroelastic solids, Int. J. Eng. Sci., (2009)
- [25] Bustamante, R., Dorfmann, A., Ogden, R.W.: Nonlinear electroelastostatics: a variational framework, Z. angew. Math. Phys. 60, 154-177, (2009)
- [26] Bustamante, R., Dorfmann, A., Ogden, R.W.: Numerical solution of finite geometry boundary-value problems in nonlinear magnetoelasticity. International Journal of Solids and Structures, 48 (6). pp. 874-883, (2011)
- [27] Bustamante, R., Dorfmann, A., Ogden, R.W.: Nonlinear electroelastostatics: a variational framework. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 60 (1). pp. 154-177, (2009)

- [28] Bustamante, R., Dorfmann, A., Ogden, R.W.: On boundary conditions in nonlinear magneto- and electroelasticity. In: Boukamel, A., Laiarinandrasana, L., Meo, S. and Verron, E. (eds.) Constitutive Models for Rubber V. Series: Balkema-proceedings and monographs in engineering, water, and earth sciences . Taylor & Francis, London, UK, pp. 339-344, (2008)
- [29] Bustamante, R., Dorfmann, A., Ogden, R.W.: On variational formulations in nonlinear magnetoelastostatics. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 13 (8). pp. 725-745, (2008)
- [30] Bustamante, R., Dorfmann, A., Ogden, R.W.: A nonlinear magnetoelastic tube under extension and inflation in an axial magnetic field: numerical solution. *Journal of Engineering Mathematics*, 59 (1). pp. 139-153, (2007)
- [31] Bustamante, R., Dorfmann, A., Ogden, R.W.: Universal relations in isotropic nonlinear magnetoelasticity. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 59 (3). pp. 435-450, (2006)
- [32] Bustamante, R., Ogden, R.W.: Universal relations for nonlinear electroelastic solids. *Acta Mechanica*, 182 (1-2). pp. 125-140, (2006)
- [33] Ogden, R.W., Steigmann, D.J., (Eds.): *Mechanics and Electrodynamics of Magneto- and Electro-elastic Materials*. Series: CISM Courses and Lectures Series. Springer, Wien, Austria, pp. 107-152, (2011)
- [34] Ogden, R.W.: Magnetostatics: from basic principles to nonlinear interactions in deformable media. In: Ogden, R.W. and Steigmann, D.J. (eds.) *Mechanics and Electrodynamics of Magneto- and Electro-elastic Materials*. Series: CISM Courses and Lectures Series (527). Springer, Wien, Austria, pp. 107-152, (2011)
- [35] Ogden, R.W.: Incremental elastic motions superimposed on a finite deformation in the presence of an electromagnetic field. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 44 (5). pp. 570-580, (2009)
- [36] Toupin, R.A.: The elastic dielectric. *J. Rational Mech. Anal.* 5, 849-915, (1956)
- [37] Toupin, R.A.: Stress tensors in elastic dielectrics. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 5, 440-552, (1960)
- [38] Toupin, R.A.: A dynamical theory of elastic dielectrics, *Int. J. Eng. Sci.*, 1, 101, (1963).
- [39] Toupin, R.A.: *Elastic Materials with Couple-stresses*, (1962)
- [40] Vu, D.K., Steinmann, P., Possart, G.: Numerical modelling of non-linear electroelasticity, *Int. J. Numer. Meth. Engng* 70:685-704, (2007)

- [41] Steinmann P.: Computational Nonlinear Electro-Elasticity in: R.W. Ogden et al. (eds.), Mechanics and Electrodynamics of Magneto- and Electro-elastic Materials, Series CISM, Udine, Vol. 527, pp. 181-230, (2011)
- [42] Vu, D.K., Steinmann, P.: A 2-D coupled BEM-FEM simulation of electro-elastostatics at large strain. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 199: 1124–1133, (2010)
- [43] Vu, D.K., Steinmann, P.: On 3-D coupled BEM-FEM simulation of nonlinear electro-elastostatics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, submitted for publication, (2011)
- [44] Vu, D.K., Steinmann, P.: Numerical simulation of electric electro-active polymers. *Proceedings, Sensor+Test Conferences 2011*, AMA Service GmbH, Germany, pp.323–327, (2011)
- [45] Vu, D.K., Steinmann, P.: Computational challenges in the simulation of nonlinear electroelasticity, *Computer Assisted Methods in Engineering and Science*, 19: 199–212, (2012)
- [46] Rosato, D.: On the Formulation and Numerical Implementation of Dissipative Electro-Mechanics at Large Strains, (2010)
- [47] Rosato, D. , Linder, C. , Miehe, C.: New finite elements with embedded strong discontinuities for the modeling of failure in electromechanical coupled solids, (2010)
- [48] Wissler, M., Mazza, E.: Modeling of a pre-strained circular actuator made of dielectric elastomer actuators, *Sensors and Actuators A*, vol. 120, pp. 184 – 192, (2005)
- [49] Wissler, M., Mazza, E.: Modeling and simulation of dielectric elastomer actuators, *Smart Materials and Structures*, vol. 14, pp. 1396 – 1402, (2005)
- [50] Wissler, M., Mazza, E.: Circular pre-strained dielectric elastomer actuator: modeling, simulation and experimental verification, *Proc. SPIE*, vol. 5759, pp. 182 – 193, (2005)
- [51] McMeeking, R.M., Landis, C.M.: Electrostatic forces and stored energy for deformable dielectric materials. *Journal of Applied Mechanics – American Society of Mechanical Engineers – ASME*, 72: 581–590, (2005)
- [52] Volokh, K. Y.: On Electromechanical Coupling in Elastomer, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 79(4), 044507 (5 pages); doi: 10.1115/1.4006057, (2012)
- [53] Rajagopal, K.R., Wineman A.: A constitutive equation for non-linear electro-active solids, *Acta Mechanica* 135, 219-228, (1999)
- [54] Rajagopal, K.R., Ruzicka, M.: Mathematical modeling of electrorheological materials, *Continuum Mech. Thermodyn.* 13: 59-78, (2001)

- [55] Rajagopal, K.R., Wineman, A.: Flow of electro-rheological materials, *Acta Mechanica* 91, 57-75, (1992)
- [56] Mindlin, R.D.: Polarization gradient in elastic dielectrics, *Int. J. Solids Structures*, Vol 4. pp. 637-642, (1968)
- [57] Mindlin, R.D.: Coupled elastic and electromagnetic fields a diatomic, dielectric continuum, *Int. J. Solids Structures*, Vol 8. pp.401-408, (1972)
- [58] S. Skatulla, C. Sansour, A. Arockiarajan: A multiplicative approach for nonlinear electro-elasticity, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, (2012)
- [59] Thylander, S., Menzel, A., Ristinmaa, M.: An electromechanically coupled micro-sphere framework: application to the finite element analysis of electrostrictive polymers, *Smart Mat. Struct.* 21, (2012)
- [60] Khosrownejad, S.M.: Viscoelasticity in Electro Active Polymers, Universität Stuttgart
- [61] Bar-Cohen, Y.: Electro-active polymers: current capabilities and challenges, *EAPAD Conference, San Diego, CA, 18-21 ; 4695-4702.*, (2002)
- [62] Mallavarapu, K.: Feedback Control of Ionic Polymer Actuators, (2001)
- [63] Otake, M.: Electroactive Polymer Gel Robots, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, (2010)
- [64] Carpi, F., De Rossi, D., Kornbluh, R., Pelrine, R., Sommer-Larsen, P.: Dielectric Elastomers as Electromechanical Transducers, (2007)
- [65] Carpi, F., Smela, E.: Biomedical Applications of Electroactive Polymer Actuators, (2009)
- [66] Keplinger, C. et al.: Stretchable, Transparent, Ionic conductors, *Science* 341, 984, (2013)
- [67] <http://lmts.epfl.ch/page-77339-en.html>, (2014.10.10.)
- [68] Sarban, R., Mace, B.R., Rustighi, E., Jones, R.W.: Dielectric Electro-Active Polymers in Active Vibration Isolation, 20th International Conference on Adaptive Structures and Technologies, Hong Kong, (2009)
- [69] <https://www.youtube.com/watch?v=7aLd0ol5-E>, (2014.10.10.)
- [70] Sareh, S., Rossiter, J. : Kirigami artificial muscles with complex biologically inspired morphologies, *Smart Materials and Structures*, vol 22 (2013)
- [71] Hughes, T.J.R., Cottrell, J.A., Bazilevs, Y.: Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194, 4135-4195, (2005)

- [72] Cotrell, J.A., Hughes, T.J.R., Bazilevs, Y.: Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA, Wiley, (2009)
- [73] Piegl, L., Tiller, W.: The NURBS Book, Second ed., Springer-Verlag, New York, (1997)
- [74] Cottrell, J.A., Reali, A., Bazilevs, Y., Hughes, T.J.R.: Isogeometric analysis of structural vibrations, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195, 5257-5296, (2005)
- [75] Bazilevs, Y., Calo, V.M., Zhang, Y., Hughes, T.J.R.: Isogeometric fluid-structure interaction analysis with applications to arterial blood flow, Computational Mechanics, 38, 310-322., (2006)
- [76] Bazilevs, Y., Calo, V.M., Zhang, Y., Hughes, T.J.R.: Isogeometric fluid-structure interaction: Theory, algorithms and computations, Computational Mechanics, online publikálva (2006)
- [77] Bazilevs, Y., Calo, V.M., Zhang, Y., Hughes, T.J.R.: A multiphysics model for blood flow and drug transport with application to patient-specific coronary artery flow, Computational Mechanics, online publikálva, (2008)
- [78] Elguedj, T., Hughes, T.J.R.: Isogeometric analysis of nearly incompressible large strain plasticity, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 268, 388-416, (2014)
- [79] Nguyen-Thanh, N., Nguyen-Xuan, H., Bordas, S.P.A., Rabczuk, T.: Isogeometric analysis using polynomial splines over hierarchical T-meshes for two dimensional elastic solids, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 200, 1892-1908, (2014)
- [80] Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 9.0, Champaign, IL, (2012).
- [81] Korn, G. A., Korn, T. M.: Matematikai kézikönyv műszakiaknak. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, (1975)