



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Gépészmérnöki kar

Hidrodinamikai Rendszerek Tanszék

HARMONIKUSAN GERJEZTETT GÁZBUBORÉK NEMLINEÁRIS DINAMIKAI VIZSGÁLATA NAGY VISZKOZITÁSÚ FOLYADÉKBAN

TDK dolgozat

Áramlástan szekció

Szerző:

Klapcsik Kálmán (LDVQGW)

MSc képzés, gépészmérnöki szak, III. évf.

Konzulens:

Dr. Hegedűs Ferenc, adjunktus

Hidrodinamikai Rendszerek Tanszék

Beadás dátuma:

2014. október 27

Nyilatkozat önálló munkáról, hivatkozások átvételéről

Alulírott Klapcsik Kálmán kijelentem, hogy TDK dolgozatomat magam készítettem és abban csak a megadott forrásokat használtam fel. Minden olyan részt, amelyet szó szerint, vagy azonos tartalomban, de átfogalmazva más forrásból átvettem egyértelműen a forrás megadásával megjelöltem.

Budapest, 2014. november 11.

Klapcsik Kálmán

Köszönetnyilvánítás

Köszönet a konzulensemnek, Dr. Hegedűs Ferencnek, aki megismertette velem a buborék- és nemlineáris dinamika témakörét, valamint a különböző numerikus módszereket, és segített a dolgozat elkészítésében. Köszönet a szüleimnek, akik végig támogatják egyetemi tanulmányaimat.

Összefoglaló

Kavitációs buborék összeroppanása extrém körülményeket eredményezhet úgy, mint nagy nyomás, magas hőmérséklet vagy akár lökéshullám. Ezek az áramlástechnikai gépekben és rendszerekben roncsolódást eredményeznek. Léteznek azonban olyan speciális ultrahangos technológiák, ahol a buborék összeroppanása során keletkező roncsoló hatást hasznosítják. Ezeket az ipar számos területén alkalmazzák, például élelmiszerek tartósítására; új típusú polimerek előállítására; tixotróp folyadékok viszkozitásának módosítására; kisméretű kémiai reaktorként való használatra vagy akár orvosi alkalmazásokban a rák kezelésére.

A fent említett alkalmazások motiváltak arra, hogy egyetlen harmonikusan gerjesztett gömbszimmetrikus gáz/gőz buborékot vizsgáljunk nagy viszkozitású glicerinben. A gömbszimmetrikus buborék geometriája meglehetősen erős feltételezés, azonban az így kapott eredmények jó közelítéssel érvényesek kisméretű buborékok esetén. Vizsgálataink során nagy amplitúdójú, összeroppanó buborék oszcilláció után kutatunk. Cél, hogy a modern nemlineáris dinamikai elméletek és rohamosan fejlődő kifinomult numerikus módszerek, mint például a pszeudó ívhossz paraméterkövetési módszer segítségével feltérképezzük azokat a paramétertartományokat, ahol a buborék fal sebessége minél nagyobb, esetleg át is lépi a folyadékbeli hangsebességet.

Az általunk vizsgált folyadék a nagy viszkozitású glicerin, amire azért esett a választás, mivel számos egészségügyi, gyógyszerészeti alapanyagban megtalálható és a buborékdinamikában fellelhető szakirodalomban kevésbé kutatott közeg. Gerjesztett rendszerről lévén szó a két legfontosabb paraméterünk a gerjesztés frekvenciája és amplitúdója. A glicerin viszkozitása közel három nagyságrenddel nagyobb, mint a vízé, aminek köszönhetően a rendszernek nagy a csillapítása. Ez megnehezíti a nagy amplitúdójú buboréklengések keresését. Mivel a viszkozitás erősen hőmérsékletfüggő, a hőmérsékletet harmadik paraméternek választottuk a vizsgálatok során.

Kulcsszavak: ultrahangos technológia, nemlineáris dinamika, buborékdinamika, Keller – Miksis egyenlet, nagy viszkozitás, glicerin,

Abstract

During the collapse of a cavitation bubble extreme conditions may be generated, such as, high pressure and temperature or even shock waves. The cavitation causes serious damage in turbomachines and other hydraulic systems. However, there are special ultrasonic technologies, where the extreme conditions induced by the collapse of a cavitation bubble can be exploited. They are used in various fields of industry, such as, food preservation; production of new kind of copolymers; alteration of viscosity of tixotropic fluids; in the usage of the bubble interior as a small reactor chamber or in special medical application of cancer therapy.

The above mentioned applications motivated us to analyze a single, harmonically excited spherical gas/vapour bubble placed in the highly viscous glycerine. Although the spherical geometry of the bubble is a rather crude assumption, it is a good approximation in case of small bubbles. During our investigations the main aim was to seek large amplitude, collapse-like oscillations. With the aid of the modern nonlinear dynamical theories and its rapidly evolving, sophisticated numerical methods, such as the pseudo-arc length continuation technique the parameter regions where the bubble wall velocity as high as possible (or even greater than the sound speed in the liquid domain) could be determined.

The investigated substance was the highly viscous glycerine, because it can be found in many medical and pharmaceutical preparations. Moreover, in the field of bubble dynamics the majority of papers are related to water. Because of the harmonic forcing, the most important parameters were the pressure amplitude and frequency of the excitation. The viscosity of glycerine is approximately three orders of magnitude larger than of water. Therefore, the system has a high damping effect which makes the hunting for high amplitude collapse-like bubble oscillation difficult. Because of the very strong dependence of the viscosity on the ambient temperature it was regarded as a third control parameter.

Keywords: ultrasonic technology, nonlinear dynamics, bubble dynamics, Keller – Miksis equation, high viscosity, glycerine,

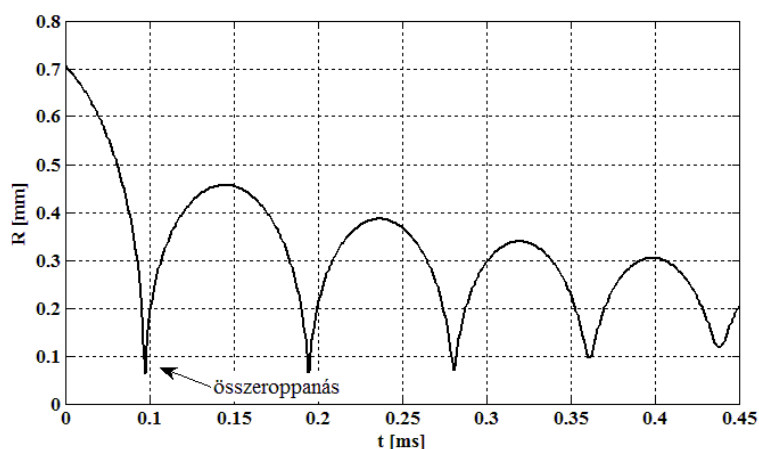
Tartalomjegyzék

Nyilatkozat önálló munkáról, hivatkozások átvételéről	iii
Köszönetnyilvánítás	iii
Összefoglaló	v
Abstract	vi
Tartalomjegyzék	vii
1. Bevezetés	1
2. Matematikai modell	4
2.1. Paraméterek és anyagjellemzők	5
2.2. Dimenziótlan egyenletrendszer	6
2.3. Modell validálása mérési eredményekkel	7
3. Nagy amplitúdójú lengések keresése	9
3.1. Kezdeti érték megoldó	9
3.2. Frekvencia válasz függvény	11
3.3. Bifurkációs diagramok	14
4. Peremérték megoldóval végzett paramétervizsgálatok	19
4.1. Peremérték megoldó lehetőségei	19
4.2. Paraméterdiagram	22
5. Összefoglalás	25
Summary	26
Jelölésjegyzék	27
Irodalomjegyzék	28

1. Bevezetés

A kavitáció (buborékképződés) az áramlástechnikai rendszerekben jól ismert jelenség, és mint rétegekavitáció vagy mint buborék felhő ismert. Ezért az egyetlen gömbszimmetrikus buborékon kapott számítási és mérési eredmények nehezen használhatók az általános mérnöki gyakorlatban. Speciális esetekben azonban a gömbszimmetria feltételezése jó közelítés lehet. A felületi feszültség ugyanis a buborékot a lehető legkisebbre, és minél inkább gömbszimmetrikusra próbálja összehúzni. Ez a hatás a buborék méretével fordítottan arányos, ezért kisméretű buborékok esetén (pl. mikro buborékok) a gömbszimmetria jó feltételezés lehet, lásd Koch et al. (2011).

Habár a buborék geometriája nagyon egyszerű, de a benne lejátszódó fizikai folyamatok meglehetősen bonyolultak. Egy egyensúlyi állapotból kitérített, kezdetben nagy átmérőjű buborék mérete a kialakuló lengés során nagyon rövid idő alatt jelentősen csökkenhet a folyadék tehetetlenségének következtében („inertial cavitation”). Ezt a szakirodalom összeroppanásnak nevezi, ami az 1.1. ábrán bemutatott tipikus buborék sugár - idő görbén is megfigyelhető.



1.1. Ábra: Tipikus buboréksugár-idő diagram

Az összeroppanás során a buborék fal sebessége jelentősen megnő aminek következtében a nyomás és a hőmérséklet elérheti akár az 1000 bar-t illetve a 8000 K-t, lásd Brennen (1995). A magas hőmérséklet kémiai reakciók lejátszódását vonja maga után, amivel a kémia egy speciális területe, a szonokémia foglalkozik. A buborék belsejében endoterm kémiai folyamatokon keresztül H' , H_2 , O' , O_2 , HO_2' , H_2O_2 szabad gyökök keletkeznek, amit Storey és Szeri (2000) és Kanthale et al. (2008) numerikusan is igazolt. A buborék összeroppanása során fúzió is lejátszódhat, melynek jeleit Taleyarkhan et al. (2002) és Lahey et al. (2007) mérésekkel sikeresen kimutatta deutérium tartalmú acetonban. Taleyarkhan et al.

(2002) numerikus eredményeiből megállapította, hogy az erősen összenyomott buborék belsejében a hőmérséklet elérheti akár a $10^6 - 10^7$ Kelvint, ami megerősíti az előbb említett megfigyelést.

A fent bemutatott fizikai folyamatok súlyosan károsítják az áramlástechnikai gépeket és rendszereket, ezért a kavitáció a mérnöki gyakorlatban többnyire kerülendő jelenség. Léteznek azonban olyan speciális, ultrahangos technológiai alkalmazások, ahol a folyadékot nagy intenzitású és frekvenciájú ultrahanggal sugározzák be, melynek hatására a folyadékban mindig jelen lévő, gerjesztett buborékok összeroppanásával járó extrém körülmények hasznosíthatók. A fő cél az anyag-, hő- és energiaátadás fokozása a különböző fázisok között.

Egy ilyen ígéretes alkalmazási példa, mely az élelmiszerek tartósítására szolgál, az ultrahangos pasztörizálás. Mérsékelt hőmérsékleten (50°C) a baktériumok membránszerkezete eléggé meggyengül ahhoz, hogy kevésbé legyenek ellenállóak a kavitációs roncsolás hatásának. Ezzel az innovációval sikeresen csökkentették az E.Coli baktériumok számát tojásban, lásd: Knorr et. al (2004). Viskozitás módosítására is találunk példát az élelmiszeriparban, például paradicsompüré viszkozitásának módosítása. A kavitációs lökéshullám okozta nyírófeszültség csökkenti a tixotróp folyadékok viszkozitását. Viskozitás csökkentéséről Seshadri et al (2003) publikációban olvashatunk. A buborék összeroppanás során keletkező lökéshullám, használható két egymással nem oldódó folyadék keveréséhez is. Canselier et al. (2002) és Freitas et al (2006) számolt be jó minőségű stabil emulzió előállításáról. Az ipar nagy érdeklődést mutat az új polimerek kutatása és fejlesztése iránt. Elegendően nagy intenzitású ultrahang hatására a polimer láncok szétzörnyednek, a molekulatömegük csökken. Két különböző típusú polimert egy közös oldatba helyezve, ultrahanggal besugározva a töredezés hatására szabadgyökök (egy vagy több vegyérték elektronnal, vagy nyitott elektrónhéjjal rendelkező atomok, vagy molekulák) keletkeznek. A szabadgyökök kémiai reakcióba léphetnek egymással, ami új típusú polimerek létrejöttéhez vezet, lásd Konaganti és Madras (2010). Ultrahangos technológiák alkalmazhatóak az orvostechikában is daganatos betegségek kezelésére. A szervezet egy célzott területére mikro buborékokat, géneket és gyógyszereket juttatnak. A besugárzás során keletkező lökéshullám károsítja a sejtmembránt, amin keresztül a gének és gyógyszerek könnyebben jutnak a sejt belsejébe, lásd Rosenthal et al. (2004), Hernot és Klibanov (2008), Yu et al (2004). Tehát a kavitáció nem feltétlenül káros és kerülendő jelenség.

A fentebb említett alkalmazások motiváltak arra, hogy egy harmonikusan gerjesztett gömbszimmetrikus gáz/gőzbuborékot vizsgáljunk nagy viszkozitású glicerinen. A glicerint széles körben alkalmazzák az élelmiszeriparban (például édesítőszerként, vagy oldószerként)

és a kozmetikai iparban (például kézkrémek, a nedvességmegkötő hatása miatt), valamint egészségügyi és gyógyszerészeti készítmények alapanyagaként. A glicerín közeg választásának másik fontos szempontja az, hogy a buborékdinamikában fellelhető irodalmak többsége víz közegre vonatkozik, néhány kivételtől eltekintve: Toegel et al. (2006) megállapította, hogy egy állóhullámmal gerjesztett buborék pozícióját a magas viszkozitás destabilizálhatja. A buborék oszcilláció során kibocsátott fény (szonolumineszcencia) időtartama több mint kétszeresére növekedett, víz-glicerín keverék esetén, a glicerín koncentrációját 33%-al növelve, lásd Englert et al. (2011). Az oszcilláló buborék dinamikáját különböző típusú folyadékokban is tanulmányozták, mint például hidraulikai olajban (Fujiwara és Shima (1980)), Powell-Eyring folyadékokban (Shima et al. (1985) vagy polimer oldatokban (Tsujino et al. (1988), Brujan ((1994), (2008), (2009))).

A glicerín nagy viszkozitása, ami közelítőleg három nagyságrenddel nagyobb a vízhez képest, megnehezíti a nagy amplitúdójú, összeroppanó buboréklengések előidézését. A csillapítás csökkenti a maximális buborékfal sebességet, és tompítja az összeroppanás hatásait. Ez megnehezíti az ultrahangos technológiában történő alkalmazhatóságot. Vizsgálataink során olyan paramétertartományokat keresünk, ahol összeroppanást tapasztalunk, azaz, ahol a buborék fal sebessége a lehető legnagyobb. A probléma megoldásához felhasználjuk a modern nemlineáris dinamika elméleteit és a rohamosan fejlődő, kifinomult numerikus módszereit, mint például a pszeudó ívhossz paraméterkövetési módszert. Ezeknek a numerikus módszereknek az alkalmazása a buborékdinamika területén csak lassan terjed, néhány kivételt: Parlitz et al. (1990), Hegedűs és Kullman (2012), Hegedűs et al. (2013), Hegedűs (2014), viszont sikeresen alkalmazzák a tudomány más ágaiban: Parlitz és Lauterborn (1985), Kruz és Lauterborn (1988), Knop és Lauterborn (1988), Hős et al. (2003), Hős és Champneys (2012).

Mivel nagy amplitúdójú megoldásokat keresünk, ami nagy buborékfal sebességgel jár, a folyadék összenyomhatóságát is figyelembe kell venni. Ezért számításaink során az irodalomban is jól ismert Keller – Miksis egyenletet használtuk. Az ultrahangos technológiáknak megfelelően a legfontosabb paraméterek a gerjesztés nyomás amplitúdója és frekvenciája. Mivel a glicerín viszkozitása erősen függ a közeg hőmérsékletétől, és széles tartományban változik, aminek hatása jelentős a buborék dinamikájára nézve, ezért a hőmérséklet egy újabb paraméter a számítások során.

2. Matematikai modell

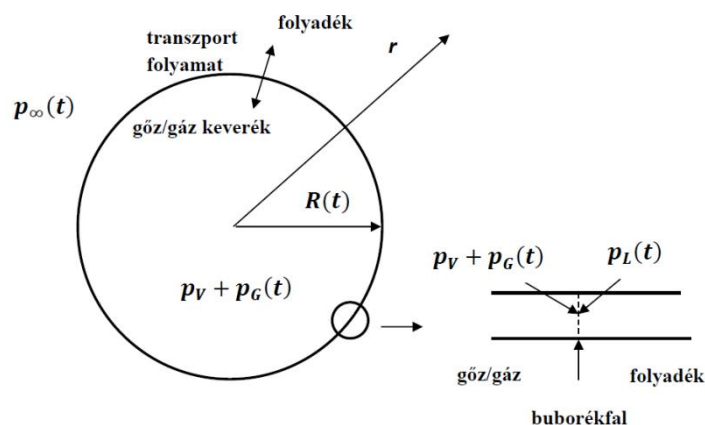
A lehetséges nagy amplitúdójú oszcillációk miatt, nagy buborékfal sebességeket várunk, ezért a folyadék összenyomhatóságát figyelembe kell venni. A számítások során a Keller – Miksis (Keller és Miksis (1980)) egyenletet használtuk néhány kisebb módosítással, Lauterborn és Kruz (2010) alapján, hogy elkerüljük az eredeti egyenletben megjelenő időkésést. A módosított másodrendű közönséges differenciálegyenlet formája:

$$\left(1 - \frac{\dot{R}}{c_L}\right) R \ddot{R} + \left(1 - \frac{\dot{R}}{3c_L}\right) \frac{3}{2} \dot{R}^2 = \left(1 + \frac{\dot{R}}{c_L} + \frac{R}{\rho_L c_L} \frac{d}{dt}\right) \frac{(p_L - p_\infty)}{\rho_L}, \quad (1)$$

ahol $R(t)$ az időfüggő buboréksugár; ρ_L , c_L , a folyadék sűrűsége és hangsebessége, illetve, p_L a nyomás a buborékfalnál a folyadéktérben továbbá p_∞ a buboréktól távoli nyomás, ami egy statikus és egy periodikus komponens összegeként írható:

$$p_\infty(t) = P_\infty + p_A \sin(\omega t), \quad (2)$$

ahol P_∞ a környezeti nyomás, p_A és ω a gerjesztés nyomás amplitúdója és körfrekvenciája.



2.1. Ábra: A buborék modell

A buborék glicerín gőz és nem kondenzálódó, kétatomos ideális gáz keverékét tartalmazza. Tehát a buborék belsejében a nyomás a gőz p_v és a gáz p_g parciális nyomásainak összege, lásd 2.1 ábra. A buborékfal két oldalán lévő nyomások közötti kapcsolatot a határfelületre felírható (dinamikus) impulzusegyensúly teremti meg:

$$p_g + p_v = p_L + \frac{2\sigma}{R} + 4\mu_L \frac{\dot{R}}{R}, \quad (3)$$

ahol σ a felületi feszültség és μ_L a folyadék dinamikai viszkozitása.

A gőznyomás a buborék belsejében állandó, de függ a közeg hőmérsékletétől T_∞ . A gáz komponens nyomását politropikus összefüggésnek megfelelően közelítjük:

$$p_G = p_{g0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3n}, \quad (4)$$

ahol a politropikus kitevő $n = 1.4$ feltételezve, hogy az összeroppanás folyamata olyan gyors, hogy nincs idő a két fázis közötti hőcserére (adiabatikus viselkedés). A referencia nyomás p_{g0} és a referencia sugár R_0 meghatározzák a buborékban lévő a gáz tömegét, ezáltal a buborék méretét is:

$$m_G = \frac{4p_{g0}R_0^3\pi}{3\Re T_\infty}, \quad (5)$$

ahol $\Re$ a specifikus gázállandó.

2.1. Paraméterek és anyagjellemzők

Hegedűs (2014) alapján az összes paraméter az (1)-(4) egyenletrendszerben kifejezhető öt paraméter segítségével. A kémiaiilag tiszta anyagok összes anyagjellemzője a közeg nyomásától P_∞ és a hőmérsékletétől T_∞ függ, ezért ezeket tekintjük elsődleges paramétereknek. Az anyagjellemzőket a Dow Chemical Company¹ eredményei alapján határoztuk meg. A mi speciális esetünkben, a glicerín összes anyagjellemzője csak a hőmérsékletétől függ, azaz, az anyagjellemzők nyomásfüggése elhanyagolható.

Szükséges még egy a buborék méretét leíró paraméter, ezért elő kell írunk pl. a gerjesztetlen rendszer ($p_A = 0$) egyensúlyi buboréksugarát R_E , vagy ezzel egyenértékűen a gáz tömegét a buborék belsejében m_G . Adott gáztömeg és hőmérséklet esetén az egyensúlyi buboréksugár R_E a buborékfalra felírt statikus (minden idő szerinti derivált nulla) impulzusegyenletből meghatározható:

$$0 = p_v - P_\infty + p_{g0} \left(\frac{R_0}{R_E} \right)^{3n} - \frac{2\sigma}{R_E}. \quad (6)$$

Tehát vagy előírjuk a referencia értékeket p_{g0} és R_0 , amiket az (5)-ös egyenletbe helyettesítve megkapjuk a buborékban lévő gáz tömegét, majd a (6)-os egyenlet alapján meghatározhatjuk a kiadódó egyensúlyi buboréksugarat R_E .

Vagy, ahogy a dolgozatban is tettük, előírjuk az egyensúlyi sugarat, majd meghatározzuk a referencia mennyiségeket. Fontos megjegyezni, hogy a tömeget a $p_{g0} \cdot R_0^3$

¹ www.dow.com

szorzat együtt határozza meg, így az egyiket szabadon választhatjuk, esetünkben $R_0=R_E$. Ezután a (6) egyenlet alapján a kiadódó referencia gáznyomás már számolható:

$$p_{g0} = \frac{2\sigma}{R_E} - (p_V - P_\infty). \quad (7)$$

További két paraméter marad: a gerjesztés nyomás amplitúdója p_A és a gerjesztés körfrekvenciája ω , lásd (2) egyenlet. Mivel a gerjesztés frekvenciája több nagyságrendet változhat, célszerű egy megfelelően megválasztott referencia mennyiséggel dimenziótlanítani. Ehhez az egyensúlyi buboréksugárhoz tartozó csillapítatlan sajátfrekvenciát használtuk, mely Brennen (1995) alapján az alábbi formában számolható:

$$\omega_E = \sqrt{\frac{3n(P_\infty - p_V)}{\rho_L R_E^2} + \frac{2(3n-1)\sigma}{\rho_L R_E^3}}. \quad (8)$$

A számítások során használt dimenziótlan (relatív) frekvencia, a következő képen írható:

$$\omega_R = \frac{\omega}{\omega_E}. \quad (9)$$

2.2. Dimenziótlan egyenletrendszer

Vezessünk be dimenziótlan változókat, mint dimenziótlan buborék sugár $y_1=R/R_E$, dimenziótlan idő $\tau=t/(2\pi/\omega)$, és dimenziótlan buborékfal sebesség $y_2 = y'_1$, ahol ' a dimenziótlan idő τ szerinti deriválást jelenti. Ezek segítségével a Keller – Miksis egyenlet felírható két elsőrendű dimenziótlan differenciálegyenletből álló rendszerként:

$$y'_1 = y_2, \quad (10)$$

$$y'_2 = \frac{N}{D}, \quad (11)$$

ahol

$$N = \frac{p_L - p_\infty}{p_{ref} y_1} + \frac{y_2}{\mu_{ref}^A y_1} (p_G(1-3n) - p_\infty + p_V) - \frac{p_A \cos(2\pi\tau)}{\mu_{ref}^B} - \left(1 - \frac{M_D}{3}\right) \frac{3}{2} \frac{y_2^2}{y_1}, \quad (12)$$

$$D = 1 - M + \frac{4\mu_L}{\mu_{ref} y_1}. \quad (13)$$

A referenciajellemzők:

$$p_{ref} = \rho_L R_E^2 \left(\frac{\omega}{2\pi} \right)^2, \quad (14)$$

$$\mu_{ref} = c_L \rho_L R_E, \quad (15)$$

$$\mu_{ref}^A = c_L \rho_L R_E \frac{\omega}{2\pi} = \mu_{ref} \frac{\omega}{2\pi}, \quad (16)$$

$$\mu_{ref}^B = c_L \rho_L R_E \frac{\omega}{(2\pi)^2} = \mu_{ref}^A \frac{1}{2\pi}. \quad (17)$$

A Mach szám:

$$M = \frac{R_E \omega y_2}{2\pi c_L} = \frac{R_E \omega}{\underbrace{2\pi}_{\dot{R}}} \cdot y_2 \cdot \frac{1}{c_L} = \frac{\dot{R}}{c_L}. \quad (18)$$

A gáznyomás a buborék belsejében:

$$p_G = \left(\frac{2\sigma}{R_E} - (p_V - P_\infty) \right) \left(\frac{1}{y_1} \right)^{3n}. \quad (19)$$

A nyomás a buborék határfelületén:

$$p_L = p_G + p_V - \frac{2\sigma}{R_E} \frac{1}{y_1} - \frac{4\mu_L \omega}{2\pi} \frac{y_2}{y_1}, \quad (20)$$

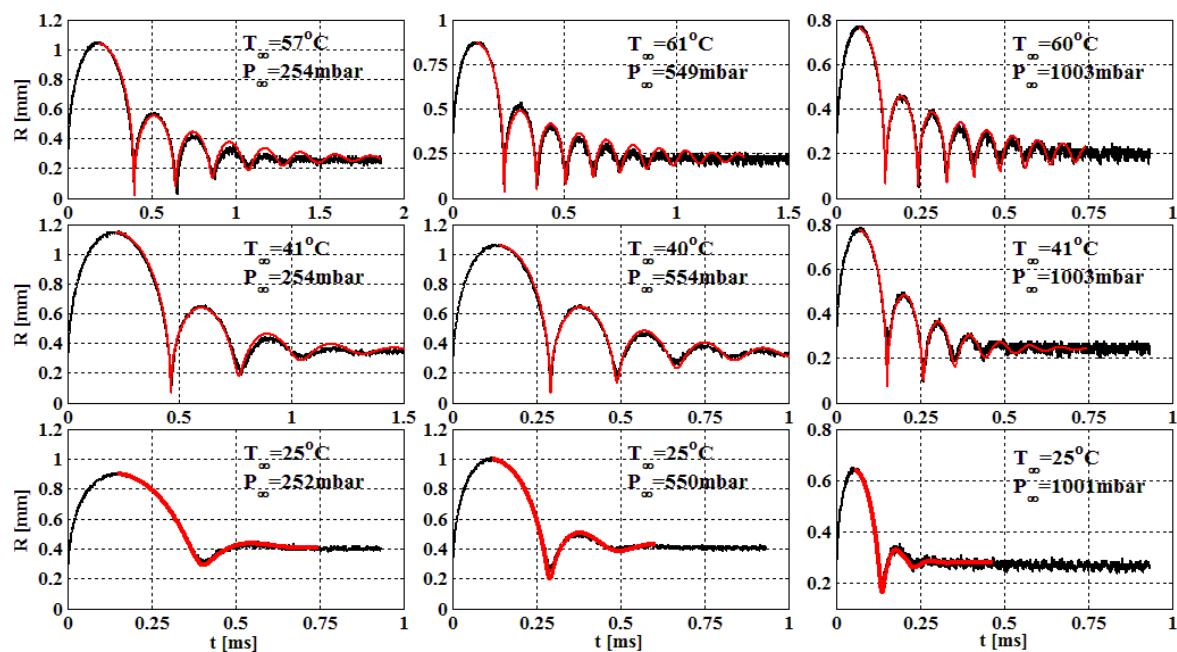
és a buboréktól távol:

$$p_\infty = P_\infty + p_A \sin(2\pi\tau). \quad (21)$$

2.3. Modell validálása mérési eredményekkel

A buboréksugár változását leíró Keller – Miksis egyenlet sok elhanyagolást tartalmaz. Azért, hogy biztosak legyünk abban, hogy számításaink során megbízható eredményeket kapunk, szükséges a modell validálása. Konzulensemnek, Dr. Hegedűs Ferencnek, doktori évei alatt volt alkalmam a németországi *Hochschule Emden/Leer, University of Applied Sciences, Institut für Lasertechnik Ostfriesland* egyetemen méréseket végezni lézer keltette buborékok viselkedéséről glicerinben. Az eredményeket a Hegedűs et al. (2013) folyóiratcikkében foglalta össze, melyből részleteket a 2.2. ábrán láthatunk.

Az ábrán fekete és piros görbékkel a mérési és a Keller – Miksis egyenlettel kapott numerikus eredmények kiértékelésével kapott buborék sugarak változását látjuk az idő függvényében. Fontos megjegyezni, hogy akusztikus gerjesztés hiányában a keletkező buborék szabadlengést végez. A modellezés a maximális buborékméret elérésének pillanatában indul. Ahogy az ábra mutatja, a számítási eredmények különböző hőmérsékleteken és nyomásokon egyaránt jól egyeznek a mérésekkel. Tehát, a dolgozatban kapott számítási eredményeink, habár szabadlengések helyett gerjesztett rendszert vizsgáltunk, nagy valószínűséggel minőségileg jól közelítik a valóságot.

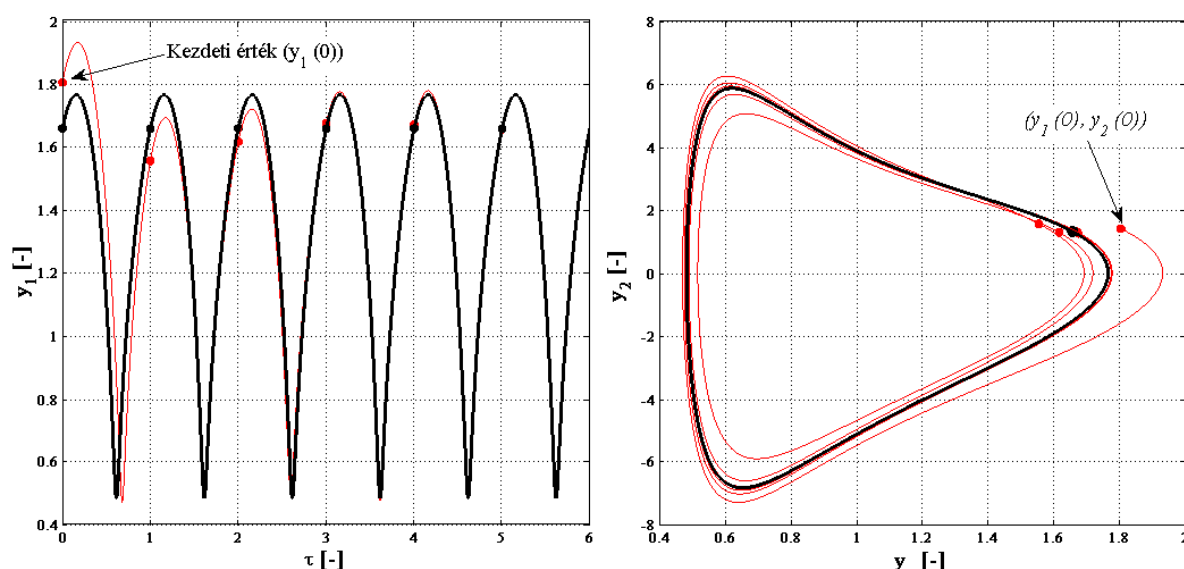


2.2. Ábra: A mérési és a Keller – Miksis modellel kapott számítás eredmények összehasonlítása különböző hőmérséklet- és nyomásértékek mellett. A mérési és számítási eredményeket fekete és piros színek jelölik (Hegedűs et al. (2013) alapján)

3. Nagy amplitúdójú lengések keresése

3.1. Kezdeti érték megoldó

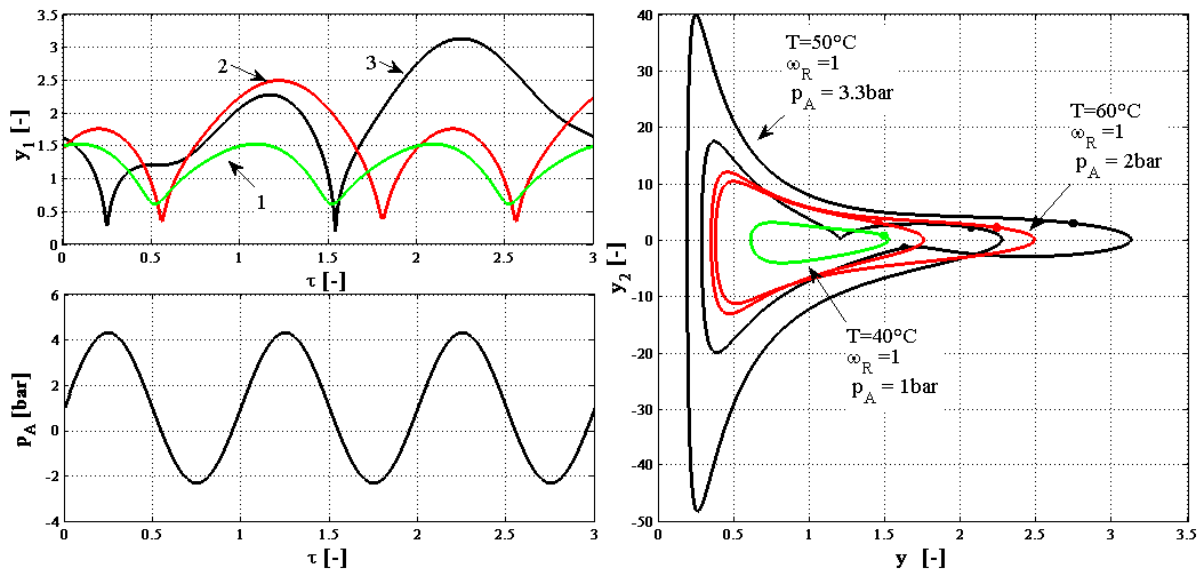
A gerjesztett buborék egy kétdimenziós lengő rendszerként viselkedik, melynek állapotváltozói a dimenziótlan buboréksugár y_1 és a dimenziótlan buborékfal sebesség y_2 . Az állapotváltozók kifeszítik az y_1 - y_2 fázissíkot, melyben egy pont (fázispont) jellemzi a rendszer pillanatnyi állapotát. A fázispont az időben elmozdul a fázissíkon, és az általa leírt pályát trajektóriának nevezzük, ami hosszú távon valamilyen stabil megoldáshoz (attraktor) konvergál, lásd 3.1. ábra. Nemlineáris dinamikai rendszerről lévén szó több, különböző periódusidejű periodikus, és kaotikus attraktorok egyszerre létezhetnek fix paraméter értékek mellett.



3.1. Ábra: Stabil megoldások keresése; bal: a dimenziótlan buboréksugár y_1 a dimenziótlan idő τ függvényében, jobb: trajektóriák az y_1 - y_2 fázissíkon. A fekete görbe a bekonvergált, a piros görbe a tranziens megoldást jelöli. A pontok a Poincaré metszetet pontjai

Stabil megoldások keresésének legegyszerűbb módszere egy kezdeti érték („Initial Value Problem” – IVP) megoldó alkalmazása. A rendszert alkalmasan megválasztott kezdeti értékekből $(y_1(0), y_2(0))$ indítva a számítást addig végezzük, amíg a folytonos trajektória be nem konvergál egy stabil, periodikus vagy kaotikus megoldáshoz. Erre láthatunk példát a 3.1 ábrán a dimenziótlan buboréksugár - dimenziótlan idő függvényében (bal oldal) és a fázissíkon (jobb oldal) ábrázolva. A fekete és piros színnel a bekonvergált (ez esetben periodikus) és a tranziens megoldást jelöltük. A kezdeti értékből indítva a számítást a piros görbe folyamatosan konvergál a fekete felé, ahogy ez mindkét diagramon megfigyelhető.

Gerjesztett rendszer esetében a legegyszerűbb stabil megoldás a periodikus pálya, amire a 3.1. ábrán három példát is láthatunk a buboréksugár – idő függvényében (bal felső) és a fázissíkon (jobb oldal). A megoldásokat megkülönböztetjük aszerint, hogy a megoldás periódusideje τ_p a gerjesztés periódusidejének τ_o hányszorosa: $\tau_p = N \cdot \tau_o$, ahol N egész szám. Ez alapján egy periodikus megoldás lehet $1, 2, 3 \dots N$ periódusú. Fontos megjegyezni, hogy az idő dimenziótlanításával a gerjesztés periódusideje minden esetben egységnyi lesz ($\tau_o = 1$), lásd 3.1. ábra bal alsó diagram és (21) egyenlet. Tehát az 1 periódusú megoldás (zöld) és a gerjesztés periódusideje egyaránt $\tau_o = 1$. A 2 periódusú megoldás (piros) periódusideje kétszerese a gerjesztésének. A 3 periódusú megoldás (fekete) esetében pedig $3\tau_o$ a válaszfüggvény periódusideje. Ennek megfelelően az 1, 2 és 3 periódusú megoldások trajektóriái τ_o , $2\tau_o$ és $3\tau_o$ idő eltelte után záródnak önmagukba.



3.2.Ábra: Példa periodikus megoldásokra. Periodikus megoldások esetén a buborék oszcilláció periódusideje a gerjesztés periódusidejének egész számú többszöröse. Az ábrán 1 (zöld) 2 (piros) és 3 periódusú (fekete) megoldások láthatóak

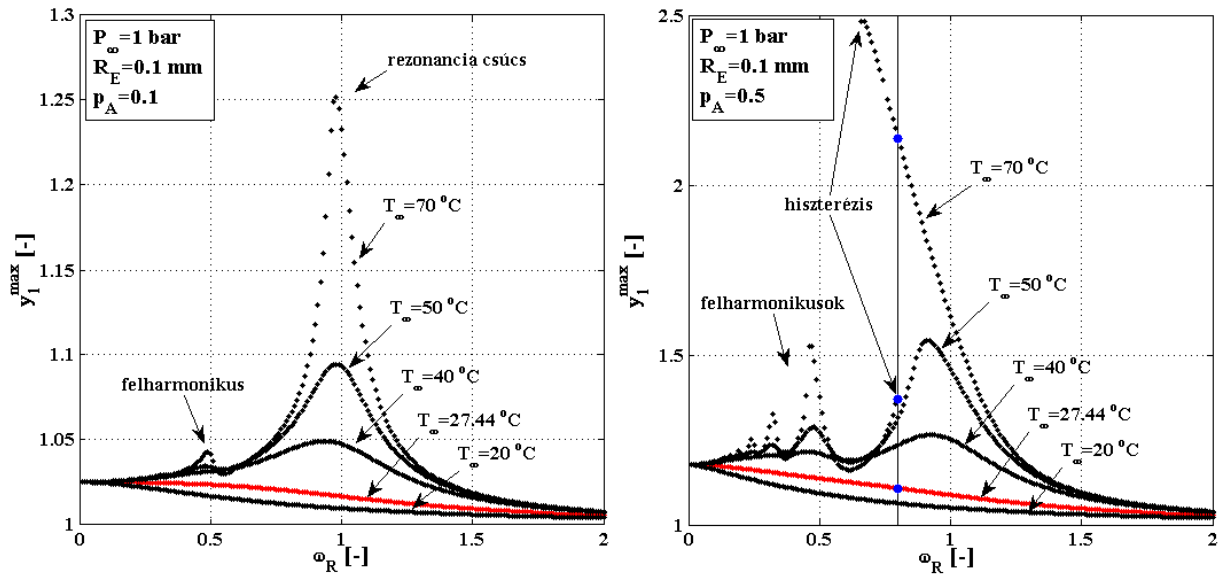
Az explicit időfüggés miatt a fázissíkon a megoldások metszhetik önmagukat, ezért egy pont nem határozza meg egyértelműen a rendszer állapotát. Továbbá, ha a teljes válaszfüggvényt ábrázolnánk, akkor egyre nagyobb periódusszám esetén a fázisdiagram egyre átláthatatlanabbá, és kezelhetetlenebbé válna. Ezért a teljes, az idő koordinátával háromdimenziós, folytonos megoldás helyett csak a gerjesztés periódusidejével τ_o mintavételezett pontokat ábrázoljuk az y_1 - y_2 síkon, amit a szakirodalom a Poincaré metszetnek hív. Így a háromdimenziós folytonos dinamikát átalakítottuk egy kétdimenziós iterációs leképezéssé. A Poincaré metszetek pontjait a 3.1. és 3.2. ábrákon pontokkal

jelöltünk. A konvergencia után nemcsak a metszet pontjait, hanem a megoldások abszolút értékének maximumát ($y_1^{max} = |y_1(\tau)|_{max}$, $y_2^{max} = |y_2(\tau)|_{max}$) is tároljuk.

A számításokat MATLAB szoftveres környezetben végeztük, a beépített ODE15S (változó rendű Gear módszer, beépített hibabecsléssel) kezdeti érték megoldó alkalmazásával, ami merev differenciálegyenletek hatékony megoldására alkalmas algoritmus.

3.2. Frekvencia válasz függvények

A lengő rendszerek vizsgálatának szokásos módja, hogy ábrázoljuk a rendszer válaszána maximumát y_1^{max} a frekvencia ω_R függvényében (nagyítási függvény). Ezért mi is a frekvencia hatását vizsgáltuk először, ahol értékét 0,01-ről növeltük 2-ig, 0,01-os lépésközzel. Mivel egy másodrendű, erősen nemlineáris differenciál egyenletrendszert oldunk meg, ezért különböző kezdeti értékről indítva a számítást, előfordulhat, hogy különböző megoldásokra találunk rá ugyanannál a frekvenciaértéknél. Azért, hogy az esetlegesen együtt létező megoldásokat is megtaláljuk, egy paraméterállítás mellett 5 véletlenszerűen felvett kezdeti értékből indítottuk a számításokat a 3.1. fejezetben már bemutatott módon.



3.3. Ábra: Frekvencia válasz függvény, $p_A = 0,1$ bar (bal) és $p_A = 0,5$ bar (jobb) nyomás amplitúdóval történő gerjesztés esetén, különböző közeg hőmérsékletek T_∞ mellett. A pirossal jelölt görbe $T_\infty = 27,44^\circ\text{C}$ -hoz tartozik, ami alatt a rendszer túlcillapítottá válik

A közeg hőmérséklete T_∞ , egy másodlagos paraméter a számítások során, melyet 20-70°C-os tartományban változtattunk 5°C-ként. Erre azért volt szükség, mert a hőmérséklet növelésével a viszkozitás, ami a rendszer csillapítását okozza jelentősen csökken. A szimulációt két különböző nyomás amplitúdó p_A mellett végeztük. A számítások

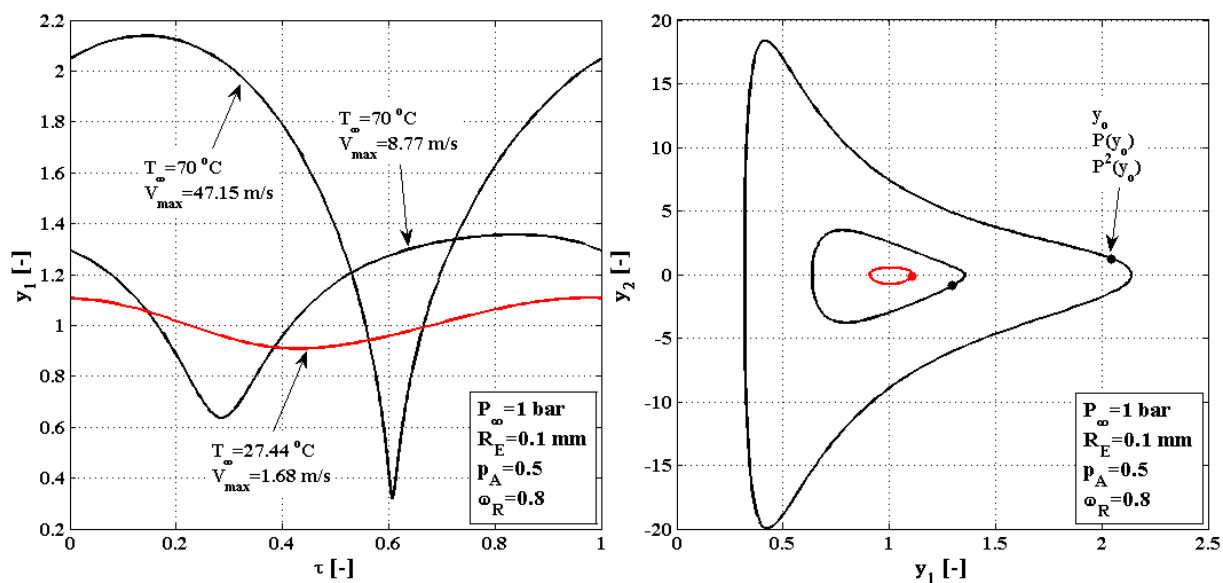
eredményeként kapott nagyítási diagramokat a 3.3 ábrán ábrázoltuk. A bal oldali diagram alapján elmondhatjuk, hogy kis nyomás amplitúdó $p_A = 0,1$ bar esetén a rendszer úgy viselkedik, mint egy lineáris, csillapított lengő rendszer. A nagyítási függvényen egy rezonancia csúcs látható közel a csillapítatlan rendszer saját frekvenciájához ($\omega_R=1$). Magasabb hőmérsékleten, például 70°C -on, már megjelenik a második felharmonikus (csúcs a sajátfrekvencia felénél $\omega_R=0,5$), ami a rendszer nem-linearitásának egyik jellemzője.

Megvizsgálva csillapított rendszer sajátfrekvenciáját, mely Brennen (1995) alapján az alábbi formában számolható:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{3n(P_\infty - p_v)}{\rho_L R_E^2} + \frac{2(3n-1)\sigma}{\rho_L R_E^3} - \frac{8\mu_L^2}{\rho_L R_E^4}}, \quad (22)$$

megállapíthatjuk, hogy a gyökjel alatti kifejezés negatív is lehet, mivel alacsony hőmérséklet esetén a kifejezés harmadik tagja a domináns tag a nagy viszkozitás miatt. Abban az esetben, ha a gyökjel alatti kifejezés negatív, a rendszer túlszillapított. Mivel az anyagjellemzők csak hőmérsékletfüggőek, az hőmérséklet, ami alatt a rendszer túlszillapítottá válik kiszámítható, hiszen ekkor vált a gyökjel alatti kifejezés előjelet. Erre $T_\infty=27,44^\circ\text{C}$ hőmérséklet adódik, melyhez tartozó válaszfüggvényt a 3.3. ábrán a piros görbe jelöli. A sajátfrekvencia összefüggésében nem szerepel a nyomás amplitúdó, ezért a túlszillapítási határhőmérsékletre eltérő amplitúdójú gerjesztések esetén is $T_\infty=27,44^\circ\text{C}$ adódik. A túlszillapított tartományban a rezonanciacsúcs teljesen eltűnik, és a frekvencia növelésével a megoldásokhoz tartozó maximális dimenziótlán buboréksugár y_1^{max} monoton csökken, ahogy ezt a 3.3 ábrán a $T_\infty=20^\circ\text{C}$ hőmérsékletre tartozó görbéken is látjuk. Az ultrahangos technológiában történő alkalmazás szempontjából ez jelentős megállapítás, mivel nagy amplitúdójú lengést (buborék összeroppanást) szeretnénk elérni, viszont ebben a tartományban kicsi a valószínűsége, hogy ez bekövetkezik, ami rontja a technológia hatékonyságát.

Nagyobb nyomás amplitúdó esetén $p_A=0,5$ bar, a nem-linearitás hatásai erősebben jelentkeznek, különösen a magasabb hőmérséklet tartományban. Ennek oka a viszkozitás csökkenése, ami egyúttal a rendszer csillapító hatásának csökkenését is jelenti. Ezt igazolja a további felharmonikusok megjelenése, valamint magas hőmérsékleten ($T_\infty=70^\circ\text{C}$) a rezonancia csúcs átalakulása hiszterézissé, ahol két különálló megoldás együtt létezik ugyanazon paraméter értékek mellett.



3.4. Ábra: A 3.3 ábrán a kék pontokhoz tartozó megoldások szemléltetése. A megoldások $\tau_0=1$ gerjesztési periódusidő alatt záródnak önmagukba, tehát 1 periódusú megoldások

A 3.3 ábrán $\omega_R=0,8$ gerjesztési frekvenciaállás mellett kék pontokkal megjelöltük a hiszterézis két ágához (együtt létező megoldások) és a túlszillapítási határhőmérséklet tartozó megoldásokat, melyek dimenziótlan buborék sugár – dimenziótlan idő, és fázisdiagramja a 3.4 ábrán látható. Az ábra alapján elmondható, hogy az együtt létező megoldások teljesen másképpen viselkednek. A hiszterézis felső ágához tartozó maximális buboréksugár y_1^{max} több mint kétszerese a gerjesztetlen rendszerhez tartozó egyensúlyi buboréksugárnál ($y_{1,E}=1$). Ezzel szemben a hiszterézis alsó ágához tartozó maximum nem éri el az $y_1=1,4$ -et. Következésképpen, amint a buborék el kezd zsugorodni a közeg tehetetlensége miatt, a maximális buborék fal sebesség $v_{max} = |\dot{R}|_{max}$ több mint ötször nagyobb a felső ágon, mint az alsón, habár ez így is sokkal alacsonyabb, mint az erős lökeshullámhoz szükséges több száz vagy több ezer m/s-os sebesség. Azért, hogy a túlszillapítás hatását is bemutassuk, a $T_\infty=27,44^\circ\text{C}$ hőmérsékletre tartozó periodikus megoldást is feltüntettük, melyet a piros görbe jelöl. Ez majdnem egy tisztán harmonikus függvénynek felel meg, melynek maximális sebessége csak $v_{max}=1,68$ m/s.

A dolgozat további részében, nagy amplitúdójú összeroppanó jellegű oszcilláló megoldásokat keresünk a nyomás amplitúdó széles tartományán. Cél, hogy minél nagyobb buborékfal sebességeket érjünk el.

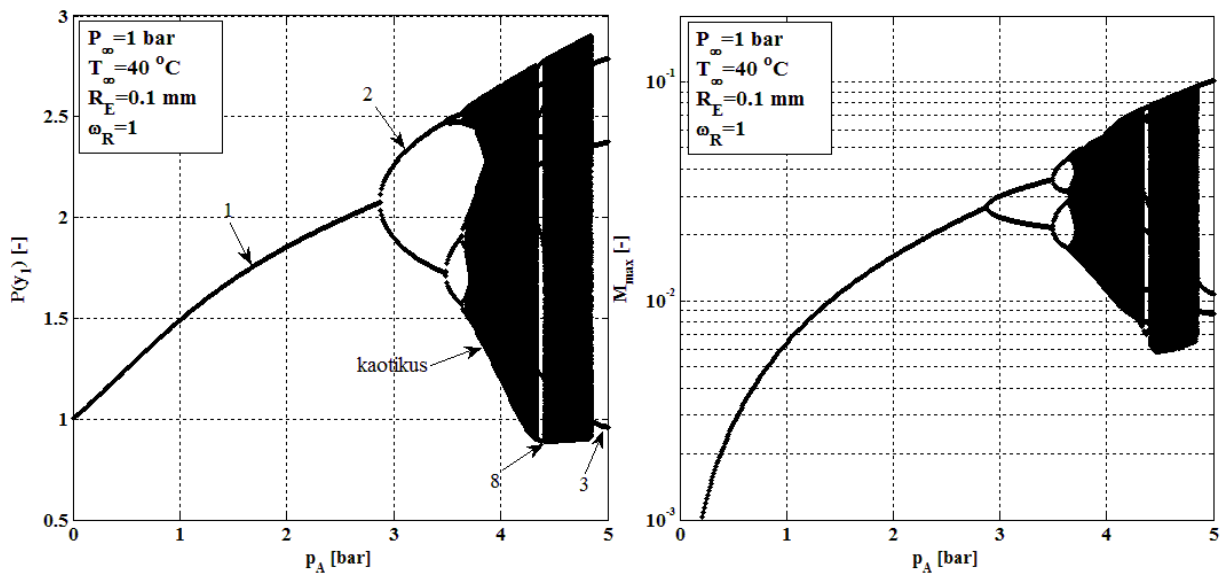
3.3. Nyomás amplitúdó válasz görbék (bifurkációs diagramok)

Az előző fejezetből láthattuk, hogy a nyomás amplitúdónak p_A és a hőmérsékletnek T_∞ jelentős hatása van a buborék dinamikájára nézve. Minél nagyobb a gerjesztés amplitúdója annál nagyobb a rendszer válasza. Továbbá, a magasabb hőmérséklet a viszkozitás csökkenését eredményezi, aminek hatására csökken a rendszer csillapítása, a buborékfal sebessége pedig nő. Ezért a gerjesztés amplitúdó p_A hatásának vizsgálata alkalmasabb buborék összeroppanás detektálására, mint a relatív frekvenciáé ω_R . A számításokat a korábban bemutatott módon végeztük. Most szabad paraméternek a nyomás amplitúdót választottuk és növeltük 0,01 bar-tól, 5 bar-ig 0,01 bar-os lépésközzel. Egy paraméterállás mellett itt is öt véletlenszerű kezdeti értékből indítottunk a számítást az esetlegesen együtt létező megoldások megtalálása érdekében. Miután a megoldás konvergált, a Poincaré metszet pontjait és a megoldások abszolút maximumait tároltuk. Periodikus megoldások esetén a tárolt pontok száma a periódus szám, míg kaotikus esetben a rögzített pontok száma fix, 512 db volt. A hőmérséklet T_∞ továbbra is egy másodlagos paraméter, amit most is 20-70°C-os tartományban változtattuk 5°C-ként. A relatív frekvencia értékét konstansnak, a rendszer kitüntetett, csillapítatlan sajátfrekvenciájának ($\omega_R=1$) választottuk, mivel az előző fejezetben már láttuk, hogy ennek az értéknek a közelében adódtak a legnagyobb amplitúdójú lengések, és a legnagyobb falsebességek.

A nyomás amplitúdót p_A a közeg környezeti nyomása P_∞ fölé is emeljük, aminek következtében a (21) egyenlet alapján előfordulhat a folyadéktérben negatív abszolút nyomásérték. A szakirodalomból ismert, hogy a folyadékok képesek elviselni rövid ideig negatív nyomás értéket (tenzió). Erre láthatunk példát Lauterborn és Engelbert (1984) folyóiratcikkében, ahol szobakörülmények között, egy állóhullámmal gerjesztett gázbuborék által kibocsátott nyomásjelet mérve a szerzők meghatározták az úgy nevezett spektrális bifurkációs diagramot. A gerjesztés nyomás amplitúdójának felső határa 14,8 bar volt, ami majdnem háromszorosa az általunk használt maximális értéknek.

A megoldások egy jellemző mennyiségét, pl. a Poincaré metszet első komponensének $P(y_1)$ értékét, a szabad paraméter függvényében ábrázolva a bifurkációs diagramot kapjuk, ami nagyon hatékony eszköz a rendszer minőségi változásainak bemutatására. Erre a 3.5. ábra bal oldalán láthatunk példát, ami a $T_\infty=40^\circ\text{C}$ hőmérsékletéhez tartozó szimuláció eredményét mutatja be. A megoldások periódusszámát arab számokkal jelöltük. Az ábrázolásmód előnye, hogy jól reprezentálja a vizsgált rendszer struktúráját, ami dinamikai szempontból meglehetősen bonyolult. Az egyensúlyi állapotból ($p_A=0$ bar, $y_{1,E}=1$) egy

egyperiódusú megoldás keletkezik, amint $p_A > 0$. Az amplitúdó növelésével a megoldás perióduskettőzések sorozatán megy keresztül, míg közelítőleg $p_A = 3,69$ bar-os gerjesztésnél a megoldás kaotikussá válik. Ezután kaotikus és periodikus ablakok felváltva követik egymást, miközben minden periodikus megoldás újabb perióduskettőzések sorozatán megy keresztül. Perióduskettőző bifurkáció esetén a vizsgált megoldás instabillá válik és egy stabil megoldás keletkezik kétszeres periódussal. Érdekességképpen meg kell említenünk, hogy az előbb említett tanulmányban Lauterborn és Engelbert sikeresen kimutatta egy egyperiódusú megoldás perióduskettőző bifurkációinak sorozatát egészen 8 periódusú megoldásig.

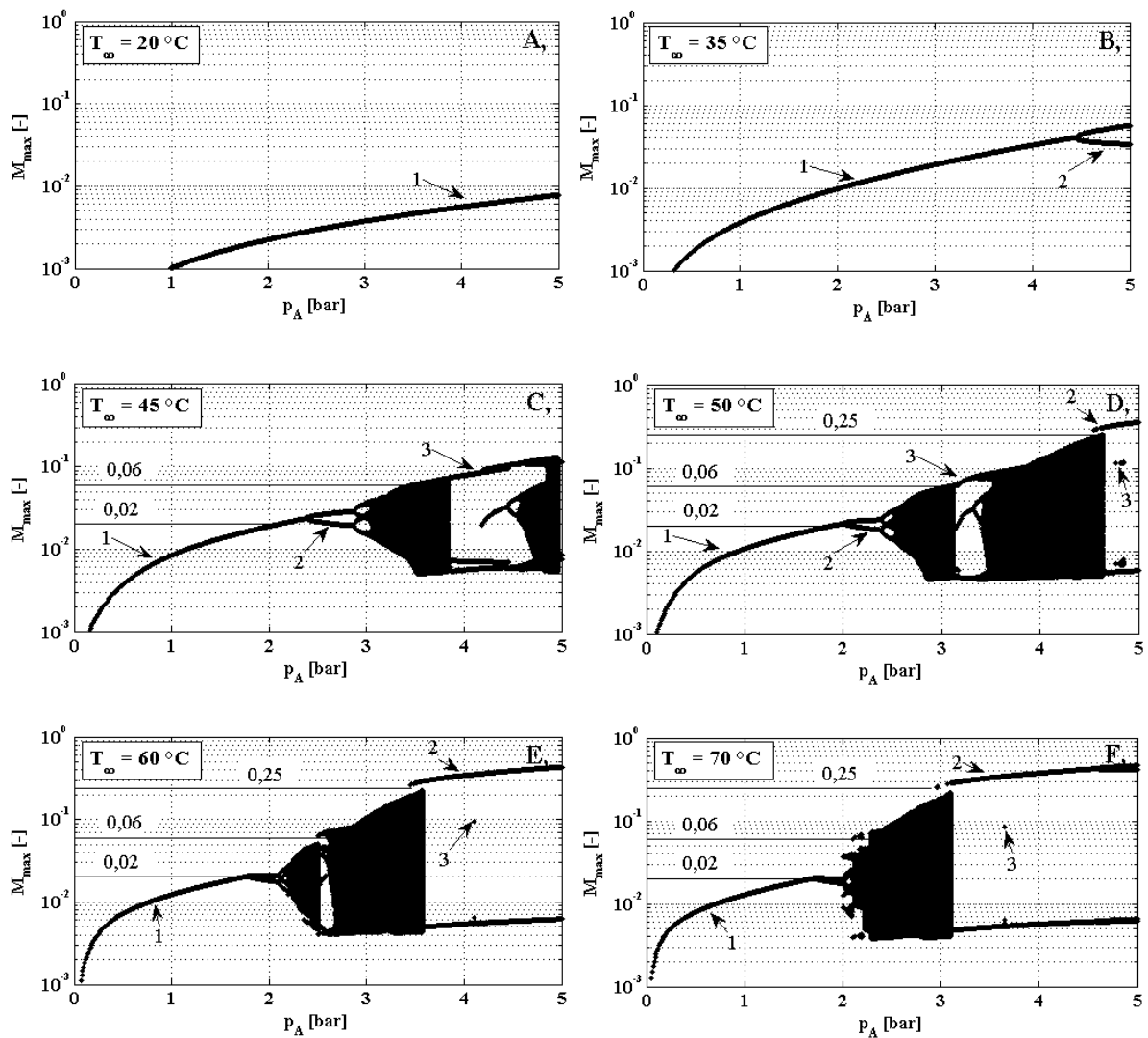


3.5. Ábra: Példa bifurkációs diagramra, ahol a Poincaré metszet első komponense $P(y_1)$ és a maximális Mach szám M_{max} a gerjesztés nyomás amplitúdójának p_A függvényeként van ábrázolva

Általában egy rendszer bifurkációs struktúrájának Poincaré metszettel való ábrázolása hatékony eszköz a dinamika vizsgálatára, ez azonban nem ad információt a buborékfal sebességéről, így ez az ábrázolási mód a további vizsgálatokra esetünkben nem alkalmas. Ezért rögzítettük a bekonvergált megoldás dimenziótlan buborékfal sebesség abszolút értékének maximumát is, pontosabban: $y_{2,i}^{max} = \max |y_2(\tau_i \leq \tau \leq \tau_i + \tau_0)|$, ahol $i = 0 \dots N - 1$ és N a lengés periódusszáma vagy 512 kaotikus megoldás esetén. Ezután a dimenziótlan maximális falsebességet Mach számra skálázzuk, a (18) egyenlet segítségével. Így elkészíthető ugyanaz a bifurkációs diagram, azzal a különbséggel, hogy a függőleges tengelyen $P(y_1)$ helyett a bekonvergált megoldáshoz tartozó maximális Mach számot M_{max} ábrázoljuk, lásd 3.5. ábra jobb oldal. A diagramból megállapítható, hogy a nyomás amplitúdó növelésével nő a maximális Mach szám is. A vizsgált tartomány szélén, ahol a nyomás

amplitúdó eléri a $p_A=5$ bar-t a maximális Mach szám meghaladja a $M_{max}=0,1$ -et, ami közelítőleg 190 m/s-os buborékfal sebességnek felel meg.

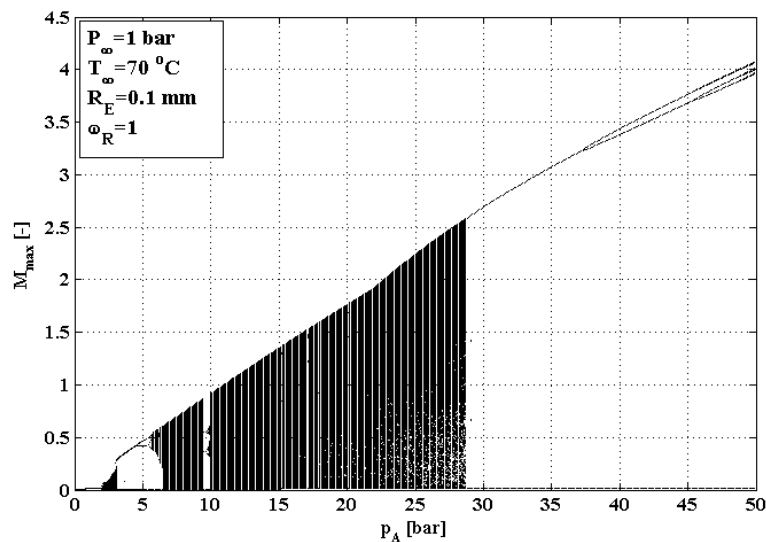
Azért, hogy megvizsgáljuk milyen hatással van a hőmérséklet a rendszer bifurkációs struktúrájára, és az elérhető maximális Mach számra, a fentiekhez hasonlóan, a számításokat a többi hőmérsékleten is elvégeztük. Az így kapott eredményeket a 3.6. ábra foglalja össze. A diagramok alapján megállapítható, hogy a hőmérséklet növelésével, ahogy csökken a viszkozitás, az elérhető maximális buborékfal sebesség nő, továbbá a bifurkációs struktúra bonyolódik. A különböző hőmérsékleten kapott bifurkációs struktúrák közt azonban találunk hasonlóságot is. $T_\infty=35^\circ\text{C}$ hőmérséklet felett a kaotikus és a periodikus ablakok minden hőmérsékleten hasonlóképpen követik egymást. A talált periodikus megoldásokat itt is arab számok jelölik.



3.6. Ábra: Maximális Mach szám a nyomás amplitúdó függvényében különböző hőmérsékletek mellett

A 3.6. ábra C-F diagramjai jól szemléltetik, hogy egy-egy domináns periodikus megoldás egy-egy jellemző maximális Mach szám szinten (vízszintes vonalak) jelennek meg. Például, az 1 periódusú megoldás első perióduskettőző bifurkációs pontja, akkor jelenik meg, amikor a maximális Mach szám meghaladja a 0,02-t. Ha a maximális Mach szám meghaladja a 0,06-ot, akkor megjelenik egy 3 periódusú megoldás. Magasabb nyomás amplitúdó esetén ismét egy 2 periódusú megoldás válik dominánssá, itt a maximális Mach szám több mint 0,25. Tehát a periodikus megoldások megjelenése jó felső becslést adhat a maximálisan elérhető maximális buborékfal sebességekre.

A paramétertartományt, amin egy adott stabil periodikus megoldás létezik, a bifurkációs pontjai határolják. Például 1 periódusú megoldás csak az első perióduskettőző bifurkáció előtt létezik. Ezért a bifurkációs pontok detektálásával a határ, amin belül az adott stabil megoldás létezik meghatározható. A periodikus megoldások keresésére hatékony és kifinomult numerikus technikák léteznek, amik magukba foglalják az instabil megoldások és a bifurkációs pontok detektálását is. Ezekkel a módszerekkel lehetőség nyílik, hogy a különböző megoldás paraméter határait, illetve ezzel együtt a maximális Mach szám M_{max} határait nem csak egy szabad paraméter függvényeként, hanem a teljes p_A-T_∞ paramétersíkon meghatározzuk. Ezzel a számítási módszerrel kapott eredményeket a 4. fejezetben mutatjuk be részletesebben.



3.7. Ábra: A maximális Mach szám M_{max} viselkedése széles nyomás amplitúdó p_A tartományon

A 3.6 ábra arra enged következtetni a logaritmikus skála miatt, hogy a maximálisan elérhető Mach szám szintben van egy határ, ami nem léphető át az amplitúdó további növelésével. Ez legszembetűnőbben az F diagramon látszik. Viszont ha a maximális Mach számot széles nyomás amplitúdó tartományban lineáris skálán ábrázoljuk, látható, hogy a

Mach szám közel lineáris növekszik a nyomás amplitúdó további növelésével, lásd: 3.7. ábra. Habár a maximális $p_A=50$ bar nyomás amplitúdónak az alkalmazás szempontjából nincs jelentősége, ez egy tökéletes példa arra, hogy milyen nehéz extrém magas buborékfal sebességeket elérni. $T_\infty=70^\circ\text{C}$ közeghőmérséklet mellett is az $M_{max}=1$ (szuperszonikus sebesség) eléréséhez több mint $p_A=10$ bar nyomás amplitúdó szükséges.

4. Peremérték megoldóval végzett paramétervizsgálatok

4.1. Peremérték megoldó lehetőségei

Azért, hogy hatékonyan keressünk periodikus megoldásokat, peremérték („Boundary Value Problem” – BVP) megoldót alkalmazunk, periodikus peremfeltételekkel. Ezzel a módszerrel közvetlenül megkapjuk a kívánt periodikus megoldások pályáját. Mivel a megoldó érzéketlen a megoldás stabilitására, a teljes periodikus pálya alakulása végigkövethető a pszeudó ívhossz paraméterkövetési módszer segítségével egy szabad paraméter függvényében. A görbe mentén a bifurkációs pontok ott találhatók, ahol stabilitásváltás történik, így könnyű azok észlelése. Ahogyan már bemutattuk a bifurkációs pontok segítséget nyújtanak abban, hogy elkülönítsük a különböző megoldástípusokat és az elérhető maximális Mach szám szinteket.

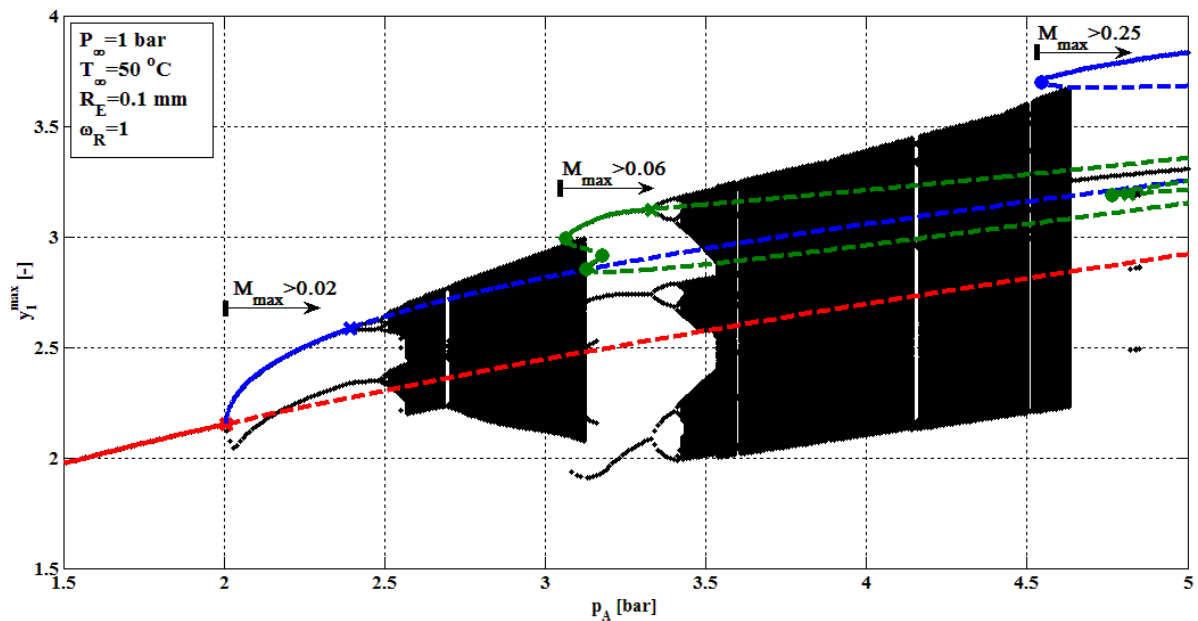
Jelen dolgozatban az AUTO bifurkációs számításokra alkalmas szoftvert használtunk, lásd: Doedel et al. kézikönyv (1997). Mivel az AUTO csak autonóm rendszereket (explicit időfüggéstől mentes) képes kezelni, ezért a (10)-(21) egyenletrendszer kiegészítésre szorul további két közönséges differenciálegyenlettel,

$$y_3' = y_3 + 2\pi \cdot y_4 - y_3(y_3^2 + y_4^2), \quad (23)$$

$$y_4' = y_4 - 2\pi \cdot y_3 - y_4(y_3^2 + y_4^2), \quad (24)$$

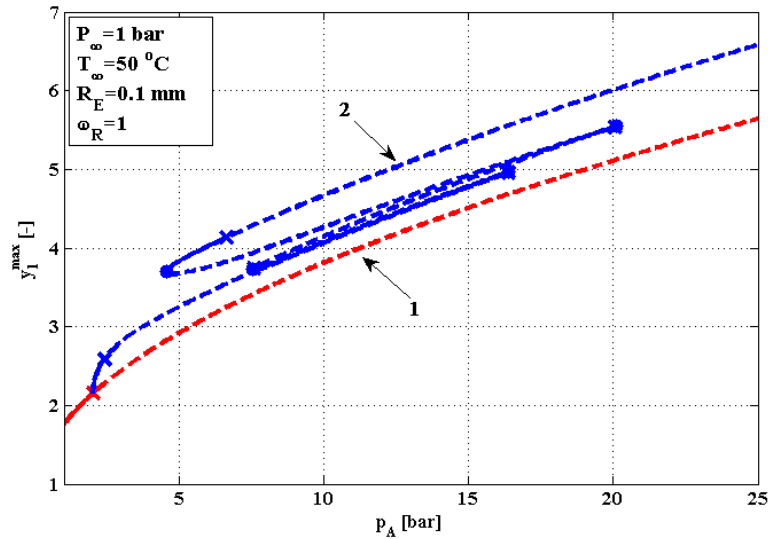
ahol az y_3 és y_4 periodikus megoldása $\cos(2\pi\tau)$ és $-\sin(2\pi\tau)$. A (12) és (21) egyenletben lévő harmonikus függvényeket y_3 -al és y_4 -el helyettesítjük. Az AUTO hátránya, hogy a megoldásokat a periódusszámtól függetlenül egész objektumként képes csak kezelni, és csak a teljes megoldáshoz tartozó dimenziótlan maximum értékeket (y_1^{max} , y_2^{max}) kapjuk meg. Ezért a Poincaré metszetek szemléletes ábrázolásmódja sajnos elvész.

A 4.1. ábra a peremérték megoldóval (BVP) és a kezdeti érték megoldóval (IVP) végzett számítások eredményét hasonlítja össze $T_\infty=50^\circ\text{C}$ -on. Az AUTO számításhoz inicializálásra van szükség, amire az IVP eredményei használhatóak. Az 1 periódusú megoldás inicializálása (piros görbe) pl. a $p_A=0,01$ bar nyomás amplitúdóhoz (közel a gerjesztetlen rendszer egyensúlyi állapotához) tartozó IVP eredménnyel történt. Az ábra jól szemlélteti a jellemző bifurkációs pontok helyét és típusát. Például a piros görbén haladva az első perióduskettőző bifurkáció $p_A=2$ bar-nál helyezkedik el. A megoldás eddig a pontig stabil (folytonos vonal), ez után instabillá válik (szaggatott vonal).



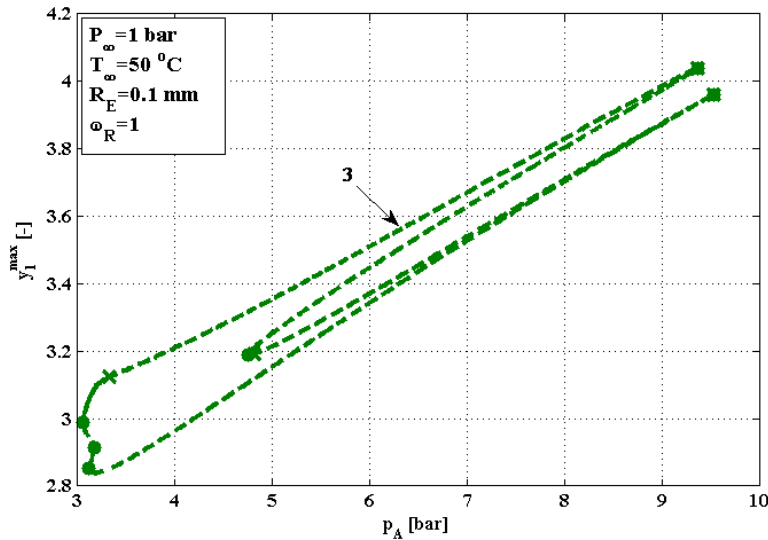
4.1. Ábra: A kezdeti érték (fekete pontok) és a peremérték (színes görbék) megoldó összehasonlítása $T_\infty=50^\circ\text{C}$ -on. A folytonos vonalak a stabil, a szaggatott vonalat az instabil megoldásokat jelölik. A perióduskettőző bifurkációt kereszt, a nyereg-csomó bifurkációt (visszahajlás) színes pont jelöli. Az 1,2 és 3 periódusú megoldásokat a piros, kék és zöld görbék jelölik

A bifurkációs pontból kilépő elágazások is lekövethetőek, ha az észlelt perióduskettőző bifurkációból inicializálunk, erre példa az első perióduskettőző bifurkációból kilépő 2 periódusú megoldás, melyet a 4.1. és 4.2. ábrán egyaránt kék görbével jelöltünk. A kezdeti érték megoldó eredményei alapján (fekete pontok) úgy tűnhet, hogy a diagram jobb felső sarkában lévő 2 periódusú megoldások külön pályához tartoznának. Azonban a 4.2. ábra megmutatja, hogy a két stabil 2 periódusú szakasz több visszahajlás, (nyereg-csomó bifurkáció) és instabil szakasz után összekapcsolódik. Nyereg-csomó bifurkáció esetén a megoldás pályájában stabilitásváltás és visszahajlás történik. A nyereg-csomó bifurkációkat az ábrán színes pontok jelölik. A peremérték megoldó egyik erőssége, hogy képes az instabil szakaszokon keresztül stabil összetartozó megoldásokat megtalálni. Ez az egyik előnye a kezdeti érték megoldóval szemben.



4.2. Ábra: A peremérték megoldóval számított 1 (piros) és 2 periódusú (kék) megoldások ábrázolása széles paramétertartományon

Az utolsó lényeges periodikus struktúra a 3 periódusú megoldások pályája, amit a 4.1. ábrán zöld színnel jelöltünk. A 4.3 ábrán széles paramétertartományban ábrázolva látható, hogy a pálya zárt görbét alkot a szabad paraméter függvényében. A páratlan periódusú megoldások ilyen jellegű viselkedésével Hegedűs et al.(2014) munkájában már találkoztunk.



4.3. Ábra: A peremérték megoldóval számított 3 periódusú megoldás széles paramétertartományon ábrázolva

Ahogy korábban már említettük a különböző típusú periodikus megoldások, eltérő maximális Mach szám szinten jelennek meg. Habár a 4.1. ábrán az összehasonlításhoz a dimenziótlan buboréksugár maximumát y_1^{max} (mivel az AUTO csak a megoldások maximum értékeit kezeli) ábrázoltuk a nyomás amplitúdó p_A függvényében, a megoldásokhoz tartozó maximális Mach szám szint a 3.6. ábra segítségével jól becsülhető. A jellemző szintek a 4.1. ábrán is fel lettek tüntetve.

4.2. Paraméterdiagram (kétparaméteres görbék)

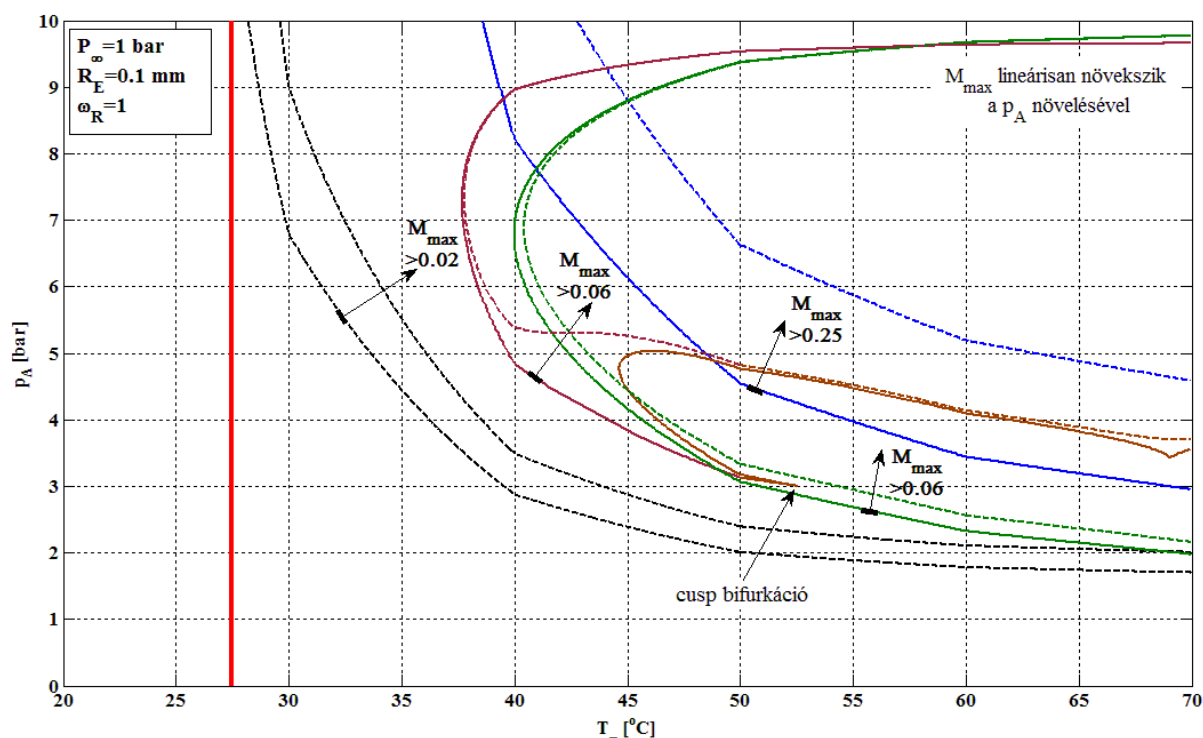
Ahogy a 4.1. ábra alapján is láttuk, különböző típusú megoldások eltérő maximális Mach szám szint fölött jelennek meg. A talált megoldástípusokat a stabilitásváltás helyén észlelt bifurkációs pontok (színes kereszt és pont) határolják. A bifurkációs pontokat a vízszintes tengelyre vetítve, meghatározható egy küszöbérték a nyomás amplitúdóra p_A , aminél elérhető az adott maximális Mach szám szint. Egy bifurkációs pontból levetített küszöbérték a hőmérséklet növelésével csökken, ahogy ez a 3.6. ábra C-F diagramjai alapján látható is. Az első perióduskettőző bifurkáció közelítőleg $M_{max}=0,02$ maximális Mach szám értéknél jelenik meg. Az ehhez tartozó küszöbérték 45°C-os hőmérsékleten $p_A=2,43$ bar, míg 70°C-on ez az érték kisebb, $p_A=1,75$. Hasonlóan, a többi bifurkációs ponthoz tartozó amplitúdó értékek is csökkennek a hőmérséklet növelésével.

Tehát magasabb hőmérsékleten egy kívánt maximális Mach szám eléréséhez az ultrahang besugárzás során kisebb nyomás amplitúdóra (intenzitás), azaz, kevesebb energiára van szükség, így csökken az üzemeltetési költség. Ugyanakkor a magasabb hőmérséklet eléréséhez hőt kell közölni a közeggel, ami pedig növeli a költségeket. Továbbá a túl magas hőmérséklet nem kívánt kémiai reakciókat vagy a molekulák degradációját eredményezheti. Azért, hogy megtaláljuk az optimális üzemi paramétereket, meg kell határoznunk a jellegzetes Mach szám szintekhez tartozó nyomás amplitúdó p_A küszöbértékének hőmérséklettől T_∞ való függését. Ehhez a 4.1 ábrán észlelt bifurkációs pontokat végigkövetjük a p_A - T_∞ paramétersíkon.

A kétparaméteres bifurkációs görbék („codim 2”) számításához is az AUTO szoftvert használtuk, a hőmérsékletet, másodlagos szabad paraméternek választva. A 4.1. ábrán észlelt bifurkációs pontokból számított kétparaméteres görbék a 4.4. ábrán láthatók. A perióduskettőző bifurkációhoz (színes kereszt) a szaggatott, a nyereg-csomó bifurkációs pontokhoz (színes pont) a folytonos görbék tartoznak. Mivel az anyagjellemzők meghatározása táblázatban szereplő adatok közötti lineáris interpolációval történt, a kapott kétparaméteres görbék csak szakaszosan simák. A függőleges piros vonal a $T_\infty=27,44^\circ\text{C}$ határhőmérsékletet jelöli, ami alatt a rendszer túlcillapított.

Az 1 és a 2 periódusú megoldáshoz tartozó perióduskettőző bifurkációs ponthoz (piros és kék kereszt) a két fekete szaggatott kétparaméteres görbe tartozik. A hiperbolikus viselkedés miatt, ahhoz hogy elérjük ezeket a bifurkációs pontokat a szükséges nyomás amplitúdó p_A meredeken növekszik, ahogy a hőmérséklet tart a $T_\infty=27,44^\circ\text{C}$ -os

határhőmérsékletéhez. Az alsó fekete szaggatott vonalat átlépve a maximális Mach szám csak a $M_{max} > 0,02$ -t haladja meg, ami közelítőleg $v_{max} > 40$ m/s -nak felel meg.



4.4. Ábra: A 4.1. ábrán bemutatott bifurkációs pontokhoz tartozó kétparaméteres bifurkációs görbék. A szaggatott vonalak a periodikus, a folytonos vonalak a nyereg-csomó bifurkációs pontokhoz tartozó görbéket jelölik. A függőleges piros vonal a $T_\infty = 27,44^\circ\text{C}$ túlcillapítási határhőmérsékletet jelöli. Az elérhető maximális Mach szám határait a nyílak jelzik

Ahogy elérjük a 3 periódusú megoldásokat a struktúra sokkal bonyolultabb lesz, mint a fentebb bemutatott perióduskettőzések esetén. Stabil 3 periódusú megoldások léteznek a zöld folytonos és zöld szaggatott vonalak között. Mindkét görbe visszafordul közelítőleg $T_\infty = 40^\circ\text{C}$ -os hőmérsékletnél. Az így kialakult sarló alakú területen $T_\infty = 52,5^\circ\text{C}$ hőmérsékletnél hiszterézis jelenik meg (nyereg-csomó bifurkáció pár, amire a 4.1 ábrán láthatunk példát: a két alsó zöld pontpár) egy úgy nevezett „cusp” (csúcs) bifurkáción keresztül a csökkenő hőmérséklet irányába. Ez egy másik stabil 3 periódusú területet eredményez, amit a barna folytonos és szaggatott görbe határol. A folytonos barna felső ága $T_\infty = 44,6^\circ\text{C}$, az alsó ága pedig $T_\infty = 37,7^\circ\text{C}$ hőmérsékletnél fordul vissza, háromágú területet eredményezve. A zöld vagy a barna folytonos vonalak elérése, a nyomás amplitúdó p_A és/vagy a hőmérséklet T_∞ növelésével, a maximális Mach szám $M_{max} > 0,06$, ami $v_{max} > 110$ m/s buborékfal sebességnek felel meg.

A nyomás amplitúdó p_A további növelésével $M_{max} > 0,25$ maximális Mach szám felett újra a 2 periódusú megoldás válik dominánssá, mely egy nyereg-csomó bifurkáción keresztül jelenik meg, ahogy a 4.1 ábrán is láttuk. Ekkor a buborékfal sebesség $v_{max} > 470$ m/s. A

bifurkációs ponthoz tartozó görbét kék folytonos vonallal jelöli az ábra. Ahogy haladunk a nyereg-csomó bifurkációt követő 2 periódusú pályán egy újabb perióduskettőző bifurkációhoz érünk, amit csak 4.2 ábrán, a széles paramétertartományon történő ábrázolásakor figyelhetünk meg. Ehhez a bifurkációs ponthoz tartozó kétparaméteres görbét a kék szaggatott vonallal jelöltük a 4.4. ábrán. Az utóbbi két görbe szintén hiperbolikus jellegű. A hőmérséklet növelésével alacsonyabb nyomás amplitúdó szükséges ugyanakkora buborékfal sebességek eléréséhez. Viszont ahogy már említettük a túl magas hőmérséklet nem kívánt kémiai reakciókat okozhat. Ha a hőmérsékletet csökkentjük a nyomás amplitúdó meredeken növekedni kezd.

Az eredmények alapján elmondható, hogy jelentős buborékfal sebességek eléréséhez, összeroppanáshoz, magas hőmérséklet és magas nyomás amplitúdó szükséges. A nyomás amplitúdó növelésével a Mach szám közel lineárisan nő, ahogy ezt a 3.7. ábrán, a széles paramétertartományon történő bifurkációs ábrán már láttuk, viszont igazán jelentős sebességek csak nagyon nehezen, $p_A \geq 10$ bar nyomás amplitúdó esetén érhetőek el. Ennek ellenére a 4.4. ábrán kapott kétparaméteres görbék nagymértékben segíthetik az ultrahangos technológia hatékonyságát.

5. Összefoglalás

A gerjesztett gömbszimmetrikus gáz/gőz buborék összeroppanása extrém körülményeket eredményez, mint például a nagy nyomás és hőmérséklet, valamint a lökéshullámok, melyeket hasznosíthatóak a rohamosan fejlődő ultrahangos technológiákban. Ez a fő motivációja, hogy egy harmonikusan gerjesztett buborékot vizsgáljunk, egy olyan nagy viszkozitású közegben, mint a glicerín. A számítások során a Keller – Miksis egyenlet módosított formáját használtuk, mely figyelembe veszi a folyadék összenyomhatóságát is. Ez egy másodrendű közönséges nemlineáris differenciálegyenlet, melyet MATLAB és AUTO szoftverek használatával oldottunk meg. A közeg viszkozitása erősen hőmérsékletfüggő és nagy csillapítást eredményez, ami megnehezíti az ultrahangos technológiákban történő alkalmazást. A dolgozat célja, hogy segítsen a technológia hatékonyságának növelésében és csökkentse az üzemeltetés során keletkező költségeket. Ehhez olyan paramétertartományokat kerestünk, amik az oszcilláló buborék összeroppanását eredményezik.

A vizsgálat első lépése a nagyítási függvények elkészítése volt különböző hőmérsékletek mellett. Ezek alapján megállapítottuk, hogy az oszcilláló buborék a magas viszkozitás hatására egy túlcillapított lengő rendszerként viselkedik alacsony hőmérsékleten. A határhőmérséklet, ami alatt túlcillapítottá válik a rendszer $T_{\infty}=27,44^{\circ}\text{C}$. A nagy viszkozitás csökkenti az összeroppanó szakaszban a buborékfal sebesség, ezáltal az összeroppanás erősségét. Ez a hőmérséklet független a nyomás amplitúdójától, így ez alatt a hőmérséklet alatt az amplitúdó növelésével nem érhető el összeroppanás, itt rossz az alkalmazhatóság. Ezért a közeg hőmérsékletét e fölé a hőmérséklet fölé célszerű növelni.

A nyomás amplitúdót választva szabad paraméternek, a vizsgálatok azt mutatták, hogy az eltérő hőmérsékleten kapott bifurkációs struktúrák között találunk hasonlóságot. Egy-egy domináns periodikus megoldás egy-egy jellemző Mach szám szinten jelenik meg valamilyen bifurkáción keresztül. Ezzel jó alsó becslés adható az elérhető maximális sebességekre. A bifurkációs pontok két paraméter (nyomás amplitúdó és hőmérséklet) függvényében lekövethető. Az így keletkezett diagram jó segítséget nyújt az ultrahangos technológiák hatékony alkalmazásához, mivel a görbék által határolt térrészben meg tudjuk becsülni az elérhető maximális sebességeket.

Summary

The excited spherical gas/vapour bubble at the collapse phase can generate extreme conditions, such as, high pressure and temperature or even shock waves. These extreme conditions are exploited by the rapidly developing ultrasonic technologies. This was the main motivation to analyze a harmonically excited bubble in the highly viscous glycerin. We used the modified Keller – Miksis equation during the calculations, which takes into account the liquid compressibility, and MATLAB and AUTO softwares were employed to solve this second order nonlinear ordinary differential equation. The high viscosity means massive temperature dependent damping rate which can be a limiting factor on the applicability of the ultrasonic technology on such kind of liquids. The aim of the thesis is to help increase the efficiency of the applications and decrease the costs of operation. We seek for parameter values, at which the bubble oscillation has collapse-like behaviour.

The first step of the investigation was the calculation of the frequency response curves at different ambient temperatures. The frequency response curves have revealed that, due to the high viscosity, the system behaves like an over damped linear oscillator at low temperature, precisely, below $T_{\infty}=27.44^{\circ}\text{C}$. This very high damping rate decreases the resulted maximum bubble wall velocity, and thus the strength of the collapse. Therefore, increasing the ambient temperature above the threshold value is highly recommended.

Next, we used the pressure amplitude as the control parameter, and calculated the pressure amplitude response diagrams at constant excitation frequency, and at different ambient temperatures. These diagrams revealed that there are similarities in the bifurcation structures at different temperature levels. A dominant periodic solution appears at a typical Mach number level via a bifurcation point. This gives good lower estimations of the achievable maximal bubble wall velocities, since, the bifurcation points appear at the same level of the maximum Mach number regardless of the ambient temperature. We can detect these important bifurcation points as a function the pressure amplitude and ambient temperature. The resulted bi-parametric map can aid the applications to operate the technology in an efficient way.

Jelölésjegyzék

R	Buboréksugár	
R_0	Referencia buboréksugár	
R_E	Egyensúlyi buboréksugár	
$\dot{R}$	Buborékfal sebesség	
$\ddot{R}$	Buborékfal gyorsulás	
c_L	Folyadékbeli hangsebesség	
ρ_L	Folyadéksűrűség	
μ_L	Folyadék dinamikai viszkozitás	
$\mu_{ref}, \mu_{ref}^A, \mu_{ref}^B$	Referencia viszkozitás	(15), (16), (17)
σ	Felületi feszültség	
p_V	Gőz parciális nyomása	
p_G	Gáz parciális nyomása	(4)
p_L	Buborékfalra ható nyomás	(3)
p_∞	Buboréktól távoli nyomás, gerjesztés	(2)
P_∞	Környezeti nyomás, a gerjesztés statikus komponense	
p_A	Gerjesztés nyomásamplitúdója	
p_{g0}	Referencianyomás	(7)
p_{ref}	Referencianyomás dimenziótlanításhoz	(14)
n	Politropikus kitevő	
m_G	Gáz tömege a buborék belsejében	(6)
$\Re$	Specifikus gázállanó	
ω	Gerjesztés frekvenciája	
ω_E	Buborék sajátfrekvenciája	(8)
ω_P	Buborék csillapítatlan sajátfrekvenciája	(22)
ω_R	Relatív gerjesztési frekvencia	(9)
τ	Dimenziótlan idő	
τ_0	Gerjesztés dimenziótlan periódusideje	
y_1	Dimenziótlan buboréksugár	
y_2	Dimenziótlan buborékfal sebesség	
M_D	Relatív Mach szám	(18)
M_{max}	Maximális Mach szám	
T_∞	Távoli hőmérséklet	

Irodalomjegyzék

- Brennen, C.E. (1995): *Cavitation and bubble dynamics*. Oxford University Press, New York.
- Brujan, E.A. (1994): *The effect of polymer concentration on the non-linear oscillation of a bubble in a sound-irradiated liquid*. J. Sound Vib. 173(3), 329-342.
- Brujan, E.A. (2008): *Shock wave emission from laser-induced cavitation bubbles in polymer solutions*. Ultrasonics. 48(5), 423-426.
- Brujan, E.A. (2009): *Bifurcation structure of bubble oscillators in polymer solutions*. Acta Acustica united with Acustica. 95(2), 214-246.
- Canselier, J.P., Delmas, H., Wilhelm, A.M., Abismail, B. (2002): *Ultrasound emulsification An overview*. J. Disper. Sci. Technol. 23(1-3), 333-349.
- Doedel, E.J., Champneys, A.R., Fairgrieve, T.F., Kuznetsov, Y.A., Sandstede B., Wang, X. (1997): *AUTO 97: continuation and bifurcation software for ordinary differential equations (with homcont) AUTO 97 User Manual*. Montreal: Concordia University.
- Engler, E.M.; McCarn, A., Williams, G.A. (2011): *Luminescences from laser induced bubbles in water-glycerol mixtures: Effect of viscosity*. Phys. Rev. E 83(4), 046306.
- Freitas, S., Hielscher, G., Merkle, H.P., Gander, B. (2006): *Continuous contact- and contamination free ultrasonic emulsification – A useful tool for pharmaceutical development and production*. Ultrason Sonochem. 13(1), 76-85.
- Fujawara, T., Shima, A. (1980): *Nonlinear oscillation of bubbles in compressible hydraulic oils*. J. Acoust. Soc., Am. 68(5), 1502-1508.
- Hegedűs, F., Kullman, L. (2012): *Basin of attraction in a harmonically excited spherical bubble model*. Per. Pol. Mech. Eng. 56(2), 125-132.
- Hegedűs, F., Hős, Cs., Kullman, L. (2013): *Stable period 1, 2, and 3 structures of harmonically excited Rayleigh-Plesset equation low ambient pressure*. IMA J. Appl. Math, 78(6), 1179-1195.
- Hegedűs, F., Koch, S., Garen, W., Pandula, Z., Paál, Gy., Kullman, L., Teubner, U. (2013): *The effect of high viscosity on compressible and incompressible Rayleigh-Plesset-type bubble models*. International J. of Heat and Fluid Flow 42, 200-208.
- Hegedűs, F. (2014): *Stable bubble oscillation beyond Blake's critical threshold*. Ultrasonics 54(4), 1113-1121.
- Hernot, S., Klibanov, A., L., (2008): *Microbubbles in ultrasound-triggered drug and gene delivery*, Advanced Drug Delivery Reviews 60 (2008), 1153-1166.
- Hős, Cs., Champneys, A.R., Kullman, L. (2003): *Bifurcation analysis of surge and rotating stall in the Moore-Greitzer compression system*. IMA J. Appl. Math. 68(2), 205-228.
- Hős, Cs., Champneys, A.R. (2012). *Grazing bifurcation and chatter in pressure relief valve model*. Physica D 241(22), 2068-2076.

- Kanthale, P., Ashokkumar, M., Grieser, F. (2008): *Sonoluminescence, sonochemistry (H_2O_2 yield) and bubble dynamics: Frequency and power effects*. Ultrason. Sonochem. 15(2), 143-150.
- Keller, J.B., Miksis, M. (1980). *Bubble oscillation of large amplitude*. J. Acoust. Soc. Am. 68(2), 628-633.
- Knop, W., Lauterborn, W. (1990): *Bifurcation structure of the classical Morse oscillator*. J. Chem. Phys. 93(6), 3950-3957.
- Knorr, D., Zenker, M., Heinz, V., Lee, D-U. (2004): *Application and potential of ultrasonics in food processing*. Trends Food Sci. Tech. 15(5), 261-266.
- Konaganti, V.K., Madras, G. (2010). *Ultrasonic degradation of poly(methyl methacrylate-co-alkyl acrylate) copolymers*. Ultrason. Sonochem, 17(2), 403-408.
- Kurz, T., Lauterborn, W. (1988): *Bifurcation structure of the Toda oscillator*. Phys. Rev. A, 37(3), 1029-1031.
- Koch, P., Kurz, T., Parlitz, U., Lauterborn, W. (2011): *Bubble dynamics in a standing sound field: The bubble habitat*, Acoust. Soc. Am. 130, 3370-3378
- Lauterborn, W., Engelbert, S., (1984): *Bifurcation Superstructure in a Model of Acoustic Turbulence*, Phys. Rev. Lett. 53(24),
- Lauterborn, W., Kurz, T. (2010). *Physics of bubble oscillations*. Rep. Prog. Phys. 73(10), 106501
- Parlitz, U., Lauterborn, W. (1985): *Superstructure in the bifurcation set of Duffing equation $\ddot{x} + \dot{x} + x + x^3 = f \cos(\omega t)$* . Phys. Lett. A 107(8), 351-355.
- Parlitz, U., Englisch, V., Scheffczyk, C., Lauterborn, W. (1990): *Bifurcation structure of bubble oscillators*. J. Acoust. Soc. Am. 88(2), 1061-1077.
- Rosenthal, I., Sostaric, J., Z., Riesz, P., (2004): *Sonodynamic therapy – a review of the synergistic effects of drugs and ultrasound*, Ultrason Sonochem 11(2004), 349-363.
- Shima, A., Rajvanschi, S.C., Tsujino, T. (1985): *Study of nonlinear oscillations of bubbles in Powell Eyring fluids*. J. Acoust. Soc. Am. 77(5), 1702-1709.
- Storey, B.D., Szeri, A.J. (2000): *Water vapour, sonoluminescence and sonochemistry*. Proc. R. Soc. Lond. A 456, 1685-1709.
- Taleyarkhan, R.P., West, C.D., Cho, J. S., Lahey, Jr.R.T., Nigmatulin, R.I., Block, R.C. (2002): *Evidence for nuclear emissions during acoustic cavitation*. Science 295(5561), 1868-1873.
- Toegel, R., Luther, S., Lohse, D. (2006): *Viscosity destabilizes sonoluminescing bubbles*. Phys. Rev. Lett. 96(11), 114301.
- Tsujino, T., Shima, A., Oikawa, Y. (1988). *Effect of polymer additives on the generation of subharmonics and harmonic bubble oscillations on an ultrasonically irradiated liquid*. J. Sound Vib. 123(1), 171-184.
- Yu, T., Wang, Z., Mason, T., J., (2004): *A review of research into the uses of low level ultrasound in cancer therapy*, Ultrason Sonochem 11(2004), 95-103.