

Mellékletek

*az „Aktív futóművek alkalmazási lehetőségei
kerékagymotoros közúti járművekben” című OTDK
dolgozathoz*



Budapest, 2014

Szerzők:	Erdős Gergely
	Farkas Ádám
Konzulensek:	Czmerk András
	Kádár Lehel

I. melléklet A futómű-geometria alapjainak bemutatása városi kisautók esetén

A gépjárművek kerékfelfüggesztésének a feladata, hogy **közvetítse az erőhatásokat az út és a jármű között** (azaz kellő tapadást biztosítson hossz - és keresztirányban, valamint szolgáltatson maximális dinamikus kerék - ill. tengelyterhelést), **nyújtson megfelelő lengéskényelmet** az utasok, illetve az áruk számára (optimális önlengési jellemzőkkel rendelkezzen, azaz felépítmény önlengésszáma 60 lengés/perc körüli legyen, mind emellett pedig legyen megfelelő lengésátviteli karakterisztikája.) Ezen kívül feladata még, hogy **csökkentse a járműalkatrészek dinamikus igénybevételét**, és hogy **aktívan segítse elő a jármű menetstabilitását** (azaz fékezéskor befolyásolja kedvezően a jármű irányítását és kanyarodáskor önkormányzással csökkentse a jármű sodródását). [29] [28]

I.1 A közúti járművek futóművének általános szerkezeti felépítése

Futóművek elemcsoportjait és alkatrészeit az 1. és a 2. ábrán mutatjuk be. Az alkalmazott számjelöléseket az alábbiakban adjuk meg:

Kerék:

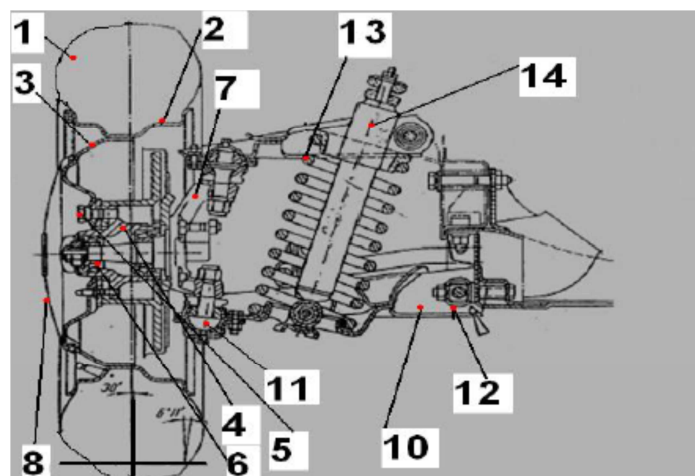
1. gumibroncs
2. kerékpánt
3. keréktárcsa
4. kerékagy
5. kerécsavarok
6. kerékcsapágyak
7. tengely, tengelycsonk
8. díztárcsa

Kerékfelfüggesztés:

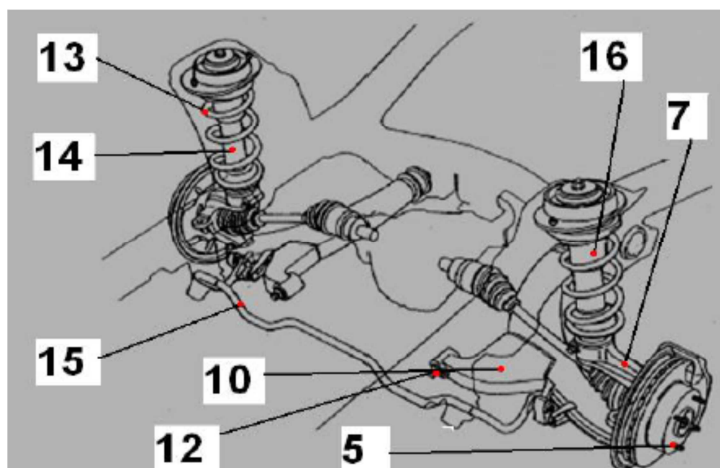
9. rudak
10. lengőkarok
11. csuklók
12. gumiperselyek

Rugózás:

13. rugók
14. lengéscsillapítók
15. stabilizátorok
16. mozgáshatároló rugalmas elemek



1. ábra: A kormányzott kerék beépítése lengőkarokkal, hordrugóval és a csillapítóval Forrás: [28]



2. ábra: A futómű beépítési ábrája a hordrugókkal és lengéscsillapítókkal Forrás: [28]

I.2 Futóművek aktivitása, önszabályozása

A szabályozás történhet:

- számítógépes szabályozással
- önszabályozással (pl. intelligens futóművek).

Az intelligens futóműveknél a megfelelő paraméterek szabályozása történhet:

- elmozdulás szabályozással;
- erőszabályozással;
- integrált szabályozással.

Az önszabályozás megvalósítható különböző hosszúságú (R) és beépítési szögű (κ) lengő rudakkal, lengő karokkal és nagy térfogatú önbeálló gumiagyazásokkal (elasztométerekkel). [28]

I.3 A futóművek geometriai jellemzői, paraméterei

A gépjárművek menetstabilitását a különböző futóműparaméterek megfelelő szabályozásával lehet növelni. A kinematika – a DIN szabvány szerint keréklöket-kinematika, de gyakran „geometriának” is nevezik – a berugózás és kormányzás következtében a kerekekre kényszerített mozgásokat jelöli. Elasztokinematika alatt ezzel szemben az erők és nyomatékok által a kerekek és az útpálya között előidézett kerékállás-változásokat ill. a kinematikai változások megakadályozása érdekében a kerék kívánatos hosszirányú mozgásait értjük. Ezek a felfüggesztési elemek rugalmasságának következményeként állnak be. A koordinátaírányok (amelyekben az egész szemlélendő), valamint a kinematikai jelölések a DIN 70000 és DIN 74250 szabványlapokon, valamint az ISO 4130 és ISO 8855 nemzetközi szabványban vannak meghatározva. [28] [1]

A futóművek vizsgálatakor, minősítésekor használatos geometriai jellemzők, paraméterek:

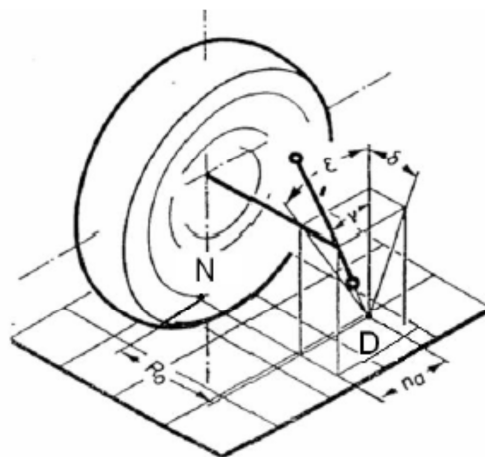
1. Alap paraméterek:

- Kerékdőlés (γ),
- Kerékösszetartás (v, α_v),
- Csapterpesztés (δ),
- Csaphátradőlés (ϵ),
- Utánfutás (na),
- Kormánylegördülési sugár ($R0$),
- Nyomtáv (B),
- Tengelytáv (L).

2. Leszármaztatott paraméterek:

- Billenési momentán centrum,
- Momentán tengely,
- Bólintási centrum,
- Kerékdőlés változás,
- Összetartás változás,
- Nyomtávváltozás.

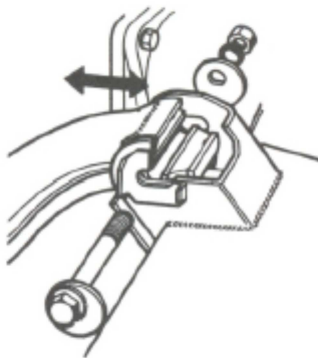
Az alapparamétereket statikus paramétereknek, néha nullgeometriának is nevezik, mivel ezeket a jármű álló helyzetében lehet megmérni, beállítani. A leszármaztatott paramétereket dinamikus paraméterként is említi a szakirodalom. [28]



3. ábra Kerékbekötési jellemzők magyarázata. (csapterpesztés (δ), csaphátradőlés (ϵ), kormánylegördülési sugár ($R0$), (elkormányzási sugár) utánfutás (na)) Forrás: [28]

A kívánatos menettulajdonságok és az egyenesen futási képesség biztosítása, továbbá a túlzott gumibroncskopás megakadályozása érdekében a járműgyártók bizonyos beállítási értékeket, köztük az első tengelyeken megengedett tűréshatárokat írnak elő valamennyi modellre. Ugyanez érvényes a hátsó tengelyekre is, kivéve, ha nem meghajtott merevtengelyről van szó.

A kerékösszetartást a nyomtávrúddal és egy külső excenterrel (3. ábra) lehet beállítani. Többnyire beállítható a kerékdőlés és az utánfutás szöge is.

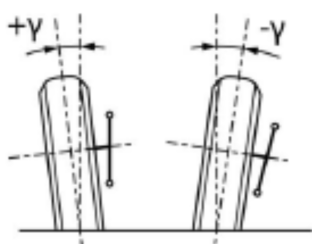


4. ábra A kerékdőlés és a kerékösszetartás beállításához mindkét ferde lengőkaron excentrikus lappal rendelkező hatlapfejű csavarokat lehet tervezni, amelyek az oldalsó nyaknál érnek a berendezéshez (Ford gyári ábrája) Forrás: [28]

A csapterpesztésre, az elkormányzási sugárra, a lengőcsapszeg hátradőlésének kiegyenlítésére és a kerékösszetartási szögre vonatkozó többi gyári adatnál nem egyszerűen mérhető szerkezeti adatokról van szó, amiket csak azért használnak, hogy a balesetet szenvedett vagy régóta nem használt jármű forgalombiztonságát ellenőrizni lehessen. [28]

I.3.1 Alap paraméterek:

I.3.1.1 Kerékdőlés (γ):



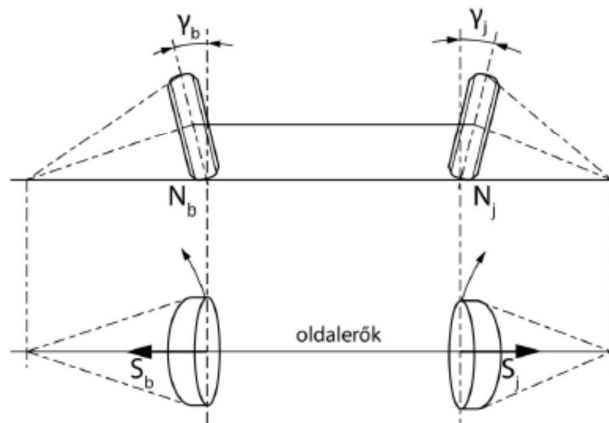
5. ábra A kerékdőlési szög Forrás: [28]

A kerékdőlés jellemző szögét a 5. ábrán szemléltetjük. A kerékdőlés a korszerű gépjárműveknél a legfontosabb paraméter. A nagyobb teljesítményű személygépjárműveknél és valamennyi verseny célra szánt autónál negatív értékek jellemzőek. Más a követelmény a kerék-dőléssel szemben kanyarodáskor és egyenes haladáskor. Kanyarodás közben a külső keréknek a kereszt-irányú átlóterhelődés következtében megnő a függőleges terhelése, vagyis dominánssá

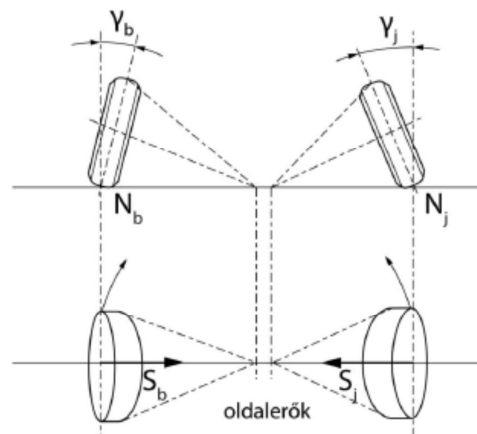
válik. A negatív dőlésszögű külső kerék így a nagyobb leszorító erő és a negatív dőlésszög miatt nagyobb oldalerőt képes felvenni, akár két-háromszorost is. A belső oldali kerék is negatív szögű a kocsiszekrényhez viszonyítva, de a kerék teteje kifelé dől a kanyarodás középpontjához viszonyítva, így az oldalerő felvétel szempontjából pozitívszögűnek minősül, ami kedvezőtlen a jármű kanyarstabilitására. A korszerű, intelligensnek nevezhető futóműveknél ezért elsődleges szabályozási cél a belső kerekek dőlésszögének változtatása a kocsitesthez viszonyítva pozitív irányba, vagyis a kerék tetejét a kanyar középpontja felé dönteni. A meghatározott célfüggvény szerinti kerékdőlés

szabályozását a kocsitest billenésére és az oldalerő növekedésére reagáló felfüggesztési rendszerrel lehet megvalósítani.

Korszerű személygépkocsiknál az első futómű kerékdőlési szöge $0^\circ - (-0,5^\circ)$ közötti, a hátsó futóművé $(-1^\circ) \dots (-2^\circ)$ közötti értékű. Általános követelmény, hogy egy futóművön a két keréknek azonos legyenek a kerékdőlési szöge, már $0,1 - 0,2^\circ$ eltérés esetén a jármű félrehúz. A gépjármű két oldali kerekeinek pozitív kerékdőléssel való kialakítását a 6. ábra szemlélteti, negatív kerékdőléssel való kialakítását a 7. ábra szemlélteti.

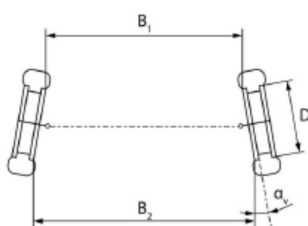


6. ábra Pozitív kerékdőléssel megvalósított futómű Forrás: [28]



7. ábra Negatív kerékdőléssel megvalósított futómű Forrás: [28]

1.3.1.2 Kerékösszetartás (v, α_v),



A közúti járművek futóműveit sok esetben kerékösszetartási szög alkalmazásával alakítják ki a 8. ábrán vázolt ábra szerint:

$$v = B_1 - B_2$$

Összetartási szög egy kerékre vonatkoztatva (α_v):

8. ábra A kerékösszetartási szög értelmezése
Forrás: [28]

$$\alpha_v = \frac{B_1 - B_2}{2D} \text{ (radián)}$$

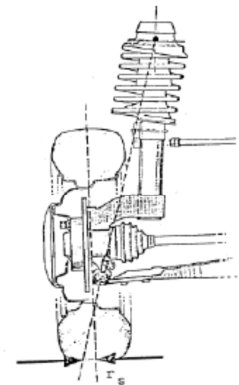
$$\alpha_v \approx \frac{v}{2D} * \frac{180^\circ}{\pi} \text{ (radián)}$$

A korszerű személygépkocsiknál a kerékösszetartás értékei nagy szórást mutatnak. Az első futóműnél általánosan $0^\circ \dots 0,5^\circ$, a hátsó futóműnél $0,5^\circ \dots 1^\circ$ a leggyakoribb érték. Az alap-összetartás ugyanis számos tényezőtől függ így többek között a kerékdőléstől, a kerékdőlés elkormányzás közbeni változásától, a nyomtáv változásától, a hajtásrendszertől az összetartás menet közbeni változtatásától, az úgynevezett csapgeometriáról (ld. később). Az első futóműnél az összetartás a jármű sajátkormányzási tulajdonságát az oldalgyorsulástól függően a túlkormányzás felé változtatja, amíg a hátsó keréknél az alulkormányzás felé. [28]

1.3.1.3 Csapgeometria és csapterpesztés (δ)

A kormányzott kerekek kényszerkormányzáskor vagy önkormányzáskor a függőlegeshez közelálló tengely körül elfordulnak. Ezt a tengelyt nevezzük elkormányzási tengelynek. Ez lehet valós, mint például a merev hidas futóművek függőcsapszegének középvonala (innen ered a csapgeometria, csapterpesztés, csaphátradőlés elnevezés) vagy lehet virtuális, látszólagos. Az alsó – felső gömbcsuklós tengelycsonk esetén a gömbcsuklók középpontját összekötő egyenes az elkormányzás tengelye.

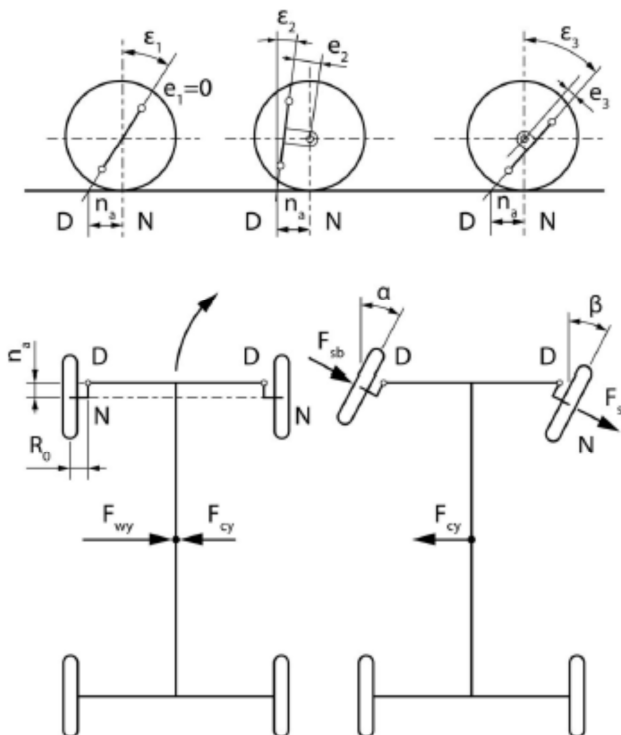
A McPherson futóműveknél az alsó gömbcsukló közepét és a támcsapágy deformációs középpontját összekötő egyenes körül fordul el a tengelycsonk. A dupla csuklós futóműveknél a tengelycsonk alsó és felső nyúlványai a lengőrudak által meghatározott pillanatnyi középpontok (momentán centrumok) körül fordulnak el. Miután a kerék ki és berugózása és a rudakra ható oldalerők következtében a momentán centrumok állandóan változnak, így az elkormányzás tengelye is állandóan változik, vagyis ez a tengely virtuális és momentán. [28]



9. ábra McPherson-típusú első futómű (Audi 80) elkormányozási tengelye Forrás: [28]

I.3.1.4 Csaphátradóls (ε) és utánfutás (na):

A csaphátradóls hatására elkormányzáskor a külső kerék teteje befele, a belsőé pedig kifelé dől, ez javítja a kanyarstabilitást. Az utánfutás következtében a kerek a menetirányba igyekeznek beállni. A viszonyokat a 10. ábra felső részén szemléltetjük. Az ábra bal alsó része az oldalszél hatását egyenes haladáskor, a jobb alsó része pedig a visszatérítő centrifugális erő hatását ábrázolja.



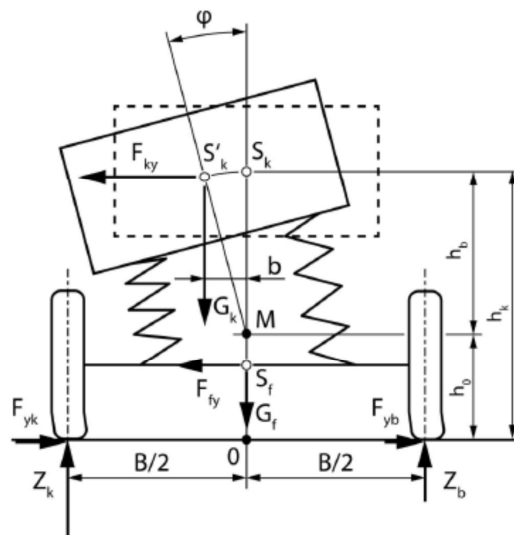
10. ábra Felül: a futómű csaphátradóls viszonyai. Alul balra: az oldalszél hatása egyenesben. Alul jobbra: a visszatérítő centrifugális erő ívben futáskor Forrás: [28]

I.3.2 Leszármaztatott paraméterek

I.3.2.1 Billenési momentán centrum

Billenési momentán centrum alakulását a 11. ábra mutatja be. A gépjármű keresztmetszeti rajzán a momentán billenési centrumot az M pont azonosítja. Az ábra jelölései:

- SK – a kocsitest súlypontja;
- Sf – a futómű súlypontja;
- Gk – a kocsitest súlya;
- Gf – a futómű súlya;
- M – a billenési momentán centrum;
- Zk – a külső kerék terhelése;
- Zb – a belső kerék terhelése;
- Fky – a kocsitestre ható oldalerő;
- Ffy – a futóműre ható oldalerő



11. ábra A gépjármű billenési (támolygási) centrumának alakulása Forrás: [28]

A kocsitestre ható oldalerő (ez lehet kanyarodás közbeni centrifugális erő, oldalszél, oldallejtő) következtében a kocsitest megbillen ψ szöggel a pillanatnyi középpont (momentán centrum) körül. A billenés következtében a kocsitest súlypontja oldalra, b távolságra eltolódik. Ennek hatására megváltozik mindkét kerék függőleges terhelése.

A felépítmény oldalbillenése kedvezőtlen jelenség, ezért azt mérsékelni kell.

Az oldaldőlés csökkenthető:

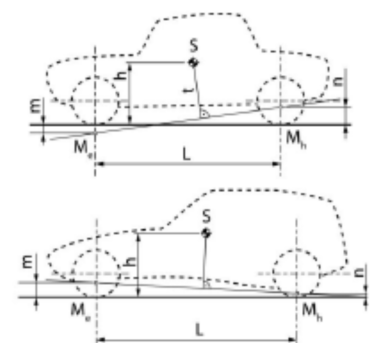
- rugók merevítésével (de a lengéskényelmi követelmények korlátozzák);
- a rugóbázis növelésével;
- a kocsitest súlypontjának csökkentésével;
- a momentán centrum emelésével;
- keresztstabilizátor beépítésével;
- számítógépes felépítmény szabályozással (ABC, Active Body Control – rendszer).

A billenési momentán centrum magassága függ a futómű típusától és a felfüggesztés geo-metriai kialakításától. [1] [28]

1.3.2.2 Billenési momentán tengely

A jármű billenési momentán tengelyét az első és a hátsó futómű billenési momentán centrumát összekötve kapjuk. A momentán tengely helyzete lehet:

- előre lejt, az első futómű billenési merevsége kisebb, mint a hátsó;
- hátrafelé lejt, az első futómű billenési merevsége nagyobb, mint a hátsóé;
- vízszintes, a futóművek billenési merevsége azonos.

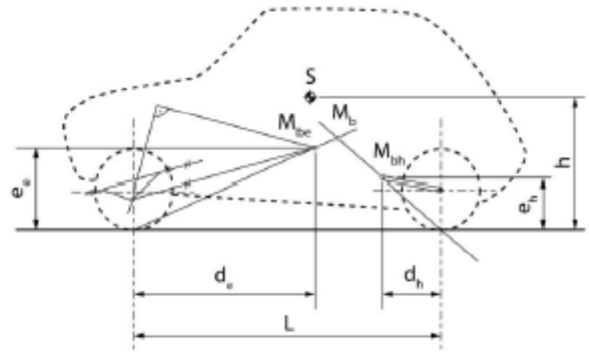


12. ábra A jármű billenési momentán tengelye Forrás: [28]

Az első és hátsó futómű oldal-billenési merevségének aránya befolyásolja a jármű saját kormányzási tulajdonágainak változását az oldalgyorsulás függvényében. Ha a billenési momentán tengely előre lejt, akkor a jármű sajátkormányzása az alulkormányzottság felé változik, ha hátrafelé lejt a változás a túlkormányzottság felé mutat.

1.3.2.3 Bólintási centrum:

A jármű felépítménye fékezéskor vagy gyorsuláskor a tehetetlenségi erő hatására a bólintási centrum körül elfordul. Ennek következtében a felépítmény súlypontja elmozdul előre, illetve hátra, aminek következtében megváltoznak a függőleges tengelyterhelések. A hosszirányú átterhelődés is káros hatású, a tapadási erő csökkenéséhez vezet, aminek következtében romlik a jármű menetstabilitása. Az átterhelődés a bólintási centrum emelésével csökkenthető. A bólintási centrum magassága a futóművek típusától, a felfüggesztés geometriájától függ (13. ábra).



13. ábra A gépjármű bólintási centruma Forrás: [28]

A bólintás csökkenthető a rugók merevségének növelésével természetesen a rugózási kényelem megszabta keretek közt. Az ABC szabályozó rendszer a bólintó mozgást is figyeli és akadályozza. A bólintás különösen a motorkerékpárok stabilitását befolyásolja.

1.3.2.4 A kerékdőlés változása

A korszerű járművek futóműveinek kerékdőlése vagy külső számítógépes szabályozással vagy önszabályozással változtatható a jármű stabilitásának megtartása vagy növelése érdekében. A szabályozás célfüggvényének kimenő paramétere azonos: a kanyar külső oldalán a kerékdőlést negatív, a belső oldalán pozitív irányba kell változtatni. Számítógépes külső szabályozáskor ezt a változtatást a jármű stabilitását meghatározó több paraméter függvényében lehet megadni, mint például a jármű sebessége, a különböző irányú gyorsulásai, a tapadási tényező változásai, stb. Az önszabályozós intelligens futóműveknél a kerékdőlés leggyakoribb esetben a kerék és a felépítmény közti elmozdulás, vagyis a kerék ki- és berugózása függvényében változik. A felépítmény kanyarodás közbeni billenése következtében a külső kerék berugózik, a belső kirugózik, ennek megfelelően határozható meg az önszabályozás célfüggvénye.

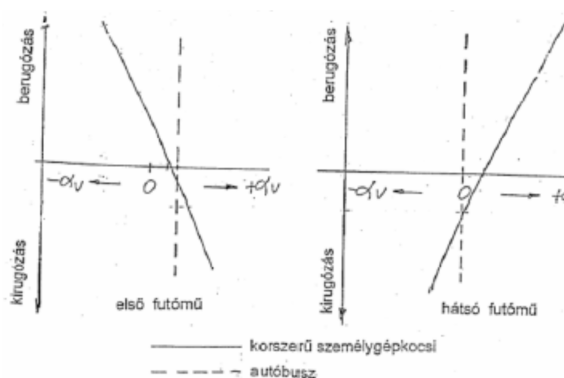


14. ábra A gépjármű kerékdőlés alakulása be- és kirugózáskor Forrás: [28]

A kerék ki- és berugózásával szabályozott kerékdőlés változás jól megvalósítható a háromszög, trapéz keresztlengőkaros felfüggesztésű futóműveknél, viszont a merev hidas futóműveknél egyáltalán nem. A McPherson futóműveknél csak a nyomtáv változásával érhető el kedvező kerékdőlés változás.

1.3.2.5 Összetartás-változás:

Az összetartás menet közbeni szabályozása is a jármű stabilitásának megtartását, növelését szolgálja elsősorban a jármű saját kormányzási viselkedésének ellenőrzése, befolyásolása révén. Nevezetesen a jármű túlkormányzottá válását kell megakadályozni. Ennek megfelelően a kanyarodás közben a hátsó futóműnél a külső kereket befelé, az összetartás irányába kell kormányozni. Az első futóműnél a túlkormányzás elkerülése érdekében éppen fordított a korrekció iránya. Az önkormányzott intelligens futóműveknél ez a szabályozás a kerekek ki – és berugózásával valósítható meg (15. ábra).



15. ábra A gépjármű-kerékösszetartás alakulása be- és kirugózáskor Forrás: [28]

1.3.2.6 Nyomtáv (B) és Nyomtávváltozás

A nyomtáv az egy futómű két kerékének talppontjai közti távolság. A nyomtáv változását ebből következően a talppontok keresztirányú elmozdulása idézi elő. A nyomtáv változását egyenes irányú haladás esetén vizsgálják, miközben a felépítmény változó bólintó mozgást végez, amit a váltakozó lassítás – gyorsítás idéz elő. A nyomtávváltozás általában káros jelenség, miután a keresztben elmozduló kerekek megcsúszhatnak, melynek következtében csökken a kerék tapadása, a jármű

elvesztheti a stabilitását. A merev hidas futóműveknél nincs nyomtávvaltozás, míg független felfüggesztési futóműveknél a kerék ki-berugózása, a kerékdőlés, az összetartás változása a nyomtáv jelentős változását idézheti elő. [28]

II. melléklet Dinamikai és irányítástechnikai modellfelírás

II.1 Dinamikai szemléletű modellfelírás

A dinamikai szemléletű modellfelírás lényege az általános koordinátákon keresztül felírt Lagrange-egyenlet kifejtése. Jelen esetben a két általános koordináta a két szabadságfok azaz a kerék és a jármű függőleges irányú elmozdulása,, vagyis

$$q_1 = z_{us} \text{ és } q_2 = z_s.$$

Írjuk fel a másodfajú Lagrange-egyenlet segítségével a két szabadságfokú rendszer mátrix-differenciálegyenletét a következő alakban:

$$\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{K}}\dot{\underline{q}} + \underline{\underline{S}}\underline{q} = \underline{Q^*}(t)$$

A tömegmátrixot felírhatjuk a kinetikus energia parciális deriválásából, mivel nincs forgó tömeggel való gerjesztés jelen modellben. A kinetikus energia

$$T = \frac{1}{2}m_{us}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_s\dot{q}_2^2$$

Ebből a tömegmátrix

$$\underline{\underline{M}} = \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right] = \begin{bmatrix} m_{us} & 0 \\ 0 & m_s \end{bmatrix}$$

A csillapítási mátrixot felírhatjuk a disszipációs függvényből, ami

$$D = \frac{1}{2}k_s(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^2 = \frac{1}{2}k_s\dot{q}_2^2 - k_s\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}k_s\dot{q}_1^2$$

Ebből felírva a csillapítási mátrixot

$$\underline{\underline{K}} = \left[\frac{\partial^2 D}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right] = \begin{bmatrix} k_s & -k_s \\ -k_s & k_s \end{bmatrix}$$

Mivel van útgerjesztés, a potenciálfüggvényből nem írható fel közvetlenül deriválással a merevségi mátrix, viszont a megfelelő tagok kigyűjtésével ez megtehető – a többi tagot az aktuátorerővel együtt a külső erőknél vesszük figyelembe. A potenciálfüggvény:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}s_s(q_2 - q_1)^2 + \frac{1}{2}s_t(q_1 - r(t))^2 = \\ &= \frac{1}{2}s_s q_2^2 - s_s q_2 q_1 + \frac{1}{2}s_s q_1^2 + \frac{1}{2}s_t q_1^2 - s_s q_2 r(t) + \frac{1}{2}s_s r(t)^2 \end{aligned}$$

A parciális deriváltjai

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = s_s q_1 - s_s q_2 + s_t q_1 \boxed{-s_t r(t)}$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_2} = -s_s q_1 + s_s q_2$$

A bekeretezett tag a külső erőkhöz kerül, a többiből kigyűjthetőek a merevségi mátrix megfelelő elemei

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} s_s + s_t & -s_s \\ -s_s & s_s \end{bmatrix}$$

A külső erők közé tartozik a fent bekeretezett tag, valamint az aktuátor ereje, q_1 esetén negatív, q_2 esetén pozitív előjellel. Ennek megfelelően a külső általános erők vektora a következőképpen néz ki

$$\underline{Q^*} = \begin{bmatrix} s_t r(t) - F_a(t) \\ F_a(t) \end{bmatrix}$$

Így a teljes mátrix-differenciálegyenlet

$$\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{K}}\dot{\underline{q}} + \underline{\underline{S}}\underline{q} = \underline{Q^*}(t)$$

$$\begin{bmatrix} m_{us} & 0 \\ 0 & m_s \end{bmatrix} \ddot{\underline{q}} + \begin{bmatrix} k_s & -k_s \\ -k_s & k_s \end{bmatrix} \dot{\underline{q}} + \begin{bmatrix} s_s + s_t & -s_s \\ -s_s & s_s \end{bmatrix} \underline{q} = \begin{bmatrix} s_t r(t) - F_a(t) \\ F_a(t) \end{bmatrix}$$

A következőkben hagyjuk figyelmen kívül az aktuátorerő hatását, hogy a rendszer többi részének viselkedését vizsgáljuk meg. A sajátfrekvenciák kiszámítása a következő kifejezés segítségével lehetséges

$$\det(\underline{\underline{S}} - \alpha^2 \underline{\underline{M}}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} s_s + s_t - \alpha^2 m_{us} & -s_s \\ -s_s & s_s - \alpha^2 m_s \end{vmatrix} = (s_s + s_t - \alpha^2 m_{us})(s_s - \alpha^2 m_s) - s_s^2 \\ = (\alpha^2)^2 m_s m_{us} - (\alpha^2)(m_{us} s_s + m_s s_s + m_s s_t) + s_t s_s$$

Ennek az α^2 -re nézve másodfokú egyenletnek a megoldásaiból számolhatjuk ki a sajátkörfrekvenciákat (α_1 és α_2) majd ebből egy 2π -vel történő osztás után a sajátfrekvenciákat (f_1 és f_2).

Harmonikus gerjesztés (esetünkben ez legyen $r(t) = r_0 \cos(\omega t)$) esetén

$$\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{K}}\dot{\underline{q}} + \underline{\underline{S}}\underline{q} = \underline{F_0} \cos(\omega t) = \begin{bmatrix} s_t r_0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos(\omega t)$$

alakú egyenletet kapunk, erre kiszámolhatjuk a partikuláris megoldást a következő formában, valamint ebből később az egyes általános koordinátákra vonatkozó nagyítási tényezőt illetve a fázisszöveget is.

$$\underline{q_p}(t) = \underline{L} \cos(\omega t) + \underline{N} \sin(\omega t)$$

Az $\underline{L}$ és $\underline{N}$ vektorokat az alábbi összefüggésből kaphatjuk meg, például Cramer-szabály alkalmazásával. Vegyük észre, hogy $\underline{L}$ és $\underline{N}$ a gerjesztő körfrekvenciától függenek!

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{S}} & \omega \underline{\underline{K}} \\ -\omega \underline{\underline{K}} & -\omega^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{S}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{L} \\ \underline{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F_0} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{L}(\omega), \underline{N}(\omega)$$

Az adott általános koordinátára, ha vesszük az $\underline{L}$ és $\underline{N}$ vektor megfelelő elemei négyzetösszegének gyökét, és elosztjuk az r_0 értékkel, megkapjuk a relatív nagyítási tényező vektor, $\underline{R}$ megfelelő elemeit. Ennek a fizikai jelentése, hogy adott ω körfrekvencián az útgerjesztés nagyságának hányszorosa lesz a kerék illetve a kocsi test elmozdulása. Tehát

$$! \underline{R}(\omega) : \left\{ R_i = \frac{\sqrt{L_i^2 + N_i^2}}{r_0} \right\}$$

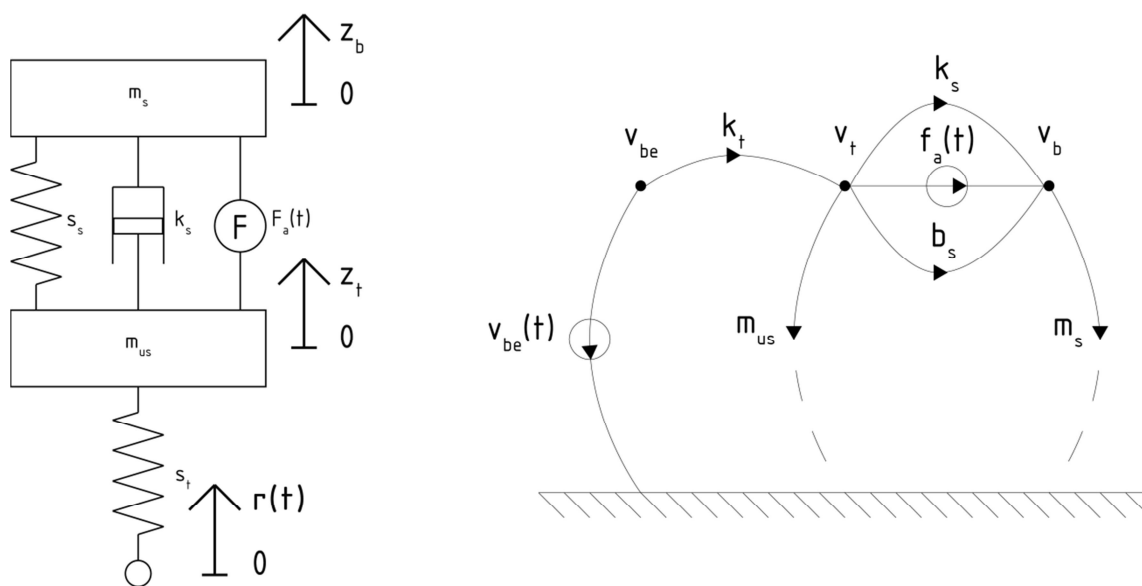
A fáziskésés vektort ($\underline{\vartheta}(\omega)$) pedig úgy értelmezhetjük, hogy szintén az egyes általános koordinátákra számoljuk ki a megfelelő arctg értékeket

$$! \underline{\vartheta}(\omega) : \left\{ \vartheta_i = \arctg \frac{N_i}{L_i} \right\}$$

II.2 Irányítástechnikai szemléletű modellfelírás

Az irányítástechnikai szemléletmódjában kicsit más aspektusból vizsgáljuk a dolgokat, mint a dinamika esetében, más a cél. A más szempontoknak megfelelően részben más a szakirodalmakban használt jelölésrendszer is és a használt változók is. Mi a dolgozat jelen fejezetében az irányítástechnikában megszokott jelöléseket használjuk, amik megfeleltethetők a korábbi dinamikai jelöléseknek.

Az egyik fő különbség, hogy a pozíciók helyett (z_b és z_t) ezek első deriváltját, vagyis a megfelelő sebességeket használjuk (v_b és v_t), így csak a változók első deriváltja illetve első integrálja szerepel a differenciálegyenletekben. A tömegeket továbbra is m_s és m_{us} jelöli. A rugómerevségeket s_s és s_t helyett k_s és k_t jelöli (az „s” a Laplace-transzformáció után foglalt). A csillapítási együtthatót k_s helyett b_s jelöli (hiszen a „k” pedig a rugómerevség). A következő ábrán a két jelölésmód felfogásában ugyanaz a rendszer látható.



16. ábra Negyedjármű modell dinamikai illetve irányítástechnikai megjelenítése

A differenciálegyenleteket csomóponti módszerrel írhatjuk fel. Ahogy várható, a szükséges csomóponti egyenletek száma

$$\text{csomópontok száma} - \text{keresztváltozó típusú függvények száma} - 1 = 4 - 1 - 1 = 2$$

megfelel a szabadságfokok számának, azaz 2. A csomóponti egyenleteket írjuk fel v_t és v_b csomópontokra. A kifolyó ágakat vesszük pozitívnak.

$$v_t : f_{k_s} + f_{be} + f_{b_s} + f_{m_{us}} - f_{k_t} = 0$$

$$v_b : f_{m_s} - f_{k_s} - f_{be} - f_{b_s} = 0$$

A kifejtések és átrendezések után a következő egyenleteket kapjuk

$$v_t : k_s \int (v_t - v_b) dt + b_s(v_t - v_b) + m_{us} \frac{dv_u}{dt} + k_t \int v_t dt = -f_{be}(t) + k_t \int v_{be}(t) dt$$

$$v_b : m_s \frac{dv_b}{dt} - k_s \int (v_t - v_b) dt - b_s(v_t - v_b) = f_a(t)$$

Ezeket Laplace-transzformálva és mátrixos formába rendezve a következőt kapjuk, ami az előző alfejezetben felírt alakkal egyező eredményt ad:

$$\begin{bmatrix} \frac{k_s}{s} + b_s + sm_{us} + \frac{k_t}{s} & -\frac{k_s}{s} - b_s \\ -\frac{k_s}{s} - b_s & sm_s + \frac{k_s}{s} + b_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_t \\ V_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_a + \frac{k_t}{s} V_{be} \\ F_a \end{bmatrix}$$

III. melléklet LQR szabályozó tervezésének részletes levezetése

III.1.1 Állapottér-modell felírása

A szabályozó tervezéséhez szükségünk van a rendszer állapottér-modelljére. A korábban kapott differenciálegyenlet rendszer

$$m_s \ddot{z}_b = -k_s(z_b - z_t) - b_s(\dot{z}_b - \dot{z}_t) + f_a$$

$$m_{us} \ddot{z}_t = -k_s(z_t - z_b) - b_s(\dot{z}_t - \dot{z}_b) + k_t(z_t - r) - f_a$$

Az állapottér-modell felírásához válasszuk meg az állapotváltozókat a következőképpen:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z}_b \\ z_b \\ \dot{z}_t \\ z_t \end{bmatrix}$$

Továbbá jelöljük az f_a bemenetet u -val, és az r zavarást w -vel. Ekkor az állapottér-modellt a következő formában írhatjuk fel:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{b}u + \underline{d}w$$

$$y = \underline{c}^T \underline{x}$$

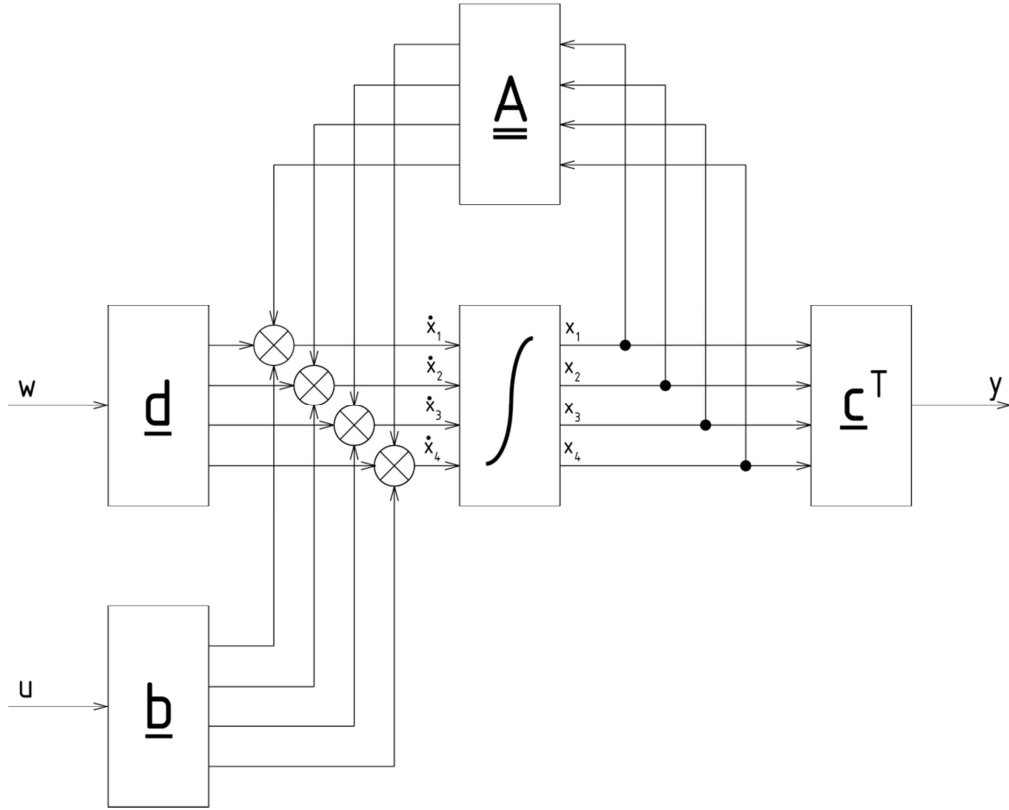
ahol a fenti egyenletek alapján meghatározhatjuk a paramétereket megadó mátrixot és vektorokat.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -\frac{b_s}{m_s} & -\frac{k_s}{m_s} & \frac{b_s}{m_s} & \frac{k_s}{m_s} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{b_s}{m_{us}} & \frac{k_s}{m_{us}} & -\frac{b_s}{m_{us}} & -\frac{k_s}{m_{us}} - \frac{k_t}{m_{us}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_s} \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{m_{us}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_t}{m_{us}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

A $\underline{c}^T$ vektort később is meghatározhatjuk az alapján, hogy mit szeretnénk kimenő y jelként. Például lehetséges $\underline{c}^T$ vektorok

$$\underline{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ezek közül az első opció a rugózott és rugózatlan tömeg sebességkülönbségét, a második pedig a rugózott és rugózatlan tömeg relatív elmozdulását jelenti. A felírt modellt a következő ábra szemlélteti:



17. ábra Az állapotér-modell

III.1.2 Kvadratis funkcionál együtthatóinak meghatározása

Az aktív futóművünk szabályozójának LQR tervezéséhez szükséges J függvény [24] alapján legyen

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} q_1 k_t (x_4 - w)^2 + q_2 x_1^2 + q_3 (x_2 - x_4)^2 + q_4 u^2 dt$$

Itt a q_1 súly a dinamikus kerékterhelést bünteti, a q_2 súly az utazási kényelmet reprezentáló gyorsulást befolyásolhatjuk, a q_3 súllyal a felfüggesztés munkaterének a nagyságát tarthatjuk kézben, a q_4 súly növelésével a beavatkozási erőt minimalizálhatjuk. Az általános eset jelöléseire hasonló jelölésnek megfelelő tagok közül a következőkre van szükség a felíráshoz a megfelelő változó-kombinációk létrehozásához:

$$\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x}, \quad r_1 u^2, \quad \underline{x}^T \underline{N} u, \quad \underline{x}^T \underline{M} w, \quad r_2 w^2$$

A megfelelő súlymátrixokat és súlyvektorokat a következőkben mutatjuk be. Az összeg tagjaiból adódó súlyokat szuperponálhatjuk.

A q_1 súllyal jellemzett tagból a következők adódnak.

$$q_1 k_t (x_4 - w)^2 = q_1 k_t (x_4^2 - 2x_4 w + w^2), \quad \text{ebből}$$

$$\underline{Q}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_1 k_t \end{bmatrix}, \quad \underline{M}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2q_1 k_t \end{bmatrix}, \quad r_{21} = q_1 k_t$$

A q_2 súlyhoz tartozó tagból adódó súlyok a [24] ben részletesen le vannak vezetve, és a következők:

$$\underline{\underline{Q}}_2 = \begin{bmatrix} \frac{q_2}{m_s^2} b_s^2 & \frac{q_2}{m_s^2} b_s k_s & -\frac{q_2}{m_s^2} b_s^2 & -\frac{q_2}{m_s^2} b_s k_s \\ \frac{q_2}{m_s^2} b_s k_s & \frac{q_2}{m_s^2} k_s^2 & -\frac{q_2}{m_s^2} b_s k_s & -\frac{q_2}{m_s^2} k_s^2 \\ -\frac{q_2}{m_s^2} b_s^2 & -\frac{q_2}{m_s^2} b_s k_s & \frac{q_2}{m_s^2} b_s^2 & \frac{q_2}{m_s^2} b_s k_s \\ -\frac{q_2}{m_s^2} b_s k_s & -\frac{q_2}{m_s^2} k_s^2 & \frac{q_2}{m_s^2} b_s k_s & \frac{q_2}{m_s^2} k_s^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{N}_2 = \begin{bmatrix} -2 \frac{q_2}{m_s^2} b_s \\ -2 \frac{q_2}{m_s^2} k_s \\ 2 \frac{q_2}{m_s^2} b_s \\ 2 \frac{q_2}{m_s^2} k_s \end{bmatrix}, \quad r_{12} = \frac{q_2}{m_s^2}$$

A q_3 súlyból eredő paramétereket egyszerűen megkaphatjuk,

$$q_3(x_2 - x_4)^2 = q_3(x_2^2 - 2x_2x_4 + x_4^2)$$

ebből pedig

$$\underline{\underline{Q}}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_3 & 0 & -q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q_3 & 0 & q_3 \end{bmatrix}$$

A q_4 súly pedig könnyen látható, hogy kizárólag a r_1 paraméterbe tartozik, azaz $r_{14} = q_4$.

III.1.3 Optimalizálási feladat megoldása variációszámítással

A fentiek alapján az optimalizálási kritérium, ennek a minimumát kell a variációszámítás eszközeivel megkeresnünk:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \underline{x}^T \underline{\underline{Q}} \underline{x} + \underline{x}^T \underline{N} u + \underline{x}^T \underline{M} w + r_1 u^2 + r_2 w^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty F(\underline{x}, u, w, t) dt$$

Rendezzük át az eredeti állapotegyenletet egy oldalra:

$$\underline{\phi}(\dot{\underline{x}}, \underline{x}, u, w) = \underline{A} \underline{x} + \underline{b} u + \underline{d} w - \dot{\underline{x}} = \underline{0}$$

Az F helyett legyen a J funkcionálban $\tilde{F}$, amit definiáljunk a következő alakban:

$$\tilde{F}(\dot{\underline{x}}, \underline{x}, u, w, t) = F(\underline{x}, u, w) + \underline{\lambda}^T(t) \underline{\phi}(\dot{\underline{x}}, \underline{x}, u, w)$$

Ahol $\underline{\lambda}$ -t társváltozónak vagy Lagrange-szorzónak nevezzük. Az $\tilde{F}$ funkcionálra az Euler-Lagrange-egyenletek a következők:

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \underline{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \dot{\underline{x}}} = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \underline{u}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \dot{\underline{u}}} = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \underline{w}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \dot{\underline{w}}} = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \underline{\lambda}} = 0$$

Az utolsó egyenletből az eredeti $\underline{\phi} = 0$ állapotegyenletet kapjuk vissza, a többinél elvégezve a műveleteket, sorrendben kapjuk, hogy

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{x}} + \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial \underline{x}} \underline{\lambda} + \dot{\underline{\lambda}} = \underline{0}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{u}} + \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial \underline{u}} \underline{\lambda} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{w}} + \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial \underline{w}} \underline{\lambda} = 0$$

A parciális deriválásokat elvégezve az alábbi egyenleteket kapjuk

$$[I] \quad 2 \underline{Q} \underline{x} + \underline{N} \underline{u} + \underline{M} \underline{w} + \underline{A}^T \underline{\lambda} + \dot{\underline{\lambda}} = \underline{0}$$

$$[II] \quad \underline{N}^T \underline{x} + 2 r_1 \underline{u} + \underline{b}^T \underline{\lambda} = 0$$

$$[III] \quad \underline{M}^T \underline{x} + 2 r_2 \underline{w} + \underline{d}^T \underline{\lambda} = 0$$

A [II] egyenletből kifejezhetjük $\underline{u}$ -t, a [III] egyenletből pedig $\underline{w}$ -t:

$$\underline{u} = -\frac{\underline{N}^T \underline{x} + \underline{b}^T \underline{\lambda}}{2 r_1}$$

$$\underline{w} = -\frac{\underline{M}^T \underline{x} + \underline{d}^T \underline{\lambda}}{2 r_2}$$

Helyettesítsük be ezeket az eredeti állapotegyenletbe:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{A} \underline{x} + \underline{b} \underline{u} + \underline{d} \underline{w} = \underline{A} \underline{x} + \underline{b} \left(-\frac{\underline{N}^T \underline{x} + \underline{b}^T \underline{\lambda}}{2 r_1} \right) + \underline{d} \left(-\frac{\underline{M}^T \underline{x} + \underline{d}^T \underline{\lambda}}{2 r_2} \right) \\ &= \left(\underline{A} - \frac{\underline{b} \underline{N}^T}{2 r_1} - \frac{\underline{d} \underline{M}^T}{2 r_2} \right) \underline{x} + \left(-\frac{\underline{b} \underline{b}^T}{2 r_1} - \frac{\underline{d} \underline{d}^T}{2 r_2} \right) \underline{\lambda} \end{aligned}$$

Fejezzük ki [I] egyenletből $\dot{\underline{\lambda}}$ -t kizárólag $\underline{x}$ és $\underline{\lambda}$ változók felhasználásával!

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\lambda}} &= - \left(\underline{A}^T \underline{\lambda} + 2 \underline{Q} \underline{x} + \underline{N} u + \underline{M} w \right) = -\underline{A}^T \underline{\lambda} - 2 \underline{Q} \underline{x} - \underline{N} \left(-\frac{\underline{N}^T \underline{x} + \underline{b}^T \underline{\lambda}}{2 r_1} \right) - \underline{M} \left(-\frac{\underline{M}^T \underline{x} + \underline{d}^T \underline{\lambda}}{2 r_2} \right) \\ &= \left(-2 \underline{Q} + \frac{\underline{N} \underline{N}^T}{2 r_1} + \frac{\underline{M} \underline{M}^T}{2 r_2} \right) \underline{x} + \left(-\underline{A}^T + \frac{\underline{N} \underline{b}^T}{2 r_1} + \frac{\underline{M} \underline{d}^T}{2 r_2} \right) \underline{\lambda}\end{aligned}$$

Ezekből felírhatjuk a Hamilton-egyenletet mátrixos formában:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} - \frac{\underline{b} \underline{N}^T}{2 r_1} - \frac{\underline{d} \underline{M}^T}{2 r_2} & -\frac{\underline{b} \underline{b}^T}{2 r_1} - \frac{\underline{d} \underline{d}^T}{2 r_2} \\ -2 \underline{Q} + \frac{\underline{N} \underline{N}^T}{2 r_1} + \frac{\underline{M} \underline{M}^T}{2 r_2} & -\underline{A}^T + \frac{\underline{N} \underline{b}^T}{2 r_1} + \frac{\underline{M} \underline{d}^T}{2 r_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix}$$

III.1.4 Mátrix Riccati-differenciálegyenlet felírása

Bizonyítható, hogy az állapot- és a társállapot- vektor között fennáll a következő összefüggés:

$$\underline{\lambda}(t) = \underline{P}(t) \underline{x}(t)$$

Ezt idő szerint deriválva kapjuk, hogy

$$\dot{\underline{\lambda}}(t) = \dot{\underline{P}}(t) \underline{x}(t) + \underline{P}(t) \dot{\underline{x}}(t)$$

A továbbiakban az átláthatóság kedvéért nem jelöljük az időfüggést. A Hamilton-egyenletből beírva $\dot{\underline{\lambda}}$ értékét:

$$\dot{\underline{P}} \underline{x} + \underline{P} \dot{\underline{x}} = \left(-2 \underline{Q} + \frac{\underline{N} \underline{N}^T}{2 r_1} + \frac{\underline{M} \underline{M}^T}{2 r_2} \right) \underline{x} + \left(-\underline{A}^T + \frac{\underline{N} \underline{b}^T}{2 r_1} + \frac{\underline{M} \underline{d}^T}{2 r_2} \right) \underline{\lambda}$$

Majd alkalmazva a $\underline{\lambda} = \underline{P} \underline{x}$ összefüggést:

$$\dot{\underline{P}} \underline{x} + \underline{P} \dot{\underline{x}} = \left(-2 \underline{Q} + \frac{\underline{N} \underline{N}^T}{2 r_1} + \frac{\underline{M} \underline{M}^T}{2 r_2} \right) \underline{x} + \left(-\underline{A}^T + \frac{\underline{N} \underline{b}^T}{2 r_1} + \frac{\underline{M} \underline{d}^T}{2 r_2} \right) \underline{P} \underline{x}$$

Rendezzünk egy oldalra:

$$\dot{\underline{P}} \underline{x} + \underline{P} \dot{\underline{x}} + 2 \underline{Q} \underline{x} - \frac{\underline{N} \underline{N}^T}{2 r_1} \underline{x} - \frac{\underline{M} \underline{M}^T}{2 r_2} \underline{x} + \underline{A}^T \underline{P} \underline{x} - \frac{\underline{N} \underline{b}^T}{2 r_1} \underline{P} \underline{x} - \frac{\underline{M} \underline{d}^T}{2 r_2} \underline{P} \underline{x} = \underline{0}$$

Fejezzük ki $\dot{\underline{x}}$ -t az eredeti állapotegyenletből $\underline{P}$ és $\underline{x}$ változók használatával,

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \underline{A} \underline{x} + \underline{b} u + \underline{d} w = \underline{A} \underline{x} + \underline{b} \left(-\frac{\underline{N}^T \underline{x} + \underline{b}^T \underline{\lambda}}{2 r_1} \right) + \underline{d} \left(-\frac{\underline{M}^T \underline{x} + \underline{d}^T \underline{\lambda}}{2 r_2} \right) = \\ &= \left(\underline{A} - \frac{\underline{b} \underline{N}^T}{2 r_1} - \frac{\underline{d} \underline{M}^T}{2 r_2} \right) \underline{x} + \left(-\frac{\underline{b} \underline{b}^T}{2 r_1} - \frac{\underline{d} \underline{d}^T}{2 r_2} \right) \underline{\lambda} = \\ &= \left(\underline{A} - \frac{\underline{b} \underline{N}^T}{2 r_1} - \frac{\underline{d} \underline{M}^T}{2 r_2} \right) \underline{x} + \left(-\frac{\underline{b} \underline{b}^T}{2 r_1} - \frac{\underline{d} \underline{d}^T}{2 r_2} \right) \underline{P} \underline{x}\end{aligned}$$

majd helyettesítsük be az előző egyenletbe:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{P}} \underline{x} + \underline{P} \left[\left(\underline{A} - \frac{\underline{b} \underline{N}^T}{2 r_1} - \frac{\underline{d} \underline{M}^T}{2 r_2} \right) \underline{x} + \left(-\frac{\underline{b} \underline{b}^T}{2 r_1} - \frac{\underline{d} \underline{d}^T}{2 r_2} \right) \underline{P} \underline{x} \right] + 2 \underline{Q} \underline{x} - \frac{\underline{N} \underline{N}^T}{2 r_1} \underline{x} - \frac{\underline{M} \underline{M}^T}{2 r_2} \underline{x} \\ + \underline{A}^T \underline{P} \underline{x} - \frac{\underline{N} \underline{b}^T}{2 r_1} \underline{P} \underline{x} - \frac{\underline{M} \underline{d}^T}{2 r_2} \underline{P} \underline{x} = \underline{0} \end{aligned}$$

Emeljünk ki $\underline{x}$ -t:

$$\left\{ \dot{\underline{P}} + \underline{P} \left[\left(\underline{A} - \frac{\underline{b} \underline{N}^T}{2 r_1} - \frac{\underline{d} \underline{M}^T}{2 r_2} \right) + \left(-\frac{\underline{b} \underline{b}^T}{2 r_1} - \frac{\underline{d} \underline{d}^T}{2 r_2} \right) \underline{P} \right] + 2 \underline{Q} - \frac{\underline{N} \underline{N}^T}{2 r_1} - \frac{\underline{M} \underline{M}^T}{2 r_2} + \underline{A}^T \underline{P} - \frac{\underline{N} \underline{b}^T}{2 r_1} \underline{P} - \frac{\underline{M} \underline{d}^T}{2 r_2} \underline{P} \right\} \underline{x} = \underline{0}$$

Ez akkor lehet igaz minden t esetén, ha

$$\begin{aligned} \dot{\underline{P}} + \underline{P} \left[\left(\underline{A} - \frac{\underline{b} \underline{N}^T}{2 r_1} - \frac{\underline{d} \underline{M}^T}{2 r_2} \right) + \left(-\frac{\underline{b} \underline{b}^T}{2 r_1} - \frac{\underline{d} \underline{d}^T}{2 r_2} \right) \underline{P} \right] + 2 \underline{Q} - \frac{\underline{N} \underline{N}^T}{2 r_1} - \frac{\underline{M} \underline{M}^T}{2 r_2} + \underline{A}^T \underline{P} \\ - \frac{\underline{N} \underline{b}^T}{2 r_1} \underline{P} - \frac{\underline{M} \underline{d}^T}{2 r_2} \underline{P} = \underline{0} \end{aligned}$$

Ez a forma a mátrix Riccati-differenciálegyenlet, amiből az optimális irányítást kaphatjuk.

III.1.5 CARE felírása és megoldása

Bizonyítható, hogy létezik az egyenletnek olyan megoldása, ahol $\underline{P}(t) = \underline{P}$ konstans mátrix. Ekkor $\dot{\underline{P}} = \underline{0}$, így a differenciálegyenletből a következő algebrai egyenletté egyszerűsödik az előző egyenlet, ezt hívjuk Control Algebraic Riccati Equation-nek. (röviden CARE)

$$\begin{aligned} \underline{P} \underline{A} - \frac{\underline{P} \underline{b} \underline{N}^T}{2 r_1} - \frac{\underline{P} \underline{d} \underline{M}^T}{2 r_2} - \frac{\underline{P} \underline{b} \underline{b}^T \underline{P}}{2 r_1} - \frac{\underline{P} \underline{d} \underline{d}^T \underline{P}}{2 r_2} + 2 \underline{Q} - \frac{\underline{N} \underline{N}^T}{2 r_1} - \frac{\underline{M} \underline{M}^T}{2 r_2} + \underline{A}^T \underline{P} - \frac{\underline{N} \underline{b}^T}{2 r_1} \underline{P} \\ - \frac{\underline{M} \underline{d}^T}{2 r_2} \underline{P} = \underline{0} \end{aligned}$$

Ezt megoldva megkapjuk $\underline{P}$ mátrixot, aminek a segítségével megkaphatjuk az optimális irányító jelet. A $\underline{P}$ mátrix kiszámolásához a MATLAB szoftvert használjuk, a használt forráskódot mellékeljük. A fentebb felírt összefüggések alapján az optimális irányító jel pedig az

$$u(t) = -\frac{\underline{N}^T + \underline{b}^T \underline{P}}{2 r_1} \underline{x}(t)$$

IV. melléklet Futóműgeometriai paraméterek meghatározása

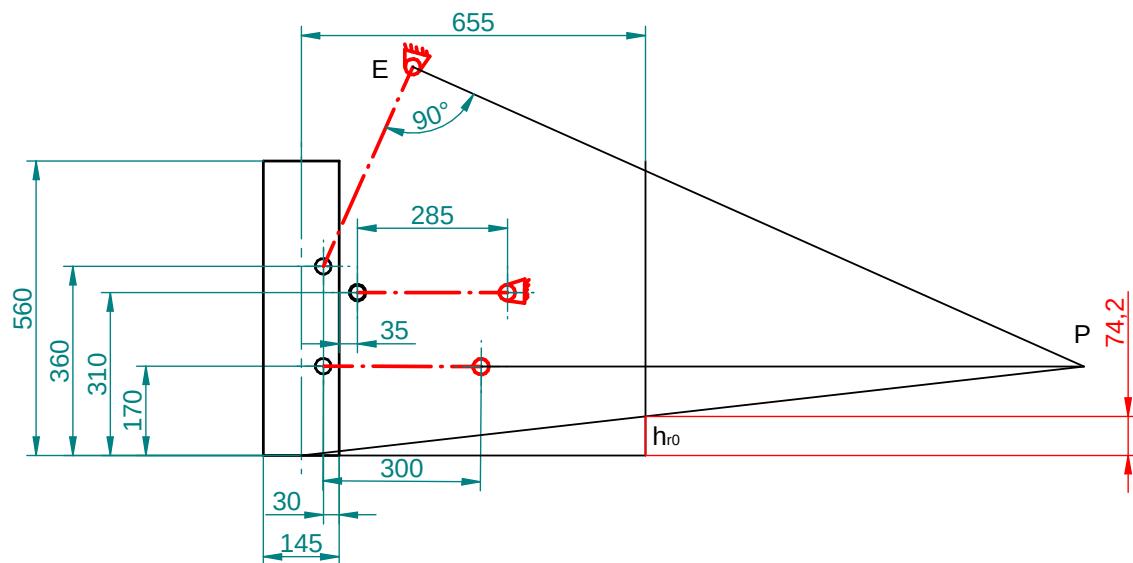
Az első futómű McPherson rendszerű. A McPherson típusú futóműveknél a kerékcsapágyazást magában foglaló kerékcsonkot egy lengőkarral és a fixen beépített rugótaggal vezetik meg. A kerékcsonk aljához, egy vezetőcsuklón keresztül 2 ponton rögzített lengőkar megakadályozza az x és y irányú elmozdulásokat. A lengőkar és a kerékcsonkhoz rögzített rugótag a támcsapágyon keresztül megakadályozza az x és y tengelyű elfordulásokat. A rugózás, vagyis a z irányú mozgás lehetséges, annak tompítása és véghelyzeteinek megszabása az egybeépített rugó és lengéscsillapító (rugótag) feladata. A z tengely körüli elfordulás, vagyis a kormányzás is lehetséges melyet a kerékcsonk harmadik nyúlványához csatlakozó kormányösszekötő rúddal végezhetünk. Ezzel a futómű mind a 6 szabadságfokot meghatározza, csak a z irányú elmozdulást (rugózás) és elfordulást (kormányzás) engedi meg.



18. ábra: A Mitsubishi i-MiEV első futóművének bekötési pontjai (saját készítésű kép)



19. ábra: A Mitsubishi i-MiEV első futóművének bekötési pontjai (saját készítésű kép)



23. ábra: Az első futómű kormánylegördülési sugara ($R_0=118,6$ mm) és momentán centruma ($h_{r0}=74,2$ mm a talpponttól) (Solid Edge-el szerkesztett kép, előnézet)

A billenési központ – amit gördülési központnak, R_0 -nak is neveznek – a DIN 70000 szabvány szerint a kerék középpontján átmenő, függőlegesen álló kereszt síknak az a pontja, amelyekben a keresztirányú erők a rugózott tömegre – azaz a felépítményre – kinematikai billenésszög kialakulása nélkül tudnak hatni. A McPherson felfüggesztésnél a karosszéria oldalán lévő rögzítési pontban (E pont) merőlegest kell állítani a lengéscsillapító dugattyúrúdjának mozgási irányára, és az alsó lengőkart meg kell hosszabbítani. Kettejük metszéspontja megadja a P pólust. A futómű momentán centruma viszonylag közel esik a talajhoz ($h_{r0}=74,2$ mm a kerék tappontjától), bár erre a felfüggesztési rendszerre a magasabb momentán centrum a jellemző.

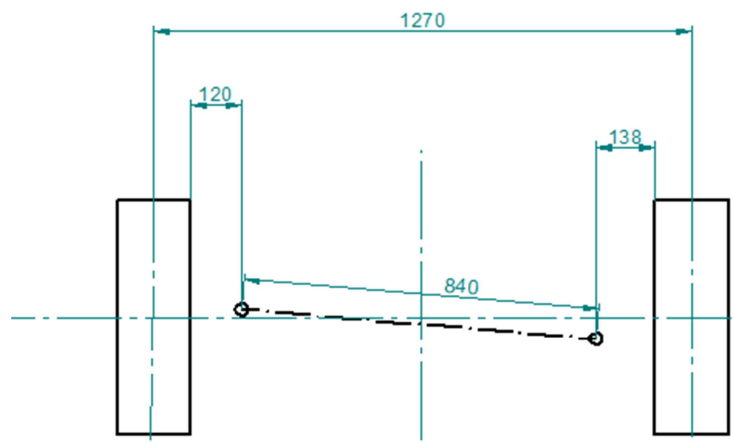
A hátsó futómű 3 karos De-Dion típusú merev tengelyes.



24. ábra: Az i-MiEV hátsó futóműve

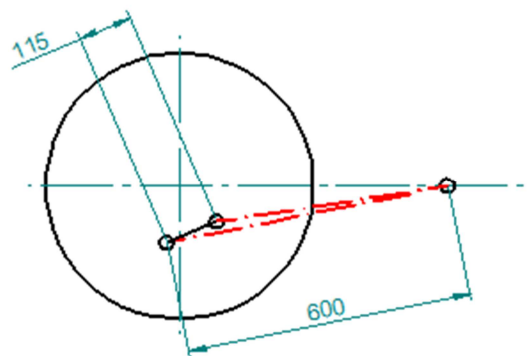


25. ábra: A Panhard rudas felfüggesztés

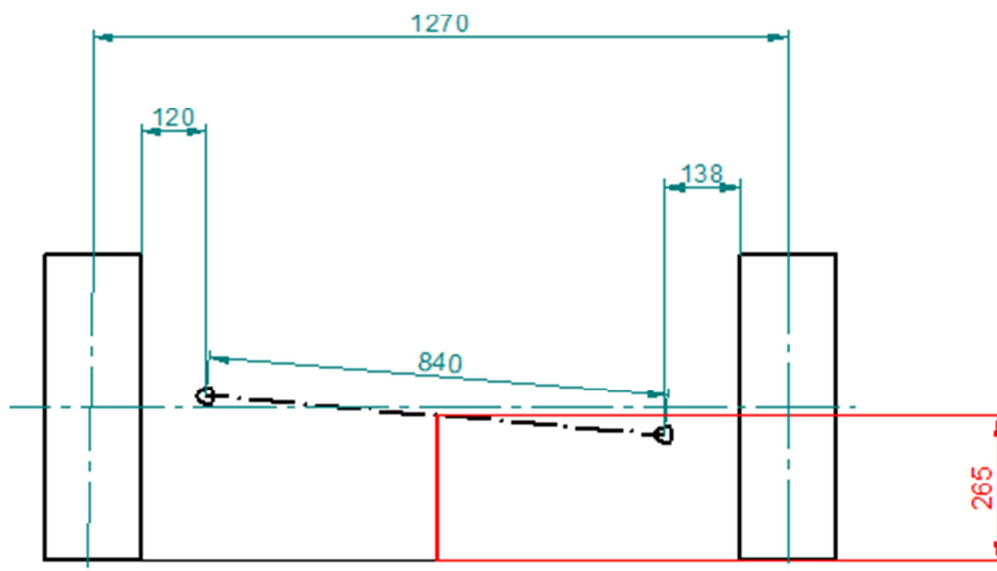


26. ábra: A hátsó futómű előlnézeti szerkesztett képe (Solid Edge-el szerkesztett kép)

A De-Dion típusú merevtengelyes futóműveknél ha az oldalerő letámasztását egy Panhard rúd veszi át (25. ábra), akkor a billenési központ a rúd jármű középvonalával való metszéspontjában helyezkedik el.

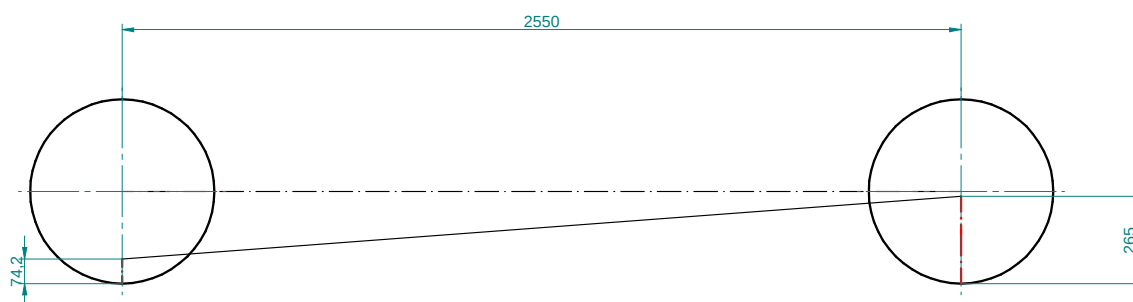


27. ábra: A hátsó futómű bekötési pontjai oldalnézetben (Solid Edge-el szerkesztett kép)



28. ábra: A hátsó futómű momentán centruma (265 mm a talpponttól) (Solid Edge-el szerkesztett kép, előlnézet)

A hátsó futómű momentán centruma magasan helyezkedik el a kerék talppontjától (265 mm a talpponttól)



29. ábra: A gépjármű momentán tengelye

A momentán tengely az első és hátsó momentán centrumokat összekötő egyenes. A tengely előre lejt, ami előnyös a stabilitás szempontjából.

V. melléklet Dolgozat ábrajegyzéke

1. ábra Mercedes ABC rendszer hidraulikus köre Forrás: [5]	11
2. ábra A spirálrugó hidraulikus állítóművel Forrás: [1]	11
3. ábra BMW Dynamic Drive rendszer beépítése Forrás: [1]	12
4. ábra Lengőmotor metszete Forrás: [5]	12
5. ábra A Porsche egy elektronikusan szabályozható lengéscsillapítója Forrás: topspeed.com	13
6. ábra Csövön kívüli szelepes megoldás Forrás: zf.com	13
7. ábra Citroën HydrActive felfüggesztésrendszer Forrás: bxclub.cz	14
8. ábra Rugó és lengéscsillapító elvi ábrája Forrás: [18]	14
9. ábra Egy tengely elvi elrendezése Forrás: [18]	14
10. ábra GINAF versenykamion első és hátsó hidropneumatikus futóművének elvi vázlata Forrás: [18]	15
11. ábra GINAF versenykamion Forrás: vanvlietxl.com	16
12. ábra Légrugó beépítése Forrás: [5]	17
13. ábra Lengéscsillapítóval koncentrikus beépítésű, gördülőmembrános légrugó Forrás: [5]	17
14. ábra Mitsubishi Galant szemi-aktív felfüggesztése Forrás: [5]	18
15. ábra Haszonjármű légrugózással ellátott tengelye Forrás: zf.com	19
16. ábra Független tehergépjármű felfüggesztés légrugóval Forrás: zf.com	19
17. ábra A Lexus aktív stabilizátor rendszere Forrás: [20]	21
18. ábra Az aktuátor keresztmetszete Forrás: [20]	21
19. ábra Michelin Active Wheel Forrás: autoevolution.com	22
20. ábra A Venturi Volage váza Forrás: seriouswheels.com	22
21. ábra Siemens VDO eCorner metszete Forrás: blogspot.com	23
22. ábra "Kerék robot" összeállítás Forrás: [14]	23
23. ábra A BOSE cég aktív felfüggesztés rendszere Forrás: extremetech.com	24
24. ábra A BOSE kísérleti autója Forrás: extremetech.com	24

25. ábra Az eindhoven-i egyetem aktív felfüggesztés-megoldása Forrás: blogspot.com és [7]	25
26. ábra A jármű test (rugózott tömeg) gyorsulásának amplitúdója frekvenciák szerint, szimuláció alapján Forrás: [8]	25
27. ábra Megneto-reológiai folyadék működési elve Forrás: [5]	26
28. ábra Az Audi Magnetic Ride rendszere egy Audi TT Coupéban Forrás: [5]	26
29. ábra Audi Magnetic Ride lengéscsillapító működési elve Forrás: [5]	27
30. ábra A különböző lengéscsillapító megoldások jellemző karakterisztikái Forrás: [5]	27
31. ábra Aktív felfüggesztés egyszerűsített negyedjármű-modellje	28
32. ábra Az első futóművet jellemző relatív nagyítás	31
33. ábra A hátsó futóművet jellemző relatív nagyítás	31
34. ábra Az állapotvisszacsatolással szabályozott rendszer	35
35. ábra Állapotter-modellel állapotmegfigyelővel és visszacsatolással	36
36. ábra A szenzor elhelyezése a DFF szabályozónál Forrás: [27]	37
37. ábra: Negyedjármű modell elrendezése az AMESim rendszerben	39
38. ábra Első futómű standard szabályozással	43
39. ábra Hátsó futómű standard szabályozással	45
40. ábra Első futómű erősebb szabályozással	47
41. ábra Hátsó futómű erősebb szabályozással	49
42. ábra A 15 szabadságfokú járműmodell szabadságfokai Forrás: [26]	50
43. ábra Grid Frame Forrás: [26]	50
44. ábra: A teljes járműmodell szimuláció elrendezése az AMESim rendszerben	52
45. ábra Járműsebesség a teljes járműmodell szimulációja alapján	53
46. ábra Kerékterhelések a teljes járműmodell szimulációja alapján - passzív eset	54
47. ábra Kerékterhelések a teljes járműmodell szimulációja alapján - aktív eset	54
48. ábra Járműtest gyorsulások a teljes járműmodell szimulációja alapján	55
49. ábra Aktuátorerők a teljes járműmodell szimulációja alapján	55

VI. Melléklet Negyedjármű-modell dinamikai számításaihoz használt MATLAB kód

`function` negyedjarmu_szamolas

```
%
%|                                     |
%|             jellemzo konstansok   |
%|      TODO: beallitani a jellemzo ertekeket futtatás előtt      |
%|             mertekegység: mindenhol SI!                       |
%|                                     |
%

k_s = 1200;           %csillapító tag BMW elso: 1450 hatso: 4000 i-MiEV elso: 1500 hatso: 1200
s_s = 17000;          %rugo merevsege BMW elso: 30000 hatso: 31500 i-MiEV elso: 17000 hatso: 17000
s_t = 200000;          %gumiabroncsot jellemzo merevseg BMW: 340000 i-MiEV elso: 200000 hatso: 200000
m_s = [265, 245];      %rugozott tomeg kerekagymotor nélkül és kerekagymotorral BMW elso: 408 hatso:
400 i-MiEV elso: 235 hatso: 265
m_us = [25, 45];        %rugozatlan tomeg kerekagymotor nélkül és kerekagymotorral BMW elso: 48.3
hatso 45 i-MiEV elso: 30 hatso: 25
                        %kerekagymotor tomege BMW: 40 i-MiEV: 20

%
%|                                     |
%|             jellemzo konstansok vege                             |
%|                                     |
%

%inicializalas
fig = figure;
set(fig, 'numbertitle', 'off', 'units','normalized','position',[0 0 1 1],...
      'Name', 'Negyedjármű modell', 'toolbar', 'none')
ax_Rus = subplot(2, 1, 1);
ylabel(ax_Rus, 'Rus [-]');
xlabel(ax_Rus, 'f [Hz]');
ax_Rs = subplot(2, 1, 2);
ylabel(ax_Rs, 'Rs [-]');
xlabel(ax_Rs, 'f [Hz]');
B = zeros(4, 1);
B(1) = s_t;
L = zeros(2, 1);
N = zeros(2, 1);
R = zeros(2, 301, 2);
tengely = zeros(1, 301);

for eset=1:2

%sajatfrekvenciak szamolasa
ma = m_s(eset)*m_us(eset);
mb = -(m_us(eset)*s_s + m_s(eset)*s_s + m_s(eset)*s_t);
mc = s_t*s_s;
mx = zeros(2, 1);
md = sqrt(mb^2-4*ma*mc);
mx(1) = (-mb+md)/(2*ma);
mx(2) = (-mb-md)/(2*ma);
alfa = sqrt(mx);
f = zeros(2, 1);
f(1) = alfa(2) / (2*pi);
f(2) = alfa(1) / (2*pi);
f

%nagyitas szamolasa
M = [[m_us(eset), 0]; [0, m_s(eset)]];
K = [[k_s, -k_s]; [-k_s, k_s]];
S = [[s_s+s_t, -s_s]; [-s_s, s_s]];

seged = 1;

for ind = -1:0.01:2
omega = (2*pi*(10^ind));
tengely(seged) = omega/(2*pi);
A = [[-omega^2*M+S, omega*K]; [-omega*K, -omega^2*M+S]];

%Cramer-szabaly
L(1) = det([B, A(1:4, 2:4)])/det(A);
L(2) = det([A(1:4, 1), B, A(1:4, 3:4)])/det(A);
N(1) = det([A(1:4, 1:2), B, A(1:4, 4)])/det(A);
N(2) = det([A(1:4, 1:3), B])/det(A);

R(1, seged, eset) = sqrt(L(1)^2 + N(1)^2);
R(2, seged, eset) = sqrt(L(2)^2 + N(2)^2);
```

```

seged = seged + 1;
end
end

%abrazolas
pl_Rus = semilogx(ax_Rus, tengely, R(1, 1:1:(seged-1), 1), 'g', tengely, R(1, 1:1:(seged-1), 2), 'r');
pl_Rs = semilogx(ax_RS, tengely, R(2, 1:1:(seged-1), 1), 'g', tengely, R(2, 1:1:(seged-1), 2), 'r');
end

```

VII. Melléklet Szabályozó erősítési vektorának számításához használt MATLAB kód

function szabalyzo_szamolas

```
%
%|               tervezési súlyok               |
%|      TODO: beallítani a jellemző értékeket futtatás előtt      |
%|
%

q1 = 10^14;
q2 = 10^6;
q3 = 10^6;
q4 = 10^0;

%
%|               tervezési súlyok vége               |
%|
%

%
%|               jellemző fizikai konstansok               |
%|      TODO: beallítani a jellemző értékeket futtatás előtt      |
%|               mértékegység: mindenhol SI!               |
%|
%

b_s = 1000;           %csillapító tag BMW elso: 1450 hatso: 4000   i-MiEV elso: 1500 hatso: 1200 aktiv
esetben -200
k_s = 17000;          %rugo merevsege BMW elso: 30000 hatso: 31500 i-MiEV elso: 17000 hatso: 17000
k_t = 200000;         %gumiabroncsot jellemző merevség BMW: 340000 i-MiEV elso: 200000 hatso: 200000
m_s = 245;            %rugózott tömeg kerekagymotor nélkül és kerekagymotorral BMW elso: 408 hatso: 400
i-MiEV elso: 235 hatso: 265
m_us = 45;            %rugózatlan tömeg kerekagymotor nélkül és kerekagymotorral BMW elso: 48.3 hatso 45
i-MiEV elso: 30 hatso: 25
                        %kerekagymotor tömege BMW: 40 i-MiEV: 20

%
%|               jellemző konstansok vége               |
%|
%

%allapotter-modell felirasa

A = [-b_s/m_s, -k_s/m_s, b_s/m_s, k_s/m_s]; [1, 0, 0, 0]; [b_s/m_us, k_s/m_us, -b_s/m_us, -k_s/m_us-
k_t/m_us]; [0, 0, 1, 0]];
b = [1/m_s; 0; -1/m_us; 0];
d = [0; 0; k_t/m_us; 0];

%szűk felirasa

%preallokacio
Q = zeros(4, 4);
N = zeros(4, 1);
M = zeros(4, 1);
r1 = 0;
r2 = 0;

%első tag
Q(4, 4) = Q(4, 4) + q1*k_t;
M(4, 1) = M(4, 1) - 2*q1*k_t;
r2 = r2 + q1*k_t;

%második tag
Q = Q + [q2*b_s*b_s/m_s/m_s, q2*b_s*k_s/m_s/m_s, -q2*b_s*b_s/m_s/m_s, -q2*b_s*k_s/m_s/m_s;...
q2*b_s*k_s/m_s/m_s, q2*k_s*k_s/m_s/m_s, -q2*b_s*k_s/m_s/m_s, -q2*k_s*k_s/m_s/m_s;...
-q2*b_s*b_s/m_s/m_s, -q2*b_s*k_s/m_s/m_s, q2*b_s*b_s/m_s/m_s, q2*b_s*k_s/m_s/m_s;...
-q2*b_s*k_s/m_s/m_s, -q2*k_s*k_s/m_s/m_s, q2*b_s*k_s/m_s/m_s, q2*k_s*k_s/m_s/m_s];
N = N + [ -2*q2*b_s/m_s/m_s; -2*q2*k_s/m_s/m_s; 2*q2*b_s/m_s/m_s; 2*q2*k_s/m_s/m_s ];
r1 = r1 + q2/m_s/m_s;
```

```

%harmadik tag
Q(2,2) = Q(2, 2) + q3;
Q(4,2) = Q(4, 2) - q3;
Q(2,4) = Q(2, 4) - q3;
Q(4,4) = Q(4, 4) + q3;

%negyedik tag
r1 = r1 + q4;

%egyenlet megoldasa

%a 4*4-es matrix, amit meg szeretnek kapni:
P = sym('P%d%d', [4 4]);
digits(8);

%az egyenlet, ami sok levezetes utan jott ki:
eqn = P*A - 1/(2*r1)*P*b*(N.') - 1/(2*r2)*P*d*(M.') - 1/(2*r1)*P*b*(b.)*P - 1/(2*r2)*P*d*(d.)*P + 2*Q -
1/(2*r1)*N*(N.') - 1/(2*r2)*M*(M.') +(A.)*P - 1/(2*r1)*N*(b.)*P - 1/(2*r2)*M*(d.)*P;

nsln = vpasolve(eqn, P)

Pki = [[nsln.P11(1), nsln.P12(1), nsln.P13(1), nsln.P14(1)];...
        [nsln.P21(1), nsln.P22(1), nsln.P23(1), nsln.P24(1)];...
        [nsln.P31(1), nsln.P32(1), nsln.P33(1), nsln.P34(1)];...
        [nsln.P41(1), nsln.P42(1), nsln.P43(1), nsln.P44(1)]]

sajatertekek = eig(Pki)

k = 1/(2*r1)*((N.') + (b.)*Pki)

end

```

VIII. Melléklet Mellékletek tartalom és ábrajegyzéke

Tartalom

I. melléklet A futómű-geometria alapjainak bemutatása városi kisautók esetén	2
I.1 A közúti járművek futóművének általános szerkezeti felépítése.....	2
I.2 Futóművek aktivitása, önszabályozása.....	3
I.3 A futóművek geometriai jellemzői, paraméterei	3
I.3.1 Alap paraméterek:	5
I.3.2 Leszármaztatott paraméterek.....	8
II. melléklet Dinamikai és irányítástechnikai modellfelírás	13
II.1 Dinamikai szemléletű modellfelírás	13
II.2 Irányítástechnikai szemléletű modellfelírás	15
III. melléklet LQR szabályozó tervezésének részletes levezetése	17
III.1.1 Állapottér-modell felírása.....	17
III.1.2 Kvadratikus funkcionál együtthatóinak meghatározása.....	18
III.1.3 Optimalizálási feladat megoldása variációs számítással.....	19
III.1.4 Mátrix Riccati-differenciálegyenlet felírása.....	21
III.1.5 CARE felírása és megoldása	22
IV. melléklet Futóműgeometriai paraméterek meghatározása	23
V. melléklet Dolgozat ábrajegyzéke	28
VI. Melléklet Negyedjármű-modell dinamikai számításaihoz használt MATLAB kód.....	30
VII. Melléklet Szabályozó erősítési vektorának számításához használt MATLAB kód.....	32
VIII. Melléklet Mellékletek tartalom és ábrajegyzéke.....	34
IX. Melléklet – Modellek megalkotása során használt jelölések jegyzéke	37

A címlapon található logó forrása: infohub.sk

Ábrák

1. ábra: A kormányzott kerék beépítése lengőkarokkal, hordrugóval és a csillapítóval Forrás: [28]	2
2. ábra: A futómű beépítési ábrája a hordrugókkal és lengéscsillapítókkal Forrás: [28]	3
3. ábra Kerékbekötési jellemzők magyarázata. (csapterpesztés (δ), csaphátradőlés (ϵ), kormánylegördülési sugár (R_0), (elkormányzási sugár) utánfutás (n_a)) Forrás: [28]	4
4. ábra A kerékdőlés és a kerékösszetartás beállításához mindkét ferde lengőkaron excentrikus lappal rendelkező hatlapfejű csavarokat lehet tervezni, amelyek az oldalsó nyaknál érnek a berendezéshez (Ford gyári ábrája) Forrás: [28]	5
5. ábra A kerékdőlési szög Forrás: [28]	5
6. ábra Pozitív kerékdőléssel megvalósított futómű Forrás: [28]	6
7. ábra Negatív kerékdőléssel megvalósított futómű Forrás: [28]	6
8. ábra A kerékösszetartási szög értelmezése Forrás: [28]	6
9. ábra McPherson-típusú első futómű (Audi 80) elkormányozási tengelye Forrás: [28]	7
10. ábra Felül: a futómű csaphátradőlési viszonyai. Alul balra: az oldalszél hatása egyenesben. Alul jobbra: a visszatérítő centrifugális erő ívben futáskor Forrás: [28]	8
11. ábra A gépjármű billenési (támolygási) centrumának alakulása Forrás: [28]	9
12. ábra A jármű billenési momentán tengelye Forrás: [28]	9
13. ábra A gépjármű bólintási centruma Forrás: [28]	10
14. ábra A gépjármű kerékdőlés alakulása be- és kirugózáskor Forrás: [28]	11
15. ábra A gépjármű-kerékösszetartás alakulása be- és kirugózáskor Forrás: [28]	11
16. ábra Negyedjármű modell dinamikai illetve irányítástechnikai megjelenítése	15
17. ábra Az állapottér-modell	18
18. ábra: A Mitsubishi i-MiEV első futóművének bekötési pontjai (saját készítésű kép)	23
19. ábra: A Mitsubishi i-MiEV első futóművének bekötési pontjai (saját készítésű kép)	23
20. ábra: Az első futómű bekötési pontjai előlnézetben (Solid Edge-el szerkesztett kép)	24
21. ábra: Az első futómű bekötési pontjai felülnézetben (Solid Edge-el szerkesztett kép)	24
22. ábra: Az első futómű csaphátradőlése ($\epsilon = 5^\circ$) és utánfutása ($n_a = 28,4$) (Solid-Edge-el szerkesztett kép, oldalnézet)	24
23. ábra: Az első futómű kormánylegördülési sugara ($R_0 = 118,6$ mm) és momentán centruma ($h_{r0} = 74,2$ mm a talpponttól) (Solid Edge-el szerkesztett kép, előlnézet)	25
24. ábra: Az i-MiEV hátsó futóműve	25
25. ábra: A Panhard rudas felfüggesztés	26
26. ábra: A hátsó futómű előlnézeti szerkesztett képe (Solid Edge-el szerkesztett kép)	26

27. ábra: A hátsó futómű bekötési pontjai oldalnézetben (Solid Edge-el szerkesztett kép)	26
28. ábra: A hátsó futómű momentán centruma (265 mm a talpponttól) (Solid Edge-el szerkesztett kép, előlnézet).....	27
29. ábra: A gépjármű momentán tengelye	27

IX. Melléklet – Modellek megalkotása során használt jelölések jegyzéke

- α_i – i. sajátkörfrekvencia
- $\underline{\underline{A}}$ – állapottermodell, a rendszer fizikai jellemzőit tartalmazó mátrix
- b_s – rendszertechnikai jelölésmódban: lengéscsillapító csillapítási tényezője
- $\underline{b}$ – állapottermodell, az aktuátor beavatkozásának hatását jellemző vektor
- $\underline{c}$ – állapottermodell, a kimenőjelet meghatározó vektor
- D – disszipációs energia
- $\underline{d}$ – állapottermodell, a zavarás (útgerjesztés) hatását jellemző vektor
- f_i – i. sajátfrekvencia
- f_a – aktuátorerő
- J – LQR tervezés, a minimalizálandó funkcionál
- k_s – dinamikai jelölésmódban: lengéscsillapító csillapítási tényezője; rendszertechnikai jelölésmódban: rugózás merevsége
- $\underline{\underline{K}}$ – csillapítási mátrix
- $\underline{\lambda}$ – LQR tervezés, társállapotváltozó vagy Lagrange-szorzó
- m_s – rugózott tömeg
- m_{us} – rugózatlan tömeg
- $\underline{M}$ – LQR tervezés, súlyvektor
- $\underline{\underline{M}}$ – tömegmátrix
- $\underline{N}$ – LQR tervezés, súlyvektor
- $\underline{\underline{P}}$ – LQR tervezés, az állapotváltozók és a társállapotváltozók közötti összefüggést megadó mátrix
- $\underline{q}$ – általános koordináták vektora
- $\underline{Q^*}$ – külső általános erők vektora
- $\underline{\underline{Q}}$ – LQR tervezés, súlymátrix
- $r(t)$ – útgerjesztés
- r_i – LQR tervezés, súlyok
- $\underline{R}$ – relatív nagyítási tényezők vektora
- s – Laplace-opeátor

- s_s – dinamikai jelölésmódban: rugózás merevsége
- s_t – dinamikai jelölésmódban: gumiabroncsot jellemző rugózási merevség
- $\underline{\underline{S}}$ – merevségi mátrix
- $\underline{\vartheta}$ – fáziskésések vektora
- T – kinetikus energia
- u – állapottérmodell, aktuátorerő nagysága
- U – potenciális energia
- v_s – rugózott tömeg függőleges sebessége
- v_{us} – rugózatlan tömeg függőleges sebessége
- w – állapottérmodell, útgerjesztés nagysága
- $\underline{x}$ – állapottérmodell, állapotváltozók vektora
- y – állapottérmodell, kimenet
- z_s – rugózott tömeg függőleges elmozdulása
- z_{us} – rugózatlan tömeg függőleges elmozdulása