

**Óbudai Egyetem
Kandó Kálmán Villamosmérnöki Kar
Automatika Intézet**



TUDOMÁNYOS DIÁKKÖRI DOLGOZAT

SZINUSZOS ÉS NEM SZINUSZOS PERIODIKUS TELJESÍTMÉNY ÁBRÁZOLÁSA ÉS KISZÁMÍTÁSA

Szerző: **Cserny Zsolt**
mérnök informatikus BSc. szak, III. évf.

Konzulens: **Dr. Novothny Ferenc (PhD)**
egyetemi docens

Budapest, 2014.

Tartalomjegyzék

A statikus fázorok	3
AC szinuszos mennyiségek idő alapú ábrázolása és kiszámítása	5
Pillanatnyi teljesítmény.....	5
Teljesítménykomponensek energiaátvitele	7
Valós vagy aktív teljesítmény (P)	9
Meddő, vagy reaktív teljesítmény (Q).....	9
Fazordefiniálás szinuszos jelekre	10
A teljesítmény fázorral történő értelmezése.....	11
Nem-szinuszos periodikus jelek idő alapú ábrázolása és kiszámítása.....	12
A fázorok alkalmazása nem-szinuszos periodikus jelekre	16
A fázorvektorok valós értékű tartományban való ábrázolása	16
Multiharmonikus jelek effektív értékei.....	18
Impedanciamátrix.....	19
A teljesítmény multiharmonikus fázorral történő értelmezése	21
Reaktív teljesítmény geometriai ábrázolása.....	21
Reaktív teljesítménymátrix.....	22
Megmaradási szabály.....	23
Összefoglalás	24
Forrás	24

A statikus fázorok

A fázor olyan vektor, ami ω sebességgel forog egy úgynevezett komplex síkon.

Ugyanazon a síkon egyszerre két eltérő típusú elektromos mennyiség fázorja is ábrázolható. Ily módon beszélhetünk feszültség és áramfázorokról. Az időben egyenletesen változó AC jelalaknak tehát egy forgó fázor felel meg, ami a komplex sík valós tengelyére vetítve és idővel arányosan, horizontálisan eltolva egy szinuszos hullámot fog eredményezni. (1.ábra)

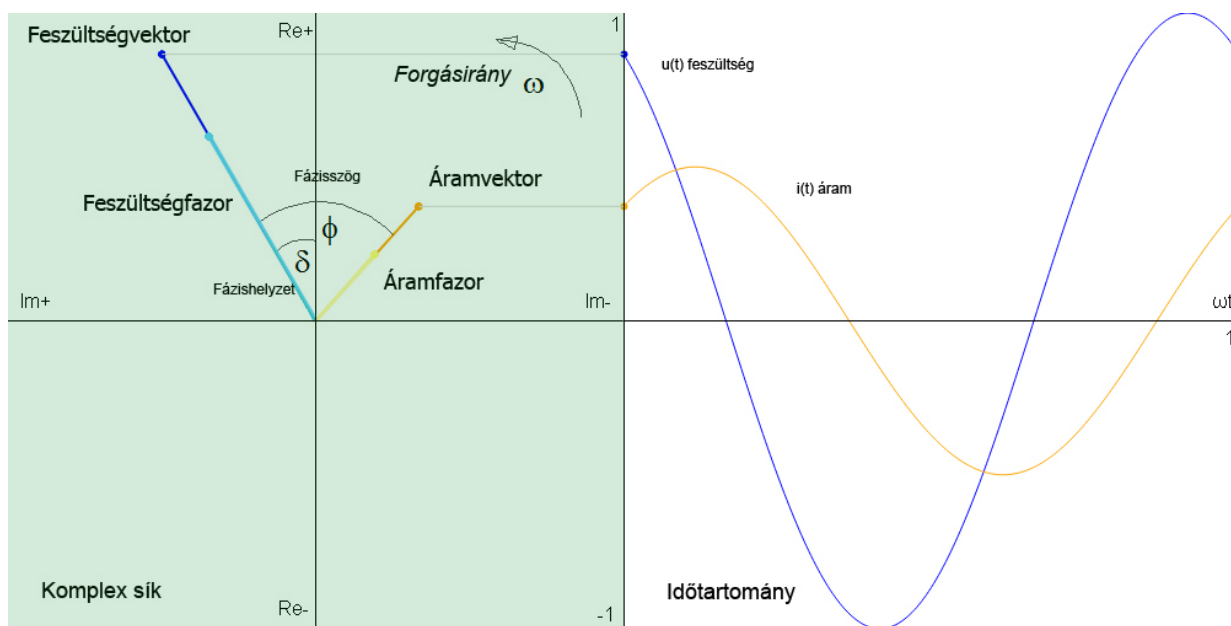
A fázorokat jellemezi:

A nagyság (abszolút érték)

A forgási sebesség, körfrekvencia (ω)

A megfigyelés nulla időpillanatában a feszültségfázor fázishelyzete (δ)

A feszültség és áramfázor egymáshoz képesti fázishelyzete. (ϕ)



1. ábra

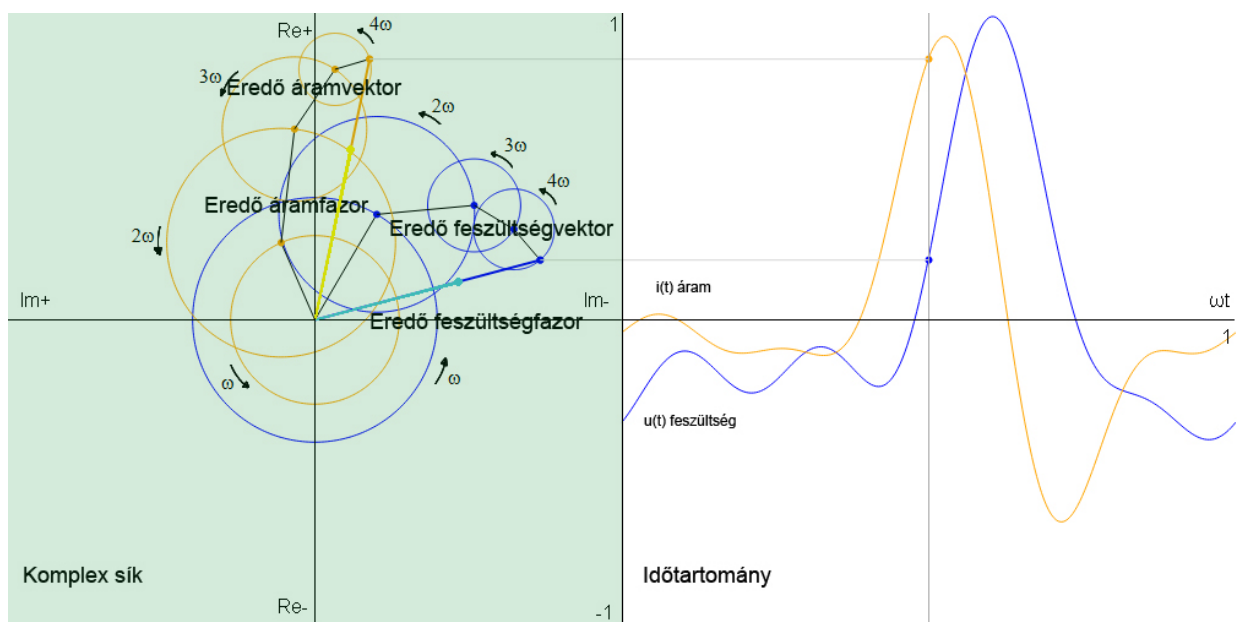
Komplex síkon forgó feszültség és áramvektorok, és vetületei a valós tengelyre $t=0$ időpillanatban

A fázor nagysága

A vektor nagysága a vektor abszolút értékéből Pitagorasz-tételével számítható ki, ami a vektor x és y irányú komponenseinek átlója. A fázor nagysága a vektor $\sqrt{2}$ -vel képzett hányadosával egyenlő.

A vektorok forgási sebessége

Egy adott mennyiséghez tartozó fázor 1 periódus alatt ω körfrekvenciával 1-t fordul. Egy több felharmonikusból álló periodikus jel esetében az n. felharmonikus 1 periódus alatt n-t fordul tehát szögsebesség $n\omega$. Ha ezeket a különböző sebességgel forgó vektorokat összeadjuk az eredő csúcsvektor által leírt görbe valós tengelyre mért vetülete a periodikus nem szinuszos görbét adja. A fázorokat a korábban elmondottak szerint a csúcsvektorok $\sqrt{2}$ -vel képzett hányadosával kapjuk meg. Az elmondottakat illusztrálja 2. ábrán látható négy felharmonikusból álló összetett vektorpár.



2. ábra

Négy felharmonikust tartalmazó áram és feszültségvektor, és vetületei a valós tengelyre $t=\pi$ időpillanatban

A feszültségfázorok fázishelyezete

A feszültségfázorok fázishelyzete a 0 időpillanatban a fázorvektornak a valós tengellyel bezárt szögét jelenti.

A feszültség és áramfázor fázisszöge.

Energiát tároló elemeket tartalmazó hálózatokra időben állandóan változó AC jelet adva, a fizikai valóság azt mutatja, hogy a két fő elektromos tényező, a feszültség és áramerősség, nincsenek egymással fázisban. A ϕ fázisszög nagysága a feszültség és áram fázorvektorok egymással bezárt szöge komplex síkon. Az időtartományban ábrázolt szinuszos jel esetében a feszültség és áram egymáshoz képest időben el van tolva, több felharmonikust tartalmazó összetett jel esetében onnan lehet látni hogy a feszültség és áram egymáshoz képesti nincs fázisban, hogy a feszültség és áramgörbe egymással nem arányos.

Statikus fázorokról akkor beszélünk, ha a fázort jellemző, előbb ismertetett négy tényező időben állandó vagy relatíve lassan változik egy másodpercenként 50-t forgó rendszerhez képest.

AC szinuszos mennyiségek idő alapú ábrázolása és kiszámításának módjai

Kiindulásul az AC feszültség és áram általános leírása:

$$u(t) = \sqrt{2} U(t) [\cos(\omega t + \delta(t))]$$

$$i(t) = \sqrt{2} I(t) [\cos(\omega t + \delta(t) - \phi(t))]$$

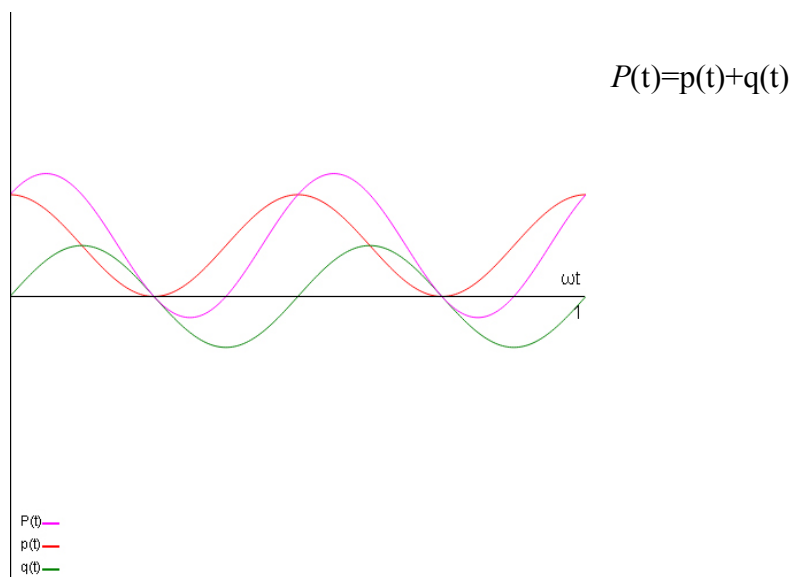
ahol U és I a feszültség és áram effektív értéke, $\sqrt{2} U$ és $\sqrt{2} I$ pedig feszültség és áram csúcserőértékei. Statikus fázorok esetén $U(t)=U$, $I(t)=I$, $\delta(t)=\delta$, $\phi(t)=\phi$. Statikus esetben az egyedüli időben változó tényező az ωt . A feszültség és áram amplitúdó időbeli lefolyása egy 50Hz szinuszoid jelet mutat.

Pillanatnyi teljesítmény

Egy A-A' keresztmetszeten fellépő pillanatnyi teljesítmény a pillanatnyi áram és feszültség szorzata:

$$P(t) = u(t)i(t)$$

A pillanatnyi teljesítmény ortogonális felbontással két részre bontható, valós és reaktív pillanatnyi teljesítménykomponensekre:



3. ábra

A pillanatnyi teljesítmény felbontása valós és reaktív pillanatnyi teljesítmény-összetevőkre ($\phi = 45^\circ$)

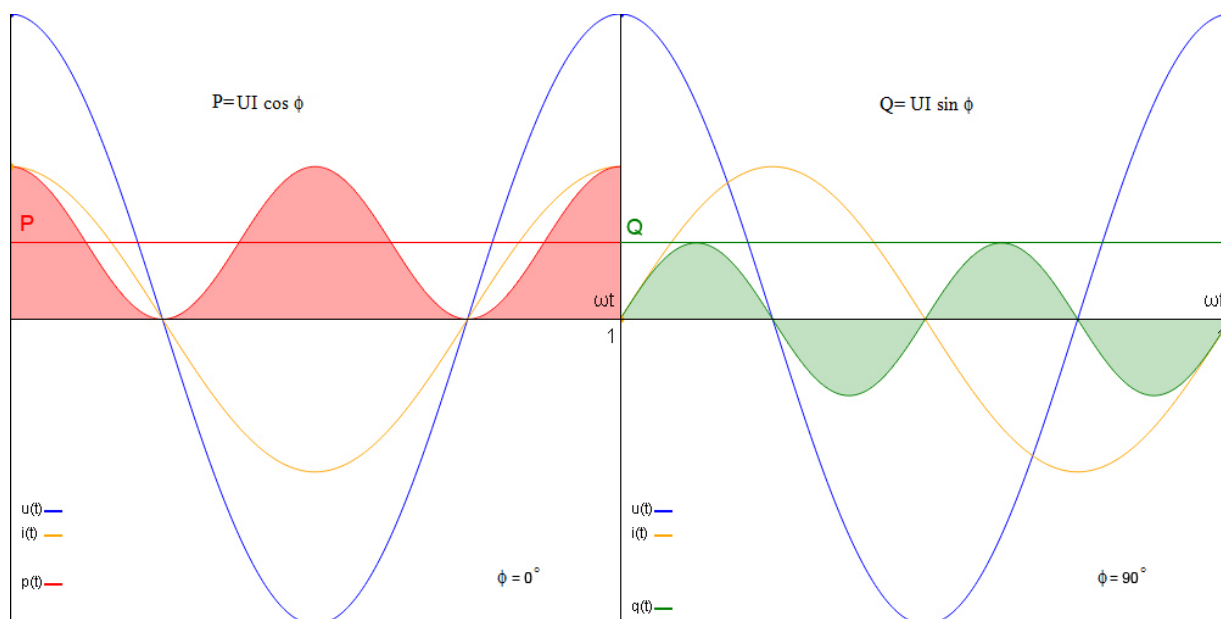
Ahol

$$p(t) = UI \cos \phi [1 + \cos 2(\omega t + \delta)] = \alpha(t) UI \cos \phi$$

és

$$q(t) = UI \sin \phi [\sin 2(\omega t + \delta)] = \beta(t) UI \sin \phi$$

Ahol α és β szinusz függvény frekvenciája az alaphfrekvencia kétszerese. (4. ábra)



4a. ábra

4.b ábra

Valós és reaktív szinuszos teljesítmény különböző fázishelyzetek esetében

Ha integrálunk egy periódusnyi pillanatnyi teljesítményt, akkor az átlagteljesítményt kapjuk

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T P_{(t)} dt$$

azaz

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u_{(t)} i_{(t)} dt$$

$p(t)$ pillanatnyi valós teljesítmény periódus-integrálja P

$q(t)$ pillanatnyi reaktív teljesítmény periódus-integrálja nulla.

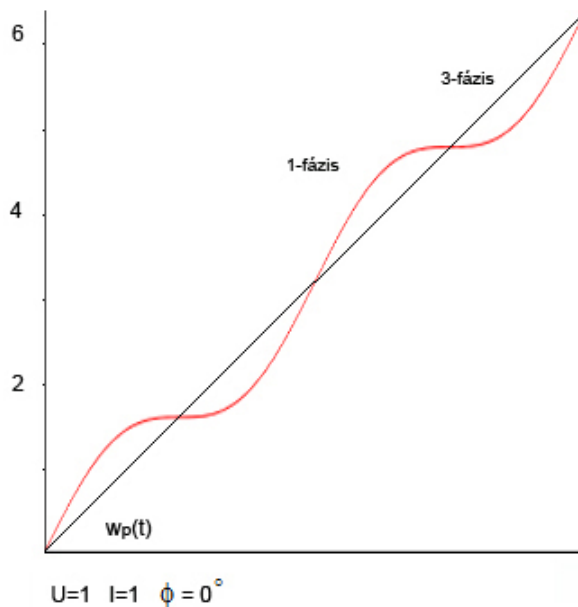
Teljesítménykomponensek energiaátvitele

Az idő függvényében történő energiaátvitel valós és reaktív teljesítménykomponensek esetében:

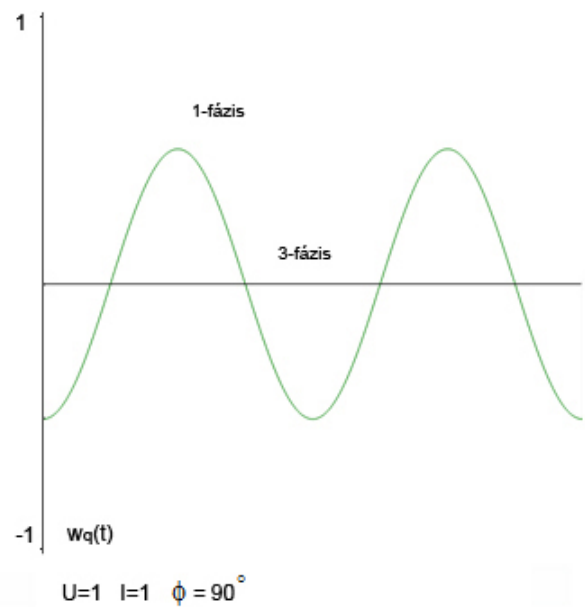
$$w_p(t) = \int_0^t p(t) dt = UI \cos \phi \left(t + \frac{1}{2\omega} \sin 2(\omega t + \delta) \right) - w_p(0)$$

$$w_q(t) = \int_0^t q(t) dt = -\frac{1}{2\omega} UI \sin \phi \cos 2(\omega t + \delta) - w_q(0)$$

A két függvény időbeli lefolyása a 5. ábrán látható



5a.ábra



5b. ábra

Időben történő valós energiaáramlás, és a reaktív energia oszcilláció egy fázisú és háromfázisú esetben.

A valós $w_p(t)$ és reaktív $w_q(t)$ energiakomponensek [akárcsak $p(t)$ és $q(t)$] meglehetősen eltérő természetűek.

A $w_p(t)$ egy egyirányú energiaáramlást jelképez, ami egy A-A' keresztmetszeten balról jobbra halad $p(t)$ mennyiséggel. Ezt aztán felhasználják, (pl. világítás mechanikai energia) ez vissza nem alakítható energia. A 4a. ábrán látható hogy $p(t)$ mindig pozitív, jelezve az egyirányú energiaáramlást, a 5a. ábrán látható az időben folyamatosan gyülekező energiamennyiség.

A w_q viszont egy olyan energia, (4b ábra besatírozott terület) ami a 5b. ábrán látató nagyságú energiamennyiségeket képez az A-A' keresztmetszeten elfoglalt a megfigyelési pontunkhoz viszonyítva. Ennek az energiának az átlaghozama periódusonként nulla. Az A-

A' keresztmetszettől balra képződő kapacitív jellegű tárolt energia negatív előjellel, átáramlik az A-A' keresztmetszettől jobbra ahol mágneses pozitív előjelű tárolt energiává alakul, majd visszafolyik és ezt a hintázást félciklusonként ismétli. Ez tehát egy visszaalakuló energiafajta.

Valós vagy aktív teljesítmény (P)

Mint azt láthattuk a 4a ábrán, $p(t)$ értéke mindig pozitív ha $\phi \leq \pi/2$ és így fluktuál 0 és $2UI \cos(\phi)$ csúcérték között 100 Hz-l, minden 50 Hz-es ciklusban

$$P = UI \cos \phi$$

időátlaggal ahol $\cos(\phi)$ a teljesítménytényező. A $p(t)$ által okozott energiagyűjtés monoton, lépésenként ismétlődő ahogy az látható a 5a ábrán.)

Megállapítható hogy a P egy valós fizikai állandó átlagú teljesítmény, amely valós, tárolt energiát továbbít A-A' jobboldalára. Ezért P-t helyesen nevezhető valós teljesítménynek.

Mivel a legtöbb energetikai eszköz nem fog reagálni észrevehetően 50 vagy 100Hz tempóban, ezért állandósult állapotban az egyedüli fizikailag értelmezhető mennyiség, a konstans átlagteljesítmény.

A teljesítményáramlás irányát +P-vel definiáljuk, egy jellemző önkényesen megválasztott, A-A'-hoz rendelt irányhoz képest.

Meddő, vagy reaktív teljesítmény (Q)

A $q(t)$ reaktív teljesítmény egy szinusz hullám, ami 100Hz-l leng, de nulla átlagú, ezért nem közvetít energiát (n-szer 50 Hz-s időegységeket véve alapul) A-A' keresztmetszeten át. Ennek ellenére ezt a komponenst nem lehet ignorálni, mivel ez meghatároz egy pillanatnyi időben nem nulla mennyiséget, aminek csúcértéke $UI \sin(\phi)$. Így $q(t)$ -t az energiatovábbítás során figyelembe kell venni reaktív teljesítményként,

$$Q = UI \sin(\phi)$$

amplitúdóval. A P-hez viszonyított Q-t meghatározza a teljesítménytényező ϕ szög a [2.16] és [2.17] alapján.

Előjele, amit a $\sin(\phi)$ előjele határoz meg, azt jelenti, hogy A-A' melyik oldala nettó induktív ($Q < 0$) és melyik nettó kapacitív ($Q > 0$) az A-A'-ban elfoglalt pozícióból nézve. Megjegyzendő, hogy a bármilyen keresztmetszet két oldala eredendően mindig egyenlő nagyságban fog nettó induktívnak és nettó kapacitívnek látszani. Így a Q-hoz kapcsolódó energia oszcillál a kapacitív és induktív tárolt energia között. A legfontosabb különbség tehát, hogy P folyik, a Q oszcillál.

Lehet, hogy helyes reaktív teljesítményfolyamról beszélni, amíg van egy megállapodás a teljesítménytényező ϕ szög jelentésének szempontjából, figyelembe véve a referenciairányt A-A'-n keresztül, és Q alapvető oszcillációs természetét nem felejtjük el. Így P és Q két eltérő jelenség, ami definiálja a $p(t)$ és $q(t)$ pillanatnyi áramlást, amik viszont a $P(t)$ pillanatnyi értékeit teszik ki, és viszont. Ez az állapot határozza meg az $u(t)$ és $i(t)$ pillanatnyi értékeit.

Fazor-definiálás szinuszos jelekre

Legyen z egy általános mennyiség, ami kifejezi $u(t)$ -t és $i(t)$ -t.

Ekkor z időtartomány szerinti kifejezve:

$$z(t) = z \cos(\omega t + \zeta)$$

z fazordefiniációja:

$$P[z(t)] = ze^{j\zeta} = \bar{z}$$

A fazor inverz transzformáltja

$$P^{-1} \bar{z} = \text{Re}(\bar{z} e^{j\omega t}) = \text{Re}(ze^{j\zeta} e^{j\omega t}) = z(t)$$

A definíció szerint $\bar{z}$ tehát egy fix vektor 0-hoz viszonyított ζ fázisszöggel, ami $e^{j\omega t}$ sebességgel forog a komplex síkon.

A pillanatnyi feszültséget és áramot kifejezhetjük ebből a sémából:

$$u(t) = \text{Re}(\sqrt{2} \bar{U} e^{j\omega t}) = \text{Re}(\sqrt{2} U e^{j\delta} e^{j\omega t}) = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \delta)$$

$$z = \sqrt{2} U \quad \zeta = \delta$$

$$i(t) = \operatorname{Re}(\sqrt{2} \bar{I} e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(\sqrt{2} I e^{j\delta - \phi} e^{j\omega t}) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \delta - \phi)$$

$$z = \sqrt{2} I \quad \zeta = \delta - \phi$$

Ha $t=0$ akkor $\omega t=0$ azaz $e^{j\omega t}=1$ akkor a vektor helyzetét kapjuk 0 időpillanatban

$$P[u(t)] = U e^{j\delta} = \overline{U_0}$$

$$P^{-1} \overline{U_0} = \operatorname{Re}(\overline{U_0}) = \operatorname{Re}(U e^{j\delta})$$

$$u(t) = \operatorname{Re}(\sqrt{2} U e^{j\delta}) = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \delta)$$

$$P[i(t)] = I e^{j\delta - \phi} = \overline{I_0}$$

$$P^{-1} \overline{I_0} = \operatorname{Re}(\overline{I_0}) = \operatorname{Re}(I e^{j\delta - \phi})$$

$$i(t) = \operatorname{Re}(\sqrt{2} I e^{j\delta - \phi}) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \delta - \phi)$$

Az U és I effektív értéket, a $\sqrt{2} U$ és $\sqrt{2} I$ csúcsértéket jelöl.

C kapacitásba befolyó áram fázorral kifejezve:

$$P[i_c(t)] = P\left(C \frac{du(t)}{dt}\right) = \overline{I_c} = \frac{\overline{U_c}}{X_c}$$

$$\text{ahol } \overline{X_c} = \frac{1}{j\omega C}$$

L induktivitáson mért feszültség fázorral kifejezve

$$P[u_L(t)] = P\left(L \frac{di(t)}{dt}\right) = \overline{U_L} = \overline{I_L} \overline{X_L}$$

$$\text{ahol } \overline{X_L} = j\omega L$$

A teljesítmény fázorral történő értelmezése

Defináljuk a komplex teljesítményt az alábbi módon:

$$\overline{S} = \overline{U} \overline{I}^* = P + jQ$$

$$P = \operatorname{Re}[\overline{U} \overline{I}^*] \quad Q = \operatorname{Im}[\overline{U} \overline{I}^*]$$

ahol a $*$ jelzi a konjugált komplex változót.

A komplex teljesítmény koncepciója egy szerencsés véletlen eredménye.

P-nek és Q-nak fizikai jelentése van, miszerint P teljesítmény folyik keresztül egy A-A' keresztmetszeten, Q amplitúdójú az A-A' keresztmetszet két oldala közötti energiacsere mértéke. Egyik oldala az A-A' keresztmetszetnek eredendően induktív, a másik kapacitív.

Berakva egy kitalált S vektorba a komplex síkon, P és Q kényelmesen kiszámíthatóak.

A komplex teljesítményvektorhoz hiba volna valamiféle fizikai mértékegységet társítani.

Matematikai transzformációnál nincs minden kifejezésnek automatikusan fizikai jelentése.

A látszólagos teljesítmény hibrid módjára tartalmazza a fizikai jelentéssel bíró de

egymástól független P és Q transzformáltakat, amit a komplex síkon való szorzás

szerencsés módon támogat. Továbbá, az $\bar{U}$, $\bar{I}^*$ kiválasztása teljesen önkényes, $\bar{U}^*$ és $\bar{I}$ ugyanúgy elfogadott. Ez azon múlik hogy a reaktív teljesítmény kapacitív vagy induktív tagját vesszük e negatív előjellel. Mindkét választás egyformán elfogadható, mivel nincs fizikai tény, amely megszabná a választást.

A komplex $\bar{S}$ teljesítményvektor nagysága a látszólagos teljesítmény:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

A látszólagos teljesítményhez rendelt mértékegység MVA. Mivel a komplex $\bar{S}$ vektornak nincs fizikai jelentése ezért az $\bar{S}$ nagyságát jelentő látszólagos teljesítmény esetében is ez a helyzet. Mégis gyakran használják a gyakorlatban szemléletes mértékként a feszültség és áram kombinációjaként, megadott névleges feszültségszintű készülék esetében.

Nem-szinuszos periodikus jelek idő alapú ábrázolása és kiszámításának módjai

Az n darab felharmonikust tartalmazó pillanatnyi feszültség és áram definíciója:

$$u(t) = \sum_{k=0}^{k=n} \sqrt{2} U_k \cos(k\omega t + \delta_k) = \sum_{k=0}^{k=n} u_k(t)$$
$$i(t) = \sum_{k=0}^{k=n} \sqrt{2} I_k \cos(k\omega t + \delta_k - \phi_k) = \sum_{k=0}^{k=n} i_k(t)$$

Ez nem más, mint a feszültség és áram időfüggvény kiterjesztése több frekvenciás jelre.

Ahogy előzőleg is, a pillanatnyi teljesítmény átáramlik egy A-A' keresztmetszeten:

$$P(t) = u(t)i(t) = p(t) + q(t)$$

A pillanatnyi teljesítményt több felharmonikus feszültség és áramszorzat összege alkotja, amik egymásra kölcsönhatással vannak. Szét lehet választani az egymással azonos frekvenciájú feszültség és áramkomponensek kölcsönhatásainak összegét az egymástól eltérő frekvenciájú feszültség és áramkomponensek kölcsönhatásainak összegétől, és az egyes komponenseken belül azokat tovább lehet bontani valós és reaktív komponensekre:

$$P(t) = P_{kk}(t) + P_{km}^+(t) + P_{km}^-(t)$$

$$\begin{aligned} P_{kk}(t) &= p_{kk}(t) + q_{kk}(t) = \\ &= \sum_k U_k I_k \cos \varphi_k [1 + \cos 2(k\omega t + \delta_k)] + U_k I_k \sin \varphi_k \sin 2(k\omega t + \delta_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{km}^+(t) &= p_{km}^+(t) + q_{km}^+(t) = \\ &= \sum_k \sum_{m, m \neq k} U_k I_m \cos \varphi_m \cos[(k\omega + m\omega)t + (\delta_k + \delta_m)] + \\ &+ U_k I_m \sin \varphi_m \sin[(k\omega + m\omega)t + (\delta_k + \delta_m)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{km}^-(t) &= p_{km}^-(t) + q_{km}^-(t) = \\ &= \sum_k \sum_{m, m \neq k} U_k I_m \cos \varphi_m \cos[(k\omega - m\omega)t + (\delta_k - \delta_m)] + \\ &+ U_k I_m \sin \varphi_m \sin[(k\omega - m\omega)t + (\delta_k - \delta_m)] \end{aligned}$$

Észrevehető, hogy a kifejezés bonyolultsága ellenére $P(t)$ pillanatnyi teljesítmény P

átlagértéke csak egy $P = \sum_k U_k I_k \cos \varphi_k$ tényezőtől függ. Az összes többi tényező átlaga

nullát eredményez, kifejezik a pillanatnyi teljesítmény azon komponenseit, amelyek nem vesznek részt a teljesítményáramlásban az 1/50 időegység egész számú többszöröseire vett egységekre vonatkozólag. Ezt a három egyenletet a felharmonikusok egymással való kölcsönhatásaként lehet értelmezni.

A $P_{kk}(t)$ a szummajel alatt összegezve jelenti az egyes felharmonikusok hozzájárulását a pillanatnyi teljesítményhez, mintha függetlenül lennének a többi felharmonikustól. A $P_{km}^+(t)$ és $P_{km}^-(t)$ a dupla szummajel alatt az egyes felharmonikusok egymás között kölcsönhatását jelenti. $P_{km}^+(t)$ és $P_{km}^-(t)$ szétbontható további komponensekre, $p_{km}^+(t)$ -re ami frekvenciánként az egyedi frekvenciák kölcsönhatásainak összege, és $p_{km}^-(t)$ -re amely frekvenciánként az egyes frekvenciák kölcsönhatásainak különbsége. Továbbá $P_{km}^+(t)$ és $P_{km}^-(t)$ tagokban észre lehet venni a $p_{km}^+(t)$ és $p_{km}^-(t)$ tagokat, amik $\cos(\phi)$ -vel szorozódnak valamint a $q_{km}^+(t)$ és $q_{km}^-(t)$ tagokat, amik $\sin(\phi)$ -vel szorozódnak.

A nem-szinuszos periodikus jelek P valós átlagteljesítménye a felharmonikusok összesített teljesítményáramlását jelenti. Létrehozásában csak az azonos frekvenciájú feszültség és áramkomponensek vesznek részt.

$$P = \sum_k U_k I_k \cos \varphi_k = \sum_k P_k$$

Ha egy adott áramkör nemlineáris jellege miatt k felharmonikusnál $\varphi_k > \pi/2$ akkor $P_k < 0$ ami azt jelenti, hogy annál a felharmonikusnál a fő iránnyal ellentétes lesz a teljesítményáramlás.

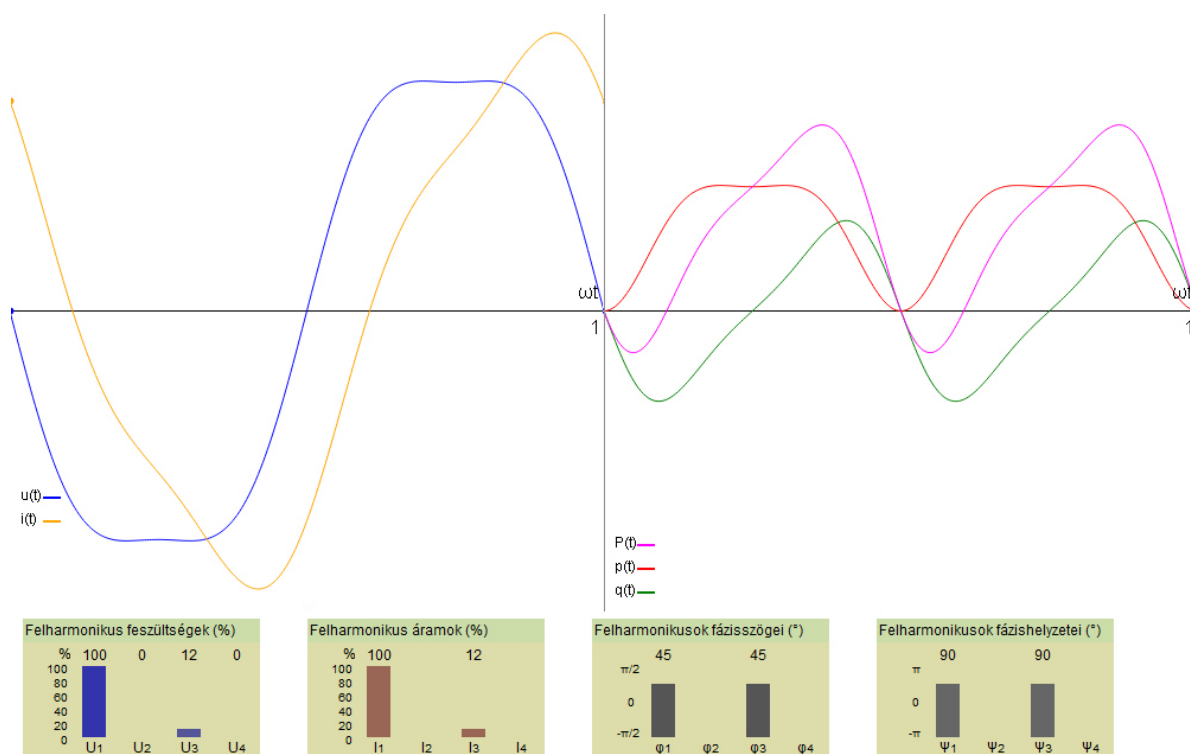
A nem-szinuszos periodikus jel Q reaktív teljesítménye a szinuszoid, zéró egyirányú energiafolyamú energiaszcillációk amplitúdóinak mátrixaként definiálható:

$$[Q] = [Q_{kk}] + [Q_{km}^+] + [Q_{km}^-]$$

ahol $[Q_{kk}] + [Q_{km}^+] + [Q_{km}^-]$ mátrixok elemei a pillanatnyi teljesítmény definálásánál kiszámolt $q_{kk}(t)$, $q_{km}^+(t)$, $q_{km}^-(t)$ elemek.

Szinuszoid, egy felharmonikust tartalmazó jellel kapcsolatban már látható volt, hogy P és Q két külön jelenség amely a definíció szerint összeadódva képezi a pillanatnyi teljesítményt, azaz

$$P(t) = p(t) + q(t).$$



6. ábra

Nem-szinuszos periodikus pillanatnyi teljesítmény felbontása valós és reaktív pillanatnyi teljesítmény-összetevőkre

$p(t)$ hordozza az összes egyirányú teljesítményáramlást, és valójában a monotonikusan váltakozó függvény, ami pillanatnyi teljesítmény $P(t)$ -t egyik részét alkotja. $P(t)$ többi része a $q(t)$, egy 100Hz teljesítményoszilláció, aminek az átlaga nulla (egy 1/50 másodperc időtartam tetszőleges n számú többszörösére vonatkoztatva), és ezért nincs nettó energiaátvitel.

Bár P és Q ugyanazon függvény két komponense, de eltérő természetűek. P az átlagos teljesítményáramlás egy A-A' keresztmetszeten

Q egy sor szinuszoid oszcilláció amplitúdója ugyanezen keresztmetszeten. Ez látható a 6. ábrán, amely egy multiharmonikus jelet ábrázol komponenseire szétbontva.

Multiharmonikus jeleknél a korábbi definíció alapján a valós P teljesítmény egyszerűen az összes felharmonikus valós teljesítményfolyamának összege.

Ez a szerencsés eredmény a $P(t)$ lineáris és additív jellegének a következménye, ez indokolja az egyedi harmonikusok integráljának szuperpozícióját.

Nem ennyire szerencsés a helyzet a $q_{kk}(t)$, $q_{km}^+(t)$, q_{km}^- oszcillációk esetében. Az átlagos teljesítményfolyam az előzővel azonos feltételek mellett nulla, ami nem ad hasznos információt. Az oszcillációs amplitúdók definiálva vannak, de ezek csak egy mátrix bejegyzései. Egy lehetséges megoldás a mátrix valamilyen féle normalizálása, ebből kapnánk egy az az energiaoszcillációra jellemző értéket, de nem a teljes összegét. Ez a kérdés előjön fazorkoncepció több felharmonikust tartalmazó jelekre való kiterjesztésénél is.

A fazorok alkalmazása nem-szinuszos periodikus jelekre

Hasonlóan a korábbi egy frekvenciakomponenst tartalmazó jelhez, definiáljunk a több frekvenciás esetre vonatkozó általános z változó időfüggvényét ami egyszerre jelentheti u -t és i -t:

$$z(t) = \sum_{k=1}^n z_k \cos(\omega_k t + \zeta_k)$$

Ennek a fazor-definíciója:

$$\mathbb{P}(z(t)) = \sum_{k=1}^n z_k e^{j\zeta_k} = \bar{z}$$

ahol $\bar{z}$ a $z(t)$ fazor-transzformáltja

$\bar{z}$ -t visszaalakítva az időtartományra:

$$z(t) = \mathbb{P}^{-1} \bar{z} = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n z_k e^{j\zeta_k} e^{j\omega_k t} \right)$$

ahol feszültség esetén: $z = \sqrt{2} U$ $\zeta = \delta$

áram esetén: $z = \sqrt{2} I$ $\zeta = \delta - \phi$

Komplex fazorvektorok mátrixba rendezése

Az egyes felharmonikusokat fazorvektorokkal írjuk le, amely vektort jellemez a nagysága, fázishelyzete, és a forgási sebessége, ami az alaphfrekvencia felharmonikus sorszámának a

számszorosa. Egy periodikus jel több felharmonikus összege, ami a fázorok vektoros összegét jelenti. Egy periodikus jel fázorjait be lehet rakni egy vektorba (egy dimenziós mátrix), ahol a vektor egymást követő elemei n. felharmonikus fázordefinícióját jelentik. Feszültségre, áramra kifejezve:

$$\begin{aligned}\underline{\bar{U}} &= [\bar{U}_1 \ \bar{U}_2 \ \dots \ \bar{U}_n]^T \\ &= [U_1 e^{j\delta_1} \ U_2 e^{j\delta_2} \ \dots \ U_n e^{j\delta_n}]^T \\ &= [(U_{c1} + jU_{s1})(U_{c2} + jU_{s2}) \dots (U_{cn} + jU_{sn})]^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{\bar{I}} &= [\bar{I}_1 \ \bar{I}_2 \ \dots \ \bar{I}_n]^T \\ &= [I_1 e^{j\delta_1 - \phi_1} \ I_2 e^{j\delta_2 - \phi_2} \ \dots \ I_n e^{j\delta_n - \phi_n}]^T \\ &= [(I_{c1} + jI_{s1})(I_{c2} + jI_{s2}) \dots (I_{cn} + jI_{sn})]^T\end{aligned}$$

Az egyik polárkoordináta-jellegű, a másik derékszögű koordináta-jellegű ábrázolásmód. Ezzel együtt egy függvénymátrixot is definiálunk, amiben a komplex fázorokhoz tartozó forgási sebességeket definiáló elemeket tároljuk.

Ez az alábbi módon néz ki:

$$\underline{\bar{\Phi}}(t) = [\bar{\Phi}_1 \ \bar{\Phi}_2 \ \dots \ \bar{\Phi}_n]^T = [e^{j\omega t} \ e^{2j\omega t} \ \dots \ e^{nj\omega t}]^T$$

A nem-szinuszos periodikus jel időfüggvényén végzett fazorművelet tehát egy komplex vektor-mátrixot eredményezett:

$$\mathbf{P}(\underline{u}(t)) = \underline{\bar{U}} = [\bar{U}_1 \ \bar{U}_2 \ \dots \ \bar{U}_n]^T$$

$$\mathbf{P}(\underline{i}(t)) = \underline{\bar{I}} = [\bar{I}_1 \ \bar{I}_2 \ \dots \ \bar{I}_n]^T$$

A fazorművelet inverze pedig pedig a komplex vektorelemeket tartalmazó mátrixból periódikus időfüggvényt állít elő:

$$\mathbf{P}^{-1}(\underline{\bar{U}}) = \text{Re}\left(\sum_{k=1}^n \sqrt{2} U_k e^{j\delta_k} e^{j\omega_k t}\right) = \text{Re}\left(\sqrt{2} \underline{\bar{U}}^T \underline{\bar{\Phi}}^*(t)\right) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{k=n} U_k \cos(k\omega t + \delta_k) = u(t)$$

$$\mathbf{P}^{-1}(\underline{\bar{I}}) = \text{Re}\left(\sum_{k=1}^n \sqrt{2} I_k e^{j\delta_k - \phi_k} e^{j\omega_k t}\right) = \text{Re}\left(\sqrt{2} \underline{\bar{I}}^T \underline{\bar{\Phi}}^*(t)\right) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{k=n} I_k \cos(k\omega t + \delta_k - \phi_k) = i(t)$$

A fázorvektorok valós értékű tartományban való ábrázolása

A komplex fázorokat a valós értékű tartományban is ábrázolhatjuk:

$$\underline{U} = [U_{c1} \ U_{s1} \ U_{c2} \ U_{s2} \dots U_{cn} \ U_{sn}]^T$$

$$\underline{I} = [I_{c1} \ I_{s1} \ I_{c2} \ I_{s2} \dots I_{cn} \ I_{sn}]^T$$

Ekkor a valós értékű elemeket tartalmazó mátrixhoz tartozó függvénymátrixot az alábbi módon definiáljuk:

$$\underline{\Phi}(t) = [\cos \omega t \quad \sin \omega t \quad \cos 2\omega t \quad \sin 2\omega t \quad \dots \quad \cos n\omega t \quad \sin n\omega t]^T$$

Valós tartományban kifejezve az inverz fázorművelet:

$$P^{-1}(\underline{U}) = \text{Re}(\sqrt{2}\underline{U}^T \underline{\Phi}(t)) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{k=n} (U_{ck} \cos k\omega t + U_{sk} \sin k\omega t) = u(t)$$

$$P^{-1}(\underline{I}) = \text{Re}(\sqrt{2}\underline{I}^T \underline{\Phi}(t)) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{k=n} (I_{ck} \cos k\omega t + I_{sk} \sin k\omega t) = i(t)$$

Multiharmonikus jelek effektív értékei

Az időben változó jelet szeretnénk kifejezni egy jellemző számmal.

Az effektív érték empirikusan kifejezve az a váltakozó feszültség vagy áramérték, amit egy ellenállás sarkaira kapcsolva (feszültség) vagy azon átfolyatva (áram) akkora teljesítmény disszipálódik az ellenálláson, mintha az effektív értéknek megfelelő egyenfeszültséget vagy egyenáramot alkalmaztunk volna.

Az effektív értéket a kétutas módon egyenirányított AC (abszolút) érték által leírt görbe alatti terület adja meg, amit négyzetes középértéknek neveznek (root mean square, rms).

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

A multiharmonikus jel effektív értékéhez az egyes felharmonikusok csak önmagukban járulnak hozzá az effektív értékhez, nincs kölcsönhatás az eltérő harmonikusok között.

(Ez a $\underline{\Phi}(t)$ ortonormális jellegének a következménye)

$$U = \sqrt{\underline{U} \cdot \underline{U}^*} = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2}$$

$$I = \sqrt{\underline{I} \cdot \underline{I}^*} = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2}$$

$$S = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = \|\underline{U}\| \|\underline{I}\| = \sqrt{\underline{U}^T \underline{U}} \sqrt{\underline{I}^T \underline{I}}$$

$$P = \underline{U}^T \underline{I}$$

Ahol $\underline{U}$ $\underline{I}$ konstans vektorok, S egy nem negatív skalár, P egy előjeles skalár mennyiség.

Impedanciamátrix

Vegyük egy áramkör A - A' metszetét amitől jobbra lineáris RLC elemek találhatók.

A keresztmetszeten mért feszültség és áram az alábbi kapcsolatban van:

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}$$

$$\underline{I} = \underline{Z}^{-1} \underline{U}$$

ahol $\underline{Z}$ egy $n \times n$ méretű, komplex értékeket tartalmazó diagonál-mátrix, amelynek a diagonális elemei az A - A' keresztmetszet bemeneti impedanciái az egyes felharmonikusokra.

A valós értékű tartományban ábrázolt fázorok esetén az összefüggés felírása a következőképpen alakul:

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}$$

$$\underline{I} = \underline{Z}^{-1} \underline{U}$$

ahol $\underline{Z}$ egy $2n \times 2n$ kiterjedésű blokk-diagonális mátrix, 2×2 nem-nulla értékű blokkokkal.

Példa:

Adott egy két-frekvenciás hullámforma, ahol a feszültségforrás

$$u(t) = \sqrt{2} \cos \omega t + \sqrt{2} 0.2 \cos 3\omega t$$

csatlakoztatva van egy RL elemet tartalmazó hálózathoz.

A komplex vektoros megjelenítés alapján a feszültségforrás

$$\underline{\underline{U}} = [1 e^{j0} \ 0.2 e^{j0}]^T \quad \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{Z}}^{-1} \underline{\underline{U}}$$

A függvénymátrix

$$\underline{\underline{\Phi}}(t) = [e^{j\omega t} \ e^{3j\omega t}]^T$$

Az impedanciamátrix

$$\underline{\underline{Z}} = \begin{bmatrix} R + j\omega L & 0 \\ 0 & R + 3j\omega L \end{bmatrix}$$

Ugyanez valós értékű vektortérrel megjelenítve:

$$\underline{\underline{U}} = [1 \ 0 \ 0.2 \ 0]^T \quad \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{Z}}^{-1} \underline{\underline{U}}$$

A függvénymátrix ebben a formában:

$$\underline{\underline{\Phi}}(t) = [\cos \omega t \ \sin \omega t \ \cos 3\omega t \ \sin 3\omega t]^T$$

A blokk-diagonál impedanciamátrix ebben a formában:

$$\underline{\underline{Z}} = \begin{bmatrix} R & \omega L & 0 & 0 \\ -\omega L & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 3\omega L \\ 0 & 0 & -3\omega L & R \end{bmatrix}$$

Ezt úgy is ki lehet fejezni hogy

$$\underline{\underline{Z}} = \text{diag}(R) + LJ$$

ahol

$$J = \omega \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

A teljesítmény multiharmonikus fazzorral történő értelmezése

Több felharmonikust tartalmazó jel esetében az összes valós teljesítmény a feszültség és áramvektorok skalár szorzatának valós része:

$$P = \operatorname{Re}(\underline{\bar{U}}^T \underline{\bar{I}}^*) = \operatorname{Re}(\underline{\bar{S}})$$

Komplex vektorok helyett valós értékű vektorokkal kifejezve:

$$P = \underline{U}^T \underline{I}$$

A reaktív teljesítmény pedig Q mátrixszal fejezhető ki, ahol Q elemei az egyes frekvenciák kölcsönhatását jelképezik más frekvenciákkal és az egyes mátrixelemek nagysága az egyes feszültség és áramvektorok vektoros szorzatának képzetes része:

$$[\underline{\bar{Q}}] = \operatorname{Im}[\underline{\bar{U}} \times \underline{\bar{I}}^*]$$

Annak érdekében, hogy a reaktív teljesítményt egy számmal ki lehessen fejezni, a reaktív teljesítménymátrix normalizáltja használható erre a célra:

$$Q = \sqrt{[\underline{\bar{Q}}]^2}$$

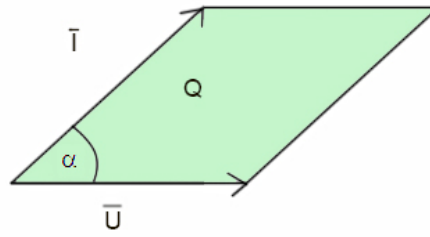
A reaktív teljesítmény geometriai ábrázolása

A teljesítménymátrix egyes elemeit az egyes feszültség és áramkombinációk vektoriális szorzatai alkotják:

A vektoros szorzás összefüggése szerint:

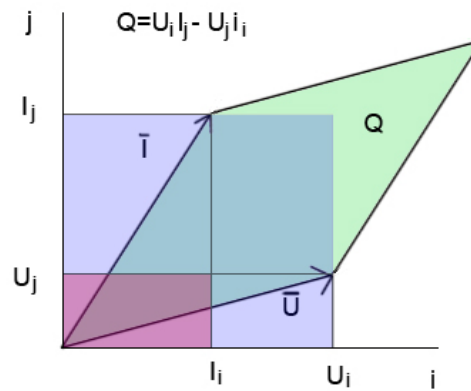
$$a \times b = ab \sin(\alpha) = Q$$

A vektorok nagysága a két vektor szorzata és a közrezárt szög szinusza iránya pedig egy tetszőlegesen választott szabály szerint (pl. jobbkéz-szabály) határozható meg, a vektor iránya függ a tényezők sorrendjétől.



7. ábra

Q nagyságát az $\bar{U}$ és $\bar{I}$ és az általuk közrezárt szög szinusza határozza meg



8. ábra

Q nagyságának meghatározása a áram- és feszültségvektorok vetületeivel

Reaktív teljesítménymátrix

Q -t ilyen módon felírva minden mátrixelemre megkapjuk a reaktív teljesítmény mátrixot, ami egy két felharmonikus komponenst tartalmazó jel esetében az alábbi módon néz ki:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} U_{1c}I_{1c} - U_{1c}I_{1c} & U_{1c}I_{1s} - U_{1s}I_{1c} & U_{1c}I_{2c} - U_{2c}I_{1c} & U_{1c}I_{2s} - U_{2s}I_{1c} \\ U_{1s}I_{1c} - U_{1c}I_{1s} & U_{1s}I_{1s} - U_{1s}I_{1s} & U_{1s}I_{2c} - U_{2c}I_{1s} & U_{1s}I_{2s} - U_{2s}I_{1s} \\ U_{2c}I_{1c} - U_{1c}I_{2c} & U_{2c}I_{1s} - U_{1s}I_{2c} & U_{2c}I_{2c} - U_{2c}I_{2c} & U_{2c}I_{2s} - U_{2s}I_{2c} \\ U_{2s}I_{1c} - U_{1c}I_{2s} & U_{2s}I_{1s} - U_{1s}I_{2s} & U_{2s}I_{2c} - U_{2c}I_{2s} & U_{2s}I_{2s} - U_{2s}I_{2s} \end{bmatrix}$$

azaz

$$\mathbf{R} = (\underline{U} \underline{I}^T - \underline{I} \underline{U}^T)$$

A mátrix egyes elemei az energia oszcillációk kölcsönhatásait mutatják a felharmonikus frekvenciák között. A mátrix átlójában lévő elemek értéke nulla. Az átló feletti mátrixterület (felső háromszög) összértéke az átló alattinak a mínusz egyszerese. A Q átlagértékének a meghatározásához a mátrix Frobenius-normáltját el kell osztani $\sqrt{2}$ -vel. Egyszerűség kedvéért a felső részmátrix-háromszög elemeit sorba lehet rakni egy vektorba (reaktív teljesítményvektor). Q értékét ez esetben R-vektor két-normáltja szerint kapjuk meg. Az R-vektor elemszáma $m=n(n-1)/2$.

Q a reaktív teljesítménymátrixszal kifejezve:

$$Q = [\underline{U}^T(R) \underline{I}]^{1/2}$$

Q-t $\underline{U}$ és $\underline{I}$ tényezői szerint felírva:

$$Q = \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=j+1}^n (U_j I_k - U_k I_j)^2 \right)^{1/2}$$

Speciális esetben ha csak egy felharmonikus van, $n=2$, $m=1$ és a vektoros szorzatnak egy előjeles komponense van. Csak ekkor lehet Q előjeles, más esetben, ha felharmonikusok vannak jelen, akkor Q egy előjel nélküli mennyiség.

Q-t ilyen módon meghatározva igaz lesz az $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ összefüggés többfrekvenciás jel esetében is. A Q-t alkotó R vektor elemei nem a pillanatnyi teljesítménnyel, hanem az S látszólagos teljesítménnyel vannak összefüggésben: Q az S látszólagos teljesítmény P nélküli részét jelenti.

A megmaradási szabály

A teljesítményre vonatkozó megmaradási szabály kimondja hogy a teljesítmény összege a hálózat minden elemére vonatkozólag nulla:

$$\sum_k \rho^k = 0$$

Ahol ρ^k a hálózat k-adik elemének a teljesítménye.

A megmaradási szabály Q-ra és S-re nem vonatkozik mivel ezek a definíció szerint mindig pozitívak, ezért nem lehetnek nulla, hacsak az összes komponens nem nulla.

Bár Q egy normalizált érték, amire nem érvényes a megmaradási szabály, de a reaktív teljesítményvektor elemei vektoros szorzatok formájában tartalmaznak minden elemet, ami leírja a vizsgált hálózatban a feszültség és áram felharmonikusok egymással való viszonyát, ezáltal vonatkozik rá a megmaradási szabály. Tehát:

$$\sum_k R^k = \underline{0}$$

ahol $\underline{0}$ egy m nullvektor. A reaktív teljesítményvektort a hálózat minden elemére felírva kiszámítható, hogy milyen lineáris reaktáns elem beiktatásával lehet elérni a bemeneten mérhető Q minél nagyobb mértékű elnyomását.

Többfázisú hálózat vektoros ábrázolása

Többfázisú periodikus hullámformákat szintén lehet ábrázolni vektorokkal, a hozzájuk rendelt megfelelően módosított alapfüggvény készlettel. A feszültség és áramvektorok konstans $\underline{U}$ $\underline{I}$ vektorok, amiket kollektív vektorokkal kombinálnak. A megoldás általános, de a háromfázisú esetet vizsgáljuk meg közelebbről.

A fázisok feszültség és áramfüggvényeit berakva egy sorvektorba és kifejezve U I és az alapfüggvények szerint:

$$[u_1(t) \ u_2(t) \ u_3(t)] = \underline{U}^T \underline{\Phi}(t)$$

$$[i_1(t) \ i_2(t) \ i_3(t)] = \underline{I}^T \underline{\Phi}(t)$$

Itt $\underline{U}$ hossza 3n, és $\underline{\Phi}(t)$ egy 3n x 3 alapfüggvény mátrix.

$$\underline{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \underline{\Phi}(t) & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\Phi}(t) & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{\Phi}(t) \end{bmatrix}$$

ahol $\underline{0}$ egy n vektor, nullákkal feltöltve.

A teljes pillanatnyi teljesítmény az minden fázis pillanatnyi teljesítményének az összege

$$P(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ u_3(t)] [i_1(t) \ i_2(t) \ i_3(t)]$$

$\underline{\Phi}$ ortonormális jellege miatt az teljesítmény idő szerinti átlaga hasonló lesz mint az egyfázisú esetben:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \underline{U}^T \Phi(t) \Phi^T(t) \underline{I} dt = \underline{U}^T \underline{I}$$

A látszólagos teljesítmény továbbra is $S=UI$, az effektív értékek $\underline{U}$ $\underline{I}$ vektorok 2-s

normáltja. $Q = \sqrt{S^2 - P^2}$ és ugyanúgy értelmezhető, mint R vektoriális szorzatvektor normáltja.

Összefoglalás

A dolgozatban át lett tekintve a pillanatnyi, a valós és meddő teljesítmény, mint fizikai jelenség. Be lett mutatva a feszültség áram teljesítmény fázoros értelmezése, a komplex és valós vektormátrixok és az impedanciamátrix és a reaktív teljesítménymátrix.

Forrás:

John Zaborsky-Marija D. Ilic

Dynamics and Control of Large Electric Power Systems

Niels LaWhite-Marija D. Ilic

Vector Space Decomposition of Reactive Power for Periodic Nonsinusoidal Signals