

Debreceni Egyetem  
Matematikai Intézet

# AZ $r$ -LAH-SZÁMOK ÉS ÖSSZEGZÉSEIK

Témavezető:  
Dr. Nyul Gábor  
egyetemi adjunktus

Készítette:  
Rác Gabriella  
Alkalmazott matematikus MSc  
szakos hallgató

Debrecen  
2014. december 16.

# Tartalomjegyzék

|                                                   |    |
|---------------------------------------------------|----|
| 1. Bevezetés                                      | 1  |
| 2. $r$ -Lah-számok                                | 4  |
| 3. Összegzett $r$ -Lah-számok, $r$ -Lah-polinomok | 20 |
| Irodalomjegyzék                                   | 31 |

## 1. Bevezetés

A leszámoló kombinatorikában alapvető jelentőségűek az úgynevezett Stirling-számok. Az  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$  elsőfajú Stirling-szám azon  $S_n$ -beli permutációk számát adja meg, amelyek  $k$  darab páronként idegen ciklus szorzataként állnak elő. Az  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$  másodfajú Stirling-szám pedig egy  $n$  elemű halmaz  $k$  darab osztályba való osztályozásainak a számát adja meg.

Ha az utóbbi problémát úgy módosítjuk, hogy az osztályokon belül számítsunk az elemek sorrendje, azaz az osztályok rendezettek legyenek, akkor az  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$  módon jelölt Lah-számokhoz jutunk. A Lah-számok egy szlovén matematikusról, Ivo Lahról [8], [9] kapták a nevüket, ugyanis ő vizsgálta először ezeket a számokat. A Lah-számokat néha harmadfajú Stirling-számoknak is szokás nevezni.

A Stirling-számoknak sokféle változata és általánosítása ismert, például az Andrei Z. Broder [4] által definiált és Russell Merris [10] által újra felfedezett  $r$ -Stirling-számok. Az  $r$ -Stirling-számok esetében az első  $r$  elemnek különböző ciklusba, illetve osztályba kell kerülnie. Pontosabban, az  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r$  elsőfajú  $r$ -Stirling-szám azon  $S_{n+r}$ -beli permutációk számát adja meg, amelyek  $k + r$  darab páronként idegen ciklus szorzataként állnak elő úgy, hogy az  $1, \dots, r$  számok különböző ciklusba kerülnek. Az  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_r$  másodfajú  $r$ -Stirling-szám pedig egy  $n + r$  elemű halmaz olyan osztályozásainak a száma, ahol az osztályok száma  $k + r$ , és az első  $r$  elem különböző osztályba kerül.

Hasonlóan definiálhatóak az  $r$ -Lah-számok. Megjegyezzük, hogy ezek a számok említés szintjén megjelennek Gi-Sang Cheon és Ji-Hwan Jung [5] munkájában, a Miloud Mihoubi és Mourad Rahmani [15] által értelmezett többhatározatlanú  $r$ -Bell-polinomok speciális helyettesítési értékeiként, valamint újabban Hacène Belbachir, Amine Belkhir [1] és Hacène Belbachir, Imad Eddine Bousbaa [2] foglalkoztak velük. Ugyanakkor az eredményeink függetlenek és különböznek az előbb felsoroltaktól, továbbá az  $r$ -Lah-számok első szisztematikus vizsgálatát adják.

A 2. fejezetben definiáljuk az  $r$ -Lah-számokat, majd megvizsgáljuk különféle tulajdonságaikat, többek között rekurziójukat, a süllyedő és emelkedő faktoriálisokkal való kapcsolatukat, függőleges rekurziójukat, kifejezésüket az  $(r - s)$ -Lah-számok segítségével, binomiális konvolúciójukat, explicit formulájukat, exponenciális generátorfüggvényüket, ortogonalitásukat, az  $r$ -Lah-

számok és az  $r$ -Stirling-számok közötti összefüggéseket, illetve belátjuk, hogy rögzített  $n$  esetén az  $r$ -Lah-számok sorozata szigorúan log-konkáv és unimodális, és meghatározzuk a sorozat maximumhelyeit.

A másodfajú Stirling-számok összegzésével a Bell-számokat kapjuk. Az  $n$ -edik Bell-szám,  $B_n$  egy  $n$  elemű halmaz összes osztályozásainak a számát adja meg. Ezek szerint  $B_n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ .

Ha a Bell-számok problémájának azt a változatát tekintjük, ahol számít az osztályok sorrendje, azaz az elemeket rendezett módon osztályozzuk, akkor az  $F_n$  Fubini-számokhoz jutunk, amelyekre tehát teljesül, hogy  $F_n = \sum_{k=0}^n k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ .

A másodfajú  $r$ -Stirling-számok összegzésével a Mező István [12] által definiált és vizsgált  $B_{n,r}$   $r$ -Bell-számokat kapjuk, amelyek egy  $n+r$  elemű halmaz összes olyan osztályozásainak a számát adják meg, ahol az első  $r$  elem különböző osztályba kerül.

A Fubini-számok hasonló általánosítását, az  $r$ -Fubini-számokat Mező István és Nyul Gábor [14] vezették be. Az  $F_{n,r}$   $r$ -Fubini-szám egy  $n+r$  elemű halmaz összes olyan rendezett osztályozásainak a száma, ahol az első  $r$  elem különböző osztályba kerül.

A Lah-számok összegzésével hasonlóan értelmezhetők az  $L_n = \sum_{k=0}^n \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$  összegzett Lah-számok. Ezek megjelennek ugyan a szakirodalomban [6], [16], [18], [19], de ismereteink szerint nem létezik alapos vizsgálatuk.

A dolgozat 3. fejezetében az  $r$ -Bell- és az  $r$ -Fubini-számokhoz hasonló módon definiáljuk az összegzett  $r$ -Lah-számokat. Megadjuk többek között, hogyan lehet az összegzett  $r$ -Lah-számokat összegzett  $(r-s)$ -Lah-számokkal kifejezni, bizonyítunk Spivey- és Dobiński-típusú formulákat, valamint meghatározzuk az összegzett  $r$ -Lah-számok sorozatának exponenciális generátorfüggvényét. Speciális esetként eredményeink magukba foglalják az összegzett Lah-számok tulajdonságait is.

A Bell-számokhoz és a Fubini-számokhoz kapcsolódóan szokták értelmezni a Bell- és Fubini-polinomokat. Az összegzett  $r$ -Lah-számok mellett

definiálni fogjuk az  $r$ -Lah-polinomokat, és a fent felsorolt tulajdonságokat az  $r$ -Lah-polinomokra is belátjuk. Azt is meg fogjuk továbbá mutatni, hogy az  $r$ -Lah-polinomok minden gyöke valós, ezzel új bizonyítását adva annak, hogy rögzített  $n$  esetén az  $r$ -Lah-számok sorozata szigorúan log-konkáv és unimodális.

Habár a dolgozatban szereplő formulák egy részét teljes indukcióval vagy hosszabb-rövidebb számolással is be lehetne látni, ahol csak lehetett, arra törekedtünk, hogy közvetlen kombinatorikus bizonyítást adjunk. Megjegyezzük még, hogy az  $r$ -Lah-számokra, az összegzett  $r$ -Lah-számokra és az  $r$ -Lah-polinomokra vonatkozó eredményeket nem egyszerűen a hagyományos esetbeli bizonyítások átvitelével igazoltuk, több esetben, mint például az  $r$ -Lah-számokra vonatkozó explicit formula bizonyításánál teljesen új gondolatmenetre volt szükségünk, vagy az  $r$ -Lah-polinomok tulajdonságainak kombinatorikus bizonyítása is új ötletnek látszik.

Ki kell emelnünk, hogy az  $r$ -Lah-számok, az összegzett  $r$ -Lah-számok és az  $r$ -Lah-polinomok vizsgálata során alkalmazott módszerekkel az  $r$ -Stirling-számokra, az  $r$ -Bell-számokra és az  $r$ -Bell-polinomokra is sikerült néhány új tulajdonságot nyernünk.

## 2. $r$ -Lah-számok

Ebben a fejezetben definiáljuk az  $r$ -Lah-számokat, majd bizonyítjuk azonosságait, és vizsgáljuk további tulajdonságait. A fejezet eredményei a [17] publikáción alapulnak.

**Definíció** Legyen  $n, k, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $k \leq n$ . Ha  $n, r$  nem mindkettő 0, akkor jelölje  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r$  egy  $n + r$  elemű halmaz olyan rendezett osztályokba való osztályozásainak a számát, ahol a rendezett osztályok száma  $k + r$ , és az első  $r$  elem különböző rendezett osztályba kerül. Legyen továbbá  $\left[ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right]_0 = 1$ . Az  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r$  számokat  **$r$ -Lah-számoknak** nevezzük.

Ha  $r = 0$  vagy 1, akkor a rendezett osztályokba való osztályozásra nincs megszorítás, ezért a klasszikus Lah-számokat kapjuk.

**Tétel** Legyen  $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $k \leq n$ . Ekkor

1.  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_0 = \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ ,
2.  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_1 = \left[ \begin{smallmatrix} n+1 \\ k+1 \end{smallmatrix} \right]$ .

### Bizonyítás

1. Ha  $n = 0$ , akkor  $\left[ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right]_0 = 1 = \left[ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right]$ .

Ha pedig  $n \in \mathbb{N}$ , akkor  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_0$  azt adja meg, hogy hányféleképpen lehet egy  $n$  elemű halmazt  $k$  darab rendezett osztályba osztályozni, ami éppen  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ .

2.  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_1$  azt adja meg, hogy hányféleképpen lehet egy  $n + 1$  elemű halmazt  $k + 1$  darab rendezett osztályba osztályozni, ami éppen  $\left[ \begin{smallmatrix} n+1 \\ k+1 \end{smallmatrix} \right]$ .

□

Kicsi és nagy  $k$  értékekre az  $r$ -Lah-számok értékei kombinatorikus gondolatmenettel meghatározhatók.

**Tétel** Legyen  $n, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Ekkor

1.  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right]_r = (2r)^{\overline{n}},$
2.  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right]_r = (2r+1)^{\overline{n}} - (2r)^{\overline{n}} \ (n \geq 1),$
3.  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix} \right]_r = n(n-1) + 2nr \ (n \geq 1),$
4.  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right]_r = 1.$

### Bizonyítás

1. Ha  $n = r = 0$ , akkor  $\left[ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right]_0 = 1 = 0^{\overline{0}}.$

Ha  $n, r$  nem mindkettő 0, akkor egy  $n+r$  elemű halmazt osztályozunk  $r$  darab rendezett osztályba úgy, hogy az első  $r$  elem különböző rendezett osztályba kerüljön. Először az első  $r$  elemet elhelyezzük  $r$  darab különböző rendezett osztályba. Ezután az  $(r+1)$ -edik elem  $2r$ , az  $(r+2)$ -edik elem  $2r+1, \dots$ , az  $(n+r)$ -edik elem  $2r+(n-1)$  helyre kerülhet, ugyanis mindegyik kerülhet bármelyik addig elhelyezett elem elé, illetve a rendezett osztályok végére. Így az osztályozások száma  $(2r)^{\overline{n}}$ .

2. Egy  $n+r$  elemű halmazt osztályozunk  $r+1$  darab rendezett osztályba úgy, hogy az első  $r$  elem különböző rendezett osztályba kerüljön. Először az első  $r$  elemet elhelyezzük  $r$  darab különböző rendezett osztályba. Majd az  $(r+1)$ -edik elemet  $2r+1$ , az  $(r+2)$ -edik elemet  $2r+2, \dots$ , az  $(n+r)$ -edik elemet  $2r+n$  helyre tehetjük, hiszen mindegyik tehető az addig elhelyezett elemek elé vagy az  $r+1$  darab rendezett osztály utolsó helyére. Ez összesen  $(2r+1)^{\overline{n}}$  lehetőség, de ebből még le kell vonnunk azon esetek számát, amelyekben az utolsó rendezett osztály üres, azaz  $(2r)^{\overline{n}}$ -t.

3. Ha egy  $n+r$  elemű halmazt osztályozunk  $n+r-1$  darab rendezett osztályba úgy, hogy az első  $r$  elem különböző rendezett osztályba kerüljön, akkor 1 darab kételemű és  $n+r-2$  darab egyelemű rendezett osztály keletkezik. A kételemű rendezett osztály elemeit az alábbi módokon választhatjuk: Mindkettőt az utolsó  $n$  elem közül  $n(n-1)$ -féleképpen választhatjuk. Ha pedig az első  $r$  elemből egyet és a többi  $n$  elemből is egyet választunk, akkor ez  $2nr$ -féleképpen lehetséges. Ezután a többi  $n+r-2$  elem egyelemű rendezett osztályokba kerül.

4. Ha  $n=r=0$ , akkor  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_0 = 1$ .

Ha  $n, r$  nem mindkettő 0, akkor egy  $n+r$  elemű halmaznak egyetlen olyan rendezett osztályokba való osztályozása van, ahol a rendezett osztályok száma  $n+r$  és az első  $r$  elem különböző rendezett osztályba kerül, mégpedig amikor minden elem egyelemű rendezett osztályt alkot.

□

Az  $r$ -Lah-számok teljesítik a következő rekurziót.

**Tétel** Legyen  $n, k \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq n$ ,  $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Ekkor

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_r = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_r + (n+k+2r) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r.$$

**Bizonyítás** Egy  $n+r+1$  elemű halmaz  $k+r$  darab rendezett osztályba való olyan osztályozása, ahol az első  $r$  elem különböző rendezett osztályba kerül, kétféle lehet:

Ha az  $(n+r+1)$ -edik elem egyelemű rendezett osztályt alkot, akkor a többi  $n+r$  elemet kell  $k+r-1$  darab rendezett osztályba osztályozni úgy, hogy az első  $r$  elem különböző rendezett osztályba kerüljön. Az ilyen osztályozások száma  $\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_r$ .

A másik lehetőség, hogy az  $(n+r+1)$ -edik elem egy legalább kételemű rendezett osztály eleme. Ekkor az  $(n+r+1)$ -edik elem elhagyásával a többi  $n+r$  elem  $k+r$  darab rendezett osztályba van osztályozva úgy, hogy az első  $r$  elem különböző rendezett osztályban van. Ez  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r$ -féleképpen tehető meg. Egy ilyen osztályozás esetén az  $(n+r+1)$ -edik elemet  $n+k+2r$  helyre tehetjük

vissza, még hozzá mindegyik elem elé, illetve minden rendezett osztály utolsó helyére. Így ezen osztályozások száma  $(n + k + 2r) \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r$ .  $\square$

Az eltoló emelkedő és süllyedő faktoriálisok közötti kapcsolat az  $r$ -Lah-számok segítségével írható le.

**Tétel** Legyen  $n, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Ekkor

1.  $(x + 2r)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r x^{\overline{k}},$
2.  $(x - 2r)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r x^{\underline{k}}.$

**Bizonyítás** A tétel első állítását kombinatorikusan bizonyítjuk.

Ha  $n = r = 0$ , akkor teljesül az állítás, hiszen  $x^{\overline{0}} = 1 = \left[ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right]_0 x^{\overline{0}}$ .

Ha  $n, r$  nem mindkettő 0, akkor legyen  $X$  egy  $n+r$  elemű halmaz, és legyen  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq n$ . Összeszámoljuk, hogy hányféleképpen lehet  $X$ -et rendezett osztályokba osztályozni, és  $m+r$  színnel színezni úgy, hogy az első  $r$  elem különböző rendezett osztályba kerül, továbbá az egy rendezett osztályban lévő elemek azonos színűek, a különböző rendezett osztályba tartozó elemek pedig különböző színűek. Ezt kétféleképpen végezzük el:

Először  $X$  elemeit rendezett osztályokba osztályozzuk úgy, hogy az első  $r$  elem különböző rendezett osztályba kerül, majd ezután színezzük az elemeket. Tegyük fel, hogy a rendezett osztályok száma  $k+r$  ( $k = 0, \dots, n$ ). Ekkor  $X$  elemeinek  $k+r$  rendezett osztályba való osztályozásainak száma, ahol az első  $r$  elem különböző rendezett osztályba kerül  $\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r$ . Ezután az elemeket osztályonként színezzük. Az első rendezett osztály elemeinek színe  $(m+r)$ -féle, a második rendezett osztály elemeinek színe  $(m+r-1)$ -féle, ..., a  $(k+r)$ -edik rendezett osztály elemeinek színe  $(m-k+1)$ -féle lehet. Tehát adott  $k$  esetén a lehetőségek száma  $(m+r)^{\underline{k+r}}$ , összesen pedig  $\sum_{k=0}^n \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r (m+r)^{\underline{k+r}}$ .

Másodszor pedig  $X$  elemeinek színezésével kezdünk, és azzal együtt soroljuk be őket rendezett osztályokba.

Az első  $r$  elem különböző rendezett osztályba kerül, ezért színük különböző. Így az 1. elem színe  $(m+r)$ -féle, a 2. elem színe  $(m+r-1)$ -féle, ...,

az  $r$ -edik elem színe  $(m+1)$ -féle lehet. Az első  $r$  elem esetén tehát  $(m+r)^r$  lehetőségünk van.

Az  $(r+1)$ -edik elem színezésére és besorolására a következő lehetőségek vannak: Ha az első  $r$  elem valamelyikével kerül egy rendezett osztályba és így azzal az elemmel megegyező lesz a színe, akkor ez  $2r$ -féleképpen történhet, mivel az első  $r$  elem valamelyike elé vagy mögé kerül. Ha az első  $r$  elemtől különböző rendezett osztályba kerül, akkor  $m$ -féleképpen színeezhető. Tehát az  $(r+1)$ -edik elem esetén  $m+2r$  lehetőség van.

Hasonlóan folytatva, az  $(n+r)$ -edik elem színezésére és besorolására az alábbi lehetőségeink vannak (feltéve, hogy az első  $n+r-1$  elem  $l+r$  darab rendezett osztályt alkot): Ha az első  $n+r-1$  elem valamelyikével kerül egy rendezett osztályba és annak a rendezett osztálynak megfelelően kap színt, akkor ez  $(n+2r-1+l)$ -féleképpen valósulhat meg, ugyanis kerülhet bármelyik elem elé, illetve a rendezett osztályok végére. Ha pedig az első  $n+r-1$  elemtől különböző rendezett osztályba kerül, akkor  $(m-l)$ -féleképpen színeezhető. Az  $(n+r)$ -edik elem esetén tehát  $m+n+2r-1$  lehetőségünk van. Így az utolsó  $n$  elem színezése és besorolása  $(m+2r)^{\bar{n}}$ -féleképpen történhet.

Összefoglalva, a lehetőségek száma  $(m+r)^r(m+2r)^{\bar{n}}$ .

A kétféleképpen kiszámolt érték egyenlősége alapján  $(m+r)^r(m+2r)^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r (m+r)^{k+r}$ , mindkét oldalt  $(m+r)^r$ -nel osztva pedig  $(m+2r)^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r m^{\bar{k}}$  adódik minden  $m \geq n$  természetes szám esetén. Ebből már kö-

vetkezik, hogy  $(x+2r)^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r x^{\bar{k}}$ .

A második állítás igazolásához az első állításban  $x$  helyére  $(-x)$ -et írva  $(-x+2r)^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r (-x)^{\bar{k}}$ , azaz  $(-1)^n(x-2r)^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r (-1)^{\bar{k}} x^{\bar{k}}$  adódik. Ezután mindkét oldalt megszorozva  $(-1)^n$ -nel megkapjuk az állítást.

□

A következő azonosságot az  $r$ -Lah-számokra vonatkozó függőleges rekurzióknak nevezzük.

**Tétel** Legyen  $n, k, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $k \leq n$ . Ekkor

$$\left[ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right]_r = \sum_{j=k}^n (n+k+2r+1)^{\overline{n-j}} \left[ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right]_r.$$

**Bizonyítás** Egy  $n+r+1$  elemű halmazt osztályozunk  $k+r+1$  darab rendezett osztályba úgy, hogy az első  $r$  elem különböző rendezett osztályba kerüljön. Legyen a rendezett osztályok legkisebb sorszámú elemei közül a legnagyobb sorszám  $j+r+1$  ( $j = k, \dots, n$ ).

Ekkor először az első  $j+r$  elemet kell  $k+r$  darab rendezett osztályba osztályozni úgy, hogy az első  $r$  elem különböző rendezett osztályba kerüljön, ez  $\left[ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right]_r$ -féleképpen tehető meg. Ezt követően a  $(j+r+2)$ -edik elemet  $k+j+2r+2$ , a  $(j+r+3)$ -adik elemet  $k+j+2r+3, \dots$ , az  $(n+r+1)$ -edik elemet pedig  $n+k+2r+1$  helyre tehetjük, hiszen mindegyik elem kerülhet bármelyik addigi elem elé, illetve a rendezett osztályok végére. Tehát az utolsó  $n-j$  darab elem elhelyezésére  $(n+k+2r+1)^{\overline{n-j}}$  lehetőségünk van.

A fentiek szerint adott  $j$  esetén  $(n+k+2r+1)^{\overline{n-j}} \left[ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right]_r$ , összesen pedig  $\sum_{j=k}^n (n+k+2r+1)^{\overline{n-j}} \left[ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right]_r$  a lehetőségek száma.  $\square$

A következő két tételben az  $r$ -Lah-számokat két különböző módon fejezzük ki az  $(r-s)$ -Lah-számok segítségével.

**Tétel** Legyen  $n, k, r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $k \leq n$ ,  $s \leq r$ . Ekkor

$$\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} \left[ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right]_{r-s} (2s)^{\overline{n-j}}.$$

**Megjegyzés** Speciálisan az  $s = 1$  esetben

$$\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} \left[ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right]_{r-1} (n-j+1)!,$$

valamint az  $s = r$  esetben

$$\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} \left[ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right] (2r)^{\overline{n-j}}$$

adódik.

**Bizonyítás** Ha  $n = r = 0$ , akkor  $\left[ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right]_0 = 1 = \binom{0}{0} \left[ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right]_0 0^{\overline{0}}$ .

Ha  $n, r$  nem mindkettő 0, akkor egy  $n + r$  elemű halmazt osztályozunk  $k + r$  darab rendezett osztályba úgy, hogy az első  $r$  elem különböző rendezett osztályba kerüljön. Először az első  $s$  elemet elhelyezzük  $s$  darab különböző rendezett osztályba. Legyen  $j$  azon elemek száma az utolsó  $n$  elem közül, amelyek az első  $s$  elemtől különböző rendezett osztályba kerülnek ( $j = k, \dots, n$ ).

Ezt a  $j$  elemet  $\binom{n}{j}$ -féleképpen választhatjuk ki és  $\left[ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right]_{r-s}$ -féle módon sorolhatjuk az  $(s+1)$ -edik,  $\dots$ ,  $r$ -edik elemmel együtt  $k+r-s$  darab rendezett osztályba úgy, hogy az  $(s+1)$ -edik,  $\dots$ ,  $r$ -edik elem különböző rendezett osztályba kerüljön. Ezután az utolsó  $n$  elem közül kimaradó  $n-j$  elem az első  $s$  elem rendezett osztályába kerül. Ezek közül az első elem  $2s$ , a második elem  $2s+1, \dots$ , az  $(n-j)$ -edik elem pedig  $2s+n-j-1$  helyre kerülhet, hiszen mindegyik elem tehető bármelyik addig elhelyezett elem elé, illetve a rendezett osztályok végére. Tehát a kimaradó  $n-j$  elem elhelyezése  $(2s)^{\overline{n-j}}$ -féleképpen lehetséges.

Így a lehetőségek száma rögzített  $j$  esetén  $\binom{n}{j} \left[ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right]_{r-s} (2s)^{\overline{n-j}}$ , összesen pedig  $\sum_{j=k}^n \binom{n}{j} \left[ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right]_{r-s} (2s)^{\overline{n-j}}$ . □

**Tétel** Legyen  $n, k, r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $k \leq n$ ,  $s \leq r$ . Ekkor

$$\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r = \sum_{j=k}^n \left[ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_{r-s} \binom{j}{k} (2s)^{\overline{j-k}}.$$

**Megjegyzés** Speciálisan az  $s = 1$  esetben a  $k \leq n - 2$  feltétel mellett

$$\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r = \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{r-1} + 2(k+1) \left[ \begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix} \right]_{r-1} + (k+1)(k+2) \left[ \begin{matrix} n \\ k+2 \end{matrix} \right]_{r-1},$$

valamint az  $s = r$  esetben

$$\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r = \sum_{j=k}^n \left[ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right] \binom{j}{k} (2r)^{j-k}$$

adódik.

**Bizonyítás** A tételt  $n$  szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk.

Ha  $n = 0$ , akkor  $\left[ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right]_r = 1 = \left[ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right]_{r-s} \binom{0}{0} (2s)^0$ .

Tegyük fel, hogy  $n$ -re igaz az állítás.

$$\begin{aligned} \text{Ezután bizonyítsuk az állítást } (n+1)\text{-re. Ha } k = 0, \text{ akkor az } \left[ \begin{matrix} n+1 \\ 0 \end{matrix} \right]_r = \\ (2r)^{\overline{n+1}} &= \sum_{j=0}^{n+1} \left[ \begin{matrix} n+1 \\ j \end{matrix} \right]_{r-s} \binom{j}{0} (2s)^j \quad \text{egyenlőség teljesül, hiszen} \\ (x + 2r - 2s)^{\overline{n+1}} &= \sum_{j=0}^{n+1} \left[ \begin{matrix} n+1 \\ j \end{matrix} \right]_{r-s} x^j. \text{ Ha } k = n+1, \text{ akkor } \left[ \begin{matrix} n+1 \\ n+1 \end{matrix} \right]_r = \\ 1 &= \left[ \begin{matrix} n+1 \\ n+1 \end{matrix} \right]_{r-s} \binom{n+1}{n+1} (2s)^0. \end{aligned}$$

Ha pedig  $1 \leq k \leq n$ , akkor felhasználva az  $r$ -Lah-számokra vonatkozó rekurziós formulát, az indukciós feltételt és a binomiális együtthatókra vonatkozó rekurziót, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \left[ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right]_r &= \left[ \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right]_r + (n+k+2r) \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r = \\ \sum_{j=k-1}^n \left[ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_{r-s} \binom{j}{k-1} (2s)^{j-k+1} &+ (n+k+2r) \sum_{j=k}^n \left[ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_{r-s} \binom{j}{k} (2s)^{j-k} = \\ \left[ \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right]_{r-s} + \sum_{j=k}^n \left[ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_{r-s} \left( \binom{j}{k-1} + \binom{j}{k} \right) (2s)^{j-k+1} &+ \\ \sum_{j=k}^n (n+j+2r-2s) \left[ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_{r-s} \binom{j}{k} (2s)^{j-k} &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=k-1}^n \left[ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_{r-s} \binom{j+1}{k} (2s)^{j-k+1} + \sum_{j=k}^n (n+j+2r-2s) \left[ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_{r-s} \binom{j}{k} (2s)^{j-k} = \\
& \binom{n+1}{k} (2s)^{n-k+1} + \sum_{j=k}^n \left( \left[ \begin{matrix} n \\ j-1 \end{matrix} \right]_{r-s} + \right. \\
& \quad \left. (n+j+2r-2s) \left[ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_{r-s} \right) \binom{j}{k} (2s)^{j-k} = \\
& \sum_{j=k}^{n+1} \left[ \begin{matrix} n+1 \\ j \end{matrix} \right]_{r-s} \binom{j}{k} (2s)^{j-k}.
\end{aligned}$$

□

Most az  $r$ -Lah-számokra vonatkozó binomiális konvolúciós formulát igazoljuk.

**Tétel** Legyen  $n, k, l, r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $k + l \leq n$ . Ekkor

$$\binom{k+l}{k} \left[ \begin{matrix} n \\ k+l \end{matrix} \right]_{r+s} = \sum_{j=k}^{n-l} \binom{n}{j} \left[ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right]_r \left[ \begin{matrix} n-j \\ l \end{matrix} \right]_s.$$

**Bizonyítás** Ha  $n = r = s = 0$ , akkor  $\binom{0}{0} \left[ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right]_0 = 1 = \binom{0}{0} \left[ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right]_0 \left[ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right]_0$ .

Ha  $n, r, s$  nem mind 0, akkor legyen  $X$  egy  $n + r + s$  elemű halmaz. Összeszámoljuk, hogy hányféleképpen lehet  $X$ -et  $k + l + r + s$  darab rendezett osztályba osztályozni, valamint zöld és piros színekkel színezni úgy, hogy az első  $r + s$  elem különböző rendezett osztályba kerül, az egy rendezett osztályban lévő elemek azonos színűek, az első  $r$  elem zöld, az utánuk következő  $s$  elem pedig piros, továbbá a zöld színű elemeket tartalmazó rendezett osztályok száma  $k + r$ , a pirosaké  $l + s$ . Ezt kétféleképpen végezzük el:

Először  $X$  elemeit rendezett osztályokba osztályozzuk úgy, hogy az első  $r + s$  elem különböző rendezett osztályba kerül, majd ezután színezzük az elemeket.  $X$  elemeit  $\left[ \begin{matrix} n \\ k+l \end{matrix} \right]_{r+s}$ -féleképpen lehet  $k + l + r + s$  darab rendezett osztályba osztályozni, hogy az első  $r + s$  elem különböző rendezett osztályba kerül. Ezután az elemeket osztályonként színezzük. Az első  $r + s$

elem osztályának színe a feltételekből adódik. A többi  $k + l$  darab rendezett osztály közül  $k$  olyan van, melyben levő elemek zöld színűek. Ezek a rendezett osztályok  $\binom{k+l}{k}$ -féleképpen választhatók ki, a ki nem választott  $l$  darab rendezett osztály elemei piros színt kapnak. Tehát a lehetőségek száma  $\binom{k+l}{k} \left[ \begin{matrix} n \\ k+l \end{matrix} \right]_{r+s}$ .

Másodszor  $X$  elemeinek színezésével kezdünk, és azután végezzük el az osztályozást. Az első  $r + s$  elem színe adott. Legyen  $j$  a zöld színű elemek száma az utolsó  $n$  elemből ( $j = k, \dots, n-l$ ). Ezt a  $j$  elemet  $\binom{n}{j}$ -féleképpen választhatjuk ki. A  $j + r$  darab zöld elemet  $k + r$  darab rendezett osztályba osztályozni úgy, hogy az első  $r$  elem különböző rendezett osztályba kerüljön,  $\left[ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right]_r$ -féleképpen lehet. Az  $n - j + s$  darab piros elemet  $\left[ \begin{matrix} n-j \\ l \end{matrix} \right]_s$ -féleképpen osztályozhatjuk  $l + s$  darab rendezett osztályba úgy, hogy az első  $s$  elem különböző rendezett osztályba kerüljön. Adott  $j$  esetén tehát a lehetőségek száma  $\binom{n}{j} \left[ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right]_r \left[ \begin{matrix} n-j \\ l \end{matrix} \right]_s$ , összesen pedig  $\sum_{j=k}^{n-l} \binom{n}{j} \left[ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right]_r \left[ \begin{matrix} n-j \\ l \end{matrix} \right]_s$ .  $\square$

Az  $r$ -Lah-számokra érvényes az alábbi explicit formula.

**Tétel** Legyen  $n, k, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $k \leq n$ . Ha  $k, r$  nem mindkettő 0, akkor

$$\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r = \frac{n!}{k!} \binom{n+2r-1}{k+2r-1}.$$

**Bizonyítás** Egy  $n + r$  elemű halmazt osztályozunk  $k + r$  darab rendezett osztályba úgy, hogy az első  $r$  elem különböző rendezett osztályba kerül. Ezt az alábbi módon is megtehetjük:

Először elhelyezzük az első  $r$  elemet  $r$  darab különböző rendezett osztályba, majd sorbarendezzük a többi  $n$  elemet. Ezt  $n!$ -féleképpen tehetjük meg.

Ezután meghatározzuk, hogy hány elem kerül ezen  $r$  darab rendezett osztályba a már bent lévő elem elé és mögé, illetve hogy hány elem kerül a többi rendezett osztályba az utolsó  $n$  darab elem közül, és ennek megfelelően bontjuk szét az előbb kapott permutációt  $(k + 2r)$ -felé.

Ehhez meg kell néznünk, hányféleképpen lehet az  $n$ -et  $k+2r$  darab nemnegatív egész szám összegére bontani úgy, hogy az utolsó  $k$  tag nem lehet 0 és a tagok sorrendje számít. Ez felfogható úgy, hogy  $n$  darab egyforma elemet kell  $(k+2r)$ -felé szétosztani, hogy az utolsó  $k$  helyre kerüljön legalább egy elem. Ehhez először az utolsó  $k$  helyre teszünk egy elemet, majd a többi  $n-k$  elemet kell  $(k+2r)$ -felé szétosztani. Ez  $C_{k+2r}^{n-k, \text{ism}} = \binom{n+2r-1}{n-k} = \binom{n+2r-1}{k+2r-1}$ -féleképpen tehető meg.

Ezzel viszont még számítana a rendezett osztályok sorrendje, ezért az eddig kapott lehetőségek számát osztanunk kell  $k!$ -sal, hiszen ennyiféleképpen lehet az utolsó  $k$  darab rendezett osztályt sorbarendezeni.

Így a  $k+r$  darab rendezett osztályba való olyan osztályozások száma, ahol az első  $r$  elem különböző rendezett osztályba kerül  $\frac{n!}{k!} \binom{n+2r-1}{k+2r-1}$ .

□

Az explicit formula segítségével igazolható, hogy rögzített  $n$  esetén az  $r$ -Lah-számok sorozata szigorúan log-konkáv és unimodális.

**Tétel** Legyen  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Ekkor az  $\left( \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r \right)_{k=0}^n$  sorozat szigorúan log-konkáv és így unimodális.

**Bizonyítás** Azt kell belátnunk, hogy  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]_r \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k+1 \end{smallmatrix} \right]_r < \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r^2$  teljesül minden  $1 \leq k \leq n-1$  esetén. Ez  $n=1$  esetén nyilvánvaló, ezért feltesszük, hogy  $n \geq 2$ .

Ha  $k=1$  és  $r=0$ , akkor  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right]_0 \left[ \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right]_0 = 0 < (n!)^2 = \left[ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right]_0^2$ .

Egyébként az  $r$ -Lah-számokra vonatkozó explicit formula szerint a következő egyenlőtlenséget kell belátni:

$$\frac{n!}{(k-1)!} \binom{n+2r-1}{k+2r-2} \frac{n!}{(k+1)!} \binom{n+2r-1}{k+2r} < \left( \frac{n!}{k!} \binom{n+2r-1}{k+2r-1} \right)^2.$$

Némi számolás után azt kapjuk, hogy ez ekvivalens a  $k(k+2r-1)(n-k) < (k+1)(k+2r)(n-k+1)$  egyenlőtlenséggel, amely nyilvánvalóan teljesül.

□

A szigorú log-konkavitásból következik, hogy az  $\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor_r\right)_{k=0}^n$  sorozatnak egy vagy két maximumhelye van. A következő tételben meghatározzuk ezeket a maximumhelyeket.

**Tétel** Legyen  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

1. Ha  $n + r^2 + 1$  nem négyzetszám, akkor az  $\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor_r\right)_{k=0}^n$  sorozatnak egy maximumhelye van:  $k = \lfloor \sqrt{n + r^2 + 1} \rfloor - r$ .
2. Ha  $n + r^2 + 1$  négyzetszám, akkor az  $\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor_r\right)_{k=0}^n$  sorozatnak két maximumhelye van:  $k_1 = \sqrt{n + r^2 + 1} - r - 1$  és  $k_2 = \sqrt{n + r^2 + 1} - r$ .

**Bizonyítás** Mivel  $\left\lfloor \frac{n}{0} \right\rfloor_0 = 0$ , egyébként  $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor_r$  pozitív, így a maximumkeresés szempontjából elég az utóbbival foglalkozni.

Ilyenkor az  $r$ -Lah-számokra vonatkozó explicit formula miatt  $\left\lfloor \frac{n}{k-1} \right\rfloor_r \leq \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor_r$  pontosan akkor teljesül, ha  $\frac{n!}{(k-1)!} \binom{n+2r-1}{k+2r-2} \leq \frac{n!}{k!} \binom{n+2r-1}{k+2r-1}$ . Rövid számolás után az adódik, hogy ez ekvivalens a  $k^2 + 2kr - n - 1 \leq 0$ , azaz a  $(k+r)^2 \leq n + r^2 + 1$  egyenlőtlenséggel, ami akkor és csak akkor áll fenn, ha  $k \leq \sqrt{n + r^2 + 1} - r$ .  $\square$

A következő tételben megadjuk rögzített  $k$  esetén az  $r$ -Lah-számok sorozatának exponenciális generátorfüggvényét.

**Tétel** Legyen  $k, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Ekkor az  $\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor_r\right)_{n=k}^\infty$  sorozat exponenciális generátorfüggvénye

$$\sum_{n=k}^\infty \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor_r \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left( \frac{x}{1-x} \right)^k \left( \frac{1}{1-x} \right)^{2r}.$$

**Bizonyítás** Ha  $k = r = 0$ , akkor teljesül az állítás, ugyanis

$$\sum_{n=0}^\infty \left\lfloor \frac{n}{0} \right\rfloor_0 \frac{x^n}{n!} = \left\lfloor \frac{0}{0} \right\rfloor_0 \frac{x^0}{0!} = 1 = \frac{1}{0!} \left( \frac{x}{1-x} \right)^0 \left( \frac{1}{1-x} \right)^0.$$

Ha  $k, r$  nem mindkettő 0, akkor az  $r$ -Lah-számokra vonatkozó explicit formulát, valamint a binomiális sort alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\sum_{n=k}^{\infty} \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!} \binom{n+2r-1}{k+2r-1} \frac{x^n}{n!} = \frac{x^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n+2r-1}{n-k} x^{n-k} = \\ &= \frac{x^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+2r-1}{n} x^n = \frac{x^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-k-2r}{n} (-x)^n = \\ &= \frac{x^k}{k!} (1-x)^{-k-2r} = \frac{1}{k!} \left( \frac{x}{1-x} \right)^k \left( \frac{1}{1-x} \right)^{2r}.\end{aligned}$$

□

Az alábbi tétel és következménye az  $r$ -Lah-számok önortogonalitását és általánosított önortogonalitását írja le, valamint kapcsolatokat ad meg az  $r$ -Lah-számok és az  $r$ -Stirling-számok között.

**Tétel** Legyen  $n, k, r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $k \leq n$ . Ekkor

1.  $\sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} \left[ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_r \left[ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right]_s = \binom{n}{k} (2r-2s)^{\overline{n-k}},$
2.  $\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{2r-s} = \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} \left[ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_r \left[ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right]_s, \text{ ha } 2r \geq s,$
3.  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{2s-r} = \sum_{j=k}^n (-1)^{n-j} \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\}_r \left[ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right]_s, \text{ ha } 2s \geq r,$
4.  $\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{\frac{r+s}{2}} = \sum_{j=k}^n \left[ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_r \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\}_s, \text{ ha } r+s \text{ páros.}$

## Bizonyítás

1.

$$(x+2r-2s)^{\overline{n}} = \sum_{j=0}^n \left[ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_r (x-2s)^{\underline{j}} = \sum_{j=0}^n \left[ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_r \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} \left[ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right]_s x^{\overline{k}} =$$

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_r \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_s x^{\bar{k}}$$

Összehasonlítva az emelkedő faktoriálisokra vonatkozó binomiális tételből adódó  $(x+2r-2s)^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{\bar{k}} (2r-2s)^{\overline{n-k}}$  képlettel, következik az állítás.

2.

$$(x+2r-s)^{\bar{n}} = \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_r (x-s)^{\bar{j}} = \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_r \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_s x^k =$$

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_r \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_s x^k$$

Ezt összevetve az  $(x+2r-s)^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{2r-s} x^k$  képlettel, megkapjuk az állítást.

3.

$$(x-r+2s)^n = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\}_r (x+2s)^{\bar{j}} = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\}_r \sum_{k=0}^j \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_s x^{\bar{k}} =$$

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n (-1)^{n-j} \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\}_r \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_s x^{\bar{k}}$$

Ezt összevetve az  $(x-r+2s)^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{2s-r} x^{\bar{k}}$  képlettel, adódik az állítás.

4.

$$(x+r+s)^{\bar{n}} = \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_r (x+s)^{\bar{j}} = \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_r \sum_{k=0}^j \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\}_s x^{\bar{k}} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_r \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\}_s x^{\bar{k}}$$

Ha ezt összevetjük az  $(x+r+s)^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{\frac{r+s}{2}} x^{\bar{k}}$  képlettel, megkapjuk az állítást.  $\square$

**Következmény** Legyen  $n, k, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $k \leq n$ . Ekkor

1.  $\sum_{j=k}^n (-1)^{n-j} \left[ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_r \left[ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right]_r = \delta_{nk},$
2.  $\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r = \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} \left[ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_r \left[ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right]_r,$
3.  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r = \sum_{j=k}^n (-1)^{n-j} \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\}_r \left[ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right]_r,$
4.  $\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r = \sum_{j=k}^n \left[ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_r \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\}_r.$

**Bizonyítás** Az összefüggések azonnal adódnak az előző tételből  $s = r$  helyettesítéssel.

Az utolsó állítást kombinatorikusan is bebizonyítjuk.

Ha  $n = r = 0$ , akkor  $\left[ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right]_0 = 1 = \left[ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right]_0 \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_0.$

Ha  $n, r$  nem mindkettő 0, akkor egy  $n + r$  elemű halmaz  $k + r$  darab rendezett osztályba való olyan osztályozásait, ahol az első  $r$  elem különböző rendezett osztályba kerül, megkaphatjuk az alábbi módon is: Az  $n + r$  elemet először  $j + r$  darab páronként idegen ciklusba rendezzük ( $j = k, \dots, n$ ) úgy, hogy az első  $r$  elem különböző ciklusba kerüljön. Majd a  $j + r$  darab ciklust  $k + r$  darab osztályba osztályozzuk úgy, hogy az első  $r$  ciklus (amelyek az első  $r$  elemet tartalmazzák) különböző osztályba kerüljenek. Az egy osztályban szereplő páronként idegen ciklusok a bennük lévő elemek egy permutációját határozzák meg, ha összeszorozzuk ezeket a ciklusokat.

Így  $n + r$  elem  $k + r$  darab rendezett osztályba való olyan osztályozásainak száma, ahol az első  $r$  elem különböző rendezett osztályba kerül

$$\sum_{j=k}^n \left[ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_r \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\}_r.$$

□

Végül megmutatjuk, hogy sorozatok  $r$ -Lah-transzformáltjára és inverz  $r$ -Lah-transzformáltjára igaz a következő megfordítási tétel.

**Tétel** Legyenek  $(a_n)_{n=0}^\infty, (b_n)_{n=0}^\infty$  komplex számsorozatok, legyen továbbá  $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Ekkor  $b_n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r a_k$  ( $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ) akkor és csak akkor teljesül, ha  $a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r b_k$  ( $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ).

**Bizonyítás** I. Tegyük fel, hogy  $b_n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r a_k$  ( $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ). Ekkor az  $r$ -Lah-számok önortogonalitásának alkalmazásával

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r b_k &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r \sum_{j=0}^k \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_r a_j = \\ \sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^n (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_r a_j &= \sum_{j=0}^n \delta_{nj} a_j = a_n. \end{aligned}$$

II. Tegyük most fel, hogy  $a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r b_k$  ( $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ), azaz  $(-1)^n$ -nel való szorzás után  $(-1)^n a_n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r (-1)^k b_k$  ( $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ).

Alkalmazva a tétel már belátott irányát a  $((-1)^n b_n)_{n=0}^\infty$  és a  $((-1)^n a_n)_{n=0}^\infty$  sorozatokra az adódik, hogy

$$(-1)^n b_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r (-1)^k a_k = \sum_{k=0}^n (-1)^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r a_k.$$

Mindkét oldalt  $(-1)^n$ -nel szorozva kapjuk, hogy  $b_n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r a_k$ . □

### 3. Összegzett $r$ -Lah-számok, $r$ -Lah-polinomok

Ebben a fejezetben az  $r$ -Lah-számok összegzéseivel foglalkozunk, melyhez kapcsolódóan értelmezzük az  $r$ -Lah-polinomokat. A tulajdonságaikat megfogalmazzuk az  $r$ -Lah-polinomok és az összegzett  $r$ -Lah-számok esetére is, a bizonyításokat azonban elsősorban a polinomokra végezzük el, ugyanis abból általában  $x = 1$  helyettesítéssel könnyen adódik a számokra vonatkozó változat is.

**Definíció** Legyenek  $n, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Ha  $n, r$  nem mindkettő 0, akkor jelölje  $L_{n,r}$  egy  $n + r$  elemű halmaz összes olyan rendezett osztályokba való osztályozásainak a számát, ahol az első  $r$  elem különböző rendezett osztályba kerül. Legyen továbbá  $L_{0,0} = 1$ . Ekkor  $L_{n,r}$ -et az  **$n$ -edik összegzett  $r$ -Lah-számnak** nevezzük.

A definíciókból azonnal adódik a következő tétel, mely indokolja a névválasztást.

**Tétel** Legyen  $n, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Ekkor

$$L_{n,r} = \sum_{j=0}^n \left[ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_r.$$

Ebből az összefüggésből az  $r$ -Lah-transzformációra vonatkozó megfordítási tétel segítségével következik az alábbi azonosság.

**Következmény** Legyen  $n, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Ekkor

$$1 = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \left[ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_r L_{j,r}.$$

**Definíció** Legyen  $n, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Ekkor az  $L_{n,r}(x) = \sum_{j=0}^n \left[ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_r x^j$  polinomot az  **$n$ -edik  $r$ -Lah-polinomnak** nevezzük.

**Megjegyzés** Speciálisan  $L_{n,r}(1) = L_{n,r}$ . Továbbá  $L_{n,r}(x)$   $n$ -edfokú polinom, ugyanis  $\left[ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right]_r = 1$ .

**Megjegyzés** Ha  $n, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  nem mindkettő 0 és  $c \in \mathbb{N}$ , akkor  $L_{n,r}(c)$  megadja, hogy egy  $n+r$  elemű halmazt hányféleképpen lehet rendezett osztályokba osztályozni és a rendezett osztályokat  $c$  darab színnel kiszínezni úgy, hogy az első  $r$  elem különböző rendezett osztályba kerüljön és az első  $r$  elemet tartalmazó rendezett osztályok ne legyenek kiszínezve.

Ha  $r = 0$  vagy 1, akkor a rendezett osztályokba való osztályozásokra ismét nincs megszorítás, ezért a közönséges összegzett Lah-számokat és Lah-polinomokat kapjuk.

**Tétel** Legyen  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Ekkor

1.  $L_{n,0}(x) = L_n(x)$  és  $L_{n,0} = L_n$ ,
2.  $xL_{n,1}(x) = L_{n+1}(x)$  és  $L_{n,1} = L_{n+1}$ .

### Bizonyítás

1. Ha  $n = 0$ , akkor  $L_{0,0}(x) = 1 = L_0(x)$ .

Ha pedig  $n \in \mathbb{N}$ , akkor legyen  $c \in \mathbb{N}$ . Ekkor  $L_{n,0}(c)$  egy  $n$  elemű halmaz összes rendezett osztályokba való osztályozásainak és a rendezett osztályok  $c$  darab színnel való színezéseinek a száma, ami megegyezik  $L_n(c)$ -vel. Tehát  $L_{n,0}(c) = L_n(c)$  minden  $c$  természetes szám esetén, így  $L_{n,0}(x) = L_n(x)$ .

2. Legyen  $c \in \mathbb{N}$ . Ekkor  $L_{n,1}(c)$  azt adja meg, hogy hányféleképpen lehet egy  $n+1$  elemű halmazt rendezett osztályokba osztályozni és a rendezett osztályokat  $c$  színnel színezni úgy, hogy az első elem rendezett osztályát nem színezzük. Ha az első elem rendezett osztályát is színeznénk a  $c$  darab szín valamelyikével, akkor a lehetőségek száma  $L_{n+1}(c)$  lenne. Tehát  $cL_{n,1}(c) = L_{n+1}(c)$  minden  $c$  természetes szám esetén, így  $xL_{n,1}(x) = L_{n+1}(x)$ .

□

Az  $n = 0$  és  $n = 1$  esetben egyszerűen megadható az  $r$ -Lah-polinom és az összegzett  $r$ -Lah-szám értéke.

**Tétel** Legyen  $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Ekkor

1.  $L_{0,r}(x) = 1$  és  $L_{0,r} = 1$ ,
2.  $L_{1,r}(x) = x + 2r$  és  $L_{1,r} = 2r + 1$ .

### Bizonyítás

1. Ha  $r = 0$ , akkor  $L_{0,0}(x) = 1$ .

Ha  $r \in \mathbb{N}$ , akkor legyen  $c \in \mathbb{N}$ . Ekkor  $L_{0,r}(c)$  azt adja meg, hogy egy  $r$  elemű halmazt hányféleképpen lehet rendezett osztályokba osztályozni és a rendezett osztályokat  $c$  színnel színezni úgy, hogy az első  $r$  elem különböző rendezett osztályba kerüljön és az első  $r$  elem rendezett osztálya ne legyen színezve. Másfelől ez csak egyféleképpen lehetséges: minden elem különböző rendezett osztályba kerül, továbbá egyik rendezett osztály sem kap színt. Így  $L_{0,r}(c) = 1$  minden  $c$  természetes szám esetén, amiből  $L_{0,r}(x) = 1$  következik.

2. Legyen  $c \in \mathbb{N}$ . Ekkor  $L_{1,r}(c)$  összeszámolja, hogy egy  $r + 1$  elemű halmazt hányféleképpen lehet rendezett osztályokba osztályozni és a rendezett osztályokat  $c$  színnel színezni úgy, hogy az első  $r$  elem különböző rendezett osztályba kerüljön és az első  $r$  elem rendezett osztálya ne kapjon színt. Másképpen számolva, először az első  $r$  elemet elhelyezzük  $r$  darab különböző rendezett osztályba. Az  $(r + 1)$ -edik elem esetén két lehetőség van: Egyrészt kerülhet új rendezett osztályba, ekkor ezt az egyelemű rendezett osztályt  $c$ -féleképpen színezzük. Másrészt kerülhet az első  $r$  elem rendezett osztályainak valamelyikébe, az elemek elé vagy mögé, ami  $2r$  lehetőség. Így  $L_{1,r}(c) = c + 2r$  bármely  $c$  természetes szám esetén, amiből  $L_{1,r}(x) = x + 2r$  adódik.

□

Az  $r$ -Lah-számokhoz hasonlóan az  $r$ -Lah-polinomok és az összegzett  $r$ -Lah-számok is kifejezhetők  $(r-s)$ -Lah-polinomok és összegzett  $(r-s)$ -Lah-számok segítségével.

**Tétel** Legyen  $n, r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $s \leq r$ . Ekkor

$$L_{n,r}(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} L_{j,r-s}(x) (2s)^{\overline{n-j}},$$

$$L_{n,r} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} L_{j,r-s} (2s)^{\overline{n-j}}.$$

**Megjegyzés** Speciálisan az  $s = 1$  esetben

$$L_{n,r}(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} L_{j,r-1}(x) (n-j+1)!,$$

$$L_{n,r} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} L_{j,r-1} (n-j+1)!,$$

valamint  $s = r$  esetén

$$L_{n,r}(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} L_j(x) (2r)^{\overline{n-j}},$$

$$L_{n,r} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} L_j (2r)^{\overline{n-j}}$$

adódik.

**Bizonyítás** Ha  $n = r = 0$ , akkor  $L_{0,0}(x) = 1 = \binom{0}{0} L_{0,0}(x) 0^{\overline{0}}$ .

Ha  $n, r$  nem mindkettő 0, akkor legyen  $c \in \mathbb{N}$ . Ekkor  $L_{n,r}(c)$  azt adja meg, hogy hányféleképpen lehet egy  $n+r$  elemű halmazt rendezett osztályokba osztályozni és a rendezett osztályokat  $c$  darab színnel színezni úgy, hogy az első  $r$  elem különböző rendezett osztályba kerüljön, valamint az első  $r$  elemet tartalmazó rendezett osztályok ne legyenek színezve.

Ugyanezt máshogyan is összeszámolhatjuk. Először helyezzük el az első  $s$  elemet különböző rendezett osztályokba. Jelölje  $j$  azon elemek számát az utolsó  $n$  elemből, melyek nem az első  $s$  elemmel kerülnek egy rendezett osztályba ( $j = 0, \dots, n$ ). Ezt a  $j$  elemet  $\binom{n}{j}$ -féleképpen választhatjuk ki, majd az  $(s+1)$ -edik,  $\dots$ ,  $r$ -edik elemmel együtt  $L_{j,r-s}(c)$ -féleképpen osztályozhatjuk rendezett osztályokba és színezhetjük ezeket a rendezett osztályokat  $c$  színnel úgy, hogy az  $(s+1)$ -edik,  $\dots$ ,  $r$ -edik elem különböző rendezett osztályba kerüljön, valamint az ezeket tartalmazó rendezett osztályokat ne színezzük. A kimaradó  $n-j$  elem az első  $s$  elem rendezett osztályaiba kerül. Ezek közül az első  $2s$  helyre, a második  $2s+1, \dots$ , az  $(n-j)$ -edik elem pedig  $2s+n-j-1$  helyre kerülhet, hiszen minden elem tehető a már bentlévő elemek elé, valamint a rendezett osztályok végére. Így rögzített  $j$  esetén  $\binom{n}{j} L_{j,r-s}(c) (2s)^{\overline{n-j}}$ , összesen pedig  $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} L_{j,r-s}(c) (2s)^{\overline{n-j}}$  a lehetőségek száma.

Tehát  $L_{n,r}(c) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} L_{j,r-s}(c) (2s)^{\overline{n-j}}$  minden  $c$  természetes szám esetén, így  $L_{n,r}(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} L_{j,r-s}(x) (2s)^{\overline{n-j}}$ .  $\square$

A következő tételben Spivey-típusú formulát igazolunk  $r$ -Lah-polinomokra és összegzett  $r$ -Lah-számokra. Az elnevezés onnan ered, hogy Bell-számokra Michael Z. Spivey [20] adta meg a megfelelő formulát (Bell-polinomokra Henry W. Gould, Jocelyn Quaintance [7] és Hacène Belbachir, Miloud Mihoubi [3],  $r$ -Bell-számokra pedig Mező István [13] bizonyított hasonló formulát).

**Tétel** Legyen  $m, n, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Ekkor

$$L_{m+n,r}(x) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \left[ \begin{matrix} m \\ i \end{matrix} \right]_r \binom{n}{j} L_j(x) (m+i+2r)^{\overline{n-j}} x^i,$$

$$L_{m+n,r} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \left[ \begin{matrix} m \\ i \end{matrix} \right]_r \binom{n}{j} L_j (m+i+2r)^{\overline{n-j}}.$$

**Bizonyítás** Ha  $m = n = r = 0$ , akkor  $L_{0,0}(x) = 1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} L_0(x) 0^{\bar{0}} x^0$ .

Ha  $m, n, r$  nem mind 0, akkor legyen  $c \in \mathbb{N}$ . Ekkor  $L_{m+n,r}(c)$  azt adja meg, hogy hányféleképpen lehet egy  $m+n+r$  elemű halmazt rendezett osztályokba osztályozni és a rendezett osztályokat  $c$  darab színnel színezni úgy, hogy az első  $r$  elem különböző rendezett osztályba kerüljön, valamint az első  $r$  elemet tartalmazó rendezett osztályok ne legyenek színezve.

Ugyanezt máshogyan is összeszámolhatjuk. Először az első  $m+r$  elemet  $i+r$  darab rendezett osztályba osztályozzuk úgy, hogy az első  $r$  elem különböző rendezett osztályba kerüljön ( $i = 0, \dots, m$ ), ezt  $\begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}_r$ -féleképpen tehetjük meg. Továbbá az első  $r$  elemet nem tartalmazó  $i$  darab rendezett osztályt  $c^i$ -féleképpen színezhethetjük. Jelölje  $j$  azon elemek számát az utolsó  $n$  elemből, melyek nem ebbe az  $i+r$  darab rendezett osztályba kerülnek ( $j = 0, \dots, n$ ).

Ezt a  $j$  elemet  $\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}$ -féleképpen választhatjuk ki,  $L_j(c)$ -féleképpen osztályozhatjuk rendezett osztályokba és színezhethetjük a rendezett osztályokat  $c$  színnel. A kimaradó  $n-j$  darab elem az eredeti  $i+r$  darab rendezett osztályba kerül. Ezek közül az első  $m+i+2r$  helyre, a második  $m+i+2r+1, \dots$ , az  $(n-j)$ -edik elem pedig  $m+i+2r+n-j-1$  helyre kerülhet, hiszen minden elem tehető a már bentlévő elemek elé, valamint a rendezett osztályok végére.

Így rögzített  $i$  és  $j$  esetén  $\begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}_r \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} L_j(c) (m+i+2r)^{\overline{n-j}} c^i$ , összesen pedig

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}_r \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} L_j(c) (m+i+2r)^{\overline{n-j}} c^i \text{ a lehetőségek száma.}$$

$$\text{Tehát } L_{m+n,r}(c) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}_r \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} L_j(c) (m+i+2r)^{\overline{n-j}} c^i \text{ minden } c \in \mathbb{N}$$

$$\text{esetén, így } L_{m+n,r}(x) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}_r \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} L_j(x) (m+i+2r)^{\overline{n-j}} x^i. \quad \square$$

**Megjegyzés** A tételbeli összefüggés  $m = 0$  esetén az  $r$ -Lah- és a Lah-polinomok, illetve az összegzett  $r$ -Lah- és az összegzett Lah-számok közötti kapcsolatot,  $n = 0$  esetén pedig a definíciót követő egyszerű formulát, valamint az  $r$ -Lah-polinomok definícióját adja vissza.

Az  $r$ -Lah-polinomokra és az összegzett  $r$ -Lah-számokra érvényes az alábbi Dobiński-típusú formula.

**Tétel** Legyen  $n, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Ekkor

$$L_{n,r}(x) = \frac{1}{\exp(x)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+2r)^{\bar{n}}}{j!} x^j,$$

$$L_{n,r} = \frac{1}{e} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+2r)^{\bar{n}}}{j!}.$$

**Bizonyítás** I. Először a polinomokra vonatkozó állítást bizonyítjuk.

A bizonyítás során legyen  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix} \right]_r = 0$ , ha  $i > n$ . Az eltolt emelkedő és süllyedő faktoriálisok  $r$ -Lah-számokkal megadható kapcsolatát felhasználva azt kapjuk, hogy

$$(j+2r)^{\bar{n}} = \sum_{i=0}^n \left[ \begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix} \right]_r j^{\bar{i}} = \sum_{i=0}^{\infty} \left[ \begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix} \right]_r j^{\bar{i}} = \sum_{i=0}^j \left[ \begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix} \right]_r \frac{j!}{(j-i)!}.$$

Mindkét oldalt  $j!$ -sal osztva az adódik, hogy

$$\frac{(j+2r)^{\bar{n}}}{j!} = \sum_{i=0}^j \left[ \begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix} \right]_r \frac{1}{(j-i)!},$$

azaz a  $\left( \frac{(j+2r)^{\bar{n}}}{j!} \right)_{j=0}^{\infty}$  sorozat az  $\left( \left[ \begin{smallmatrix} n \\ j \end{smallmatrix} \right]_r \right)_{j=0}^{\infty}$  és az  $\left( \frac{1}{j!} \right)_{j=0}^{\infty}$  sorozatok konvolúciója. Ezért a generátorfüggvényeikre teljesül, hogy

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+2r)^{\bar{n}}}{j!} x^j = L_{n,r}(x) \exp(x).$$

II. Most az összegzett  $r$ -Lah-számokra vonatkozó formulát igazoljuk.

Legyen  $\lambda > 0$  és  $\xi$  egy  $\lambda$  paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó. Ekkor

$$\mathbb{E}(\xi+2r)^{\bar{n}} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+2r)^{\bar{n}} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \sum_{i=0}^n \left[ \begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix} \right]_r j^{\bar{i}} =$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\lambda} \sum_{i=0}^n \left[ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right]_r \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^i}{j!} \lambda^j = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^n \left[ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right]_r \sum_{j=i}^{\infty} \frac{\lambda^j}{(j-i)!} = \\
&= e^{-\lambda} \sum_{i=0}^n \left[ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right]_r \lambda^i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = \sum_{i=0}^n \left[ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right]_r \lambda^i = L_{n,r}(\lambda).
\end{aligned}$$

Speciálisan  $\lambda = 1$  esetén  $L_{n,r} = L_{n,r}(1) = \mathbb{E}(\xi + 2r)^{\bar{n}} = \sum_{j=0}^{\infty} (j + 2r)^{\bar{n}} \frac{1}{j!} e^{-1}$ . □

Most megadjuk az  $r$ -Lah-polinomok és az összegzett  $r$ -Lah-számok sorozatainak exponenciális generátorfüggvényét.

**Tétel** Legyen  $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Ekkor az  $(L_{n,r}(x))_{n=0}^{\infty}$  sorozat exponenciális generátorfüggvénye

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_{n,r}(x)}{n!} y^n = \exp\left(\frac{xy}{1-y}\right) \frac{1}{(1-y)^{2r}},$$

az  $(L_{n,r})_{n=0}^{\infty}$  sorozat exponenciális generátorfüggvénye pedig

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_{n,r}}{n!} y^n = \exp\left(\frac{y}{1-y}\right) \frac{1}{(1-y)^{2r}}.$$

**1. Bizonyítás** Felhasználva az  $r$ -Lah-számok exponenciális generátorfüggvényét, az adódik, hogy

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_{n,r}(x)}{n!} y^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \left[ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_r x^j \frac{1}{n!} y^n = \sum_{j=0}^{\infty} x^j \sum_{n=j}^{\infty} \left[ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_r \frac{1}{n!} y^n = \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} x^j \frac{1}{j!} \left( \frac{y}{1-y} \right)^j \frac{1}{(1-y)^{2r}} = \frac{1}{(1-y)^{2r}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left( \frac{xy}{1-y} \right)^j = \\
&= \exp\left(\frac{xy}{1-y}\right) \frac{1}{(1-y)^{2r}}.
\end{aligned}$$

□

**2. Bizonyítás** Az összegzett  $r$ -Lah-számokra vonatkozó állítást más módon is bizonyíthatjuk.

Először az összegzett Lah-számok exponenciális generátorfüggvényét határozzuk meg. Legyen  $l(y)$  az  $(L_n)_{n=0}^\infty$  sorozat exponenciális generátorfüggvénye, azaz  $l(y) = \sum_{n=0}^\infty \frac{L_n}{n!} y^n = \sum_{n=0}^\infty l_n y^n$ .

Az összegzett 1-Lah-számok és az összegzett Lah-számok közötti összefüggés alapján  $L_{n+1} = L_{n,1} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} L_j (n-j+1)!$ , amiből következik, hogy az  $(L_{n+1})_{n=0}^\infty$  sorozat az  $(L_n)_{n=0}^\infty$  és az  $((n+1)!)_{n=0}^\infty$  sorozatok binomiális konvolúciója. Az  $(L_{n+1})_{n=0}^\infty$  sorozat exponenciális generátorfüggvénye  $l'(y)$ , az  $((n+1)!)_{n=0}^\infty$  sorozaté pedig  $\frac{1}{(1-y)^2}$ . Mindezekből  $l'(y) = l(y) \frac{1}{(1-y)^2}$ . Ennek a differenciálegyenletnek keressük a megoldását a formális hatványsorok körében az  $l_0 = \frac{L_0}{0!} = 1$  feltétel mellett.

A differenciálegyenlet két oldalán  $y^n$  együtthatója  $(n+1)l_{n+1} = \sum_{k=0}^n l_k (n-k+1)$ . Ebből következik, hogy  $l_0 = 1$ -ből kiindulva,  $l_0, \dots, l_n$  ismeretében  $l_{n+1}$  egyértelműen meghatározható, tehát a differenciálegyenletnek az  $l_0 = 1$  feltétel mellett egyértelműen létezik megoldása.

Megmutatjuk, hogy ez a megoldás  $\exp\left(\frac{y}{1-y}\right)$ . Egyszerű deriválással ellenőrizhető, hogy ez a formális hatványsor teljesíti a differenciálegyenletet, a konstans tagja pedig  $\exp\left(\frac{y}{1-y}\right) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} \left(\frac{y}{1-y}\right)^k$  alapján 1.

Ezt felhasználva adjuk meg az összegzett  $r$ -Lah-számok exponenciális generátorfüggvényét. Legyen  $l_r(y)$  az  $(L_{n,r})_{n=0}^\infty$  sorozat exponenciális generátorfüggvénye, azaz  $l_r(y) = \sum_{n=0}^\infty \frac{L_{n,r}}{n!} y^n$ .

Az  $(L_{n,r})_{n=0}^\infty$  sorozat az összegzett  $r$ -Lah-számok és az összegzett Lah-számok közötti kapcsolat miatt az  $(L_n)_{n=0}^\infty$  és a  $((2r)^{\bar{n}})_{n=0}^\infty$  sorozatok binomiális konvolúciója. Az  $(L_n)_{n=0}^\infty$  sorozat exponenciális generátorfüggvénye a bizonyítás első felében látottak szerint  $\exp\left(\frac{y}{1-y}\right)$ , a  $((2r)^{\bar{n}})_{n=0}^\infty$  sorozaté

pedig  $\frac{1}{(1-y)^{2r}}$ , ugyanis a binomiális sort felhasználva

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-y)^{2r}} &= (1-y)^{-2r} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2r}{n} (-y)^n = \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2r+n-1}{n} (-y)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2r+n-1)^{\overline{n}}}{n!} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2r)^{\overline{n}}}{n!} y^n.\end{aligned}$$

A fentiek alapján  $l_r(y) = \exp\left(\frac{y}{1-y}\right) \frac{1}{(1-y)^{2r}}$ . □

Végül belátjuk, hogy az  $r$ -Lah-polinomok minden gyöke valós, ami Newton tételével együtt újabb bizonyítását adja annak, hogy rögzített felső paraméter mellett az  $r$ -Lah-számok sorozata szigorúan log-konkáv és unimodális.

**Tétel** Legyen  $n \in \mathbb{N}$  és  $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Ekkor  $L_{n,r}(x)$  minden gyöke valós és egyszeres,  $r = 0$  esetén az egyik gyök 0, a többi negatív,  $r \in \mathbb{N}$  esetén pedig minden gyök negatív.

**Bizonyítás** Az egyszerűség kedvéért a tételt csak az  $r \in \mathbb{N}$  esetre bizonyítjuk,  $r = 0$  esetén ugyanezzel a gondolatmenettel igazolható az állítás.

A tétel bizonyítása  $n$  szerinti teljes indukcióval történik.

Ha  $n = 1$ , akkor  $L_{1,r}(x) = x + 2r$ , amelynek egyetlen gyöke  $-2r$ , ami negatív, erre tehát teljesül az állítás. Az  $n = 2$  esetben pedig  $L_{2,r}(x) = x^2 + (4r+2)x + 4r^2 + 2r$ , amelynek gyökei  $-2r-1-\sqrt{2r+1}$  és  $-2r-1+\sqrt{2r+1}$ , mindkettő negatív, tehát ekkor is igaz a tétel állítása.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz  $n$ -re.

Ekkor alkalmazva az  $r$ -Lah-számok rekurzióját és nevezetes értékeit,  $(n+1)$ -re a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}L_{n+1,r}(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} \left[ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right]_r x^k = \left[ \begin{matrix} n+1 \\ 0 \end{matrix} \right]_r + \sum_{k=1}^n \left[ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right]_r x^k + \left[ \begin{matrix} n+1 \\ n+1 \end{matrix} \right]_r x^{n+1} = \\ &= (2r)^{\overline{n+1}} + \sum_{k=1}^n \left( \left[ \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right]_r + (n+k+2r) \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r \right) x^k + x^{n+1} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r x^{k+1} + x^{n+1} + (n+2r) \sum_{k=1}^n \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r x^k + (2r)^{\overline{n+1}} + \sum_{k=1}^n k \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r x^k = \\
&= x \sum_{k=0}^n \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r x^k + (n+2r) \sum_{k=0}^n \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r x^k + x \sum_{k=1}^n k \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r x^{k-1} = \\
&= x L_{n,r}(x) + (n+2r) L_{n,r}(x) + x L'_{n,r}(x).
\end{aligned}$$

Ebből  $e^x x^{n+2r-1}$ -nel szorozva  $e^x x^{n+2r-1} L_{n+1,r}(x) = (e^x x^{n+2r} L_{n,r}(x))'$  adódik.

Az indukciós feltétel szerint  $L_{n,r}(x)$ -nek  $n$  darab valós gyöke van, minden gyök egyszeres és negatív. Ekkor  $x^{n+2r} L_{n,r}(x)$ -nek  $n+1$  darab különböző valós gyöke van, a nulla  $(n+2r)$ -szeres gyök, a többi egyszeres és negatív. Mivel  $e^x > 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ), így  $e^x x^{n+2r} L_{n,r}(x)$ -nek  $n+1$  darab zérushelye van, az egyik 0, a többi negatív, valamint  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x x^{n+2r} L_{n,r}(x) = 0$ . Ebből Rolle tétele alapján következik, hogy  $(e^x x^{n+2r} L_{n,r}(x))' = e^x x^{n+2r-1} L_{n+1,r}(x)$ -nek van  $n+1$  darab zérushelye, amelyek mind negatívak. Mivel  $e^x > 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ), ezért  $x^{n+2r-1} L_{n+1,r}(x)$ -nek van  $n+1$  darab különböző valós gyöke, melyek negatívak, így  $L_{n+1,r}(x)$ -nek van  $n+1$  darab különböző negatív gyöke. Továbbá mivel  $\deg(L_{n+1,r}(x)) = n+1$ , más gyöke nincs.  $\square$

**Következmény** Legyen  $n, r \in \mathbb{N}$ . Ekkor az  $\left( \left[ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_r \right)_{j=0}^n$  sorozat szigorúan log-konkáv, és így unimodális.

## Irodalomjegyzék

- [1] H. Belbachir and A. Belkhir, *Cross recurrence relations for  $r$ -Lah numbers*, Ars Combinatoria **110** (2013), 199–203.
- [2] H. Belbachir and I. E. Bousbaa, *Combinatorial identities for the  $r$ -Lah numbers*, Ars Combinatoria **115** (2014), 453–458.
- [3] H. Belbachir and M. Mihoubi, *A generalized recurrence for Bell polynomials: An alternate approach to Spivey and Gould–Quaintance formulas*, European Journal of Combinatorics **30** (2009), 1254–1256.
- [4] A. Z. Broder, *The  $r$ -Stirling numbers*, Discrete Mathematics **49** (1984), 241–259.
- [5] G.-S. Cheon and J.-H. Jung,  *$r$ -Whitney numbers of Dowling lattices*, Discrete Mathematics **312** (2012), 2337–2348.
- [6] P. Flajolet and R. Sedgewick, *Analytic Combinatorics*, Cambridge University Press, 2009.
- [7] H. W. Gould and J. Quaintance, *Implications of Spivey’s Bell number formula*, Journal of Integer Sequences **11** (2008), Article 08.3.7.
- [8] I. Lah, *A new kind of numbers and its application in the actuarial mathematics*, Boletim do Instituto dos Actuários Portugueses **9** (1954), 7–15.
- [9] I. Lah, *Eine neue Art von Zahlen, ihre Eigenschaften und Anwendung in der mathematischen Statistik*, Mitteilungsblatt für Mathematische Statistik **7** (1955), 203–212.
- [10] R. Merris, *The  $p$ -Stirling numbers*, Turkish Journal of Mathematics **24** (2000), 379–399.
- [11] I. Mező, *On the maximum of  $r$ -Stirling numbers*, Advances in Applied Mathematics **41** (2008), 293–306.
- [12] I. Mező, *The  $r$ -Bell numbers*, Journal of Integer Sequences **14** (2011), Article 11.1.1.
- [13] I. Mező, *The dual of Spivey’s Bell number formula*, Journal of Integer Sequences **15** (2012), Article 12.2.4.

- [14] I. Mező and G. Nyul, *The  $r$ -Fubini and  $r$ -Eulerian numbers*, publikálás alatt.
- [15] M. Mihoubi and M. Rahmani, *The partial  $r$ -Bell polynomials*, arXiv:1308.0863.
- [16] T. S. Motzkin, *Sorting numbers for cylinders and other classification numbers*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **19** (1971), 167–176.
- [17] G. Nyul and G. Rácz, *The  $r$ -Lah numbers*, Discrete Mathematics, DOI: 10.1016/j.disc.2014.03.029.
- [18] J. Riordan, *Combinatorial Identities*, John Wiley & Sons, 1968.
- [19] J. Riordan, *Forests of labeled trees*, Journal of Combinatorial Theory **5** (1968), 90–103.
- [20] M. Z. Spivey, *A generalized recurrence for Bell numbers*, Journal of Integer Sequences **11** (2008), Article 08.2.5.

# 1. Függelék

Az elsőfajú és a másodfajú Stirling-számok, valamint a Bell-számok fontos szerepet játszanak a leszámláló kombinatorikában, véges sok elem páronként idegen ciklusokba való sorolásait vagy osztályozásait számolják össze. Ezeknek a számoknak többféle változatát és általánosítását definiálták, köztük az  $r$ -Stirling-számokat (egymástól függetlenül A. Z. Broder és R. Merris) illetve az  $r$ -Bell-számokat (Mező I.), ahol az első  $r$  elemnek különböző ciklusba vagy osztályba kell kerülnie.

Az elmúlt években tanulmányozott és a TDK dolgozatomban részletesen bemutatott kutatási témám a hasonló probléma vizsgálata abban az esetben, amikor az osztályokon belül számít az elemek sorrendje, azaz az elemeket rendezett osztályokba osztályozzuk. Megszorítás nélkül az ilyen rendezett osztályokba való osztályozásokat a Lah-számok számolják össze, a feladatom és céloom tehát az  $r$ -Lah-számok, az összegzett  $r$ -Lah-számok, valamint ezekhez kapcsolódóan az  $r$ -Lah-polinomok értelmezése és tulajdonságainak vizsgálata volt.

Az eredményeink bizonyításánál törekedtünk arra, hogy ahol csak lehetett, tisztán kombinatorikus gondolatmenettel lássuk be azokat. Ehhez több esetben teljesen új, de azonosságokként más-más ötletre volt szükségünk. Kiemeljük például, hogy az  $r$ -Lah-polinomok tulajdonságait is kombinatorikus úton vizsgáltuk úgy, hogy pozitív egész szám helyettesítésekor kombinatorikus jelentését adtuk, nevezetesen az osztályozás mellett a rendezett osztályokat ki is színeztük. A kombinatorikus eszközökön túl, más bizonyításainkban valószínűségszámítási eszközöket használtunk fel, differenciálegyenletet oldottunk meg a formális hatványsorok körében, vagy a polinomok gyökeinek vizsgálatához alkalmasan megválasztott függvényre alkalmaztuk a Rolle-féle közéértéktételt.