

Binom Thue egyenletek és alkalmazásaik
negyedfokú gyökbővítések monogenitásának
vizsgálatában

Remete László
III. matematika BSc

Témavezető: Gaál István

Debreceni Egyetem
Matematikai Intézet

2014. december 19.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Binom Thue egyenletek $\mathbb{Z}$ felett	6
2.1. Gyors algoritmus binom Thue egyenletek "kis" megoldásainak kiszámítására	6
2.2. Speciális esetek	8
2.3. Alkalmazás a $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{m})$ hatvány egész bázisaira	9
3. Relatív eset	11
3.1. Relatív Thue egyenletek "kis" megoldásainak keresése	11
3.1.1. Elemi becslések relatív Thue egyenletekre	11
3.1.2. A korlát redukálása	13
3.2. Relatív binom Thue egyenlet	14
3.3. Alkalmazás relatív hatvány egész bázis keresésére negyedfokú relatív bővítésben	14
3.3.1. Hatvány egész bázisok relatív negyedfokú bővítésekben	15
3.3.2. Kapcsolat a relatív binom Thue egyenletekkel	16
4. A számítások tapasztalatai	18
5. Megoldások táblázatai	19
5.1. Binom Thue egyenletek megoldásai (az abszolút esetben, $\mathbb{Z}$ felett)	19
5.2. Negyedfokú relatív binom Thue egyenletek megoldásai	26
5.2.1. Valós megoldások	26
5.2.2. Képzetes megoldások	26
1. Függelék	33

1. Bevezetés

Legyen F $n \geq 3$ fokú egész együtthatós, egy főegyütthatójú, homogén, irreducibilis polinom, $m \neq 0$ egész szám. Az

$$F(x, y) = m \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

egyenletet *Thue egyenlet*nek nevezzük Axel Thue norvég matematikus emlékére, aki 1909-ben bebizonyította, hogy az ilyen típusú egyenleteknek csak véges sok megoldása van [26]. Ez az eredmény nagy hatást gyakorolt a diofantikus egyenletek elméletének XX. és XXI. századi fejlődésére. Minden diofantikus egyenletekkel kapcsolatos jelentős módszer első formájában a Thue egyenletekre vonatkozó alkalmazásként jelent meg. A hatvanas években Alan Baker [1] effektív felső korlátot adott a megoldások abszolút értékére. A *Baker módszer* néven ismertté vált (és Fields medállal elismert) módszernek számos általánosítása született, ld. pl. [2].

Ezen korlátok azonban még a legegyszerűbb esetekben is $\exp(10^{20})$ nagyságrendűek, önmagukban nem alkalmasak a megoldások megkeresésére. A megoldások tényleges kiszámításához szükséges volt az $F(x, 1)$ polinom gyöke által generált algebrai számtest alapegységeinek, egész bázisának és m normájú elemeinek kiszámítása, mely különböző algebrai számelméleti programcsomagok felhasználásával lehetővé vált [6]. Ezen adatok és a Lenstra-Lenstra-Lovász-féle (LLL) bázis redukciós eljárás [20] alkalmas felhasználásával sikerült a Baker módszerrel nyert korlátokat numerikus úton redukálni. A redukció több száz, gyakran ezer-kétezer jegyű nagy pontosságú számokkal végzett numerikus eljárás, mely többszöri iterációval százas vagy ezres nagyságrendű redukált korlátokat eredményez az x, y megoldásokra. Ilyen módon sikerült Thue egyenletek teljes megoldását kiszámítani több szerzőnek, pl. B. de Weger [27], Pethő Attila és R.Schulenberg [23], N.Smart [24], Y.Bilu és G.Hanrot [5], ld. még Gaál István [8].

A Thue egyenletek teljes megoldása egy rendkívül számításigényes eljárás, ugyanakkor a nagyszámú megoldott példa azt mutatja, hogy ilyen típusú egyenleteknek általában csak nagyon kicsi, egy-két, maximum háromjegyű megoldásai vannak. Ezért volt fontos Pethő Attila [22] módszere, mely a lánc tört algoritmus felhasználásával egyszerűen és nagyon gyorsan alkalmazható eljárást adott a Thue egyenletek kis megoldásainak kiszámítására. Mivel ez a módszer még a 10^{500} korlát alatti "kis" megoldásokat is hatékonyan kiszámítja (és kiderül, hogy tényleg csak egy-két jegyű megoldások vannak), ezért nagy valószínűséggel az összes megoldást szolgáltatja.

A Thue egyenletek jól ismert és sokat vizsgált speciális típusa a *binom Thue egyenletek*, azaz az

$$x^n - my^n = \pm 1, \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

típusú egyenletek, ahol m adott egész szám, úgy, hogy a bal oldali polinom irreducibilis. Ilyen típusú egyenletekre M.Bennett [4], Bázsó András, Bérczes Attila, Győry Kálmán, Pintér Ákos [3], Győry Kálmán és Pintér Ákos [18] érték el többek között eredményeket.

A dolgozat egyik fő eleme a Pethő Attila féle [22] módszer alkalmazása binom Thue egyenletekre. A binom Thue egyenletek speciális tulajdonságait kihasználva a módszert élesíteni tudjuk, ami alkalmassá teszi rendkívül nagy számú binom Thue egyenlet megoldására, ez a 2.1 fejezetben található. Szuperszámítógép felhasználásával $n = 3, 4, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$ kitevőkre $2 \leq m \leq 10^7$ mellett kiszámítjuk az összes x, y megoldást, mely kisebb, mint 10^{500} . A megoldások listáit az 5.1 fejezet tartalmazza.

Az algebrai számelmélet klasszikus problémája annak vizsgálata, hogy egy K algebrai számtest *monogén*-e, azaz az egészek $\mathbb{Z}_K$ gyűrűje előáll-e $\mathbb{Z}[\alpha]$ egyszerű gyűrűbővítésként ld. Győry Kálmán [17], W.Narkiewicz [21], Gaál István [8]. Ebben az esetben K egész bázisa $1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}$ alakú *hatvány egész bázis*. A hatvány egész bázisok kiszámítása diofantikus egyenletek, ún. *index forma egyenletek* megoldására vezethető vissza (ld. [8]).

A $K = \mathbb{Q}(\sqrt[n]{m})$ típusú negyedfokú gyökbővítések esetén kiderül, hogy az index forma egyenlet negyedfokú binom Thue egyenletre redukálható. Ilyen módon az 5.1. fejezetbeli számítási eredményeket felhasználva a 2.3. fejezetben (bizonyos feltételek mellett) $2 \leq m \leq 10^7$ -re megadjuk a negyedfokú gyökbővítések hatvány egész bázisainak összes, 10^{1000} -nél kisebb koordinátájú generátorát. Ezen listák nagy valószínűséggel az összes megoldást tartalmazzák.

Legyen α az $F(X, 1)$ polinom gyöke, $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Ekkor a fenti Thue egyenlet

$$N_{K/\mathbb{Q}}(x - \alpha y) = m$$

alakba írható. Ha ezen Thue egyenletet nem az egész számok $\mathbb{Z}$ gyűrűje fölött, hanem valamely algebrai számtest egészeinek gyűrűje fölött tekintjük, akkor *relatív Thue egyenlet*nek nevezzük.

Legyen L algebrai számtest, jelölje $\mathbb{Z}_L$ az L egészeinek gyűrűjét. Legyen α legalább harmadfokú algebrai egész L fölött, $K = L(\alpha)$, legyen $\mu \neq 0$ algebrai egész L -ben. A

$$N_{K/L}(x - \alpha y) = \mu, \quad x, y \in \mathbb{Z}_L \quad (1)$$

relatív Thue egyenlet teljes megoldására Gaál István és M.Pohst [13] dolgozott ki algoritmust a Baker módszeren és az LLL-en alapuló redukciós eljárás felhasználásával. Pethő Attila módszerét Gaál István [9] terjesztette ki relatív Thue egyenletek "kis" megoldásainak kiszámítására. Ez a módszer kifejtésre kerül a 3.1 fejezetben.

A 3.2 fejezet speciális másodfokú algebrai számtestek feletti negyedfokú relatív binom Thue egyenletek megoldásait tartalmazza $0 \leq m \leq 5000$ -re.

A 3.3 fejezetben másodfokú számtestek feletti relatív negyedfokú gyökbővítések hatvány egész bázisainak kiszámítása található. Hasonlóan, mint az abszolút esetben, a probléma visszavezethető a másodfokú testek feletti negyedfokú binom Thue egyenletekre, így a 3.2 fejezet eredményeinek felhasználásával megadhatóak bizonyos másodfokú testek feletti negyedfokú gyökbővítések relatív hatvány egész bázisai.

A dolgozat 2.1, 2.2, 2.3, 3.2, 3.3 fejezetei saját eredmények, melyek megjelentek illetve megjelenés alatt állnak a [14], [15], [16] dolgozatokban.

2. Binom Thue egyenletek $\mathbb{Z}$ felett

Ebben a fejezetben

$$x^n - my^n = \pm 1, \quad x, y \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

típusú binom Thue egyenletek "kis" megoldásainak kiszámításával és a megoldások negyedfokú gyökbővítések hatvány egész bázisaira való alkalmazásával foglalkozunk.

2.1. Gyors algoritmus binom Thue egyenletek "kis" megoldásainak kiszámítására

Ebben a részben Pethő Attila [22] cikkének módszerét alkalmazzuk binom Thue egyenletekre. A binom Thue egyenletek speciális tulajdonságait kihasználva élesebb becsléseket vezetünk le, ami az algoritmust hatékonyabbá teszi.

Legyen n egy tetszőleges páratlan prím (az $n = 4$ esetet később vizsgáljuk). Tegyük fel, hogy m olyan, hogy a (2) egyenlet bal oldala irreducibilis. A cél megtalálni az összes olyan $x, y \in \mathbb{Z}$ megoldását a (2) egyenletnek, amire $\max(|x|, |y|) < C$. Numerikus számításainkat $C = 10^{500}$ választásával végeztük.

Legyen $\zeta = \exp(2\pi i/n)$ n -edik egységgyök, és x, y egy tetszőleges megoldása (2)-nek, továbbá legyen

$$\beta_j = x - \zeta^{j-1} \sqrt[n]{m} y$$

minden $j = 1, \dots, n$ esetén. Ekkor a (2) egyenlet a következő alakban írható:

$$\beta_1 \cdots \beta_n = \pm 1 \quad (3)$$

Feltehető, hogy $y > 0$, hiszen a (2)-nek (x, y) és $(-x, -y)$ egyaránt megoldása, csupán a jobb oldal lesz $+1$ helyett -1 vagy fordítva. Másrészt ha $y = 0$, akkor a triviális $x = \pm 1$ megoldást kapjuk.

Mivel n páratlan, ezért $\beta_2, \dots, \beta_n$ mind komplex számok, melyeknek a képzetes része $\Im(\zeta^{j-1}) \sqrt[n]{m} y \neq 0$, így

$$|\beta_j| = |x - \zeta^{j-1} \sqrt[n]{m} y| \geq |\Im(\zeta^{j-1})| \sqrt[n]{m} y > 0$$

bármely $j = 2, \dots, n$ esetén. Ez azt jelenti, hogy

$$|\beta_1| = |x - \sqrt[n]{m} y| \leq \frac{1}{|\beta_2 \cdots \beta_n|} \leq \frac{1}{c_1 y^{n-1}}$$

és ebből következően

$$\left| \sqrt[n]{m} - \frac{x}{y} \right| \leq \frac{1}{c_1 y^n} \quad (4)$$

ahol $c_1 = (\sqrt[n]{m})^{n-1} \cdot c_2$ és $c_2 = \prod_{j=2}^n |\Im(\zeta^{j-1})|$.

Nyilvánvaló, hogy $(x, y) = 1$, így ha a (4) egyenletben található jobb oldali felső becslésre teljesül, hogy

$$\frac{1}{c_1 y^n} < \frac{1}{2y^2}$$

vagyis

$$y > \left(\frac{2}{c_1} \right)^{\frac{1}{n-2}} \quad (5)$$

akkor (4)-ből következik, hogy

$$\left| \sqrt[n]{m} - \frac{x}{y} \right| < \frac{1}{2y^2}$$

és ekkor a Legendre tétel garantálja, hogy $\frac{x}{y}$ az $\sqrt[n]{m}$ egy közelítő törtje lesz.

Legyen ez $\frac{h_j}{k_j}$, a j -edik lánc törtjegy pedig a_j . Ekkor a fentiekből, és a lánc-törtökre jól ismert összefüggés alapján:

$$\frac{1}{(a_{j+1} + 2)y^2} = \frac{1}{(a_{j+1} + 2)k_j^2} < \left| \sqrt[n]{m} - \frac{h_j}{k_j} \right| = \left| \sqrt[n]{m} - \frac{x}{y} \right|.$$

Legyen $A = \max_{1 \leq i \leq s} a_i$, ahol k_s az első közelítő tört nevező, ami nagyobb, mint C . A fenti becsléseket kombinálva, kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(A + 2)y^2} < \left| \sqrt[n]{m} - \frac{x}{y} \right| \leq \frac{1}{c_1 y^n}$$

amiből, pedig

$$y < c_3 = \left(\frac{A + 2}{c_1} \right)^{\frac{1}{n-2}}.$$

Ezek alapján a C -nél kisebb megoldások meghatározásához ki kell számítanunk A -t, majd a c_3 korlátot, és a c_3 -nál kisebb nevezőjű közelítő törtöket behelyettesítéssel ellenőrizni. Még külön meg kell vizsgálnunk azon y értékeket melyek nem elégítik ki az (5) feltételt.

2.2. Speciális esetek

1. Legyen $n \in \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$. Egyszerű számolás mutatja, hogy az (5) feltétel egyenértékű az alábbival:

$$y > \left(\frac{2}{c_2}\right)^{\frac{1}{n-2}} m^{-\frac{n-1}{n(n-2)}} \quad (6)$$

Amennyiben m elég nagy, a (6) feltétel teljesül minden $y \geq 1$ -re. Adott n esetén ez a feltétel a következő m -ekre nem teljesül:

n	
3	$2 \leq m \leq 4$
5	$2 \leq m \leq 10$
7	$2 \leq m \leq 29$
11	$2 \leq m \leq 314$
13	$2 \leq m \leq 1078$
17	$2 \leq m \leq 13489$
19	$2 \leq m \leq 48699$
23	$2 \leq m \leq 652798$
29	$2 \leq m \leq 796021$

Ezen m -ek esetén tesztelni kell az összes olyan y -t, melyek nem elégítik ki a (6) feltételt. Könnyű számolás után kiderül, hogy ez csupán az $y = 1$ eset vizsgálatát jelenti, ami igen gyorsan megy.

2. Ha $n = 4$ akkor a negyedik hatványra emelés miatt lényegtelen, hogy x és y előjele milyen, így feltehető, hogy most x is pozitív. Jelen esetben (2) a következőképpen bomlik fel:

$$(x - \sqrt[4]{m} y)(x + \sqrt[4]{m} y)(x - i\sqrt[4]{m} y)(x + i\sqrt[4]{m} y) = \pm 1$$

Mivel most $x, y > 0$, ezért $|x + \sqrt[4]{m} y| \geq \sqrt[4]{m} y$, másrészt az előző részhez hasonlóan, itt is teljesül, hogy $|x \pm i\sqrt[4]{m} y| \geq \sqrt[4]{m} y$, így a becslés a következőképpen alakul:

$$\left| \sqrt[4]{m} - \frac{x}{y} \right| \leq \frac{1}{(\sqrt[4]{m})^3 y^4} < \frac{1}{2y^2}$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség nyilvánvalóan teljesül minden $y \geq 1$ esetén. Innentől, pedig alkalmazható az ismerttetett lánc törtes eljárás.

A fenti binom Thue egyenletek megoldásait n szerint csoportosítva az 5.1 rész tartalmazza. A táblázatokban csupán azok a megoldások szerepelnek, amelyeknél $y > 0$ (valamint $n = 4$ esetén $x, y > 0$), így az összes megoldást valójában az $(x, y); (-x, -y)$ párok szolgáltatják (értelemszerűen $n = 4$ esetén az $(x, y); (-x, y); (x, -y); (-x, -y)$ párok). Ezen rész eredményei megjelenés alatt állnak [15]-ben.

2.3. Alkalmazás a $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{m})$ hatvány egész bázisaira

A hatvány egész bázisok generátorainak keresése az index forma egyenlet megoldásával ekvivalens, ami negyedfokú számtestek esetében hatodfokú és háromváltozós. Gaál István, Pethő Attila és M. Pohst [10] (ld. még Gaál István [8]) tételét felhasználva ez harmad, illetve negyedfokú Thue egyenletekké redukálható, amik már jól kezelhetőek ismert eszközökkel. Legyen ugyanis $K = \mathbb{Q}(\xi)$, ahol ξ minimálpolinomja $f(x) = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 \in \mathbb{Z}[x]$. Ekkor egy tetszőleges $\vartheta \in \mathbb{Z}_K$ elemet a következő alakban reprezentálhatunk:

$$\vartheta = \frac{1}{d}(a + x\xi + y\xi^2 + z\xi^3) \quad (7)$$

ahol az a, x, y, z együtthatók egészek, és d alkalmas rögzített nevező. Legyen $n = I(\xi) = (\mathbb{Z}_K^+ : \mathbb{Z}[\xi]^+)$, a ξ indexe, valamint

$$F(u, v) = u^3 - a_2u^2v + (a_1a_3 - 4a_4)uv^2 + (4a_2a_4 - a_3^2 - a_1^2a_4)v^3$$

egy $\mathbb{Z}$ feletti kétváltozós harmadfokú forma, és

$$Q_1(x, y, z) = x^2 - xya_1 + y^2a_2 + xz(a_1^2 - 2a_2) + yz(a_3 - a_1a_2) + z^2(-a_1a_3 + a_2^2 + a_4),$$

$$Q_2(x, y, z) = y^2 - xz - a_1yz + z^2a_2$$

háromváltozós másodfokú formák $\mathbb{Z}$ felett.

A [10] fő tétele szerint:

1. Lemma. *Ha a (7)-beli ϑ hatvány egész bázist generál K -ban, akkor létezik olyan $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ megoldása az*

$$F(u, v) = \pm \frac{d^6}{n} \quad (8)$$

egyenletnek, hogy

$$u = Q_1(x, y, z) \quad (9)$$

$$v = Q_2(x, y, z) \quad (10)$$

Alkalmazzuk ezt a lemmát negyedfokú gyökbővítésekre, azaz a $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ testre, ahol $\alpha = \sqrt[4]{m}$. Ebben az esetben az $F(u, v), Q_1, Q_2$ formák jelentősen egyszerűsödnek. A.Hameed, T.Nakahara, S.M.Husnine és S.Ahmad [19] tétele szerint ha $m \neq -1$ és $m \equiv 2, 3 \pmod{4}$, akkor $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$ egész bázisa K -nak, ami azt is jelenti, hogy $n = I(\alpha) = 1$ és bármely $\vartheta \in \mathbb{Z}_K$ elem (7) formában úgy reprezentálható, hogy $d = 1$. Így tehát (8), (9) és (10) a következő alakban írható:

$$u(u^2 + 4mv^2) = \pm 1 \quad (11)$$

$$x^2 - mz^2 = u \quad (12)$$

$$y^2 - xz = v \quad (13)$$

Ahhoz, hogy meghatározzuk a K test hatvány egész bázisait, meg kell oldanunk ezt az egyenletrendszert. Ekkor (11)-ből következik, hogy $u = \pm 1$ és $u^2 + 4mv^2 = \pm 1$, amiből pedig világos, hogy $v = 0$.

Ha most $m < 0$, akkor (12)-ből adódóan csak $x = \pm 1$ és $z = 0$ lehetséges, és ekkor (13)-ból $y = 0$ eredményt kapjuk, így ebben az esetben csak a $\vartheta = \alpha$ lesz a hatvány egész bázisok egyetlen generátora (természetesen csak ekvivalencia erejéig, mert az $a \in \mathbb{Z}$ szám (7)-ben tetszőlegesen megválasztható).

Amennyiben $m > 1$, a (12) egyenletből következik, hogy x és z legnagyobb közös osztója 1, továbbá (13) $y^2 = xz$ alakban írható, vagyis két relatív prím szám szorzata négyzetszám. Ez csak úgy lehetséges, ha x és y maguk is négyzetszámok (megjegyzendő, hogy (13) miatt, x és z előjele megegyezik, és ha (x, y, z) megoldás, akkor $(-x, y, -z)$ is megoldás, tehát feltehető, hogy x és z pozitívak).

Legyen $x = a^2$ és $z = b^2$, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$. Ekkor a (12) egy szép binom Thue egyenletté alakul:

$$a^4 - mb^4 = \pm 1 \quad (14)$$

Most az előző fejezetben szereplő megoldásokat felhasználva a megfelelő m értékeknél, elvégezve az $x = a^2, y = \pm ab, z = b^2$ helyettesítéseket (7)-ben, megkapjuk az összes 10^{1000} -nél kisebb koordinátájú generátorát a hatvány egész bázisoknak (előjeltől eltekintve). Ezen rész eredményei megjelenés alatt állnak [14]-ben.

3. Relatív eset

Ebben a fejezetben (1) típusú relatív Thue egyenleteket vizsgálunk.

3.1. Relatív Thue egyenletek "kis" megoldásainak keresése

A kis megoldások kiszámítására vonatkozó Pethő Attila-féle módszer számos alkalmazással rendelkezik. A relatív esetre alkalmazható hasonló módszert a közelmúltban Gaál István adott [9] cikkében. Az eljárás a lánc tört algoritmus helyett az LLL bázis redukción alapul. A "kis" megoldásokra adott (kb 10^{500}) korlátot több lépésben redukáljuk. Tekintettel arra, hogy a módszert a 3.2 fejezetben felhasználjuk, a következő részben röviden ismertetem.

3.1.1. Elemi becslések relatív Thue egyenletekre

Jelölje $\mathbb{Z}_L$ az L algebrai számtest egészeinek gyűrűjét. Legyen α egy algebrai egész L fölött, és $K = L(\alpha)$. Legyen $0 \neq \mu \in \mathbb{Z}_L$, és tekintsük a következő *relatív Thue egyenletet*

$$N_{K/L}(X - \alpha Y) = \mu \quad X, Y \in \mathbb{Z}_L. \quad (15)$$

Legyen $m = [L : \mathbb{Q}]$ és $(1, \omega_2, \dots, \omega_m)$ az L egészeinek egy bázisa, valamint jelöljük egy $\gamma \in L$ elem konjugáltjait $\gamma^{(j)}$ -vel ($j = 1, \dots, m$).

Az α elem foka az L fölött legyen n , a relatív definiáló polinomja pedig $f(x)$. Ekkor $\alpha^{(jk)}$, ($k = 1, \dots, n$) jelölje az α relatív konjugáltjait $L^{(j)}$ fölött, vagyis az $f(x)$ j -edik konjugáltjának gyökeit. Ugyanígy $\gamma^{(jk)}$ -val jelöljük egy tetszőleges $\gamma \in K$ elem $\alpha^{(jk)}$ -nak megfelelő konjugáltjait is.

Feltesszük, hogy $n > 2m$ ha K teljesen valós, és $n > m$, ha nem az. Ez a feltétel fogja biztosítani a redukciós eljárás hatékonyságát.

A cél, meghatározni a (15) összes megoldását, amelyekre teljesül, hogy $|\bar{Y}| < C$, ahol C egy adott konstans pl. 10^{100} vagy 10^{500} . (Egy ϑ algebrai szám esetén $|\bar{\vartheta}|$ jelöli a ϑ méretét, azaz konjugáltjai abszolút értékeinek maximumát.) Tetszőleges X és Y elemet a következő alakban írhatunk:

$$X = x_1 + \omega_2 x_2 + \dots + \omega_m x_m, \quad Y = y_1 + \omega_2 y_2 + \dots + \omega_m y_m,$$

ahol $x_i, y_i \in \mathbb{Z}$ ($1 \leq i \leq m$). Legyen ekkor $A = \max(\max |x_i|, \max |y_i|)$.

Az algoritmus azon a jól ismert tényen alapul, hogy a (15) egy tetszőleges

$X, Y \in \mathbb{Z}_L$ megoldása esetén, a $\beta = X - \alpha Y$ valamelyik konjugáltja nagyon kicsi feltéve, hogy Y nem túl kicsi.

Szükségünk lesz a következő jelölésekre:

$$c_{hji} = \frac{1}{2} |(\alpha^{(hj)} - \alpha^{(hi)})|, \quad (1 \leq h \leq m, 1 \leq i, j \leq n, i \neq j)$$

$$c_{hi} = \frac{|\mu^{(h)}|}{\prod_{1 \leq j \leq n, j \neq i} c_{hji}}, \quad (1 \leq h \leq m, 1 \leq i \leq n)$$

$$c_1 = \max_{h,j,i} \frac{\sqrt[n]{|\mu^{(h)}|}}{c_{hji}},$$

ahol a maximumot $1 \leq h \leq m, 1 \leq i, j \leq n, i \neq j$ értékekre vesszük.

Legyen S az az $m \times m$ -es mátrix, amelynek a j -edik sorában $1, \omega_2^{(j)}, \dots, \omega_m^{(j)}$ szerepel. Jelöljük c_2 -vel az S^{-1} sornormáját, vagyis a maximális összegét egy sorban lévő elemek abszolút értékeinek.

Legyen

$$c_3 = \frac{\sqrt[n]{|\mu|}}{|\alpha|},$$

$$c_4 = \max(c_1, c_3),$$

$$c_5 = 2c_2|\alpha|$$

és

$$d_{hi} = c_{hi}c_5^{n-1}, \quad (1 \leq h \leq m, 1 \leq i \leq n).$$

Végül legyen C egy adott konstans. Ekkor a következő tételek érvényesek (ld. [9]).

1. Tétel. Ha $(X, Y) \in \mathbb{Z}_M^2$ egy olyan megoldása (15)-nek, amelyre $|\overline{Y}| > c_3$, akkor

$$A \leq c_5 \cdot |\overline{Y}|. \quad (16)$$

2. Tétel. Ha $(X, Y) \in \mathbb{Z}_M^2$ egy olyan megoldása (15)-nek, amelyre $|\overline{Y}| > c_4$, akkor létezik h, i ($1 \leq h \leq m, 1 \leq i \leq n$), úgy, hogy

$$|\beta^{(hi)}| \leq d_{hi}A^{1-n}. \quad (17)$$

3.1.2. A korlát redukálása

A következőkben röviden ismertetem azt az eljárást, amely a megoldások méretére adott C korlátot a A.K.Lenstra, H.W.Lenstra Jr. és Lovász László [20] által kidolgozott LLL algoritmus felhasználásával redukálja.

Legyen h, i ($1 \leq h \leq m$, $1 \leq i \leq n$) olyan indexek, melyekre teljesül a (17) egyenlőtlenség, vagyis

$$|x_1 + \omega_2^{(h)} x_2 + \dots + \omega_m^{(h)} x_m - \alpha^{(hi)} y_1 - \alpha^{(hi)} \omega_2^{(h)} y_2 - \dots - \alpha^{(hi)} \omega_m^{(h)} y_m| \leq d_{hi} A^{1-n} \quad (18)$$

Tekintsünk most egy $\mathcal{L}$ rácsot, amelyet a következő mátrix oszlopai generálnak:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline H & H\Re(\omega_2^{(h)}) & \dots & H\Re(\omega_m^{(h)}) & H\Re(\alpha^{(hi)}) & H\Re(\alpha^{(hi)}\omega_2^{(h)}) & \dots & H\Re(\alpha^{(hi)}\omega_m^{(h)}) \\ H & H\Im(\omega_2^{(h)}) & \dots & H\Im(\omega_m^{(h)}) & H\Im(\alpha^{(hi)}) & H\Im(\alpha^{(hi)}\omega_2^{(h)}) & \dots & H\Im(\alpha^{(hi)}\omega_m^{(h)}) \end{array} \right)$$

ahol H egy meghatározott konstans.

A teljesen valós esetben az utolsó sort elhagyhatjuk. Alkalmazzuk az LLL-algoritmust az $\mathcal{L}$ -re, és a redukált rács első vektorát jelöljük b_1 -el. Legyen továbbá A_0 egy adott pozitív szám.

3. Tétel. ([9]) *Tegyük fel, hogy $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m$ olyan egészek, melyekre teljesül (18). Ha valamely $A \leq A_0$ konstans esetén b_1 -re igaz, hogy*

$$|b_1| \geq \sqrt{(2m+1)2^{2m-1}} \cdot A_0,$$

akkor

$$A \leq \left(\frac{d_{hi} H}{A_0} \right)^{\frac{1}{n-1}} \quad (19)$$

A tétel első alkalmazásakor $A_0 = C$ -t választunk. Alkalmas H esetén a (3)-ban szereplő A kisebb lesz, mint A_0 . A redukációs lépést általában 5-6 alkalommal megismételjük, amíg a redukált korlát lényegesen kisebb, mint az előző.

Ha H -t elég nagyra választjuk, akkor a b_1 hosszára tett feltétel teljesülni fog. Tapasztalatok szerint H -ra alkalmas választás a komplex esetben A_0^m , a teljesen valós esetben A_0^{2m} . A redukált korlát az előbbi tétel szerint a komplex esetben (a numerikus példák erre az esetre vonatkoznak) $A_0^{\frac{m-1}{n-1}}$ nagyságrendű.

3.2. Relatív binom Thue egyenlet

A dolgozat ezen fejezetében a relatív Thue egyenletek "kis" megoldásainak kiszámítására szolgáló előbbi eljárást relatív binom Thue egyenletek megoldására használjuk. A későbbi (3.3 fejezetbeli) alkalmazások miatt az alaptest olyan képzetes másodfokú számtestet lesz, mely egészeinek gyűrűjében érvényes az egyértelmű prímfaktorizáció tétele. Ezen számtestek $L = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$ alakúak, ahol $d \in \{1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163\}$. (ld. H.M.Stark [25]; A.Baker [1]).

Az előző fejezetbeli módszer alkalmazásával a fenti d értékekre, minden $\zeta \in L$ egység esetén, $1 \leq m \leq 5000$ mellett kiszámítottuk az

$$X^4 - mY^4 = \zeta, \quad X, Y \in \mathbb{Z}_L$$

egyenlet összes olyan megoldását, melyre $\max(|X|, |Y|) < 10^{250}$.

Mivel a megoldások L -beliek, ezért célszerű bevezetni az $\omega = \frac{1+i\sqrt{d}}{2}$, ha $-d \equiv 1 \pmod{4}$ és $\omega = i\sqrt{d}$, ha $-d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ jelöléseket, hiszen jól ismert tény, hogy $\mathbb{Z}_L$ egészeinek egy bázisa ilyen választással $\{1, \omega\}$ lesz.

A megoldások listáit az 5.2 rész tartalmazza. Ezen eredmények megjelenés alatt állnak a [16] cikkben.

3.3. Alkalmazás relatív hatvány egész bázis keresésére negyedfokú relatív bővítésben

A abszolút ($\mathbb{Z}$ fölötti) esethez hasonlóan a relatív binom Thue egyenletek megoldása alkalmazható negyedfokú gyökbővítésekben relatív hatvány egész bázisok kiszámítására.

Legyen K n -edfokú bővítése az L algebrai számtestnek. Ha $\mathbb{Z}_K$ minden eleme $\beta = X_0 + X_1\alpha + \dots + X_{n-1}\alpha^{n-1}$ alakban írható, ahol $X_0, X_1, \dots, X_{n-1} \in \mathbb{Z}_L$, akkor azt mondjuk, hogy α relatív hatvány egész bázist generál K -ban L fölött.

3.3.1. Hatvány egész bázisok relatív negyedfokú bővítésekben

Ahhoz, hogy alkalmas egész bázisban végezhessek számításainkat, tételezzük fel, hogy $d > 1$ egy négyzetmentes egész, amelyre $-d \equiv 1 \pmod{4}$. Ekkor ugyanis, az $L = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$ test diszkriminánsa $-d$, és az egészek gyűrűjének egy bázisa $\{1, \omega\}$, ahol $\omega = (1 + i\sqrt{d})/2$.

Legyen m egy pozitív egész, $\xi = \sqrt[4]{m}$, és $M = \mathbb{Q}(\xi)$. Tegyük fel, hogy m négyzetmentes, és $m \equiv 2, 3 \pmod{4}$. Ismét A.Hameed, T.Nakahara, S.M.Husnine és S.Ahmad [19] eredményét használva, $\{1, \xi, \xi^2, \xi^3\}$ egész bázis lesz M -ben, valamint $D_M = -256m^3$.

Ismert ([21], [7]), hogy ha $(D_L, D_M) = 1$, akkor

$$\{1, \xi, \xi^2, \xi^3, \omega, \omega\xi, \omega\xi^2, \omega\xi^3\}$$

a $K = LM = \mathbb{Q}(i\sqrt{d}, \sqrt[4]{m})$ egészeinek egy bázisa lesz.

Vagyis összességében feltesszük, hogy $-d \equiv 1 \pmod{4}$, $1 < m \equiv 2, 3 \pmod{4}$ és $(d, m) = 1$. Emellett a számításainkban kihasználjuk, hogy $\mathbb{Z}_L$ -ben érvényes az egyértelmű prímfaktorizáció, így még azt is feltesszük, hogy $d \in \{1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163\}$.

Ekkor egy tetszőleges $\alpha \in \mathbb{Z}_K$ elemet a következő alakban írhatunk:

$$\alpha = H + X\xi + Y\xi^2 + Z\xi^3 \quad (20)$$

ahol $H, X, Y, Z \in \mathbb{Z}_L$. A következőekben felhasználjuk Gaál István, Pethő Attila és M.Pohst [12] eredményét a K/L relatív negyedfokú bővítésre vonatkozóan:

2. Lemma. *Legyen*

$$F(U, V) = U(U^2 - 4mV^2), \quad Q_1 = X^2 - mZ^2, \quad Q_2 = Y^2 - XZ.$$

Ha a (20)-beli α relatív hatvány egész bázist generál K -ban az L felett, akkor létezik $U, V \in \mathbb{Z}_L$ és $\nu \in U_L$ egység úgy, hogy

$$N_{K/L}(F(U, V)) = \nu$$

$$Q_1(X, Y, Z) = U$$

$$Q_2(X, Y, Z) = V.$$

3.3.2. Kapcsolat a relatív binom Thue egyenletekkel

Ebben a részben azt fogjuk megmutatni, hogy a 2. Lemma segítségével, a relatív hatvány egész bázisok meghatározása L fölött egyenértékű egy negyedfokú relatív binom Thue egyenlet megoldásával. A következő tétel a [14] cikkben megjelent.

4. Tétel. *Ha $\alpha = H + X\xi + Y\xi^2 + Z\xi^3$ hatvány egész bázist generál K -ban L fölött, akkor létezik $(X_0, Y_0) \in \mathbb{Z}_L^2$ megoldása a*

$$X_0^4 - mY_0^4 = \zeta$$

relatív Thue egyenletnek (ahol $\zeta \in L$ egység), úgy hogy

$$X = X_0^2\varepsilon_0, \quad Y = \pm X_0Y_0\varepsilon_0, \quad Z = Y_0^2\varepsilon_0. \quad (21)$$

Bizonyítás Tegyük fel, hogy $\alpha = H + X\xi + Y\xi^2 + Z\xi^3$ hatvány egész bázist generál K -ban L fölött. Ekkor a lemma első egyenletéből következően:

$$U(U^2 - 4mV^2) = \nu$$

ahol $\nu \in L$ egység. Ebből adódik, hogy $U = \eta$ szintén egység L -ben, valamint

$$V^2 = \frac{\eta^2 - \nu/\eta}{4m}$$

ami pedig mutatja, hogy V értéke kizárólag 0 lehet.

Mivel feltettük, hogy $\mathbb{Z}_L$ -ben érvényes az egyértelmű prímfaktorizáció, ezért a $Q_1(X, Y, Z) = X^2 - mZ^2 = U = \eta$ összefüggésből azt olvashatjuk le, hogy X és Y relatív prímelek $\mathbb{Z}_L$ -ben. Ekkor a $Q_2(X, Y, Z) = Y^2 - XZ = V = 0$ egyenletet átrendezve: $Y^2 = XZ$. Itt kihasználva, hogy X és Y relatív prímelek, kapjuk, hogy $X = A^2\varepsilon_x, Z = B^2\varepsilon_y$ megfelelő $A, B \in \mathbb{Z}_L$ számokkal, és $\varepsilon_x, \varepsilon_y \in \mathbb{Z}_L$ egységekkel, melyekre teljesül, hogy $\varepsilon_x\varepsilon_y = \varepsilon^2$. Ezt behelyettesítve Q_1 -be:

$$A^4\varepsilon_x^2 - mB^4\varepsilon_y^2 = \eta$$

vagyis

$$(A\varepsilon_x)^4 - mB^4\varepsilon_x^2\varepsilon_y^2 = \eta\varepsilon_x^2$$

és végül $\varepsilon_x\varepsilon_y = \varepsilon^2$ miatt:

$$(A\varepsilon_x)^4 - m(B\varepsilon)^4 = \eta\varepsilon_x^2.$$

Így $X_0 = A\varepsilon_x$ és $Y_0 = B\varepsilon$ választással elérkeztünk a relatív binom Thue egyenletünkhöz:

$$X_0^4 - mY_0^4 = \zeta \quad X_0, Y_0 \in \mathbb{Z}_L \quad (22)$$

Összesítve az eredményeket X, Y, Z -re:

$$X = A^2\varepsilon_x = X_0^2\varepsilon_x^{-1},$$

$$Z = B^2\varepsilon_y = \frac{Y_0^2}{\varepsilon^2}\varepsilon_y = Y_0^2\varepsilon_x^{-1}$$

és végül

$$Y = \pm\sqrt{XZ} = \pm X_0Y_0\varepsilon_x^{-1}.$$

Tetszőleges ε_x -hez nyilvánvalóan tudunk keresni olyan ε_y -t, hogy a szorzatuk négyzetszám legyen., így innen $\varepsilon_0 = \varepsilon_x^{-1}$ választással adódik a tétel.

□

Használva a relatív binom Thue egyenlet megoldásait, megkonstruálható a K test L fölötti hatvány egész bázisainak összes generátora.

5. Tétel. Legyen $d \in \{3, 7, 11, 19, 43, 67, 163\}$, $L = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$, $\omega = (1 + i\sqrt{d})/2$. Ekkor $1 < m \leq 5000$, $m \equiv 2, 3 \pmod{4}$, $(d, m) = 1$ esetén az összes $\alpha = H + X\xi + Y\xi^2 + Z\xi^3$ elem, amely hatvány egész bázist generál K -ban L fölött, és $\max(|X|, |Y|, |Z|) < 10^{500}$, a következő módon adott:

$$H \in \mathbb{Z}_L, \quad X = X_0^2\varepsilon_0, \quad Y = \pm X_0Y_0\varepsilon_0, \quad Z = Y_0^2\varepsilon_0$$

ahol H tetszőleges, ε_0 egység L -ben, és (X_0, Y_0) pedig az $X_0^4 - mY_0^4 = \zeta$ (ζ egység L -ben) relatív binom Thue egyenlet megoldása, azaz (X_0, Y_0) -at tartalmazza az 5.2-ben található lista.

Ez a 4. Tétel közvetlen következménye.

A fejezet eredményei megjelenés alatt állnak a [16] cikkben.

4. A számítások tapasztalatai

A programokat Linux alatt Maple-ben implementáltuk és futtattuk.

$\mathbb{Z}$ fölötti *binom Thue egyenletek* megoldása során 1200 jegy pontosságot használtunk. Minden kitevő esetén a kb. 10^7 egyenlet megoldása a Debrecen-Szeged-Pécs-Budapest szuperszámítógép rendszeren futott, a futási idő egy node-ra számítva 150 óra volt, ami azt jelenti, hogy egyenletenként 0.05 mp volt a futási idő.

A *komplex másodfokú számtestek feletti relatív binom Thue egyenletek* megoldása során a programokat időtakarékoság céljából több részre osztottuk.

Elsőként megkerestük az összes olyan egyenletet amelynek létezik 200-nál kisebb koordinátákkal rendelkező megoldása. Ennek érdekében x_1, y_1 -et $[0, 200]$ között, x_2, y_2 -t $[-200, 200]$ között futtatuk (a 4-es kitevő miatt feltehető, hogy x_1, y_1 nem negatív).

Adott x_1, y_1, x_2, y_2 esetén a relatív binom Thue egyenletünk mindkét oldalát megszoroztuk a konjugáltjával, és így a bal oldalon egy egész együtthatós, m -ben másodfokú egyenletet kaptunk, amelynek a gyökeiről el kellett dönteni, hogy egész vagy sem. Az egész aritmetika miatt ez a 6 400 000 000 lépéses ciklus rendkívül gyorsan működött, egy átlagos számítógépen (egy processzorra számítva) kb 20 óra alatt futott le.

Ezek után a redukciót már elegendő volt addig futtatni, amíg a korlát 200 alá nem ért, ugyanis ezeket a megoldásokat már összegyűjtöttük, és csak vissza kellett keresni a listából.

A számítás ilyen tagolásával sok időt nyertünk, figyelembe véve, hogy nem kellett minden m esetén lefuttatni a redukált korlát alatti megoldások keresését. A redukció egyenletenként kb. 12 mp-et, a 200 alatti megoldások keresése egy egyenletre vetítve 10-15 mp-et vett igénybe (megjegyezve, hogy a 200 alatti megoldásokhoz tartozó m -ek fentebb leírt keresése rendkívül sok olyan eredményt is szolgáltatott, melyek az itteni $m \leq 5000$ -re vonatkozó listákban nem szerepelhetnek).

A kivételes egyenletek azok voltak, amiknél a redukált korlát 200 fölött maradt. Ezeknél adott m -re direkt módon számítottuk ki a megoldásokat. Kevés ilyen egyenlet volt, a kis megoldások leszámlálása ezeknél egyenletenként kb. 5-10 mp időt vett igénybe.

Ezen futási idők nagyságrendekkel kisebbek, mint a "teljes" megoldást szolgáltató algoritmusok futási ideje, és így hatalmas mennyiségű egyenlet esetén sikerült nagy valószínűséggel az összes megoldást kiszámítani.

5. Megoldások táblázatai

5.1. Binom Thue egyenletek megoldásai (az abszolút esetben, $\mathbb{Z}$ felett)

Megoldások $n = 3$ esetén

m	x	y	m	x	y	m	x	y	m	x	y	m	x	y
2	1	1	3155	44	3	18745	1036	39	54873	38	1	117650	49	1
7	2	1	3374	15	1	18963	80	3	57811	116	3	118681	344	7
9	2	1	3376	15	1	19441	242	9	59318	39	1	123506	249	5
17	18	7	3605	46	3	19682	27	1	59320	39	1	124999	50	1
19	8	3	3724	31	2	19684	27	1	60853	118	3	125001	50	1
20	19	7	3907	63	4	19927	244	9	61630	79	2	126506	251	5
26	3	1	4095	16	1	20421	82	3	63999	40	1	130067	152	3
28	3	1	4097	16	1	20797	55	2	64001	40	1	132650	51	1
37	10	3	4291	65	4	21951	28	1	66430	81	2	132652	51	1
43	7	2	4492	33	2	21953	28	1	68920	41	1	135269	154	3
63	4	1	4912	17	1	23149	57	2	68922	41	1	136591	103	2
65	4	1	4914	17	1	24388	29	1	72338	125	3	137160	361	7
91	9	2	5080	361	21	24390	29	1	74087	42	1	138303	362	7
124	5	1	5514	53	3	26110	89	3	74089	42	1	140607	52	1
126	5	1	5831	18	1	26999	30	1	75866	127	3	140609	52	1
182	17	3	5833	18	1	27001	30	1	79506	43	1	144703	105	2
215	6	1	6162	55	3	27910	91	3	79508	43	1	148876	53	1
217	6	1	6858	19	1	29790	31	1	82313	87	2	148878	53	1
254	19	3	6860	19	1	29792	31	1	85183	44	1	154566	161	3
342	7	1	7415	39	2	31256	63	2	85185	44	1	156494	485	9
344	7	1	7999	20	1	32006	127	4	87866	9825	221	157463	54	1
422	15	2	8001	20	1	32042	667	21	88121	89	2	157465	54	1
511	8	1	8615	41	2	32767	32	1	89115	134	3	158438	487	9
513	8	1	8827	62	3	32769	32	1	91124	45	1	160398	163	3
614	17	2	9260	21	1	33542	129	4	91126	45	1	166374	55	1
635	361	42	9262	21	1	34328	65	2	93165	136	3	166376	55	1
651	26	3	9709	64	3	34859	98	3	97335	46	1	170954	111	2
728	9	1	10647	22	1	35936	33	1	97337	46	1	175615	56	1
730	9	1	10649	22	1	35938	33	1	99161	324	7	175617	56	1
813	28	3	12166	23	1	37037	100	3	100082	325	7	180362	113	2
999	10	1	12168	23	1	39303	34	1	103822	47	1	181963	170	3
1001	10	1	12978	47	2	39305	34	1	103824	47	1	185192	57	1
1330	11	1	13256	71	3	42874	35	1	107172	95	2	185194	57	1
1332	11	1	13538	143	6	42876	35	1	108304	143	3	188461	172	3
1521	23	2	13823	24	1	44739	71	2	108873	191	4	195111	58	1
1588	35	3	13825	24	1	45372	107	3	109444	287	6	195113	58	1
1657	71	6	14114	145	6	46011	215	6	110017	575	12	205378	59	1
1727	12	1	14408	73	3	46655	36	1	110591	48	1	205380	59	1
1729	12	1	14706	49	2	46657	36	1	110593	48	1	210645	119	2
1801	73	6	15253	124	5	47307	217	6	111169	577	12	212420	179	3
1876	37	3	15624	25	1	47964	109	3	111748	289	6	214205	359	6
1953	25	2	15626	25	1	48627	73	2	112329	193	4	215999	60	1
2196	13	1	16003	126	5	48949	4097	112	112912	145	3	216001	60	1
2198	13	1	17145	361	14	50652	37	1	114084	97	2	217805	361	6
2743	14	1	17575	26	1	50654	37	1	116623	342	7	219620	181	3
2745	14	1	17577	26	1	54871	38	1	117648	49	1	221445	121	2

m	x	y	m	x	y	m	x	y	m	x	y	m	x	y
226980	61	1	389018	73	1	592705	84	1	884737	96	1	1225042	107	1
226982	61	1	391592	4097	56	596239	505	6	887042	1153	12	1225044	107	1
238327	62	1	405223	74	1	599788	253	3	889352	577	6	1242297	215	2
238329	62	1	405225	74	1	603351	169	2	891666	385	4	1248084	323	3
246099	188	3	416275	224	3	614124	85	1	893984	289	3	1253889	647	6
250046	63	1	418509	374	5	614126	85	1	898632	193	2	1255828	971	9
250048	63	1	420751	1124	15	636055	86	1	902629	1353	14	1257769	1943	18
254037	190	3	421874	75	1	636057	86	1	912672	97	1	1259711	108	1
256048	127	2	421876	75	1	650963	260	3	912674	97	1	1259713	108	1
259084	255	4	423001	1126	15	658502	87	1	937082	685	7	1261657	1945	18
260611	511	8	425259	376	5	658504	87	1	941191	98	1	1263604	973	9
262143	64	1	427525	226	3	666101	262	3	941193	98	1	1265553	649	6
262145	64	1	430369	151	2	669922	175	2	945314	687	7	1271412	325	3
263683	513	8	438975	76	1	681471	88	1	960531	296	3	1277289	217	2
265228	257	4	438977	76	1	681473	88	1	970298	99	1	1295028	109	1
268336	129	2	447697	153	2	693154	177	2	970300	99	1	1295030	109	1
274624	65	1	456532	77	1	704968	89	1	980133	298	3	1306421	9948	91
274626	65	1	456534	77	1	704970	89	1	980838	1391	14	1330999	110	1
283162	197	3	468494	233	3	710467	1160	13	985075	199	2	1331001	110	1
287495	66	1	474551	78	1	712306	1161	13	994012	499	5	1355347	332	3
287497	66	1	474553	78	1	720930	269	3	997003	999	10	1367630	111	1
291874	199	3	480662	235	3	728999	90	1	999999	100	1	1367632	111	1
300762	67	1	493038	79	1	729001	90	1	1000001	100	1	1379989	334	3
300764	67	1	493040	79	1	737130	271	3	1003003	1001	10	1386196	223	2
307547	135	2	502460	159	2	753570	91	1	1006012	501	5	1395541	447	4
314431	68	1	506115	1036	13	753572	91	1	1015075	201	2	1404927	112	1
314433	68	1	507215	319	4	766061	183	2	1017241	704	7	1404929	112	1
321419	137	2	507582	1037	13	778687	92	1	1021582	705	7	1414357	449	4
323771	206	3	511999	80	1	778689	92	1	1030300	101	1	1423828	225	2
328508	69	1	512001	80	1	791453	185	2	1030302	101	1	1442896	113	1
328510	69	1	516815	321	4	795739	278	3	1050838	305	3	1442898	113	1
333293	208	3	521660	161	2	804356	93	1	1061207	102	1	1468586	341	3
342999	70	1	524907	242	3	804358	93	1	1061209	102	1	1481543	114	1
343001	70	1	529257	728	9	813037	280	3	1071646	307	3	1481545	114	1
356057	4040	57	531440	81	1	830583	94	1	1092726	103	1	1494578	343	3
357910	71	1	531442	81	1	830585	94	1	1092728	103	1	1520874	115	1
357912	71	1	533631	730	9	857374	95	1	1108718	207	2	1520876	115	1
365526	143	2	538029	244	3	857376	95	1	1124863	104	1	1530341	2420	21
368088	215	3	551367	82	1	865134	667	7	1124865	104	1	1540799	231	2
370662	431	6	551369	82	1	869031	668	7	1141166	209	2	1560895	116	1
373247	72	1	571786	83	1	870984	191	2	1146635	314	3	1560897	116	1
373249	72	1	571788	83	1	875552	287	3	1157624	105	1	1581167	233	2
375846	433	6	582183	167	2	877842	383	4	1157626	105	1	1587963	350	3
378456	217	3	585676	251	3	880136	575	6	1168685	316	3	1601612	117	1
381078	145	2	589183	503	6	882434	1151	12	1191015	106	1	1601614	117	1
389016	73	1	592703	84	1	884735	96	1	1191017	106	1	1615341	352	3

m	x	y	m	x	y	m	x	y	m	x	y	m	x	y
1643031	118	1	2130091	386	3	2823149	424	3	3370502	2249	15	4251527	162	1
1643033	118	1	2146688	129	1	2863287	142	1	3374999	150	1	4251529	162	1
1685158	119	1	2146690	129	1	2863289	142	1	3375001	150	1	4260282	1459	9
1685160	119	1	2163373	388	3	2888177	5554	39	3379502	2251	15	4277826	487	3
1695638	7751	65	2187357	2726	21	2924206	143	1	3388518	751	5	4321265	6841	42
1706490	239	2	2196999	130	1	2924208	143	1	3397550	451	3	4330746	163	1
1713640	359	3	2197001	130	1	2954988	287	2	3442950	151	1	4330748	163	1
1720810	719	6	2248090	131	1	2965296	431	3	3442952	151	1	4370723	327	2
1727999	120	1	2248092	131	1	2970459	575	4	3477266	303	2	4410943	164	1
1728001	120	1	2273931	263	2	2975628	863	6	3511807	152	1	4410945	164	1
1735210	721	6	2282588	395	3	2980803	1727	12	3511809	152	1	4426331	3448	21
1742440	361	3	2291267	791	6	2985983	144	1	3546578	305	2	4451411	329	2
1749690	241	2	2299967	132	1	2985985	144	1	3558219	458	3	4464955	494	3
1767571	1330	11	2299969	132	1	2991171	1729	12	3581576	153	1	4492124	165	1
1771560	121	1	2308691	793	6	2996364	865	6	3581578	153	1	4492126	165	1
1771562	121	1	2317436	397	3	3001563	577	4	3605037	460	3	4519405	496	3
1775557	1332	11	2326203	265	2	3003793	1010	7	3652263	154	1	4574295	166	1
1815847	122	1	2352636	133	1	3006768	433	3	3652265	154	1	4574297	166	1
1815849	122	1	2352638	133	1	3012724	1011	7	3723874	155	1	4657462	167	1
1845779	368	3	2406103	134	1	3017196	289	2	3723876	155	1	4657464	167	1
1860866	123	1	2406105	134	1	3048624	145	1	3760029	311	2	4699422	335	2
1860868	123	1	2442195	404	3	3048626	145	1	3772132	467	3	4713464	503	3
1876037	370	3	2454305	1214	9	3112135	146	1	3784261	935	6	4727534	1007	6
1883653	247	2	2460374	135	1	3112137	146	1	3796415	156	1	4741631	168	1
1906623	124	1	2460376	135	1	3132736	4097	28	3796417	156	1	4741633	168	1
1906625	124	1	2466455	1216	9	3141461	5126	35	3808597	937	6	4755758	1009	6
1922636	3233	26	2478645	406	3	3154963	440	3	3820804	469	3	4769912	505	3
1929781	249	2	2487814	271	2	3167271	1028	7	3833037	313	2	4784094	337	2
1943765	624	5	2515455	136	1	3173437	3086	21	3869892	157	1	4820221	2196	13
1953124	125	1	2515457	136	1	3176522	147	1	3869894	157	1	4826808	169	1
1953126	125	1	2543302	273	2	3176524	147	1	3944311	158	1	4826810	169	1
1962515	626	5	2571352	137	1	3179611	3088	21	3944313	158	1	4833403	2198	13
1984542	377	3	2571354	137	1	3185793	1030	7	3994451	476	3	4912999	170	1
2000375	126	1	2609074	413	3	3198181	442	3	4019678	159	1	4913001	170	1
2000377	126	1	2628071	138	1	3209047	295	2	4019680	159	1	4931602	2383	14
2016294	379	3	2628073	138	1	3241791	148	1	4045013	478	3	4971027	512	3
2048382	127	1	2647162	415	3	3241793	148	1	4057720	319	2	5000210	171	1
2048384	127	1	2685618	139	1	3266062	2819	19	4076830	639	4	5000212	171	1
2072672	255	2	2685620	139	1	3269539	2820	19	4095999	160	1	5029509	514	3
2084888	511	4	2714705	279	2	3274759	297	2	4096001	160	1	5044201	343	2
2091014	1023	8	2743999	140	1	3307948	149	1	4115230	641	4	5088447	172	1
2097151	128	1	2744001	140	1	3307950	149	1	4134520	321	2	5088449	172	1
2097153	128	1	2773505	281	2	3346154	1047	7	4173280	161	1	5132953	345	2
2103302	1025	8	2783387	422	3	3352550	449	3	4173282	161	1	5177716	173	1
2109464	513	4	2803220	141	1	3355751	1048	7	4225338	485	3	5177718	173	1
2121824	257	2	2803222	141	1	3361518	749	5	4242786	1457	9	5237806	521	3

m	x	y	m	x	y	m	x	y			
5268023	174	1	6434855	186	1	7513084	1371	7			
5268025	174	1	6434857	186	1	7521307	2743	14			
5298358	523	3	6469514	559	3	7529535	196	1			
5341021	874	5	6539202	187	1	7529537	196	1			
5359374	175	1	6539204	187	1	7537771	2745	14	m	x	y
5359376	175	1	6591797	375	2	7546012	1373	7	8741815	206	1
5377771	876	5	6644671	188	1	7587307	393	2	8741817	206	1
5405444	351	2	6644673	188	1	7645372	197	1	8826963	620	3
5428577	703	4	6697829	377	2	7645374	197	1	8869742	207	1
5451775	176	1	6715611	566	3	7723254	593	3	8869744	207	1
5451777	176	1	6739369	1700	9	7762391	198	1	8912661	622	3
5475041	705	4	6751268	189	1	7762393	198	1	8934172	415	2
5498372	353	2	6751270	189	1	7801662	595	3	8966503	831	4
5513963	530	3	6763183	1702	9	7829793	1390	7	8998911	208	1
5545232	177	1	6787053	568	3	7846704	1391	7	8998913	208	1
5545234	177	1	6858999	190	1	7880598	199	1	9031399	833	4
5576621	532	3	6859001	190	1	7880600	199	1	9063964	417	2
5639751	178	1	6967870	191	1	7926126	93311	468	9114217	5431	26
5639753	178	1	6967872	191	1	7940150	399	2	9129328	209	1
5712483	3754	21	7022736	383	2	7976024	999	5	9129330	209	1
5735338	179	1	7041088	575	3	7988006	1999	10	9216970	629	3
5735340	179	1	7050276	767	4	7999999	200	1	9260999	210	1
5783535	359	2	7059472	1151	6	8000001	200	1	9261001	210	1
5799660	539	3	7064073	1535	8	8012006	2001	10	9305170	631	3
5815815	1079	6	7068676	2303	12	8024024	1001	5	9393930	211	1
5831999	180	1	7073281	4607	24	8060150	401	2	9393932	211	1
5832001	180	1	7077887	192	1	8080267	602	3	9460871	423	2
5848215	1081	6	7077889	192	1	8120600	201	1	9528127	212	1
5864460	541	3	7082497	4609	24	8120602	201	1	9528129	212	1
5880735	361	2	7087108	2305	12	8161069	604	3	9595703	425	2
5929740	181	1	7091721	1537	8	8242407	202	1	9603769	17855	84
5929742	181	1	7096336	1153	6	8242409	202	1	9606402	4039	19
6028567	182	1	7105572	769	4	8341522	6287	31	9613539	4040	19
6028569	182	1	7114816	577	3	8345503	6288	31	9618299	638	3
6095059	548	3	7133328	385	2	8365426	203	1	9663596	213	1
6128486	183	1	7189056	193	1	8365428	203	1	9663598	213	1
6128488	183	1	7189058	193	1	8427393	407	2	9709037	640	3
6162037	550	3	7221032	1353	7	8448116	611	3	9800343	214	1
6178858	367	2	7237055	1354	7	8468873	1223	6	9800345	214	1
6229503	184	1	7301383	194	1	8489663	204	1	9938374	215	1
6229505	184	1	7301385	194	1	8489665	204	1	9938376	215	1
6280426	369	2	7376915	584	3	8510489	1225	6			
6331624	185	1	7414874	195	1	8531348	613	3			
6331626	185	1	7414876	195	1	8552241	409	2			
6400322	557	3	7452965	586	3	8615124	205	1			
6402292	6499	35	7472059	391	2	8615126	205	1			

Megoldások $n = 4$ esetén

m	x	y	m	x	y	m	x	y	m	x	y
2	1	1	65535	16	1	707282	29	1	3580610	87	2
5	3	2	65537	16	1	757335	59	2	3748095	44	1
15	2	1	69729	65	4	809999	30	1	3748097	44	1
17	2	1	74120	33	2	810001	30	1	3851367	443	10
39	5	2	83520	17	1	865365	61	2	3921390	89	2
80	3	1	83522	17	1	923520	31	1	4100624	45	1
82	3	1	93789	35	2	923522	31	1	4100626	45	1
150	7	2	104975	18	1	984560	63	2	4285935	91	2
255	4	1	104977	18	1	1016190	127	4	4477455	46	1
257	4	1	114240	239	13	1048575	32	1	4477457	46	1
410	9	2	117135	37	2	1048577	32	1	4675325	93	2
624	5	1	130320	19	1	1081730	129	4	4879680	47	1
626	5	1	130322	19	1	1115664	65	2	4879682	47	1
915	11	2	144590	39	2	1185920	33	1	5090664	95	2
1295	6	1	159999	20	1	1185922	33	1	5198685	191	4
1297	6	1	160001	20	1	1259445	67	2	5308415	48	1
1785	13	2	176610	41	2	1336335	34	1	5308417	48	1
2400	7	1	194480	21	1	1336337	34	1	5419875	193	4
2402	7	1	194482	21	1	1416695	69	2	5533080	97	2
3164	15	2	213675	43	2	1500624	35	1	5764800	49	1
4095	8	1	234255	22	1	1500626	35	1	5764802	49	1
4097	8	1	234257	22	1	1588230	71	2	6003725	99	2
5220	17	2	256289	45	2	1679615	36	1	6249999	50	1
6560	9	1	279840	23	1	1679617	36	1	6250001	50	1
6562	9	1	279842	23	1	1755519	182	5	6503775	101	2
7140	239	26	304980	47	2	1774890	73	2	6765200	51	1
8145	19	2	331775	24	1	1874160	37	1	6765202	51	1
9999	10	1	331777	24	1	1874162	37	1	7034430	103	2
10001	10	1	360300	49	2	1977539	75	2	7311615	52	1
12155	21	2	390624	25	1	2085135	38	1	7311617	52	1
14640	11	1	390626	25	1	2085137	38	1	7596914	105	2
14642	11	1	422825	51	2	2197065	77	2	7890480	53	1
17490	23	2	456975	26	1	2313440	39	1	7890482	53	1
20735	12	1	456977	26	1	2313442	39	1	8192475	107	2
20737	12	1	493155	53	2	2434380	79	2	8295040	161	3
24414	25	2	505679	80	3	2559999	40	1	8398565	323	6
28560	13	1	518440	161	6	2560001	40	1	8503055	54	1
28562	13	1	531440	27	1	2690420	81	2	8503057	54	1
33215	27	2	531442	27	1	2825760	41	1	8608519	325	6
38415	14	1	544685	163	6	2825762	41	1	8714960	163	3
38417	14	1	558175	82	3	2966145	83	2	8822385	109	2
44205	29	2	571914	55	2	3111695	42	1	9150624	55	1
50624	15	1	614655	28	1	3111697	42	1	9150626	55	1
50626	15	1	614657	28	1	3262539	85	2	9487940	111	2
57720	31	2	659750	57	2	3418800	43	1	9834495	56	1
61535	63	4	707280	29	1	3418802	43	1	9834497	56	1

Megoldások $n = 5$ esetén

m	x	y	m	x	y	m	x	y	m	x	y
2	1	1	32767	8	1	537825	14	1	3199999	20	1
31	2	1	32769	8	1	759374	15	1	3200001	20	1
33	2	1	59048	9	1	759376	15	1	4084100	21	1
242	3	1	59050	9	1	894661	31	2	4084102	21	1
244	3	1	99999	10	1	1048575	16	1	5153631	22	1
1023	4	1	100001	10	1	1048577	16	1	5153633	22	1
1025	4	1	161050	11	1	1222981	33	2	6436342	23	1
3124	5	1	161052	11	1	1419856	17	1	6436344	23	1
3126	5	1	248831	12	1	1419858	17	1	7962623	24	1
7775	6	1	248833	12	1	1889567	18	1	7962625	24	1
7777	6	1	371292	13	1	1889569	18	1	9765624	25	1
16806	7	1	371294	13	1	2476098	19	1	9765626	25	1
16808	7	1	537823	14	1	2476100	19	1			

Megoldások $n = 7$ esetén

m	x	y
2	1	1
127	2	1
129	2	1
2186	3	1
2188	3	1
16383	4	1
16385	4	1
78124	5	1
78126	5	1
279935	6	1
279937	6	1
823542	7	1
823544	7	1
2097151	8	1
2097153	8	1
4782968	9	1
4782970	9	1
9999999	10	1

Megoldások $n = 11$ esetén

m	x	y
2	1	1
2047	2	1
2049	2	1
177146	3	1
177148	3	1
4194303	4	1
4194305	4	1

Megoldások $n = 13$ esetén

m	x	y
2	1	1
8191	2	1
8193	2	1
1594322	3	1
1594324	3	1

Megoldások $n = 17$ esetén

m	x	y
2	1	1
131071	2	1
131073	2	1

Megoldások $n = 19$ esetén

m	x	y
2	1	1
524287	2	1
524289	2	1

Megoldások $n = 23$ esetén

m	x	y
2	1	1
8388607	2	1
8388609	2	1

Megoldások $n = 29$ esetén

m	x	y
2	1	1

5.2. Negyedfokú relatív binom Thue egyenletek megoldásai

5.2.1. Valós megoldások

- 1.) Minden d és m értékre $(\pm 1, 0)$ triviális megoldás
- 2.) Minden d esetén

$m = 2 :$	$(1, 1)$
$m = 5 :$	$(3, 2)$
$m = 17 :$	$(2, 1)$
$m = 39 :$	$(5, 2)$
$m = 82 :$	$(3, 1)$
$m = 150 :$	$(7, 2)$
$m = 257 :$	$(4, 1)$
$m = 410 :$	$(9, 2)$
$m = 626 :$	$(5, 1)$
$m = 915 :$	$(11, 2)$
$m = 1297 :$	$(6, 1)$
$m = 1785 :$	$(13, 2)$
$m = 2402 :$	$(7, 1)$
$m = 3164 :$	$(15, 2)$
$m = 4097 :$	$(8, 1)$

5.2.2. Képzetes megoldások

$d = 1$ esetén:

$m = 1 :$	$(0, \omega), (0, -\omega), (0, -\omega + 1), (0, \omega - 1)$
$m = 2 :$	$(1, \omega), (1, -\omega), (1, -\omega + 1), (1, \omega - 1), (\omega, 1), (\omega, \omega),$ $(\omega, -\omega), (-\omega, 1), (-\omega, \omega), (-\omega, -\omega), (-\omega + 1, 1),$ $(-\omega + 1, -\omega + 1), (-\omega + 1, \omega - 1), (\omega - 1, 1),$ $(\omega - 1, -\omega + 1), (\omega - 1, \omega - 1)$
$m = 5 :$	$(3, -2\omega), (3, 2\omega), (3, -2\omega + 2), (3, 2\omega - 2), (-3\omega, 2),$ $(-3\omega, -2\omega), (-3\omega, 2\omega), (3\omega, 2), (3\omega, -2\omega), (3\omega, 2\omega),$ $(-3\omega + 3, 2), (-3\omega + 3, -2\omega + 2), (-3\omega + 3, 2\omega - 2),$ $(3\omega - 3, 2), (3\omega - 3, -2\omega + 2), (3\omega - 3, 2\omega - 2)$
$m = 17 :$	$(2, \omega), (2, -\omega), (2, -\omega + 1), (2, \omega - 1), (-2\omega, 1), (-2\omega, \omega),$ $(-2\omega, -\omega), (2\omega, 1), (2\omega, \omega), (2\omega, -\omega), (-2\omega + 2, 1),$ $(-2\omega + 2, -\omega + 1), (-2\omega + 2, \omega - 1), (2\omega - 2, 1),$

$$\begin{aligned}
& (2\omega - 2, -\omega + 1), (2\omega - 2, \omega - 1) \\
m = 39 : & (5, -2\omega), (5, 2\omega), (5, -2\omega + 2), (5, 2\omega - 2), (-5\omega, 2), \\
& (-5\omega, -2\omega), (-5\omega, 2\omega), (5\omega, 2), (5\omega, -2\omega), (5\omega, 2\omega), \\
& (-5\omega + 5, 2), (-5\omega + 5, -2\omega + 2), (-5\omega + 5, 2\omega - 2), \\
& (5\omega - 5, 2), (5\omega - 5, -2\omega + 2), (5\omega - 5, 2\omega - 2) \\
m = 82 : & (3, \omega), (3, -\omega), (3, -\omega + 1), (3, \omega - 1), (-3\omega, 1), (-3\omega, \omega), \\
& (-3\omega, -\omega), (3\omega, 1), (3\omega, \omega), (3\omega, -\omega), (-3\omega + 3, 1), \\
& (-3\omega + 3, -\omega + 1), (-3\omega + 3, \omega - 1), (3\omega - 3, 1), \\
& (3\omega - 3, -\omega + 1), (3\omega - 3, \omega - 1) \\
m = 150 : & (7, -2\omega), (7, 2\omega), (7, -2\omega + 2), (7, 2\omega - 2), (-7\omega, 2), \\
& (-7\omega, -2\omega), (-7\omega, 2\omega), (7\omega, 2), (7\omega, -2\omega), (7\omega, 2\omega), \\
& (-7\omega + 7, 2), (-7\omega + 7, -2\omega + 2), (-7\omega + 7, 2\omega - 2), \\
& (7\omega - 7, 2), (7\omega - 7, -2\omega + 2), (7\omega - 7, 2\omega - 2) \\
m = 257 : & (4, \omega), (4, -\omega), (4, -\omega + 1), (4, \omega - 1), (-4\omega, 1), (-4\omega, \omega), \\
& (-4\omega, -\omega), (4\omega, 1), (4\omega, \omega), (4\omega, -\omega), (-4\omega + 4, 1), \\
& (-4\omega + 4, -\omega + 1), (-4\omega + 4, \omega - 1), (4\omega - 4, 1), \\
& (4\omega - 4, -\omega + 1), (4\omega - 4, \omega - 1) \\
m = 410 : & (9, -2\omega), (9, 2\omega), (9, -2\omega + 2), (9, 2\omega - 2), (-9\omega, 2), \\
& (-9\omega, -2\omega), (-9\omega, 2\omega), (9\omega, 2), (9\omega, -2\omega), (9\omega, 2\omega), \\
& (-9\omega + 9, 2), (-9\omega + 9, -2\omega + 2), (-9\omega + 9, 2\omega - 2), \\
& (9\omega - 9, 2), (9\omega - 9, -2\omega + 2), (9\omega - 9, 2\omega - 2) \\
m = 626 : & (5, \omega), (5, -\omega), (5, -\omega + 1), (5, \omega - 1), (-5\omega, 1), (-5\omega, \omega), \\
& (-5\omega, -\omega), (5\omega, 1), (5\omega, \omega), (5\omega, -\omega), (-5\omega + 5, 1), \\
& (-5\omega + 5, -\omega + 1), (-5\omega + 5, \omega - 1), (5\omega - 5, 1), \\
& (5\omega - 5, -\omega + 1), (5\omega - 5, \omega - 1) \\
m = 915 : & (11, -2\omega), (11, 2\omega), (11, -2\omega + 2), (11, 2\omega - 2), (-11\omega, 2), \\
& (-11\omega, -2\omega), (-11\omega, 2\omega), (11\omega, 2), (11\omega, -2\omega), (11\omega, 2\omega), \\
& (-11\omega + 11, 2), (-11\omega + 11, -2\omega + 2), (-11\omega + 11, 2\omega - 2), \\
& (11\omega - 11, 2), (11\omega - 11, -2\omega + 2), (11\omega - 11, 2\omega - 2) \\
m = 1297 : & (6, \omega), (6, -\omega), (6, -\omega + 1), (6, \omega - 1), (-6\omega, 1), (-6\omega, \omega), \\
& (-6\omega, -\omega), (6\omega, 1), (6\omega, \omega), (6\omega, -\omega), (-6\omega + 6, 1), \\
& (-6\omega + 6, -\omega + 1), (-6\omega + 6, \omega - 1), (6\omega - 6, 1), \\
& (6\omega - 6, -\omega + 1), (6\omega - 6, \omega - 1) \\
m = 1785 : & (13, -2\omega), (13, 2\omega), (13, -2\omega + 2), (13, 2\omega - 2), (-13\omega, 2), \\
& (-13\omega, -2\omega), (-13\omega, 2\omega), (13\omega, 2), (13\omega, -2\omega), (13\omega, 2\omega), \\
& (-13\omega + 13, 2), (-13\omega + 13, -2\omega + 2), (-13\omega + 13, 2\omega - 2), \\
& (13\omega - 13, 2), (13\omega - 13, -2\omega + 2), (13\omega - 13, 2\omega - 2) \\
m = 2402 : & (7, \omega), (7, -\omega), (7, -\omega + 1), (7, \omega - 1), (-7\omega, 1), (-7\omega, \omega), \\
& (-7\omega, -\omega), (7\omega, 1), (7\omega, \omega), (7\omega, -\omega), (-7\omega + 7, 1), \\
& (-7\omega + 7, -\omega + 1), (-7\omega + 7, \omega - 1), (7\omega - 7, 1), \\
& (7\omega - 7, -\omega + 1), (7\omega - 7, \omega - 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m = 3164 : & \quad (15, -2\omega), (15, 2\omega), (15, -2\omega + 2), (15, 2\omega - 2), (-15\omega, 2), \\
& \quad (-15\omega, -2\omega), (-15\omega, 2\omega), (15\omega, 2), (15\omega, -2\omega), (15\omega, 2\omega), \\
& \quad (-15\omega + 15, 2), (-15\omega + 15, -2\omega + 2), (-15\omega + 15, 2\omega - 2), \\
& \quad (15\omega - 15, 2), (15\omega - 15, -2\omega + 2), (15\omega - 15, 2\omega - 2) \\
m = 4097 : & \quad (8, \omega), (8, -\omega), (8, -\omega + 1), (8, \omega - 1), (-8\omega, 1), (-8\omega, \omega), \\
& \quad (-8\omega, -\omega), (8\omega, 1), (8\omega, \omega), (8\omega, -\omega), (-8\omega + 8, 1), \\
& \quad (-8\omega + 8, -\omega + 1), (-8\omega + 8, \omega - 1), (8\omega - 8, 1), \\
& \quad (8\omega - 8, -\omega + 1), (8\omega - 8, \omega - 1)
\end{aligned}$$

d = 2 esetén:

$$\begin{aligned}
m = 5 : & \quad (\omega, 1), (-\omega, 1), (-\omega + 1, 1), (\omega - 1, 1) \\
m = 20 : & \quad (3, \omega), (3, -\omega), (3, -\omega + 1), (3, \omega - 1) \\
m = 65 : & \quad (-2\omega, 1), (2\omega, 1), (-2\omega + 2, 1), (2\omega - 2, 1) \\
m = 156 : & \quad (5, \omega), (5, -\omega), (5, -\omega + 1), (5, \omega - 1) \\
m = 325 : & \quad (-3\omega, 1), (3\omega, 1), (-3\omega + 3, 1), (3\omega - 3, 1) \\
m = 600 : & \quad (7, \omega), (7, -\omega), (7, -\omega + 1), (7, \omega - 1) \\
m = 723 : & \quad (-11\omega, 3), (11\omega, 3), (-11\omega + 11, 3), (11\omega - 11, 3) \\
m = 791 : & \quad (15, -2\omega), (15, 2\omega), (15, -2\omega + 2), (15, 2\omega - 2) \\
m = 1025 : & \quad (-4\omega, 1), (4\omega, 1), (-4\omega + 4, 1), (4\omega - 4, 1) \\
m = 1305 : & \quad (17, -2\omega), (17, 2\omega), (17, -2\omega + 2), (17, 2\omega - 2) \\
m = 1640 : & \quad (9, \omega), (9, -\omega), (9, -\omega + 1), (9, \omega - 1) \\
m = 2501 : & \quad (-5\omega, 1), (5\omega, 1), (-5\omega + 5, 1), (5\omega - 5, 1) \\
m = 3660 : & \quad (11, \omega), (11, -\omega), (11, -\omega + 1), (11, \omega - 1)
\end{aligned}$$

d = 3 esetén:

$$\begin{aligned}
m = 2 : & \quad (\omega, \omega), (-\omega + 1, -\omega + 1) \\
m = 5 : & \quad (3\omega, 2\omega), (-3\omega + 3, -2\omega + 2) \\
m = 10 : & \quad (-2\omega + 1, 1), (-\omega + 2, \omega), (-\omega + 2, -\omega), (\omega + 1, -\omega + 1), \\
& \quad (\omega + 1, \omega - 1), (2\omega - 1, 1) \\
m = 17 : & \quad (2\omega, \omega), (-2\omega + 2, -\omega + 1) \\
m = 39 : & \quad (5\omega, 2\omega), (-5\omega + 5, -2\omega + 2) \\
m = 82 : & \quad (3\omega, \omega), (-3\omega + 3, -\omega + 1) \\
m = 145 : & \quad (-4\omega + 2, 1), (-2\omega + 4, \omega), (-2\omega + 4, -\omega), \\
& \quad (2\omega + 2, -\omega + 1), (2\omega + 2, \omega - 1), (4\omega - 2, 1) \\
m = 150 : & \quad (7\omega, 2\omega), (-7\omega + 7, -2\omega + 2) \\
m = 257 : & \quad (4\omega, \omega), (-4\omega + 4, -\omega + 1) \\
m = 410 : & \quad (9\omega, 2\omega), (-9\omega + 9, -2\omega + 2) \\
m = 455 : & \quad (8, -2\omega + 1), (8, 2\omega - 1), (8\omega, -\omega + 2), (-8\omega + 8, \omega + 1) \\
m = 580 : & \quad (17, -4\omega + 2), (17, 4\omega - 2), (17\omega, -2\omega + 4), \\
& \quad (-17\omega + 17, 2\omega + 2) \\
m = 626 : & \quad (5\omega, \omega), (-5\omega + 5, -\omega + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m = 730 : & \quad (-6\omega + 3, 1), (-3\omega + 6, \omega), (-3\omega + 6, -\omega), \\
& \quad (3\omega + 3, -\omega + 1), (3\omega + 3, \omega - 1), (6\omega - 3, 1) \\
m = 905 : & \quad (19, -4\omega + 2), (19, 4\omega - 2), (19\omega, -2\omega + 4), \\
& \quad (-19\omega + 19, 2\omega + 2) \\
m = 915 : & \quad (11\omega, 2\omega), (-11\omega + 11, -2\omega + 2) \\
m = 1111 : & \quad (10, -2\omega + 1), (10, 2\omega - 1), (10\omega, -\omega + 2), \\
& \quad (-10\omega + 10, \omega + 1) \\
m = 1297 : & \quad (6\omega, \omega), (-6\omega + 6, -\omega + 1) \\
m = 1785 : & \quad (13\omega, 2\omega), (-13\omega + 13, -2\omega + 2) \\
m = 2305 : & \quad (-8\omega + 4, 1), (-4\omega + 8, \omega), (-4\omega + 8, -\omega), \\
& \quad (4\omega + 4, -\omega + 1), (4\omega + 4, \omega - 1), (8\omega - 4, 1) \\
m = 2402 : & \quad (7\omega, \omega), (-7\omega + 7, -\omega + 1) \\
m = 3164 : & \quad (15\omega, 2\omega), (-15\omega + 15, -2\omega + 2) \\
m = 4097 : & \quad (8\omega, \omega), (-8\omega + 8, -\omega + 1)
\end{aligned}$$

d = 7 esetén:

$$\begin{aligned}
m = 3 : & \quad (-2\omega + 1, 2), (2\omega - 1, 2) \\
m = 50 : & \quad (-2\omega + 1, 1), (2\omega - 1, 1) \\
m = 248 : & \quad (-6\omega + 3, 2), (6\omega - 3, 2) \\
m = 785 : & \quad (-4\omega + 2, 1), (4\omega - 2, 1) \\
m = 1914 : & \quad (-10\omega + 5, 2), (10\omega - 5, 2) \\
m = 3970 : & \quad (-6\omega + 3, 1), (6\omega - 3, 1)
\end{aligned}$$

d = 11 esetén:

$$\begin{aligned}
m = 122 : & \quad (-2\omega + 1, 1), (2\omega - 1, 1) \\
m = 1937 : & \quad (-4\omega + 2, 1), (4\omega - 2, 1)
\end{aligned}$$

d = 19 esetén:

$$m = 362 : \quad (-2\omega + 1, 1), (2\omega - 1, 1)$$

d = 43 esetén:

$$m = 1850 : \quad (-2\omega + 1, 1), (2\omega - 1, 1)$$

d = 67 esetén:

$$m = 4490 : \quad (-2\omega + 1, 1), (2\omega - 1, 1)$$

d = 163 esetén:

$$m = 328 : \quad (-2\omega + 1, 3), (2\omega - 1, 3).$$

Hivatkozások

- [1] A.Baker, *Transcendental Number Theory*, Cambridge, 1990.
- [2] A.Baker and G.Wüstholz, *Logarithmic forms and group varieties*, J.Reine Angew. Math., **442**(1993), 19–62.
- [3] A.Bazsó, A.Bérczes, K.Győry and Á.Pintér, *On the resolution of equations $Ax^n - By^n = C$ in integers x, y and $n \geq 3$, II*, Publ. Math. (Debrecen), **76**(2010), 227–250.
- [4] M.A.Bennett, *Rational approximation to algebraic numbers of small height: The Diophantine equation $|ax^n - by^n| = 1$* , J. Reine Angew. Math. **535**(2001), 1-49.
- [5] Y.Bilu and G.Hanrot, *Solving Thue equations of high degree*, J.Number Theory, **60**(1996), 373–392.
- [6] M. Daberkow, C.Fieker, J.Klüners, M.Pohst, K.Roegner and K.Wildanger, *KANT V4*, J.Symbolic Comput., **24**(1997), 267–283.
- [7] I.Gaál, *Power integral bases in composites of number fields*, Canad. Math. Bull., **41**(1998), 158–161.
- [8] I.Gaál, *Diophantine equations and power integral bases*, Boston, Birkhäuser, 2002.
- [9] I.Gaál, *Calculating "small" solutions of relative Thue equations*, Experimental Mathematics, megjelenés alatt.
- [10] I.Gaál, A.Pethő and M.Pohst, *Simultaneous representation of integers by a pair of ternary quadratic forms – with an application to index form equations in quartic number fields*, J.Number Theory, **57**(1996), 90–104.
- [11] I.Gaál and M.Pohst, *Power integral bases in a parametric family of totally real quintics*, Math. Comput., **66**(1997), 1689–1696.
- [12] I.Gaál and M.Pohst, *On the resolution of index form equations in relative quartic extensions*, J.Number Theory, **85**(2000), 201–219.

- [13] I.Gaál and M.Pohst, *On the resolution of relative Thue equations*, Math. Comput., **71**(2002), 429–440.
- [14] I.Gaál and L.Remete, *Binomial Thue equations and power integral bases in pure quartic fields*, JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications, **32**(2014), 49–61.
- [15] I.Gaál and L.Remete, *Solving binomial Thue equations*, JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications, megjelenés alatt.
- [16] I.Gaál, L.Remete and T.Szabó, *Calculating power integral bases by solving relative Thue equations*, Tatra Mt. Math. megjelenés alatt.
- [17] K.Győry, *Sur les polynomes a coefficients entiers et de discriminant donne, III*, Publ. Math. (Debrecen), **23**(1976), 141–165.
- [18] K.Győry and Á.Pintér, *Binomial Thue equations, ternary equations, and power values of polynomials*, J. Math. Sciences **180**(2012), 569–580.
- [19] A.Hameed, T.Nakahara, S.M.Husnine and S.Ahmad, *On the existence of canonical number system in certain classes of pure algebraic number fields*, J. Prime Research in Math., bf 7(2011), 19–24.
- [20] A.K.Lenstra, H.W.Lenstra Jr. and L.Lovász, *Factoring polynomials with rational coefficients*, Math. Ann., **261**(1982), 515–534.
- [21] W.Narkiewicz, *Elementary and Analytic Theory of Algebraic Numbers*, Second Edition, Springer, 1974.
- [22] A.Pethő, *On the resolution of Thue inequalities*, J.Symbolic Comput., **4**(1987), 103–109.
- [23] A. Pethő and R.Schulenberg, *Effektives Lösen von Thue Gleichungen*, Publ. Math. (Debrecen), **34**(1987), 189–196.
- [24] N.P.Smart, *The Algorithmic Resolution of Diophantine Equations*, London Math. Soc., Student Texts 41, Cambridge University Press, 1998.
- [25] H. M. Stark, *On the problem of unique factorization in complex quadratic fields*. Number Theory, Proc. Sympos. Pure Math. **12**(1969) 41–56.

- [26] A.Thue, *Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen*, J.Reine Angew. Math., **135**(1909), 284–305.
- [27] B.M.M. de Weger, *Algorithms for Diophantine Equations*, CWI Tract 65, Amsterdam, 1989.

1. Függelék

Saját kutatási feladat bemutatása

Az ismertetéshez a Tartalomjegyzék fejezetszámozását használok.

A kutatásom kiindulópontjaként, a témavezetőm hívta fel a figyelmemet a Pethő Attila-féle gyors algoritmus [22] alkalmazhatóságára binom Thue egyenletek esetén.

A 2.1, 2.2 Fejezetben a Pethő Attila-féle algoritmus gondolatmenetét követve, a szereplő becslések élesítése saját munkám.

Szintén a témavezetőm ajánlotta Gaál István, Pethő Attila és M.Pohst [10] eredményének alkalmazását negyedfokú gyökbővítések hatvány egész bázisainak kiszámítására. A 2.3 Fejezetben az egyenletek visszavezetése negyedfokú binom Thue egyenletre a saját ötletem.

Az 5.1 Fejezetben összefoglalt megoldások kiszámításához szükséges programot a témavezetőm javaslatait felhasználva írtam meg. A szuperszámítógépen való futtatásban a témavezetőm segített.

A 3. Fejezetben szereplő, relatív esetre vonatkozó eredmények számításokat a témavezetőm nemrégiben kidolgozott 3.1 Fejezetben részletezett [9] algoritmusára tette lehetővé.

A 3.2 Fejezetben szereplő negyedfokú binom Thue egyenletek megoldása saját eredményem a fenti algoritmus felhasználásával.

Témavezetőm javaslatára az abszolút esethez hasonlóan a 3.3. Fejezetben negyedfokú binom Thue egyenletek megoldásait alkalmaztam relatív negyedfokú gyökbővítések relatív hatvány egész bázisainak kiszámítására. Ehhez szükséges volt Gaál István, Pethő Attila és M.Pohst [12] eredményének használata, melyre témavezetőm hívta fel a figyelmemet. A Lemma alapján az indexforma egyenlet visszavezetése relatív binom Thue egyenletre, és a kapcsolatos, 5.2 Fejezetben szereplő megoldások kiszámítása saját eredményeim.