

Hadronzápor hatáskeresztmetszetek perturbációszámításon alapuló elmélete

Tulipánt Zoltán

Fizikus MSc

Témavezető:

Trócsányi Zoltán

Debreceni Egyetem
Kísérleti Fizikai Tanszék

2014

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. Kvantum-színdinamika	3
3. A hatáskeresztmetszet NNLO korrekciója	5
4. Színtéren ható operátor	11
5. Az $I_{12}^{(0)}$ felbontása	14
5.1. Csebisev-polinomok	15
5.2. Színfaktoros felbontás	17
6. Közelítőfüggvény keresése	20
6.1. A χ^2 -módszer	21
6.2. A belső tartomány	24
6.3. Alternatív közelítés	25
7. Összefoglalás	25
8. Köszönetnyilvánítás	26
9. Hivatkozások, felhasznált irodalom	26
A. A kutatási feladat	29

1. Bevezetés

A fizikai alapkutatás egyik, még napjainkban is nagy jelentőséggel bíró területe a részecskefizika, amelynek fő kísérleti eszköze a részecskegyorsító. A részecskegyorsítók elektromos töltéssel rendelkező részecskéket gyorsítanak fel nagy energiára és ütköztetik őket. A végállapotban megjelenő részecskék vizsgálata lehetőséget nyújt például a különböző modellek jóslatainak ellenőrzésére. Jelenleg az Európai Részecskefizikai Laboratórium (CERN) működteti a legnagyobb részecskefizikai gyorsítót. A CERN-ben korábban számos felfedezésre került sor (pl. a W^+ , W^- , Z^0 és Higgs-bozon) [1, 2]. Napjainkban tervbe került egy lineáris elektron-pozitron ütköztető, amivel bár alacsonyabb energiájú ütközéseket lehet megvalósítani, mint a Genf mellett található Nagy Hadronütköztetővel, viszont jó lehetőségeket nyújt a már ismert tömegű részecskék részletes tanulmányozására. A következő elektron-pozitron ütköztető elsődleges feladata a 2012 nyarán felfedezett Higgs-bozon vizsgálata lenne, amelynek jelenleg csak a tömegét és pár bomlási folyamatát ismerjük biztosan.

A részecskefizika eddigi legpontosabb leírást nyújtó modellje a standard modell [3], amely magába foglalja hat-hat kvark és lepton kvantumtérelméletét, valamint az elektromágneses, a gyenge és az erős kölcsönhatást, azonban hiányos. A standard modell nem tartalmazza például a gravitációt és nem nyújt magyarázatot a sötét anyagra, a sötét energiára, valamint arra, hogy nagy skálán miért az anyag dominál az antianyaggal szemben. (Miért nincsenek például antianyag galaxisok?) Ezen felül a Brout-Englert-Higgs mechanizmus [4] ismerete ellenére a neutrínók tömege nem származtatható a stan-

dard modell keretein belül, legfeljebb ha feltételezzük három steril neutrínó létezését, amelyek egyetlen kölcsönhatásban se vesznek részt. A neutrínóoszilláció miatt azonban szükséges, hogy a háromféle részecske tömegei különbözzenek [5]. Napjaink részecskefizikai kutatásainak nagy része új, átfogóbb elméletek kidolgozását célozza meg.

A részecskeütközések során leggyakrabban előforduló végállapotok tartalmazznak hadronnyalábokat (angol szakirodalomban az itt említett hadronnyaláb tükörfordításban hadronos dzset néven jelenik meg). Így az elméleti előrejelzések felállításához szükséges a kvantum-színdinamika (QCD), az erős kölcsönhatás kvantumtérelmélete. A részecskefizikai folyamatok jellemzésére használt egyik mennyiség a hatáskeresztmetszet, amely megadja, hogy ütközés után milyen valószínűséggel következnek be az egyes végállapotok. A QCD hatás-keresztmetszet pontos ismerete nemcsak az erős kölcsönhatás vizsgálatát megcélzó kísérletekhez szükséges, hanem például más részecskék keresése során is fontos, hogy ki lehessen szűrni a háttérfolyamatokat.

Témavezetőmmel, Prof. Dr. Trócsányi Zoltánnal végzett munkám során elektron-pozitron ütközések során fellépő három hadronzár szétsugárzásához számoljuk a hatáskeresztmetszet második sugárzási korrekcióját.

2. Kvantum-színdinamika

A standard modell három fermioncsaládjában összesen hatféle kvark szerepel, melyek rendelkeznek színtöltéssel, így részt vesznek az erős kölcsönhatásban.

E kölcsönhatás közvetítőrészesceái, a gluonok, szintén rendelkeznek színtöltéssel. A kölcsönhatás úgy származtatható, hogy bevezetjük a kvarkmezők egy új szabadsági fokát, a színt, majd megköveteljük a (kvarkokra felírt) Dirac-féle Lagrange-sűrűség lokális SU(3) invarianciáját.

Az SU(3) transzformációkat 3×3 -as általánosan komplex elemű unitér, unimoduláris mátrixokkal ábrázolhatjuk a kvarkok színterén. Ezek felírhatók exponenciális alakban:

$$\exp \left(i \sum_{a=1}^{N_C^2-1} \varepsilon^a t^a \right),$$

ahol az $N_C = 3$ a színtér dimenziója, az ε^a -k valós paraméterek, a t^a operátorok pedig az SU(3) Lie algebra generátorai(nak reprezentációi), melyek önadjungáltak és $\text{Tr}(t^a) = 0$. A generátorok kommutátora kifejezhető a generátorok lineáris kombinációiként:

$$[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c.$$

A lokális SU(3) invariancia eléréséhez be kell vezetni egy meghatározott módon transzformálódó "színes" vektormezőt (A_μ^a). Ennek azonban a kinetikus tagját is hozzá kell adni a Lagrange-sűrűséghez.

$$\mathcal{L} = \sum_{f=1}^{n_f} (\bar{q}_f^k (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \delta_{kl} q_f^l - g_S (t^a A_\mu^a)_{kl} \bar{q}_f^k \gamma^\mu q_f^l) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$$

(Az összegzést csak a kvarkízekre jelöltem expliciten. Szín- és Lorentz indexekre Einstein-konvenciót használok.) A $g_S \equiv \sqrt{4\pi\alpha_S}$ az erős csatolás, a bevezetett mértékmező kinetikus tagjában szereplő $F_{\mu\nu}^a$ térerősségtenzor pedig megadható az A_μ^a vektorpotenciál ismeretében:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g_S f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c.$$

A térerősségtenzor nem-ábeli mivoltából következően a Lagrange-sűrűség köbös és kvadratikus önkölcsönhatásokat is tartalmaz. Ezek miatt alacsony energián csak színsemleges állapotok léteznek, azaz a kvarkok és gluonok hadronokba záródnak be.

A kölcsönhatás erősségét kifejező α_S csatolás két parton (kvark vagy gluon) között a távolsággal nő. Ez egyben azt is jelenti, hogy a csatolás energiafüggő és nagy energiákon kicsi. Ezt nevezzük aszimptotikus szabadságnak és ez adja a perturbációszámítás létjogosultságát nagyenergiás ütközések tanulmányozására.

3. A hatáskeresztmetszet NNLO korrekciója

A szórási folyamatok leírására hatáskeresztmetszeteket (σ) számolunk, ami *átmeneti valószínűség/fluxus* jellegű, felület dimenziójú mennyiség.

$$\sigma = \frac{1}{2Q^2} \int d\Phi(p_1, \dots, p_n; Q) \frac{1}{S} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}_n|^2,$$

ahol Q^μ a teljes bejövő négyeslendület, p_i a végállapotban megjelenő i edik részecske négyeslendülete és az $i\mathcal{M}_n$ az amplitúdó, amelyet az adott folyamat-hoz tartozó összes lehetséges Feynman-gráfból számolunk és a hatáskeresztmetszetben az abszolútértékének négyzetét spinállapotokra átlagoljuk. Az integrálást d dimenziós téridőben az n -részecskés fázistér felett végezzük:

$$d\Phi_n = (2\pi)^d \delta^d \left(Q^\mu - \sum_{k=1}^n p_k^\mu \right) \prod_{j=1}^n \frac{d^d p_j}{(2\pi)^{d-1}} \delta_+(p_j^2 - m_j^2).$$

A Dirac-delta + indexe azt jelzi, hogy csak pozitív energiájú eseteket veszünk figyelembe.

Nagyenergiás ütközések tanulmányozására perturbatív QCD-t alkalmazunk, ami kihasználja az aszimptotikus szabadságot. A csatolás energiafüggésének köszönhetően a teljes hatáskeresztmetszet jól közelíthető α_S szerinti sorfejtésként:

$$\sigma^{QCD} = \alpha_S^p (A_0 + \alpha_S A_1 + \alpha_S^2 A_2 + \dots) = \sigma^{LO} + \sigma^{NLO} + \sigma^{NNLO} + \dots$$

Az első tag p rendben függ a csatolástól, ahol p az erős csatolások száma. Ezt LO (leading order) tagnak nevezzük. A második tag az NLO (next-to-leading order) sugárzási korrekció, a harmadik tag, amely a csatolás $p + 2$ hatványát tartalmazza, az NNLO (next-to-next-to-leading order) korrekció. Napjaink nagyenergiás kísérletei során végzett mérések pontossága miatt szükséges a hatáskeresztmetszet NNLO korrekcióját is kiszámítani, hogy megfelelő elméleti eredményeket tudjunk biztosítani. A korszerű részecskegyorsítókban elérhető teljes tömegközépponti energián, amely elektron-pozitron ütköztetőknél megegyezik a laborrendszerben megfigyelt ütközési energiával, a könnyű kvarkok tömege elhanyagolhatóvá válik, így tömeg nélküli részecs-kékként is kezelhetők. Ennélfogva a későbbiekben bármely parton négyeslendületére felírható, hogy

$$p_i^2 \equiv \sum_{\mu} p_i^{\mu} p_{i,\mu} = 0,$$

ami jelentősen leegyszerűsíti a számításokat.

Az m -dzsetes, a kiindulási állapotban erősen kölcsönható részecskéket nem tartalmazó ütközések (például elektron-pozitron ütközés) hatáskeresztmetszetének NNLO korrekciója felírható három integrál összegeként, amelyek

egyenként divergensek, viszont az összegük véges [6],

$$\begin{aligned}
\sigma^{NNLO} &= \int_{m+2} d\sigma_{m+2}^{RR} J_{m+2} + \int_{m+1} d\sigma_{m+1}^{RV} J_{m+1} + \int_m d\sigma_m^{VV} J_m \\
&= \int_{m+2} d\Phi_{m+2} |\mathcal{M}_{m+2}^{(0)}|^2 + \int_{m+1} d\Phi_{m+1} |\mathcal{M}_{m+1}^{(1)}|^2 \\
&\quad + \int_m d\Phi_m (2\text{Re}\langle \mathcal{M}_m^{(2)} | \mathcal{M}_m^{(0)} \rangle + |\mathcal{M}_m^{(1)}|^2). \tag{3.0.1}
\end{aligned}$$

A σ^{NNLO} tagjainak felső indexében megjelenő R és V arra utal, hogy az adott tag valós illetve virtuális korrekciót tartalmaz. Valós korrekció esetén a végállapotban egy plusz kisugárzott valós gluont, virtuális korrekciónál egy plusz gluon hurkot veszünk figyelembe. NNLO szinten duplán valós (RR), valós-virtuális (RV) és duplán virtuális (VV) korrekciók jelennek meg. Az egyes tagok kollineáris és lágy szingularitással rendelkeznek, azaz divergálnak, ha két részecske lendülete által bezárt szög vagy egy részecske energiája nullához tart. Ezen kívül a virtuális járulékok a hurokintegrálokban tartalmaznak divergenciát. Az alsó indexek jelölik, hogy a hatáskeresztmetszet, illetve az integrálás hány részecskés fázistérre vonatkozik. A szórási folyamatra vonatkozó amplitúdó egy vektor a szín- és spinállapotok Hilbert-terén és felbontható a folyamatban található hurokkorrekciók szerint,

$$|\mathcal{M}\rangle = |\mathcal{M}^{(0)}\rangle + |\mathcal{M}^{(1)}\rangle + |\mathcal{M}^{(2)}\rangle,$$

ahol a felső index jelöli a hurokjáulékok számát. A J_n -ek az úgynevezett dzsetfüggvények, amelyek az eseményalak analitikus kifejezései. Általánosan az m részecskés dzsetfüggvények nullához tartanak ha egy parton lággyá vagy egy másik partonnal kollineárisá válik.

$$J_m(p_1, \dots, p_m) \rightarrow 0, \text{ ha } p_i \cdot p_j \rightarrow 0$$

Az $m+1$ részecskés dzsetfüggvény pedig eltűnik ha két parton egyszerre válik lágygá vagy kollineáris. Amennyiben $s = 1$, vagy 2 részecske válik feloldatlanná (kollineáris és lágy határesetben), akkor $J_{m+s} \rightarrow J_m$.

Számszerű eredmények kinyeréséhez az (3.0.1) összeget át kell írni három másik, egyenként is véges integrál összegére, ami az integrálok dimenzionális regularizációjával tehető meg. Ehhez be kell vezetni egy ϵ regularizáló paramétert, ami ha tart nullához, akkor visszkapjuk az eredeti integrálokat. Dimenzionális regularizáció esetén a téridő dimenzióját hagyományosan $d = 4 - 2\epsilon$ -ra írjuk át. Az integrálok elvégzése után a regularizált függvények Laurent-sorában megjelenő divergens tagok együtthatói a végső felösszegezésnél nullának adódnak, a többi, ϵ -t tartalmazó tag pedig szintén eltűnik, amikor a regularizáló paraméterrel zérushoz tartunk. Ennélfogva a felösszegezés után csak a véges tagok maradnak meg. A hatáskeresztmetszet második sugárzási korrekciójának új alakja

$$\begin{aligned} \sigma^{NNLO} = & \int_{m+2} \left\{ d\sigma_{m+2}^{RR} J_{m+2} - d\sigma_{m+2}^{RR,A_2} J_m - \left[d\sigma_{m+2}^{RR,A_1} J_{m+1} - d\sigma_{m+2}^{RR,A_{12}} J_m \right] \right\}_{\epsilon=0} + \\ & \int_{m+1} \left\{ \left[d\sigma_{m+1}^{RV} + \int_1 d\sigma_{m+2}^{RR,A_1} \right] J_{m+1} - \left[d\sigma_{m+1}^{RV,A_1} + \left(\int_1 d\sigma_{m+2}^{RR,A_1} \right)^{A_1} \right] J_m \right\}_{\epsilon=0} + \\ & \int_m \left\{ d\sigma_m^{VV} + \int_2 \left[d\sigma_{m+2}^{RR,A_2} - d\sigma_{m+2}^{RR,A_{12}} \right] + \int_1 \left[d\sigma_{m+1}^{RV,A_1} + \left(\int_1 d\sigma_{m+2}^{RR,A_1} \right)^{A_1} \right] \right\}_{\epsilon=0} J_m . \end{aligned}$$

Az új, úgynevezett levonási tagok kompenzálják a sugárzási korrekciók divergenciáit, azonban NNLO szinten ezek átfednek egymással, ami bonyolultabb levonási séma kidolgozását igényli. Mi a *Somogyi Gábor*, *Trócsányi Zoltán* és *Vittorio Del Duca* által kidolgozott levonási sémát használjuk. A levonási tagok a feloldatlan részecskére elvégzett kiintegrálás után felírhatók a követ-

kező alakban:

$$\int_i d\sigma^{A_i} = d\sigma_{m+2-i}^B \otimes \mathbf{I}_i^{(0)}.$$

A $d\sigma_m^B$ a Born hatáskeresztmetszet, az $\mathbf{I}_i^{(0)}$ pedig egy szintéren ható operátor. Munkám során az iterált, egyszeresen feloldatlan levonási tag kiszámolásával foglalkozom:

$$\int_2 d\sigma_{m+2}^{RR,A_{12}} = d\sigma_m^B \otimes \mathbf{I}_{12}^{(0)}(\{p\}_m; \epsilon).$$

Az általunk $\otimes$ -tel jelölt művelet szintöltés operátorokat illeszt a kifejezésekbe:

$$|\mathcal{M}^{(0)}|^2 \otimes \mathbf{T}_i \cdot \mathbf{T}_k \equiv \langle \mathcal{M}^{(0)} | \mathbf{T}_i \cdot \mathbf{T}_k | \mathcal{M}^{(0)} \rangle.$$

(Éppen ezért a levonási tagokban megjelenő $\mathbf{I}_i$ szintéren ható operátorokat inzerációs operátoroknak is szokás nevezni.)

A szintéren ható operátorok felírhatók a mesterintegrálok szintöltés együtthatókkal vett lineáris kombinációjaként, melyek bizonyos paraméterektől és a végállapotban szereplő partonok négyesimpulzusától függenek az ún. kinematikai változókon keresztül. A kinematikai változók között három típust különböztetünk meg, amelyeket x_i -kkel, y_{ij} -kkel és Y_{ij} -kkel jelölünk. Az x_i kinematikai változók értékét a partonok tömegközépponti energiája határozza meg:

$$x_i = \frac{2\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{Q}}{Q^2} = \frac{2E_i}{Q}, \quad (3.0.2)$$

ahol p_i^μ az i -edik parton négyesimpulzusa, E_i az energiája és $\mathbf{Q} = (Q, 0, 0, 0)$. (Q az ütközés teljes, tömegközépponti energiája.) Kihhasználva, hogy a partonok tömege nulla, a két másik változótípusra felírható, hogy

$$y_{ij} = \frac{(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j)^2}{Q^2} = \frac{2\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j}{Q^2}, \quad Y_{ij} = \frac{y_{ij}}{x_i x_j} \quad i \neq j. \quad (3.0.3)$$

Az x_i és Y_{ij} változóknak könnyen lehet fizikai jelentést tulajdonítani: tömegközépponti rendszerben az x_i változó az i -edik parton ($Q/2$ -vel skálázott) energiája, az Y_{ij} pedig

$$\frac{1 - \cos \chi_{ij}}{2}, \quad (3.0.4)$$

ahol χ_{ij} az i -edik és j -edik parton hármaslendülete által bezárt szög. Három dzset esetén csak két változó független, ugyanis az energiamegmaradás miatt teljesül, hogy

$$\sum_{i=1}^3 x_i = 2. \quad (3.0.5)$$

Az y_{ij} és x_k változókra felírhatjuk, hogy

$$y_{ij} = 1 - x_k, \quad (3.0.6)$$

ahol i, j és k csak különböző értékeket vehetnek fel, így

$$y_{12} + y_{23} + y_{13} = 1. \quad (3.0.7)$$

Ez azonban más megszorítást is jelent a független változók számán kívül. Ha kiválasztunk két változót az egyik fajtából, akkor a színoperátor értelmezési tartományának fizikailag értelmes része háromszög alakú. A színoperátorok a tartomány határainál logaritmikusan divergálnak. A határokon megfigyelt divergens viselkedés kétféle kinematikai helyzetben áll elő. Ha a végállapotban megjelenő egyik (pl. az i -edik) részecske energiája alacsony, akkor

$$0 \approx x_i = 1 - y_{jk} \quad \text{és} \quad y_{jk} \approx 1.$$

A másik eset az, amikor két végállapotú parton (pl. az i -edik és j -edik) lendülete által bezárt szög kicsi, azaz kollinearissá válnak. Ebben az esetben $0 \approx Y_{ij} = y_{ij}/x_i x_j$, azaz $y_{ij} \approx 0$.

4. Színtéren ható operátor

Az színtéren ható operátorok (röviden színoperátorok) a mátrixelemekre ható színtöltéseket illesztnek a kifejezésbe. Mesterintegrálok színtöltésegüttthattókkal vett lineáris kombinációiként állnak elő. Az általam számolt operátor a következő, [7]

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{12}^{(0)} = & \left[\frac{\alpha_S}{2\pi} S_\epsilon \left(\frac{\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \right]^2 \left\{ \sum_i \left[C_{12,f_i}^{(0)} C_{f_i} + \sum_{k \neq i} C_{12,f_i f_k}^{(0)} C_{f_k} \right] C_{f_i} \right. \\ & + \sum_{j,l \neq j} \left[S_{12}^{(0),(j,l)} C_A + \sum_i C S_{12,i,f_i}^{(0),(j,l)} C_{f_i} \right] \mathbf{T}_j \cdot \mathbf{T}_l \\ & \left. + \sum_{i,k \neq i} S_{12}^{(0),(i,k),(j,l)} \{ \mathbf{T}_i \cdot \mathbf{T}_k, \mathbf{T}_j \cdot \mathbf{T}_l \} \right\}. \quad (4.0.8) \end{aligned}$$

Ebben a kifejezésben az összegzést a végállapot partonainak ízére ($q, g, \bar{q}$) kell elvégezni és $C_q = C_{\bar{q}} = C_F$, $C_g = C_A$. A színoperátor a színtöltés algebra generátorainak kombinációja. A generátorok eleget tesznek a

$$\left(\sum_i \mathbf{T}_i \right) |\mathcal{M}\rangle = 0 \quad (4.0.9)$$

összefüggésnek, ami a színtöltés megmaradását fejezi ki. Ezen kifejezésekben megjelenő szorzás úgy értendő, hogy

$$\mathbf{T}_i \cdot \mathbf{T}_j \equiv \sum_n (\mathbf{T}_i)^n (\mathbf{T}_j)^n.$$

Ezen kívül tudható, hogy

$$\mathbf{T}_i \mathbf{T}_k = \mathbf{T}_k \mathbf{T}_i, \quad \mathbf{T}_q^2 = C_F, \quad \text{és} \quad \mathbf{T}_g^2 = C_A,$$

ahol $C_F = T_R(N_c^2 - 1)/N_c$ és $C_A = 2T_R N_c$. N_c a színtöltések száma, T_R pedig a $Tr(\mathbf{T}_j \mathbf{T}_l) = T_R \delta_{jl}$ kifejezésből származó, itt $1/2$ -nek választott dimenziótlan normálási állandó.

A kvarkok színtöltés operátorát az $SU(3)$ csoport generátorainak fundamentális (három dimenziós), míg a gluonokét az adjungált (nyolc dimenziós) ábrázolása adja.

$$(\mathbf{T}_q)^a = (\mathbf{T}_{\bar{q}})^a = t^a, \quad (\mathbf{T}_g)^a_{bc} = -if_{abc}$$

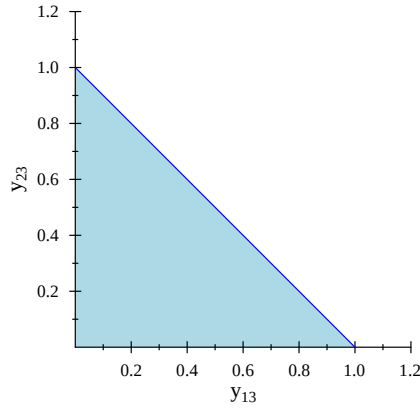
A kapcsos zárójeles rész előtt szereplő négyzetes szorzóban a Q a teljes tömegközépponti energia, a μ pedig egy energia dimenziójú, fizikai tartalommal nem rendelkező, renormálási skálának nevezett mennyiség, ami a renormálási eljárás miatt jelenik meg. Ennélfogva a valódi fizikai mennyiségekre pontos számítással kapott eredmények μ -tól függetlenek. Ezt egy renormálási csoportegyenlettel lehet kifejezni. A perturbatív eredmények csak a perturbációs számítás rendjén belül tekinthetők μ -tól függetlennek. Továbbá

$$S_\epsilon = \frac{(4\pi)^\epsilon}{\Gamma(1 - \epsilon)}. \quad (4.0.10)$$

A négyzetes szorzó kiemelhető minden színoperátorból, így például az összegzést végző programban nem jelenik meg.

A szintéren ható operátorok mellett megjelenő kifejezéseket kinematikai függvényeknek nevezzük, amelyek a mesterintegrálok lineáris kombinációiként állnak elő. Ezek a kinematikai változóktól, tehát a végállapotban megjelenő partonok impulzusától függenek, valamint szerepelnek bennük az íz-indexek is.

Tekintettel arra, hogy a kinematikai változók közül csak kettő független, a színoperátort az y_{13} és y_{23} függvényeként adjuk meg. Az $(1,2,3)$ indexek



1. ábra. A kinematikai tartomány

rendre kvarkot, antikvarkot és gluont jelölnek. A független változók ilyen választásának előnye, hogy a színoperátor így a változóiban szimmetrikus. Ennek következtében általában elegendő a fázistérnek csak az egyik felén elvégezni a számításokat, ami jelentősen csökkenti a színoperátor kiértékeléséhez szükséges időt.

Figyelembe kell venni a kinematikai változókra vonatkozó kényszert is, amit a (3.0.7) egyenlet fejez ki. Ez az összefüggés azt vonja maga után, hogy a fázistér fizikailag értelmes tartománya háromszög alakú. Határait az $y_{13} = 0$, $y_{23} = 0$ és $y_{13} + y_{23} = 1$ egyenletek adják meg.

Az $\mathbf{I}_{12}^{(0)}$ numerikus számításához első lépésként a mesterintegrálokat kell kiszámolni megfelelő változóértékek és azok permutációi mellett. Ehhez a *SecDec 2.1* programcsomagot használtam [18], ami szektorok szerinti dekom-

pozíciót alkalmaz. A szektordekompozíció egy algoritmikus módszer szingularitások leválasztására ϵ -pólusok alakjában bonyolult integrálokban, amelyet például perturbatív kvantumtérelméletekben alkalmaznak. A programcsomag váza *Perl* programozási nyelven íródott, az integrálok dekompozíciójához *Wolfram Mathematica*-t, a numerikus számítások elvégzéséhez pedig *Fortran*-t használ. Végző eredményt a szintéren ható operátorra egy általam *Fortran* nyelven írt numerikus program szolgáltatja, amely a kiszámolt integrálokból felépíti a (4.0.8) kifejezésben szereplő kinematikai függvényeket. A mesterintegrálokhoz szükséges *Mathematica* input fájlokat korábbi munkám során megírtam és a számítások eredményét ellenőriztük. Egy integrál több pontbeli számoláshoz meg kell adni egy másik input fájlt, amely tartalmazza a változóértékek listáját. Ezeket egy általam *C*-ben írt program generálja két y_{ij} változó értékeivel megadott pontokban. Nemrég sikerült automatizálni a mesterintegrálok számolását *bash script*-ek írásával.

5. Az $I_{12}^{(0)}$ felbontása

Az $SU(3)$ csoport fundamentális reprezentációjában megadott kvadratikuss Casimir-operátor

$$C_F \mathbb{1} = \sum_a t_F^a t_F^a.$$

Az adjungált ábrázolás generátorainak mátrixát a

$$(t_A^b)_{ac} = if^{abc}$$

összefüggéssel definiáljuk és kvadratikus Casimir-operátora $C_A \mathbb{1}$. A C_F és C_A értékek a T_R normálási együtthatóval és az ütközési energia szempontjából könnyű kvarkizék n_f számával együtt megjelennek a színtérn ható operátorban. Ezekre a továbbiakban színszorzókként fogok hivatkozni.

A színszorzók fizikai jelentősséggel bírnak, ezért ezeket érdemes ezeket faktorizálni a színtéren ható operátorból. Az $\mathbf{I}_{12}^{(0)}$ szerkezete olyan, hogy bizonyos részsámolásokban két színfaktor inverze is megjelenik, ami megnehezíti a színfaktorok együtthatóinak kinyerését.

5.1. Csebisev-polinomok

A színfaktoroka együtthatóik kinyeréséhez változóknak tekintetem és megillesztetem a színtéren ható operátort Csebisev polinomokkal. A Csebisev polinomok definiálásának több, egymással egyenértékű módja is van [16]. Az egyik lehetőség a $[-1, 1]$ intervallumon értelmezett x^i , $i = 0, 1, 2, \dots$ függvények Gram-Schmidt ortogonalizációja a következő belső szorzattal:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad (5.1.1)$$

Ezek a függvények bázist alkotnak az

$$\left\{ f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1] \mid f \text{ folytonos} \right\} \quad (5.1.2)$$

függvénytéren. Az n -edrendű Csebisev polinom

$$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m \frac{(n-m-1)!}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m} \quad (5.1.3)$$

ahol az összegzés felső határánál megjelenő $[n/2]$ azt takarja, hogy $n/2$ -t lefele kell kerekíteni. Továbbá belátható, hogy $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

A Csebisev polinomok nemcsak folytonos, hanem diszkrét ortogonalitási szabálynak is eleget tesznek. $T_n(x)$ -nek n darab zérushelye van a $[-1,1]$ intervallumon:

$$x_k = \cos\left(\pi \frac{k-0.5}{n}\right), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (5.1.4)$$

Ezek könnyen megalálhatók a polinomok trigonometrikus alakjának felhasználásával. Ha $i, j < n$, akkor

$$\sum_{k=1}^n T_i(x_k) T_j(x_k) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \frac{n}{2} & i = j \neq 0 \\ n & i = j = 0 \end{cases} \quad (5.1.5)$$

Ha egy egyváltozós $f(x)$ függvényt maximum $n-1$ -edrendű Csebisev polinomokkal akarunk közelíteni

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^n a_i T_{i-1}(x) \quad (5.1.6)$$

alakban, akkor a diszkrét ortogonalitási szabályok felhasználásával az i -edik polinom együtthatója

$$a_i = \frac{\sum_{k=1}^n f(x_k) T_{i-1}(x_k)}{\sum_{k=1}^n T_{i-1}^2(x_k)}, \quad (5.1.7)$$

Ezt az eljárást többváltozós függvényekre is lehet általánosítani. Az átláthatóság kedvéért csak a háromváltozós esetet adom meg [17]. Ha az illesztett függvény alakja

$$\sum_{i,j,k=1}^N a_{ijk} T_{i-1}(x) T_{j-1}(y) T_{k-1}(z), \quad (5.1.8)$$

az együtthatókat az

$$a_{ijk} = \frac{\sum_{m,n,o=1}^N f(x_m, x_n, x_o) T_{i-1}(x_m) T_{j-1}(x_n) T_{k-1}(x_o)}{\sum_{m=1}^N T_{i-1}^2(x_m) \sum_{n=1}^N T_{j-1}^2(x_n) \sum_{o=1}^N T_{k-1}^2(x_o)} \quad (5.1.9)$$

képlet adja, ahol $f(x, y, z)$ a közelítendő függvény, amit itt minden változóban a $T_N(x)$ zérushelyein kell kiértékelni.

5.2. Színfaktoros felbontás

Az $\mathbf{I}_{12}^{(0)}$ számolására szolgáló terjedelmes numerikus program szerkezete miatt a szintéren ható operátor színfaktorok szerinti felbontása nem végezhető el egyszerűen kis numerikus hibával, ezért Csebisev polinomokkal illesztettem C_F , C_A , n_f és T_R szerint. Tudható, hogy az $\mathbf{I}_{12}^{(0)}$ csak C_F^2 -et, C_A^2 -et, $C_F C_A$, $C_F n_f T_R$ -t és $C_A n_f T_R$ -t tartalmaz, így elegendő a maximum másodfokú polinomok használata. Módosítottam a szintéren ható operátor számolására szolgáló programot, hogy a színfaktorok több különböző értéke mellett végezze el a számításokat. Érdekes volt elkerülni, hogy a színfaktorok értéke megközelítse a nullát, ezért változótranszformációt is alkalmaztam. Ha $x \in [-1, 1]$ és $y \in [a, b]$, akkor

$$y = \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}.$$

A módszert ellenőriztem a szimmetrikus és egy kollineáris pontra végzett számításokkal. Az illesztésben megengedett, de elvileg nem létező tagok (például $C_F^2 n_f$) jó közelítéssel nullának adódtak (értékük 10^{-5} -nél kisebb volt). A szimmetrikus pontban (ahol $y_{13} = y_{12} = y_{23} = 1/3$) kapott eredmény a következő:

$$\begin{aligned}
& (C_A^2 + 4 C_A C_F + 4 C_F^2) \frac{1}{\epsilon^4} + (6.4132 C_A^2 + 22.8875 C_A C_F + 20.7889 C_F^2 \\
& - 1.33333 C_A n_f T_R - 4 C_F n_f T_R) \frac{1}{\epsilon^3} + (17.4007 C_A^2 + 57.3204 C_A C_F \\
& + 29.7522 C_F^2 - 10.5637 C_A n_f T_R - 29.5122 C_F n_f T_R) \frac{1}{\epsilon^2} + \\
& (21.5949 C_A^2 + 84.9993 C_A C_F - 104.909 C_F^2 - 39.309 C_A n_f T_R \\
& - 111.414 C_F n_f T_R) \frac{1}{\epsilon} + 21.6383 C_A^2 + 202.127 C_A C_F \\
& - 750.264 C_F^2 - 82.9842 C_A n_f T_R - 317.175 C_F n_f T_R. \tag{5.2.1}
\end{aligned}$$

Ezt összevetve egy független, az ϵ^{-1} pólus kivételével teljesen analitikus módszerrel kapott eredménnyel jó egyezést kapunk.

$$\begin{aligned}
& (C_A^2 + 4 C_A C_F + 4 C_F^2) \frac{1}{\epsilon^4} + (6.4132 C_A^2 + 22.8875 C_A C_F + 20.7889 C_F^2 \\
& - 1.33333 C_A n_f T_R - 4 C_F n_f T_R) \frac{1}{\epsilon^3} + (17.4007 C_A^2 + 57.3204 C_A C_F \\
& + 29.7521 C_F^2 - 10.5637 C_A n_f T_R - 29.5122 C_F n_f T_R) \frac{1}{\epsilon^2} + \\
& (21.5966 C_A^2 + 84.9954 C_A C_F - 104.909 C_F^2 - 39.309 C_A n_f T_R \\
& - 111.414 C_F n_f T_R) \frac{1}{\epsilon} + O(\epsilon^0) \tag{5.2.2}
\end{aligned}$$

A felbontást ellenőriztük egy általunk választott kollineáris pontban is, amiben a kinematikai változók értéke

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0.9968202010, & x_2 &= 0.2418465698, & x_3 &= 0.7613332290 \\
y_{23} &= 3.179799 \cdot 10^{-3}, & y_{13} &= 0.7581534302, & y_{12} &= 0.238666771 \\
Y_{23} &= 0.01726970587, & Y_{13} &= 0.999, & Y_{12} &= 0.99
\end{aligned}$$

Ebben a pontban is a numerikus eljárással számolt eredmény,

$$\begin{aligned}
& (C_A^2 + 4 C_A C_F + 4 C_F^2) \frac{1}{\epsilon^4} + (15.1545 C_A^2 + 38.5439 C_A C_F + 23.4615 C_F^2 \\
& - 1.33333 C_A n_f T_R - 4 C_F n_f T_R) \frac{1}{\epsilon^3} + (119.698 C_A^2 + 199.738 C_A C_F \\
& + 52.8114 C_F^2 - 16.2764 C_A n_f T_R - 30.1326 C_F n_f T_R) \frac{1}{\epsilon^2} + \\
& (648.489 C_A^2 + 739.600 C_A C_F - 18.0824 C_F^2 - 101.47 C_A n_f T_R \\
& - 120.57 C_F n_f T_R) \frac{1}{\epsilon} + 2697.31 C_A^2 + 2236.87 C_A C_F \\
& - 625.096 C_F^2 - 430.728 C_A n_f T_R - 381.158 C_F n_f T_R
\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

jól egyezik a majdnem teljesen analitikusan kapott eredménnyel.

$$\begin{aligned}
& (C_A^2 + 4 C_A C_F + 4 C_F^2) \frac{1}{\epsilon^4} + (15.1545 C_A^2 + 38.5439 C_A C_F + 23.4615 C_F^2 \\
& - 1.33333 C_A n_f T_R - 4 C_F n_f T_R) \frac{1}{\epsilon^3} + (119.698 C_A^2 + 199.738 C_A C_F \\
& + 52.8115 C_F^2 - 16.2764 C_A n_f T_R - 30.1326 C_F n_f T_R) \frac{1}{\epsilon^2} + \\
& (648.491 C_A^2 + 739.604 C_A C_F - 18.0819 C_F^2 - 101.47 C_A n_f T_R \\
& - 120.57 C_F n_f T_R) \frac{1}{\epsilon} + O(\epsilon^0)
\end{aligned} \tag{5.2.4}$$

A szintéren ható operátor numerikus számolását korábbi munkánk során ellenőriztük és a rendelkezésre álló független analitikus számolásokkal összehasonlítva a relatív hiba nem volt nagyobb 10^{-5} -nél. Az ellenőrzésnél is használt független eredmények első három pólusa teljesen analitikus számolásból adódott (az utolsó pólushoz numerikus kiértékelésre is szükség volt), viszont a véges rész ezeknél nem áll rendelkezésre. A színfaktorok szerinti felbontásra alkalmazott eljárás tehát működik és nem okoz észrevehető romlást az eredmények pontosságában.

6. Közelítőfüggvény keresése

A szintéren ható operátor numerikus számolása egy kinematikai pontban is hosszú időt vesz igénybe, ezért célszerű keresni egy megfelelő pontosságú közelítőfüggvényt. Az $\mathbf{I}_{12}^{(0)}$ a kinematikai tartomány határainál logaritmikusan divergál. Ezt az aszimptotikus viselkedést levonva a maradék a határokon véges értéket vesz fel és feltehetőleg egyszerű polinomokkal jól közelíthető. A belső rész megillesztése megvalósítható Csebisev polinomokkal. Az aszimptotikus rész $(-n)$ -edik pólusa $\log y_{ij}$ és $\log 1 - y_{ij}$ tényezőket tartalmazó tagok legfeljebb $4+n$ -edfokú polinomjaként írható fel, a véges rész pedig maximum negyedfokú kifejezéseket tartalmazhat. Ezen kívül tudható, hogy az aszimptotikus részben a logaritmusok együtthatói kis egész számok hányadosainak és színszorzóknak a szorzataként áll elő. Ez lehetőséget nyújt arra, hogy az aszimptotikus részt akár pontosan is meg tudjuk határozni.

Az aszimptotikus rész megillesztéséhez olyan pontokban kell kiértékelni a szintéren ható operátort, melyekben a belső rész járuléka elhanyagolható. Ennek a feltételnek eleget tesznek a kinematikai tartomány sarkai, melyekben két y_{ij} változó értéke kisebb, mint 10^{-4} . Ilyenkor a harmadik változó értéke közel 1. A két független változó értékének alsó hataraként 10^{-8} -at választottunk. Nyilvánvaló, hogy a teljes aszimptotikus viselkedés megállapításához nem elegendő egy sarokban elvégezni az illesztést. A szintéren ható operátor az y_{23} és y_{13} változóban szimmetrikus (a végállapotban megjelenő kvark és antikvark a kinematika szempontjából felcserélhető), így a számításokat csak az $y_{12} \rightarrow 1$ és egy $y_{i3} \rightarrow 1$ sarokban kell elvégezni. Ezen kívül az $y_{12} \rightarrow 1$ sarokban a szimmetria miatt elég olyan pontokban megkapni

az $\mathbf{I}_{12}^{(0)}$ értékét, melyekre teljesül, hogy $y_{23} \leq y_{13}$ (vagy fordítva).

Az aszimptotikus tartományt az együtthatók minél pontosabb kinyerése érdekében nem lehet Csebisev-polinomokkal megilleszteni, ezért erre a feladatra a χ^2 -módszert választottuk.

6.1. A χ^2 -módszer

A χ^2 -módszer előnye, hogy tetszőleges függvényalak illesztését lehetővé teszi. Ehhez az alábbi kifejezést kell minimalizálni a feltételezett $f(x, y; q_1, \dots, q_n)$ függvényalak q_k ($k = 1, \dots, n$) paraméterei szerint.

$$\chi^2(q_1, \dots, q_n) = \sum_{i,j} \frac{(y_{ij} - f(x_i, x_j; q_1, \dots, q_n))^2}{\sigma_{ij}^2}$$

A vizsgált függvényt bizonyos (x_i, x_j) pontokban kiértékelve y_{ij} értékeket kapunk σ_{ij} hibákkal. Minél nagyobb a számolások hibája egy pontban, annál kisebb súllyal vannak figyelembe véve a χ^2 -ben, ami a legkisebb négyzetek módszeréhez képest pontosabb közelítőfüggvényt biztosít. A χ^2 minimalizálásához n darab homogén lineáris egyenletet kell megoldanunk, hogy megkapjuk az (x_i, x_j, y_{ij}) pontokra σ_{ij} hibával legjobban illeszkedő közelítőfüggvény c_k paramétereit.

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial q_k}(c_1, \dots, c_n) = 0$$

Függvények minimalizálására már sok részletesen kidolgozott és ellenőrzött programcsomag áll rendelkezésre. A közelítőmódszert kezdetben a *Wolfram Mathematica* beépített minimalizáló eljárásával próbáltam ki. Az $\mathbf{I}_{12}^{(0)}$ aszimptotikus részére az $y_{12} \rightarrow 1$ sarokban az alábbi függvényalakot feltéte-

leztük:

$$f(y_{13}, y_{23}; \{C_{ijk}\}) = \sum_{i,j,k} C_{ijk} \log^i y_{13} \log^j y_{23} \log^k(y_{13} + y_{23})$$

Az $\mathbf{I}_{12}^{(0)}$ pólusai analitikusan is ismertek, ezért először az ϵ^{-2} pólust illesztettem meg, hogy ellenőrizni tudom az eddig kidolgozott eljárást. Ehhez a szintéren ható operátort kilenc pontban értékeltem ki a $[10^{-10}, 10^{-6}] \times [10^{-10}, 10^{-6}]$ tartományon. Az eredmény alább látható.

$$\begin{aligned} C_A n_f T_R \Big(& -7.1011 + 1.6671 \log y_{13} + 1.6671 \log y_{23} - 0.0012 \log y_{13} \log y_{23} \\ & + 1.3346 \log(y_{13} + y_{23}) + 0.0012 \log y_{13} \log(y_{13} + y_{23}) \\ & + 0.0012 \log y_{23} \log(y_{13} + y_{23}) - 0.0011 \log^2(y_{13} + y_{23}) \Big) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_F n_f T_R \Big(& -16.1148 - 0.0054 \log y_{13} - 0.0054 \log y_{23} + 9.3216 \log(y_{13} + y_{23}) \\ & - 0.0008 \log y_{13} \log(y_{13} + y_{23}) - 0.0008 \log y_{23} \log(y_{13} + y_{23}) \\ & + 0.0002 \log^2(y_{13} + y_{23}) \Big) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_F^2 \Big(& -21.081 + 0.0017 \log y_{13} + 0.0017 \log y_{23} + 0.0038 \log(y_{13} + y_{23}) \\ & + 0.0002 \log y_{13} \log(y_{13} + y_{23}) + 0.0002 \log y_{23} \log(y_{13} + y_{23}) \Big) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_A^2 \Big(& 22.152 - 14.266 \log y_{13} + 2.75 \log^2 y_{13} - 14.266 \log y_{23} \\ & - 1.4979 \log y_{13} \log y_{23} + 2.75 \log^2 y_{23} + 8.2912 \log(y_{13} + y_{23}) \\ & - 0.0045 \log y_{13} \log(y_{13} + y_{23}) - 0.0045 \log y_{23} \log(y_{13} + y_{23}) \\ & + 7.0023 \log^2(y_{13} + y_{23}) \Big) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C_A C_F \left(26.617 - 19.345 \log y_{13} + 1.9991 \log^2 y_{13} - 19.345 \log y_{23} \right. \\
& \quad - 3.9777 \log y_{13} \log y_{23} + 1.9991 \log^2 y_{23} + 12.024 \log(y_{13} + y_{23}) \\
& \quad - 0.0207 \log y_{13} \log(y_{13} + y_{23}) - 0.0207 \log y_{23} \log(y_{13} + y_{23}) \\
& \quad \left. + 8.0209 \log^2(y_{13} + y_{23}) \right)
\end{aligned}$$

Bár ezek az eredmények még nem kellően pontosak, az együtthatókról általában eldönthető, hogy mely kis egész számok hányadosait közelítik:

$$\begin{aligned}
& C_A n_f T_R \left(-7.1011 + \frac{5}{3}(\log y_{13} + \log y_{23}) + 4/3 \log(y_{13} + y_{23}) \right) + \\
& C_F^2 (-21.081) + C_F n_f T_R \left(-\frac{145}{9} + \frac{28}{3} \log(y_{13} + y_{23}) \right) + \\
& C_A^2 \left(22.153 - \frac{57}{4}(\log y_{13} + \log y_{23}) + \frac{11}{4}(\log^2 y_{13} + \log^2 y_{23}) \right. \\
& \quad \left. - \frac{3}{2} \log y_{13} \log y_{23} + \frac{25}{3} \log(y_{13} + y_{23}) + 7 \log^2(y_{13} + y_{23}) \right) + \\
& C_A C_F \left(26.617 - \frac{58}{3}(\log y_{13} + \log y_{23}) + 2(\log^2 y_{13} + \log^2 y_{23}) \right. \\
& \quad \left. - 4 \log y_{13} \log y_{23} + 12 \log(y_{13} + y_{23}) + 8 \log^2(y_{13} + y_{23}) \right).
\end{aligned}$$

Összehasonlítva a numerikus eljárással kapott eredményeket a független, teljesen analitikus számolás harmadik pólusával az $y_{12} \rightarrow 1$ sarokban azt találtam, hogy csak a hatodik értékes jegytől kezdődően tértek el egymástól.

eredmény	$10^{-10} \ 10^{-10}$	$10^{-10} \ 10^{-8}$	$10^{-10} \ 10^{-6}$	$10^{-8} \ 10^{-8}$	$10^{-8} \ 10^{-6}$	$10^{-6} \ 10^{-6}$
analitikus	71860.094	53311.240	37373.980	46440.230	32086.502	26576.745
numerikus	71860.198	53311.187	37373.796	46440.109	32086.396	26576.651
relatív eltérés	1.0000014	0.9999990	0.9999951	0.9999974	0.9999967	0.9999965

1. táblázat: $y_{12} \rightarrow 1$ aszimptotika összehasonlítás. $C_F = 4/3$, $C_A = 3$, $n_f = 5$, $T_R = 1/2$

6.2. A belső tartomány

A szintéren ható operátor aszimptotikus részének kinyerését követően a kapott eredményt levonva az $\mathbf{I}_{12}^{(0)}$ -ból egy olyan sima függvényt kapunk, amely már a kinematikai tartomány határainál se divergál, hanem véges értéket vesz fel. Ezt a maradékot egyszerűen Csebisev-polinomokkal illesztjük meg. Ehhez független változónak az y_{13} -at és y_{23} -at választottuk. Lévéen a Csebisev polinomok értelmezési tartománya a $[-1, 1]$ intervallum és a kinematikai tartomány háromszög alakú, változótranszformációt is kell alkalmaznunk. Például az $n+1$ -edrendű illesztéshez szükséges függvényértékek helyének megadásához, ha $x_k \in [-1, 1]$ a $T_n(x)$ k -adik zérushelye, az alábbi változóértékeket kell kiszámolni.

$$y_{13,i} = \frac{x_i + 1}{2}, \quad y_{23,ij} = \frac{1 - y_{13,i}}{2}(x_j + 1)$$

A közelítőfüggvény kiértékelésénél ennek a transzformációnak az inverzére van szükségünk, azonban ügyelni kell arra, hogy mely változóértékek vannak párban. A független kinematikai változók értékének alsó határául 0.001-et, felső határául pedig 0.999-et választottunk.

Ezt az eljárást azután fogom alkalmazni, hogy a korábban ismertetett módszerrel meghatároztam a teljes aszimptotikus viselkedést. Először természetesen ellenőrzöm az ϵ^{-2} póluson, valamint a mesterintegrálok számolásához szükséges időhöz mérten fogjuk megválasztani az illesztés fokát.

6.3. Alternatív közelítés

A szintéren ható operátor közelítését másképp is meg lehet valósítani. Az $\mathbf{I}_{12}^{(0)}$ színfaktoros felbontását követően a kiválasztott pólus illetve véges rész megilleszthető Csebisev polinomokkal $\log y_{13}$ és $\log y_{23}$ polinomjaként a teljes kinematikai tartományon. Bár a közelítőfüggvény alakja ezzel (terjedelmesebb, de) egyszerűbb lenne és magas rendű illesztés esetén valószínűleg a belső tartományt is jól lehetne közelíteni, az eljárás nem venné figyelembe az aszimptotikus viselkedésnek azt a részét, ahol $y_{12} \rightarrow 0$.

Ezt az eljárást is ellenőrizni fogjuk a $\mathbf{I}_{12}^{(0)}$ egyik nem triviális pólusán, de megvalósítása még folyamatban van.

7. Összefoglalás

A hatáskeresztmetszet második sugárzási korrekciójában megjelenő $\mathbf{I}_{12}^{(0)}$ operátor numerikus kiértékelése teljesen be van programozva és a mesterintegrálok számítását sikerült teljesen automatizálni. A szintéren ható operátor számolása egy pontban viszont rendkívül hosszú időt vesz igénybe.

Sikerült egyszerű és megbízható eljárást kidolgozni az $\mathbf{I}_{12}^{(0)}$ színfaktorok szerinti felbontására, ami tekintettel a színfaktorok tartalmára fizikai szempontból is lényeges. Ezentúl χ^2 -módszer segítségével kinyerhető a szintéren ható operátor aszimptotikus része, azonban a módszer pontossága még finomítást igényel. Ezért későbbi munkánk során ezen illesztéshez az elter-

jedten használt *MINUIT2* programcsomagot fogjuk alkalmazni a minimalizációra.

8. Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet nyilvánítani témavezetőmnek, *Prof. Dr. Trócsányi Zoltánnak*, aki nélkül e szakdolgozat nem íródhatott volna meg. Útmutatása alatt sokat fejlődtem és alapszakos hallgatóhoz mérten nagyfokú betekintést nyertem a modern részecskefizika elméleti alapjaiba is.

Valamint szeretnék köszönetet mondani *édesanyámnak* és *nagymamámnak* támogatásukért.

9. Hivatkozások, felhasznált irodalom

- [1] C. Rubbia, *Experimental Observation of the Intermediate Vector Bosons W^+ , W^- and Z^0* , Nobelprize.org. Nobel Media AB 2014. Web. 13 Nov 2014. http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1984/rubbia-lecture.html
- [2] CMS Collaboration, *Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC*, Phys.Lett. B716 (2012) 30-61 [arXiv:1207.7235 [hep-ex]]

- [3] S. Weinberg, *A Model of Leptons*, Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 1264 [DOI: 10.1103/PhysRevLett.19.1264]
- [4] P. W. Higgs, *Broken symmetries and the masses of gauge bosons*, Phys. Rev. Lett. 13, 508
- [5] Z. Maki, M. Nakagawa, S. Sakata, *Remarks on the Unified Model of Elementary Particles*, Progress of Theoretical Physics 28: 870 (1962)
 B. Pontecorvo, *Neutrino Experiments and the Problem of Conservation of Leptonic Charge*, Sov. Phys. JETP 26: 984. 1968 (1967)
- [6] V. Del Duca, G. Somogyi and Z. Trócsányi, *Matching of singly- and doubly-unresolved limits of tree-level QCD squared matrix elements*, JHEP 0506 (2005) 024 [arXiv:0502226 [hep-ph]]
- [7] P. Bolzoni, G. Somogyi, Z. Trócsányi, *A subtraction scheme for computing QCD jet cross sections at NNLO: integrating the iterated singly-unresolved subtraction terms*, JHEP 1101 (2011) 059 [arXiv:1011.1909 [hep-ph]]
- [8] V. Del Duca, G. Somogyi, Z. Trócsányi, *A Subtraction scheme for computing QCD jet cross sections at NNLO: Regularization of doubly-real emissions*, JHEP 0701 (2007) 070 [arXiv:0609042 [hep-ph]]
- [9] G. Somogyi, Z. Trocsanyi, *A Subtraction scheme for computing QCD jet cross sections at NNLO: Regularization of real-virtual emission*, JHEP 0701 (2007) 052 [arXiv:0609043 [hep-ph]]

- [10] G. Somogyi, Z. Trócsányi, *Subtraction method of computing QCD jet cross sections at NNLO accuracy*, [arXiv:0807.0520 [hep-ph]]
- [11] P. Bolzoni, S. Moch, G. Somogyi, Z. Trocsanyi, *Analytic integration of real-virtual counterterms in NNLO jet cross sections. II.*, JHEP 0908 (2009) 079 [arXiv:0905.4390 [hep-ph]]
- [12] V. Del Duca, G. Somogyi, Z. Trócsányi, *Integration of collinear-type doubly unresolved counterterms in NNLO jet cross sections*, JHEP 1306 (2013) 079 [arXiv:1301.3504 [hep-ph]]
- [13] G. Somogyi, *A subtraction scheme for computing QCD jet cross sections at NNLO: integrating the doubly unresolved subtraction terms*, JHEP 1304 (2013) 010 [arXiv:1301.3919 [hep-ph]]
- [14] V. Del Duca, G. Somogyi, Z. Trócsányi, *Colorful NNLO*, előkészületben
- [15] G. Somogyi, *One-particle integrals - numbers*, belső jegyzet
- [16] G. B. Arfken, H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, sixth edition, (2005) Elsevier Academic Press
- [17] K. L. Judd, *Approximation methods*, (2011), http://ice.uchicago.edu/2011_presentations/Judd/Approximation_ICE11.pdf
- [18] J. Carter, G. Heinrich, *SecDec: A general program for sector decomposition*, (2010) [arXiv:1011.5493 [hep-ph]], <https://secdec.hepforge.org/>

Függelék

A. A kutatási feladat

Kutatásunk célja elektron-pozitron ütközések során keletkező hadronzáró hatáskeresztmetszet második sugárzási korrekciójának számítása. A számolások elméleti háttere a kvantum-színdinamika, amelynek keretein belül belátható, hogy nagyenergiás ütközések során történő szín-kölcsönhatások leírásánál perturbációs számítás alkalmazható. A második sugárzási korrekció tagjaiban megjelenő divergenciák kezelhetők a témavezetőm, *Pof. Dr. Trócsányi Zoltán* által fejlesztett levonási sémával. Számszerű eredmények kinyeréséhez rengeteg numerikus integrálást kell elvégezni, ami sok időt illetve erőforrást igényel. Feladatom a hatáskeresztmetszetben megjelenő $\mathbf{I}_{12}^{(0)}$ szintéren ható operátor numerikus számolása és az operátort jól közelítő, egyszerűen kiértékelhető függvény keresése. A szintéren ható operátor numerikus számolását korábbi munkám során programoztam és nemrég teljesen automatizáltam. Az $\mathbf{I}_{12}^{(0)}$ a kinematikai tartomány széleinél logaritmikusan divergál, ezért először ezt a divergens viselkedést kell reprodukálni, amire χ^2 -módszert alkalmazom. A kapott eredmény levonását követően a maradék egyszerű polinomokkal közelíthető. Ehhez a feladathoz Csebisev-polinomokat használok. Az eljárást először az $\mathbf{I}_{12}^{(0)}$ első nem triviális pólusán ellenőriztem. További munkám során be fogom fejezni az ellenőrzést és az esetleg felmerülő hibák javítását követően alkalmazom a kidolgozott eljárást a szintéren ható operátor véges részére. A hatáskeresztmetszetre kapott végső eredményben a kezdeti állapot már könnyen módosíthatóvá válik, így a kutatás eredményei felhasználhatók proton-proton ütközések számolására is.