

TDK dolgozat

Minimális érzékenység elve

Márián István Gábor

Témavezető: Dr. Nándori István

Debreceni Egyetem
Kísérleti Fizikai Tanszék
2014.

Contents

1	Bevezetés	1
2	Kvantumtérelmélet	2
2.1	Méretskála	2
2.2	Energiaskála	2
2.3	Relativisztikus kvantumelmélet	3
2.4	Skálafüggés	4
3	Renormálási csoport módszer	6
3.1	Renormálási csoport egyenlet és optimalizálás	6
4	Regulátorok és közelítések	7
4.1	Közelítések	7
4.2	Regulátor függvények	8
5	Sine-Gordon típusú modellek	10
5.1	A sine-Gordon modell	11
5.2	Bozonizáció ($d=2$)	12
5.3	Bozonizált QED_2	13
6	Optimalizált regulátor – bozonizált QED_2 modell	15
6.1	Orientáció	15
6.2	A QED_2 és a CSS regulátor lineáris normálással	16
6.3	A QED_2 és a CSS regulátor exponenciális normálással	16
7	Optimalizált regulátor – $O(1)$ modell	17
7.1	Orientáció	17
7.2	Az $O(1)$ modell és a CSS regulátor exponenciális normálással	18
8	Összefoglalás	21
A	Függelék	25
B	Kivonat	25

1 Bevezetés

A fizikában az elemi részecskék tulajdonságait, illetve a közöttük fellépő kölcsönhatásokat a matematika nyelvén megfogalmazott modellekkel írjuk le. A részecskefizikai folyamatok leírására a természetes választás, a kvantumtérelméleti, vagy más néven kvantummezőelméleti modellek használata. Ezek segítségével tudjuk a legnagyobb pontossággal megjósolni a kísérletek eredményeit. Ezekben a modellekben, a részecskékhez tereket, mezőket rendelünk, például a nemrég felfedezett Higgs részecskéhez, egy skalárteret, az úgynevezett Higgs mezőt társítjuk. Ezeket a modelleket nagy energián, bizonyos szimmetria megfontolásokból kaptuk. Például mindegy, hogy egy kísérletet hol végzünk el, a kísérlet kimenetelének ettől nem szabad függnie. Vannak továbbá a részecskéket leíró mezők transzformációja során tapasztalt szimmetria tulajdonságok (a rendszert leíró hatás nem függ ezektől a transzformációktól).

Mivel a mérések viszonylag alacsony energián történnek, így szükség van az alacsony-energiás kiterjesztésre, azaz a modellek renormálására. Az egyik ilyen kiterjesztés, a funkcionális renormálási csoport (Renormalization Group – RG) módszer. A funkcionális RG egyenlet levezetéséhez elengedhetetlen, egy úgynevezett regulátor függvény bevezetése, amelytől a fizikai mennyiségek nem függhetnek. Az egzakt RG egyenlet megoldása valóban igazolhatóan független a regulátor megválasztásától. Viszont, az RG egyenletek funkcionálokra vonatkoznak, ezért nem oldhatóak meg általánosan, tehát közelítéseket kell alkalmaznunk. Ennek eredményeként az RG egyenletből származtatott fizikai mennyiségek függni fognak a renormálási sémától, azaz a regulátor függvény megválasztásától. Tehát, ha prediktívvé akarjuk tenni az RG módszert, akkor valamilyen elvet használva, ki kell tudnunk választani egy bizonyos regulátort, azaz optimalizálni kell az RG egyenletek regulátor-függését.

Az egyik ilyen optimalizálási módszer a minimális érzékenység elvének (Principle of Minimal Sensitivity – PMS) használata. Ennek segítségével meg lehet találni egy regulátor függvény optimális paraméterét úgy, hogy megkeressük a paraméter azon kicsi tartományát, amin belül ha változtatjuk a paramétert, a fizikai eredmények alig változnak. Ebben a munkában, egy nemrég bevezetésre került regulátorral vizsgáltam ezt az optimalizálási módszert, két kvantumtérelméleti modell esetében.

A dolgozat elrendezése a következő. A 2. fejezetben egy rövid kvantumtérelméleti bevezetés található. A 3. fejezet a funkcionális RG módszerbe ad betekintést. A különböző regulátorokról és az alkalmazott közelítésekről szól a 4. fejezet. A dolgozatban tanulmányozott sine-Gordon térelméleti modelleket mutatom be az 5. fejezetben. Részleteiben tárgyalom a dolgozatban kapott optimalizálási eredményeket [1], a bozonizált QED₂ (6. fejezet) és az $O(N = 1)$ modellek (7. fejezet) esetén. Az eredmények összegzése a 8. fejezetben található. A jelen munka rövid kivonata a dolgozat végén szerepel.

2 Kvantumtérelmélet

2.1 Méretskála

Az egyes fizikai modellek érvényességi tartománya korlátozott. Ha nagy méretű objektumokat vizsgálunk, Newton axiómái pontosan leírják a kis sebességgel mozgó testek viselkedését. Haladva a kisebb méretskálák felé a klasszikus mechanika helyett más modellt kell használnunk. A 10^{-10} méteres tartományt elérve atomfizikai modellekkel kell számolnunk. Ha az atommagok szerkezetét akarjuk vizsgálni, akkor a magfizika érvényességi tartományában mozgunk. Végül a 10^{-15} méteres tartományban elérkezünk a részecskefizikához, ahol az elemi részecskék vizsgálata közben az alapvető természeti törvények kerülnek megfogalmazásra.

Ebben a mérettartományban mozogva, elkerülhetetlen a kvantummechanikai leírás és ennek megfelelően a határozatlansági relációk figyelembe vétele. A hely-impulzus közötti határozatlansági reláció következtében, lesz egy bizonytalanságunk a helyzet és az impulzus egyidejű meghatározásában. Azaz egy részecske sebességét (impulzusát) és helyét egyszerre, tetszőleges pontossággal nem lehet meghatározni,

$$(\Delta x)(\Delta p_x) \geq \hbar/2. \quad (1)$$

Egy hasonló határozatlansági reláció érvényes az energiára és az időre,

$$(\Delta t)(\Delta E) \geq \hbar/2. \quad (2)$$

Azaz a rendszer energiáját nem tudjuk pontosan megmondani, csak stacionárius ($\Delta t \rightarrow \infty$) esetben. Vagyis ha egy részecske energiáját akarom nagyon pontosan meghatározni, akkor csak pontatlanul tudom megmondani, hogy mely időpillanatban rendelkezik ezzel az energiával. Ez úgy is értelmezhető, hogy az energiamegmaradás törvénye sérül egy kis Δt időintervallumra (azonban ez közvetlenül nem mérhető).

2.2 Energiaskála

Részecskefizikai folyamatok során általában nagy sebességű részecskék ütközését vizsgáljuk, (például, hogy feltárhassuk esetleges szerkezetüket), így a leírásukra a speciális relativitáselméletet kell használnunk. A relativisztikus diszperziós reláció, ami a részecske energiája (E), impulzusa (p) és nyugalmi tömege (m) között teremt kapcsolatot a vákuumban mért fénysebességhez (c) közeli sebességek esetén,

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (3)$$

Ha az impulzus nulla, akkor megkapjuk a részecske nyugalmi energiáját, vagy más néven a tömeg-energia ekvivalencia relációt,

$$E = mc^2. \quad (4)$$

Ennek alapján, az energia és a tömeg egymásba átalakítható, vagyis energia segítségével részecskék kelthetők.

Kis sebességek esetén a (3) egyenlet impulzus szerint nulla körül sorbafejthető és a magasabb rendű tagok elhanyagolhatók, hiszen $v/c \ll 1$. Így a konstans tagtól eltekintve, visszakapjuk a klasszikus mechanikából ismert kinetikus energiára vonatkozó képletet,

$$E = mc^2 + \frac{p^2}{2m} + \mathcal{O}(p^4). \quad (5)$$

Tehát ha figyelembe vesszük a kvantumfluktuációk hatását, illetve annak következményeként azt, hogy az energia-idő határozatlansági reláció miatt az energiamegmaradás is sérülhet egy rövid időre, akkor a tömeg-energia ekvivalencia miatt keletkezhetnek úgynevezett virtuális részecskék (elektron-pozitron párok). Ezek közvetlenül nem mérhetők, de közvetett hatásuk nagyonis jelentős, amit a következő alfejezetben részletezek.

2.3 Relativisztikus kvantumelmélet

Ahhoz, hogy helyesen építsük fel az elemi részecskék fizikáját, meg kell alkotni egy olyan elméletet, amely ötvözi a kvantumos és a relativisztikus leírást. A (speciális) relativitáselmélet és a kvantummechanika egyesítéséből származik a relativisztikus kvantummechanika. Ebben az esetben a rendszer időfejlődését a Dirac egyenlet adja meg, ami például a hidrogén atom relativisztikus tárgyalásához nélkülözhetetlen. Ugyanakkor részecskeszám változással járó folyamatokat ez az elmélet nem képes kezelni.

Tehát az elemi részecskék viselkedésének helyes tárgyalásához egy olyan elmélet kell, ami figyelembe veszi a kvantumelmélet és a relativitáselmélet eredményeit, illetve konzisztens azzal a ténnyel, hogy részecskék keletkezhetnek akár vákuumban is. Erre az egyedüli alkalmas választás a (relativisztikus) kvantumtérelmélet. Ez az elmélet a részecskékhez tereket rendel. A kvarkokhoz, leptonokhoz (fermionikus) anyagtereket, a kölcsönhatást közvetítő részecskékhez mértéktereket, valamint a nemrég felfedezett Higgs részecskéhez skalárteret rendel.

A térelméleti tárgyalásmód, ami elrugaszkodik a tömegpont fogalmától és helyette terek, mezők segítségével írja le a jelenségeket, nem csak az elemi részek világában használható. Klasszikus esetben is találkozunk ilyen elméletekkel, ilyen például az áramlástan vagy a folytonosan deformálható testek fizikája. Továbbá van olyan alkalmazási területe a térelméleti leírásnak, ahol nem szükséges a kvantálás, azonban a relativitáselmélet igen, amire példa a Maxwell egyenletek, azaz az elektromágneses terek klasszikus leírása, ami egyből relativisztikus alakban született meg. Végül említendő a szilárdtestfizika, ami a nem relativisztikus kvantumtérelmélet alkalmazásának egy jó példája.

Ha kiindulunk a klasszikus hatásból ($S[\varphi]$), akkor a pályaintegrál segítségével figyelembe vehetjük a kvantumfluktuációkat és származtathatunk egy $\Gamma[\varphi]$ effektív hatást,

amiből a mérhető fizikai mennyiségek megkaphatók.

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi, x), \quad Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}[\varphi] e^{-S[\varphi] + \int d^4x J\varphi}$$

$$\Gamma[\varphi] + \ln Z[J] - \int d^4x J\varphi = 0 \quad \rightarrow \Gamma[\varphi] \quad \rightarrow \text{fizikai mennyiségek}$$

2.4 Skálafüggés

Vizsgáljuk meg a virtuális részecskék megjelenésének hatását az előző fejezetben vázolt kvantumtérelméleti leírás szempontjából. A klasszikus hatás ($S[\varphi]$) paramétereket tartalmaz, mint például töltések, tömegek. Vajon helyesen járunk-e el, ha ezen paramétereket a tanulmányaink során megismert fizikai állandókkal (mint például az elemi elektromos töltéssel) azonosítjuk? A hatás megalkotásában segítségül hívott szimmetriák ezt sugallják. A válasz a kérdésre az, hogy a virtuális részecskék közvetett hatása miatt ezen klasszikus fizikából jól ismert mennyiségek értéke nem állandó, hanem attól függ, hogy milyen energia, illetve méretskálán vizsgáljuk meg azokat.

Ennek az oka egyrészt a tömeg-energia ekvivalencia reláció, ami lehetővé teszi részecskék keletkezését energiabefektetés által, másrészt a kvantummechanika energia-idő határozatlansági relációja, ami megengedi, hogy rövid időre megsértsük az energiamegmaradás törvényét. Így kombinálva a relativitáselmélet és a kvantummechanika összefüggéseit, lehetővé válik, hogy a "semmiből" keletkezzenek részecskék. Vagyis a legtökéletesebb vákuum is "nyüzög" a folyamatosan keletkező és megszűnő virtuális részecskéktől. Az elektromos töltés megmaradása miatt ezek egymással ellentétes töltésű párokban keletkeznek: például egy elektron és a vele ellentétes töltésű antirészecskéje, egy pozitron keletkezik. Ezek a párok közvetlenül nem mérhetők, de hatásukba ütközünk, ha például egy valódi részecske töltését akarjuk meghatározni egy próbatöltés segítségével.

A töltött részecske körül a virtuális elektron-pozitron párok polarizálják a vákuumot, azaz dipólusként viselkednek és leárnyékolják a mérendő részecske töltését, lásd Fig. 1. Ha egy adott R sugarú gömböt képzelünk a vizsgált töltés köré, akkor ez valamennyi virtuális elektron-pozitron párt mindig "kettéválaszt" és ezen párok elektronjai leárnyékolják a vizsgálandó (jelen esetben pozitív töltést). A kettévágott párok száma, és ennek megfelelően a leárnyékolás mértéke függ az R sugártól. Például, ha messzebb vagyunk a vizsgált töltéstől, akkor alig bír jelentőséggel, hogy egy kicsit közelebb vagy távolabb helyezkedik-e el a próbatöltésünk, mert a kettévágott párok száma alig változik. Ez azt jelenti, hogy a mérhető töltés a valóságban függ a megközelítés távolságától. Vagyis, az elemi elektromos töltés attól függ, milyen közéről, vagy milyen energian vizsgáljuk (ha például egy szórás kísérletben egyre közelebb akarunk jutni a vizsgálandó töltéshez, akkor egyre nagyobb energian kell végeznünk a szórást).

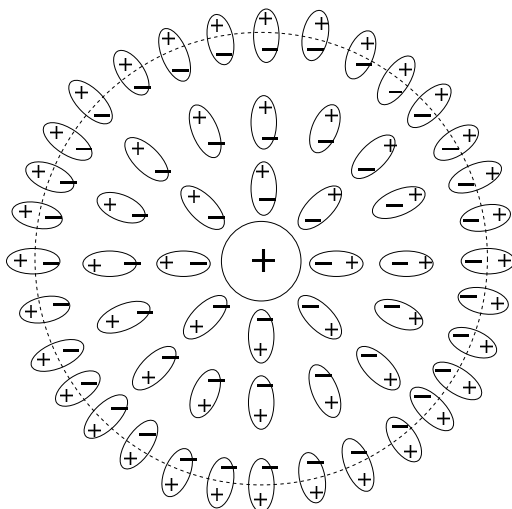


Figure 1: Egy központi töltés körül elhelyezkedő virtuális elektron-pozitron párok dipólusokként viselkednek és polarizálják a vákuumot.

A klasszikus hatásban szereplő többi paraméter is hasonló tulajdonságokat mutat. Ezt skálafüggésnek nevezzük. Ennek figyelembevételével mondhatjuk meg, hogy egy adott méretskálán mely elmélet vagy modell segítségével kell jellemezni egy adott fizikai rendszert. Például, a kvarkok közötti kölcsönhatást a QCD (Quantum Chromodynamics) írja le. Hasonlóan az elektromos töltéshez, itt is bevezethető egy ún. színtöltés, vagyis egy csatolási állandó, ami természetesen függ a méretskálától. Egészen kis méretek (nagy energiák) tartományában a QCD-vel tudunk helyesen modellezni, ahol a kvarkok a megfelelő szabadsági fokok. Ha nagyobb méretek (kisebb energiák) felé haladunk, elérjük a hadronizáció skáláját. Ekkor a színtöltés értéke le kell, hogy csökkenjen, legalábbis a többi (futó) csatolási állandóhoz képest, mert tudjuk, hogy a hadronizáció skáláján túl nem a kvarkok a megfelelő szabadsági fokok, hanem maguk a hadronok. Ha még tovább növeljük a méretskálát (csökkentjük az energia skálát), akkor eljutunk például a QED (Quantum Electrodynamics) tartományába. Tehát ha sikerül valamely módszerrel meghatározni a csatolási állandók futását, azaz skálafüggését, akkor az így kapott eszköz úgy működik, mint egy elméleti mikroszkóp, amely megmutatja, hogy egy adott méretskálán mely elmélet vagy modell ad helyes leírást.

A skálafüggés meghatározására az egyik lehetséges módszer a funkcionális RG használata. Segítségével a modellben szereplő csatolási állandók különböző energiákon felvett értékét meg tudjuk határozni. Ennek megfelelően be kell, hogy vezessünk egy skálafüggő effektív hatást,

$$\Gamma \rightarrow \Gamma_k \quad (6)$$

ahol a k impulzus-skálától az effektív hatásban szereplő paraméterek (csatolási állandók)

fognak függni. Az erre vonatkozó RG egyenletek szabják meg a csatolási állandók, úgymint töltés, szintöltés, tömeg, stb. változását a k skála függvényében.

3 Renormálási csoport módszer

Az előző fejezetben azt vizsgáltuk, hogy a kvantumelmélet és a relativitáselmélet együttes alkalmazása szükségszerűen a modell paramétereinek skálafüggéséhez vezet, azaz a csatolási állandók függni fognak a méret, illetve energiaskálától, vagyis futó csatolási állandókról beszélhetünk. A skálafüggés meghatározását a renormálási csoport módszer, vagy tágabb értelemben a renormálás segítségével tehetjük meg.

3.1 Renormálási csoport egyenlet és optimalizálás

Tehát a renormálásnak nagy jelentősége van a kvantumtérelméletben, hiszen ez szükséges a mérhető fizikai mennyiségek kiszámításához. Ez végrehajtható nem-perturbatív módon a funkcionális RG eljárással [2–5]. A skalárterekre vonatkozó funkcionális RG egyenlet [3] (Wetterich egyenlet) alakja a következő

$$k\partial_k\Gamma_k[\varphi] = \frac{1}{2}\text{Tr} \left[(k\partial_k R_k)/(\Gamma_k^{(2)}[\varphi] + R_k) \right], \quad (7)$$

ami a skálafüggő effektív hatásra, Γ_k -ra vonatkozik, ami a klasszikus hatás $\Gamma_{k\rightarrow\Lambda} \equiv S$ és a teljes kvantum effektív hatás $\Gamma_{k\rightarrow 0} \equiv \Gamma$ között interpolál, ahol k a futó impulzus skála. A blokkosított hatás második funkcionálderiváltja $\Gamma_k^{(2)}$ -val van jelölve, míg a Tr impulzusintegrált jelent. R_k a regulátor függvény, amely kielégíti a

$$R_k(p \rightarrow 0) > 0, \quad R_{k\rightarrow 0}(p) = 0, \quad R_{k\rightarrow\Lambda}(p) = \infty \quad (8)$$

feltételeket.

Az RG egyenlet egy funkcionálokra vonatkozó, parciális differenciálegyenlet, így nem lehetséges általánosan megoldani. Ezért közelítések szükségesek. Az egyik gyakran használt szisztematikus közelítés a csonkolt gradiens sorfejtés [6]. A közelítések használatának szükségessége magával vonja az RG egyenletek regulátortól, azaz a renormálási sémától való függését. Tehát, elvileg, a fizikai eredmények sémafüggővé válhatnak. Összehasonlíthatjuk a különféle RG sémákkal (azaz különböző regulátor függvényekkel) kapott eredményeket, lásd például [6–18]).

Annak érdekében, hogy prediktívvé tegyük az RG módszert optimalizálni kell a sémafüggést. Egy általános optimalizálási eljárás eredménye az úgynevezett Litim-féle regulátor (Litim-Pawlowski módszer). Ez biztosítja a legközelebbi értékeket a mért adatokhoz, legalábbis a gradiens sorfejtés első rendjében. Hátránya, hogy a Litim regulátor egy nem-differenciálható függvény, így nem összeegyeztethető a gradiens sorfejtés magasabb rendjével.

Egy másik optimalizálási foratókönyv a minimális érzékenység (Principle of Minimal Sensitivity – PMS) elvére épít, ahol egy adott regulátor optimális paraméterét úgy választjuk ki, hogy a fizikai értékek a lehető legkevésbé függjenek a paraméter megváltoztatásától. Előnye, hogy a gradiens sorfejtés bármelyik rendjében alkalmazható, hátránya viszont, hogy különböző alakú regulátor függvényeket nem lehet összehasonlítani. Vagyis a PMS módszert használva meg tudjuk mondani, hogy egy adott regulátor esetén milyen paramétereket válasszunk, de azt nem tudjuk megválaszolni, hogy az egyes regulátor típusok közül melyik az optimális választás.

Nemrég került bevezetésre egy új regulátor típus az úgynevezett kompakt tartójú sima (Compactly Supported Smooth – CSS), regulátor [14], ami egyfajta ”prototípusnak” tekinthető, mert paramétereinek megfelelő határértékeiben az összes főbb regulátor típust visszaadja (beleértve a Litim-féle regulátort is). Ezért használható a regulátor függvények összehasonlítására a PMS optimalizálási eljárás keretén belül. Mivel sima függvény azaz végtelenszer differenciálható és kompakt tartójú vagyis egy véges tartományban különbözik nullától), így alkalmazható a Litim-határérték vizsgálatára a gradiens sorfejtés bármilyen rendjében. Fontos megjegyezni, hogy a gradiens sorfejtés magasabb rendjében, ahol szükséges a regulátor magasabb deriváltja, a Litim határérték tetszőlegesen megközelíthető, de el nem érhető.

Ezen tanulmány célja a funkcionális RG módszer sémafüggésének vizsgálata, a bozonizált QED₂ és az $O(N = 1)$ szimmetrikus skalár térelmélet keretein belül, lokális potenciál közelítésben (Local Potential Approximation – LPA), ami a gradiens sorfejtés vezető rendje. A CSS regulátor függvényt használtam és célom a paramétereinek optimalizálása volt LPA-ban a PMS optimalizációt használva. Továbbá a PMS stratégia eredményeinek összehasonlítása a Litim-Pawłowski módszer által jóslott eredménnyel, ami LPA-ban egyértelműen a Litim alakot adja optimális regulátornak.

4 Regulátorok és közelítések

4.1 Közelítések

Az RG egyenlet (1) megoldása érdekében, az egyik leggyakrabban használt szisztematikus közelítés a csonkolt gradiens (vagy derivatív) sorfejtés, ahol Γ_k a tér deriváltjainak hatványa szerint van sorfejtve,

$$\Gamma_k[\varphi] = \int d^d x \left[V_k(\varphi) + Z_k(\varphi) \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + \dots \right]. \quad (9)$$

LPA-ban a magasabb derivatív tagokat elhanyagoljuk és a hullámfüggvény renormálás egy konstanssal egyenlő, azaz $Z_k \equiv 1$.

Az RG egyenletek megoldásai néha további közelítéseket igényelnek, úgymint a

potenciál $V_k(\varphi)$ Taylor, vagy Fourier sorfejtése a térváltozó szerint (N_{cut} levágással)

$$V_k(\varphi) = \sum_{n=1}^{N_{\text{cut}}} \frac{g_n(k)}{n!} \varphi^n, \quad (10a)$$

$$V_k(\varphi) = \sum_{n=1}^{N_{\text{cut}}} u_n(k) \cos(n\beta\varphi), \quad (10b)$$

ahol a skálafüggés a $g_n(k)$ vagy $u_n(k)$ csatolási állandókban van kódolva.

A harmadik szisztematikus lehetőséget az RG úgynevezett amplitúdó sorfejtése adja, ami szintén gyakran használt. Írjuk át az LPA-ban kapott RG egyenletet a következő alakra,

$$k\partial_k V_k = -\alpha_d k^d \int_0^\infty dy \frac{dr}{dy} \frac{y^{d/2+1}}{P^2 + \omega}, \quad (11a)$$

$$r(y) = \frac{R_k(p)}{p^2}, \quad (11b)$$

ahol $\omega = k^{-2}V_k''$ és $\alpha_d = \Omega_d/(2(2\pi)^d)$ és Ω_d a d -dimenziós térszög, továbbá a dimenziótlan regulátor függvény $r(y)$, a dimenziótlan változó $y = p^2/k^2$. és $P^2 = [1 + r(y)]y$. Ekkor az amplitúdó sorfejtés

$$k\partial_k V_k = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m}{d} a_{2m-d} (-\omega)^{m-1}, \quad (12)$$

$$a_n = \int_0^\infty dy \left(-\frac{d}{2} \frac{r'}{(1+r)^{d/2+1}} \right) P^{-n}. \quad (13)$$

Ha a Litim-Pawlowski optimalizálást [7, 8] használjuk, a regulátor függvény optimális paraméter választása meghatározható olyan módon, hogy az a legjobb konvergenciát biztosítsa az amplitúdó sorfejtésben [8, 9]. A regulátorok között a Litim-féle optimalizált [8] vezet a leggyorsabb konvergenciához az amplitúdó sorfejtésben.

4.2 Regulátor függvények

A szakirodalomban a regulátor függvények különböző választásait már nagy részletességgel tárgyalták. Például az egyik leggyakrabban használt regulátor függvény az exponenciális [3]

$$r_{\text{exp}}(y) = \frac{a}{\exp(c_2 y^b) - 1} \quad (14)$$

ahol $b \geq 1$. Az optimális paramétereket már meghatározták úgymint $a = 1$, $c_2 = \ln(2)$ és $b = 1.44$, a Litim-Pawlowski eljárást [7, 8] használva. Egy másik példa a power-law típusú regulátor [4]

$$r_{\text{pow}}(y) = \frac{a}{y^b}, \quad (15)$$

$a = 1$ és $b = 2$ optimális paraméterekkel. Végül az egyik leggyakrabban használt regulátor a Litim-féle [8],

$$r_{\text{opt}}^{\text{gen}}(y) = a \left(\frac{1}{y^b} - 1 \right) \theta(1 - y) \quad (16)$$

ami folytonos (de nem differenciálható), kompakt tartójú függvény. A $b = 1$ és $a = 1$ paramétereket kapjuk ha alkalmazzuk a Litim-Paslowski optimalizálási eljárást LPA-ban.

A nemrég bevezetett CSS regulátor [14] definíciója

$$r_{\text{css}}^{\text{gen}}(y) = \frac{\exp[cy_0^b/(f - hy_0^b)] - 1}{\exp[cy^b/(f - hy^b)] - 1} \theta(f - hy^b), \quad (17)$$

a $\theta(y)$ lépcsőfüggvénnyel. Ez végtelenszer differenciálható a $f - hy^b = 0$ pontban is. Fontos megjegyezni, hogy a szabad paraméterek száma csökkenthető az $f = 1$ választással, az általánosság elvesztése nélkül,

$$r_{\text{css}}^{\text{modif}}(y) = \frac{\exp[cy_0^b/(1 - hy_0^b)] - 1}{\exp[cy^b/(1 - hy^b)] - 1} \theta(1 - hy^b). \quad (18)$$

A CSS regulátor mindkét alakja (17) és (18), rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy visszaadják a főbb regulátor típusokat: Litim-féle optimalizáltat (16), a power-law típusút (15) és az exponenciálist (14),

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 0} r_{\text{css}}^{\text{gen}} &= \lim_{c \rightarrow 0, h=1} r_{\text{css}}^{\text{modif}} = \frac{y_0^b (y^{-b} - 1)}{1 - y_0^b} \theta(1 - y), \\ \lim_{f \rightarrow \infty} r_{\text{css}}^{\text{gen}} &= \lim_{h \rightarrow 0, c \rightarrow 0} r_{\text{css}}^{\text{modif}} = \frac{y_0^b}{y^b}, \\ \lim_{h \rightarrow 0, c=f} r_{\text{css}}^{\text{gen}}(y) &= \lim_{h \rightarrow 0, c \rightarrow 1} r_{\text{css}}^{\text{modif}} = \frac{\exp[y_0^b] - 1}{\exp[y^b] - 1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Annak érdekében, hogy tovább redukálhassuk a CSS regulátor szabad paramétereit, y_0 megválasztható úgy, hogy a (18) számlálója a c paraméter egy lineáris függvénye legyen

$$r_{\text{css}}^{\text{norm1}}(y) = \frac{c}{\exp[cy^b/(1 - hy^b)] - 1} \theta(1 - hy^b). \quad (20)$$

Ezt a normálást a [16] cikkben is használták, a három-dimenziós $O(N = 1)$ skalár modellben LPA-ban, illetve a Kvantum Einstein Gravitáció elméleti keretein belül az RG sémafüggésnek a vizsgálatára [23]. A (20) egyenletnek a következő határértékei vannak,

$$\lim_{c \rightarrow 0, h \rightarrow 1} r_{\text{css}}^{\text{norm1}} = \left(\frac{1}{y^b} - 1 \right) \theta(1 - y), \quad (21a)$$

$$\lim_{c \rightarrow 0, h \rightarrow 0} r_{\text{css}}^{\text{norm1}} = \frac{1}{y^b}, \quad (21b)$$

$$\lim_{c \rightarrow 1, h \rightarrow 0} r_{\text{css}}^{\text{norm1}} = \frac{1}{\exp[y^b] - 1}. \quad (21c)$$

Ezek az összefüggések adják a propagátor "Litim limeszt" $c \rightarrow 0, h \rightarrow 1$, "power-law limeszt" $c \rightarrow 0, h \rightarrow 0$, és az "exponenciális limeszt" $c \rightarrow 1, h \rightarrow 0$. A (20) normálás az y_0 legegyszerűbb lehetséges választását adja, és ez a fajta CSS regulátor (a lineárisan normált CSS regulátorként hivatkozok rá) visszaadja az optimalizált power-law ($b = 2$ -vel) és az optimalizált Litim ($b = 1$ -gyel) regulátorokat, de nem tudja visszaadni az optimális paraméterekkel rendelkező exponenciális regulátort (14) [$c_2 = \ln(2)$].

Viszont, választhatunk egy másik normálást (erre exponenciálisan normált CSS regulátorként hivatkozok)

$$\begin{aligned} r_{\text{css}}^{\text{norm2}}(y) &= \frac{\exp[\ln(2)c] - 1}{\exp\left[\frac{\ln(2)cy^b}{1-hy^b}\right] - 1} \theta(1 - hy^b), \\ &= \frac{2^c - 1}{2^{\frac{cy^b}{1-hy^b}} - 1} \theta(1 - hy^b), \end{aligned} \quad (22)$$

ahol a határértékek

$$\lim_{c \rightarrow 0, h \rightarrow 1} r_{\text{css}}^{\text{norm2}} = \left(\frac{1}{y^b} - 1 \right) \theta(1 - y), \quad (23a)$$

$$\lim_{c \rightarrow 0, h \rightarrow 0} r_{\text{css}}^{\text{norm2}} = \frac{1}{y^b}, \quad (23b)$$

$$\lim_{c \rightarrow 1, h \rightarrow 0} r_{\text{css}}^{\text{norm2}} = \frac{1}{\exp[\ln(2)y^b] - 1}. \quad (23c)$$

Az ilyen típusú normálás előnye, hogy a (22) alak visszaadja az összes főbb regulátor típust optimális paraméterekkel, az exponenciális is beleértve. A CSS regulátor ezen típusát szintén tanulmányozták [13] LPA-n túl.

Itt a CSS mindkét alakját tanulmányozom (20) és (22). A cél, hogy megtaláljuk a paraméterek optimális választását LPA-ban a PMS eljárást használva, két különböző modell keretén belül, két különböző dimenzióban.

5 Sine-Gordon típusú modellek

Ki kell választani egy modellt, aminek a keretén belül a CSS regulátor optimalizálását el lehet végezni. Egy olyan elmélet a jó választás, ami egyrészt fontos fizikai tartalommal bír, másrészt aminek a funkcionális RG vizsgálata viszonylag egyszerű. Ilyen például az $O(N = 1)$ (Ising) modell, vagy a sine-Gordon (SG) skalártérelmélet, illetve annak az általánosításai. Ebben a fejezetben a dolgozatban használt SG típusú modellek tulajdonságait ismertetem röviden.

5.1 A sine-Gordon modell

Elsőként vizsgáljuk magát az SG modellt $d = 2$ dimenzióban, aminek a Lagrange sűrűsége a következő módon adható meg [20]

$$\mathcal{L}_{\text{SG}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + u \cos(\beta \varphi), \quad (24)$$

ahol a két csatolási állandó, u és β a modell paraméterei. Az SG modellnek nincs "direkt alkalmazása" a részecskefizikában, vagyis nincs olyan részecskefizikai elmélet, ahol valamely jelenség leírására ez szolgálna, de például a bezárás jelenségének egyszerűbb modelleken való tanulmányozására jól használható, illetve két-dimenziós mérték és fermionikus elméletek bozonizált változatai is SG típusú modellek [15, 19]. Ha azonban nemcsak nagyenergiás alkalmazásra gondolunk, hanem például kondenzált anyagok, statisztikus és spin modellek, szupravezetés vagy szuperfolyékonyság fizikájának megértését szeretnénk elérni, akkor az SG modell az egyik legtöbbet használt térelméleti modellek közé sorolható [21].

Az SG modell két szimmetriával rendelkezik, úgymint a periodicitás, és az úgynevezett Z_2 szimmetria. Ha a térváltozót eltoljuk a koszinusz periódusának megfelelően, a Lagrange sűrűség változatlan marad. Ugyanez igaz a térváltozó mínusz eggyel való szorzására, amit Z_2 szimmetriának nevezünk,

$$\varphi \rightarrow \phi = \varphi + \frac{2\pi}{\beta} \quad (25)$$

$$\varphi \rightarrow \phi = -\varphi \quad (26)$$

$$\mathcal{L}_{\text{SG}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + u \cos(\beta \varphi) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + u \cos(\beta \phi). \quad (27)$$

Ezek a szimmetriák fontos szerepet játszanak a fázistér kialakításában. A funkcionális RG módszer segítségével meg tudjuk határozni a paraméterek skálafüggését (u_k) és ezzel meghatározható a fázisszerkezet, amit pedig a szimmetriák befolyásolnak.

A két-dimenziós esetben ($d = 2$) két fázis alakul ki, egy szimmetrikus, és egy szimmetriasértett fázis. A fázisátalakulás a $\beta_c^2 = 8\pi$ értéknél megy végbe [20]. Ennél nagyobb β^2 értéknél a szimmetrikus fázis tartományában járunk, ahol a $k \rightarrow 0$ határértékben mind a dimenziós u_k , mind pedig a dimenziótlan $\tilde{u}_k = k^{-2}u_k$ csatolási állandó nullához tart,

$$\tilde{u}_{k \rightarrow 0} = 0, \quad u_{k \rightarrow 0} = 0. \quad (28)$$

Kis β^2 értékek esetén ($\beta^2 < 8\pi$), a szimmetriasértett fázist vizsgáljuk. Érdemes megjegyezni, hogy egy diszkrét (és nem folytonos) szimmetria spontán sérüléséről van szó. Ekkor a dimenziós u_k továbbra is nullához konvergál, azonban a dimenziótlan egy véges értékhez tart

$$\tilde{u}_{k \rightarrow 0} \neq 0, \quad u_{k \rightarrow 0} = 0. \quad (29)$$

A dimenziós effektív potenciálnak ($V_{k \rightarrow 0} \equiv V_{\text{eff}}$) konvexnek kell lennie [20]. A funkcionális RG módszer megőrzi a periodicitást, így az effektív potenciálnak egyben periódikusnak is kell lennie. Ez csak úgy lehetséges, ha az effektív potenciál konstans. Ennek megfelelően a két-dimenziós SG modell esetében a dimenziós u_k csatolási állandó mindkét fázisban nullához tart.

Fontos megjegyezni, hogy az SG modell fázisait szeparáló kritikus frekvencia $\beta^2 = 8\pi$ nem függ a regulátor függvény megválasztásától, ezért nem használható a CSS optimalizálására. Azonban a gradiens sorfejtés magasabb rendjében megjelenik a sémafüggés. Ezt felhasználva a [13] munkában $d = 1$ dimenzióban végrehajtottunk egy újfajta, a spontán szimmetriasértés eltűnésének megkövetelésére épülő optimalizálást. Más SG típusú modell LPA keretén belül is jól használható választás lehet, ha találunk egy olyan fizikai paramétert, ami regulátor-függő.

5.2 Bozonizáció (d=2)

A kölcsönható fermionok kvantumtérelméletének egy ekvivalens kölcsönható bozonikus elméletté történő leképezését bozonizációnak nevezzük, ami jól megalapozott $d = (1 + 1)$ dimenziós elméletek esetében. A bozonizáció sarokköve a nem-lokális transzformációk létezése lokális fermi terekből lokális Bose terekbe. A szabad tömegtelen Dirac fermion elmélete

$$\mathcal{L}_{\text{fermi}} = \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi \quad (30)$$

ekvivalens egy szabad tömegtelen skalármező elméletével

$$\mathcal{L}_{\text{Bose}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2, \quad (31)$$

és a fermion bilineárisok, úgymint $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ és $\bar{\psi} \psi$, kifejezhetők bozonikus szabadsági fokokkal.

A tömeges Thirring (mT - massive Thirring) modell egy egyedüli Dirac tér elmélete amit $d = (1 + 1)$ dimenzióban definiálunk, és a dinamikáját a

$$\mathcal{L}_{\text{mT}} = \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - \frac{1}{2} g j^\mu j_\mu \quad (32)$$

Lagrange sűrűség határozza meg, ahol $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ és g szabad paraméterek. Ez leképezhető az SG skalár térelméletté,

$$\mathcal{L}_{\text{SG}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + u \cos(\beta \varphi) \quad (33)$$

ha a két modell között a következő megfeleltetéseket tesszük:

$$\frac{4\pi}{\beta^2} = 1 + \frac{g}{\pi}, \quad (34a)$$

$$-\frac{\beta}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi = j^\mu, \quad (34b)$$

$$u \cos(\beta \varphi) = -m \bar{\psi} \psi. \quad (34c)$$

Hasonló módon igazolható, hogy a két-dimenziós multi-flavor QED [15], illetve multi-color QCD [19] is leképezhető SG típusú modellekre a bozonizáció segítségével.

5.3 Bozonizált QED₂

Tehát a két-dimenziós térelméletek egyik előnye a bozonikus transzformációk létezése. Így mérték és fermionikus modellek ekvivalensen átírhatók [15, 24] skalárterek alakjára, amik sok esetben SG típusú modellek [20]. Például, vegyük a QED₂-t tömeges Dirac fermionnal azaz a tömeges Schwinger modellt

$$\mathcal{L}_{\text{QED}_2} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m - e\gamma^\mu A_\mu) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (35)$$

ahol $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ a térerősség tenzor ($\mu, \nu = 0, 1$). Ez a modell megfeleltethető egy ekvivalens Bose alaknak, nevezetesen a tömeges sine-Gordon (Massive sine-Gordon – MSG) modell speciális alakjának, ami a következőképpen írható

$$\mathcal{L}_{\text{MSG}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{1}{2} M^2 \varphi^2 + u \cos(\beta \varphi). \quad (36)$$

Itt $\beta^2 = 4\pi$, $M^2 = e^2/\pi$, $u = e m \exp(\gamma_E)/(2\pi^{3/2})$ és $\gamma = 0.57721\dots$ az Euler-Mascheroni konstans. (A bozonizáció során megjelenő θ paraméter értékét rögzítjük: $\theta = \pm\pi$ választással élünk ha $u > 0$, illetve $\theta = 0$ ha $u < 0$ [15].) Az MSG modellnek két fázisa van [15]. Az Ising-típusú fázisátalakulást a dimenziótlan u/M^2 kontrollálja, ami a QED₂ paramétereivel, pontosabban a $(m/e)_c$ kritikus hányadosával van összefüggésben, ami szeparálja a fermionikus modell bezáró és fél-aszimptotikus fázisát.

A kritikus hányados értéke $0.13 < (m/e)_c < 0.33$ ismert a fermionikus modellre [25]. Ez meghatározza a bozonikus modell fázisait szeparáló kritikus értéket $0.156 < [u/M^2]_c < 0.168$, amire a funkcionális RG keretein belül, LPA-ban $[u/M^2]_c = 2/(4\pi) \approx 0.15915$ adódik. Ez analitikus megfontolások alapján határozható meg, felhasználva az infravörös (Infra Red – IR) határesetben kapott $\lim_{k \rightarrow 0} (k^2 + V_k''(\varphi)) = 0$ összefüggést, ahol $V_k(\varphi)$ a blokkosított skálafüggő potenciál, ami tartalmazza a tömegtagot és az összes, RG transzformáció által generált felharmónikust [15]. Azonban ha olyan közelítést használunk, ahol csak *egyetlen* Fourier-módust veszünk figyelembe [vagyis $V_k(\varphi)$ a tömeg tagot és csak egy koszinuszt tartalmaz], akkor a propagátor IR viselkedésére alapozott analitikus eredmény [15, 22]

$$\chi_c = \left[\frac{u}{M^2} \right]_c = \frac{1}{(4\pi)} \approx 0.07957. \quad (37)$$

Ebben az esetben a Litim regulátor az analitikus megfontolásból kapott értékhez (37) közeli eredményt ad, $[u/M^2]_c = 0.07964$ [15], továbbá lásd még 2. ábra. Más regulátor, mint például a power-law típusú a $b = 1$ választással szingularitásba fut és megáll

egy véges impulzusskálánál, lásd 3. ábra. Ilyenkor a kritikus hányados meghatározása nem lehetséges [15]. Vagyis az egy-módusú közelítés egy eszközt biztosít arra, hogy az RG egyenletek konvergenciájának tulajdonságait vizsgáljuk és optimalizáljuk a regulátor függvényeket.

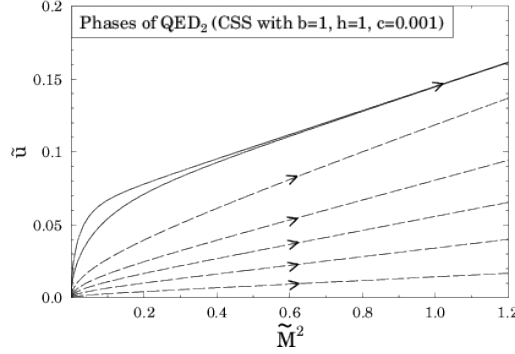


Figure 2: Az MSG modell fázisdiagramja $\beta^2 = 4\pi$ értékre, amit a CSS regulátorral (20) kaptam $b = 1$, $h = 1$ és $c = 0.001$ paraméterekkel (Litim határérték). A szimmetria sértett fázis RG trajektóriái (teljes vonalak) összeolvadnak egyetlen vonallá, és a kritikus hányadost az IR limeszben felvett meredekség határozza meg. A nyilak az evolúció irányát jelzik.

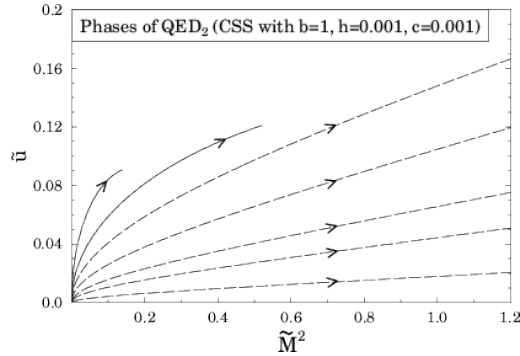


Figure 3: Az MSG modell fázisdiagramja $\beta^2 = 4\pi$ értékre, amit a CSS regulátorral (20) kaptam $b = 1$, $h = 0.001$ és $c = 0.001$ paraméterekkel, ami a power-law limeszt közelíti. A szimmetria sértett fázis RG trajektóriái (teljes vonalak) megállnak egy véges impulzus skálán k_f , mielőtt egyetlen vonallá olvadnának össze, így a kritikus hányados meghatározása nem lehetséges

Jelen munkában az egy-módusú közelítés keretein belül, a PMS eljárást használva határozom meg a CSS regulátor optimális paramétereit különböző normálások [lásd (20) és (22)] esetén és összehasonlítom az így kapott hányadost az analitikus eredménnyel (37).

6 Optimalizált regulátor – bozonizált QED₂ modell

6.1 Orientáció

Vizsgáljuk tehát a (36) Lagrange sűrűséggel definiált bozonikus QED₂ modellt RG módszerrel. Két féle közelítést használok, *(i)* az RG egyenleteket LPA-ban kapom [lásd (11)], *(ii)* egyetlen módusú Fourier közelítést alkalmazok. Az utóbbi esetben, a dimenziótlan blokkosított potenciál ($\tilde{V}_k = k^{-2}V_k$) a következő alakú

$$\tilde{V}_k = \frac{1}{2} \tilde{M}_k^2 \varphi^2 + \tilde{u}_k \cos(\beta\varphi), \quad (38)$$

ahol $\beta^2 = 4\pi$ és a "hullámfelülvonás" a dimenziótlan csatolást jelzi, azaz például a dimenziótlan tömeg $\tilde{M}^2 = k^{-2}M^2$ és a dimenziótlan Fourier amplitúdó $\tilde{u}_k = k^{-2}u_k$. Ezt rakjuk bele a (11) egyenlet dimenziótlan alakjába, ami $d = 2$ dimenzióban

$$(2 + k\partial_k)\tilde{V}_k(\varphi) = - \int_0^\infty \frac{dy}{4\pi} \frac{dr}{dy} \frac{y^2}{(1+r)y + \tilde{V}_k''(\varphi)}. \quad (39)$$

Hangsúlyozom, hogy itt nem használok további közelítéseket, mint például az amplitúdó sorfejtést, amit a 4.1 fejezetben tárgyaltam.

Az egyetlen-frekvenciás MSG modell (36) fázis struktúrája, ami a 2. ábrán látható, megkapható az RG egyenlet (39) megoldásával a CSS regulátor lineáris normálását használva $b = 1$, $h = 1$ és $c = 0.001 \approx 0$ paraméterekkel. Ha a CSS regulátor (22) szerint van normálva, akkor csaknem identikus eredményt kapunk, hiszen mindkét normálás (20) és (22), a Litim-féle optimalizált alakhoz konvergál a $c \rightarrow 0$ határértékben. Az itteni összes numerikus számolást C++ kódok és számítógép-algebrai szoftver [26] kombinációjával végeztem.

A teljes vonalakkal reprezentált RG trajektóriák a 2. ábrán az egyetlen-frekvenciás MSG modell (36) szimmetria sértett fázisához tartanak, ahol a tükrözési szimmetria (Z_2) spontán sérül. Ezek az RG trajektóriák összeolvadva tartanak az IR határhoz, aminek a meredeksége a kritikus hányadost definiálja. A szimmetriasértett fázisban $\tilde{u}_k$ egy lineáris függvénye $\tilde{M}_k^2$ -nek az IR limeszben,

$$\tilde{u}_k = a \tilde{M}_k^2 + b. \quad (40)$$

Mind a tömeg tag dimenziós csatolásának hányadosa, mind pedig a dimenziótlan megfelelője a $[\tilde{u}_{k \rightarrow 0}/\tilde{M}_{k \rightarrow 0}^2] = [u_{k \rightarrow 0}/M_{k \rightarrow 0}^2] = a$ konstanshoz tart (hiszen $\tilde{u}_k$ és $\tilde{M}_k^2$ növekszik az IR limeszben így hányadosuk a -hoz tart és a b konstans tag elhanyagolhatóvá válik) és a meredekség független a kezdőfeltételektől (a szimmetrikus fázis esetén a lineáris függvény alak (40) megmarad, de a meredekség a kezdőértékektől függ).

Ebben a munkában numerikus bizonyítékot találtam az $a = 1/(4\pi)$ sémafüggetlen meredekségre az egyetlen Fourier-módus közelítésben. Viszont, az RG egyenletek

konvergenciájának tulajdonsága függ a regulátor választásától. Az RG evolúció megáll egy véges skálánál $k_f \neq 0$ és a hányados $[u_{k \rightarrow k_f}/M_{k \rightarrow k_f}^2]$ sémafüggővé válik, így az optimalizálás végrehajtható. Ezt a stratégiát használtam, hogy kiválasszam az optimális regulátort, azaz hogy meghatározzam a CSS regulátor paramétereinek optimális értékét.

6.2 A QED₂ és a CSS regulátor lineáris normálással

Először keressük meg a CSS regulátor optimális paramétereinek (b, h, c) beállítását a lineáris normálással (20). A 4. ábrán a kritikus hányados $[u/M^2]_c = \tilde{u}_{k \rightarrow k_f}/\tilde{M}_{k \rightarrow k_f}^2 = u_{k \rightarrow k_f}/M_{k \rightarrow k_f}^2$ a lineárisan normált CSS-sel kapott értékeket mutatja a b , h és c függvényében. Minél kisebb a hányados, annál jobb a regulátor. A $b = 1$, $c = 0.001$ és $h = 1$ paraméterekkel kapjuk az analitikus értékhez (37) legközelebbi eredményt, ami a CSS regulátor Litim limeszt jelenti. Használjuk a PMS stratégiát a CSS regulátor optimális paramétereinek meghatározásához, azaz találjuk meg az RG módszerrel kapott fizikai paraméterek (QED₂-re ez a kritikus hányados $[u/M^2]_c$) extrémumát (ebben az esetben a minimumot). Az optimális paraméterek közelében, a modell RG tanulmányozásával kapott eredményeinek minimális az érzékenyséjük a paraméterek változásaira. Például a 4. ábrán mindegyik felületnek (ahol a b paraméter rögzítve van) van egy platója, ami az optimális paramétereket definiálja. A $b = 1$ esetben kapott optimális érték, a maradék két paraméter függvényében a Litim limesznek adódik vagyis $c \rightarrow 0$, $h = 1$. A $b \neq 1$ esetben az optimális érték a $c \rightarrow 0$ de $h \neq 1$ választás, de az így kapott minimum nagyobb lesz, mint a $b = 1$ esetben tapasztalt. Ez látható az 5. ábrán, ahol a 4. ábra minden egyes 3D-alábrájához tartozó kritikus hányados minimum értékét ábrázoltam b függvényében. Az egyes minimumokra azt találtam, hogy a c és h paraméterek a b függvényében változnak, demonstrálva, hogy a $b \rightarrow 1$, $c \rightarrow 0$ és $h = 1$ limesz adja az optimális választást.

6.3 A QED₂ és a CSS regulátor exponenciális normálással

Ismételjük meg az előző alfejezetben történt számolást a CSS regulátorral, de most használjuk az exponenciális normálását (22) a lineáris (20) helyett. A cél ugyanaz, azaz, hogy megtaláljuk a b , h , c paraméterek optimális beállítását. A 6. ábrán, a CSS exponenciális normálásával kapott kritikus hányadost ábrázoltam a b , h és c függvényében. Az előző lineáris normálás analízisével analóg módon az optimális, azaz az analitikus formulához (37) legközelebb eső eredményt a $b = 1$, $c = 0.001$ és $h = 1$ paraméterek adják. Ez újra a CSS regulátor Litim limesze. A 7. ábrán a kritikus hányados minimum értékeit mutatom a b függvényében. Ez a vizsgálat megerősíti, hogy a Litim limesz ($b \rightarrow 1$, $c \rightarrow 0$ és $h = 1$) vezet az optimális eredményhez.

Tehát A PMS stratégia megadja a CSS regulátor optimális paramétereinek az értékét, ami $b \rightarrow 1$, $c \rightarrow 0$ és $h = 1$ választásnak adódik, függetlenül a CSS regulátor

Critical ratio χ_c for bosonized QED₂ (regulator in linear normalization, b parameter fixed)

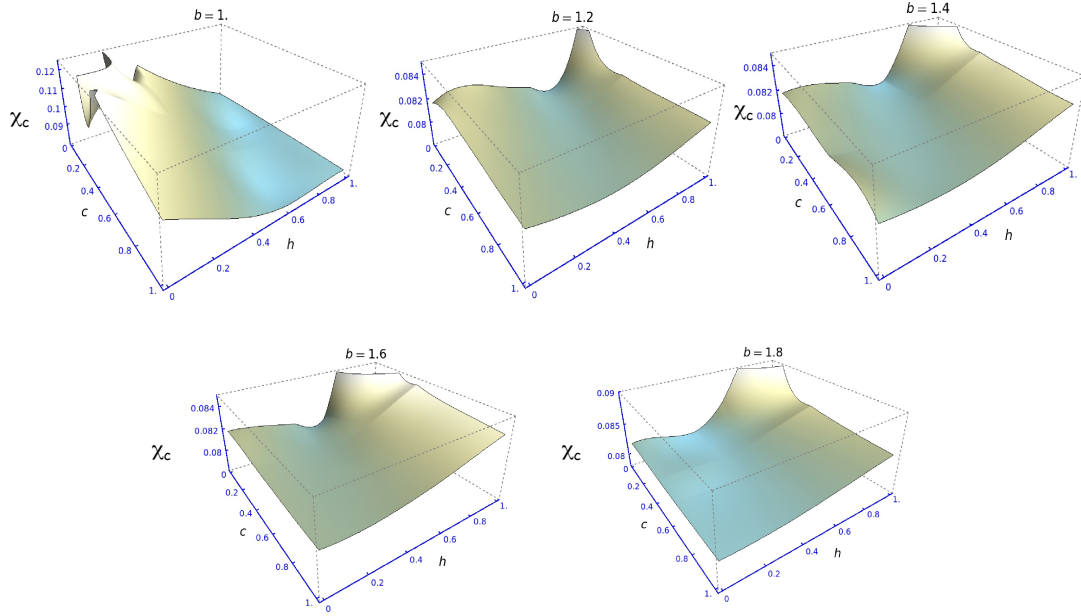


Figure 4: A bozonikus QED₂ által definiált kritikus hányados χ_c , amit a "lineárisan" normált CSS regulátorral (20) kaptam különböző paraméterek esetén. A kisebb hányados, jobb regulátort jelent. A legjobb eredményt a $b = 1$, $c = 0.001$ és $h = 1$ [az 'a' ábra "hátsó sarka"] paraméterek szolgáltatták, ami numerikusan közel van a CSS Litim limeszéhez (21a). A kritikus hányados χ_c a függőleges tengelyen van ábrázolva.

normálásától. Annak érdekében, hogy még megbízhatóbb eredményeket kapjunk, a következőkben megvizsgálom a CSS regulátort (20) és (22) normálással, a $d = 3$ dimenzióban vett $O(N = 1)$ szimmetrikus skalár térelméletet keretein belül.

7 Optimalizált regulátor – $O(1)$ modell

7.1 Orientáció

A CSS regulátor optimalizálására (azaz optimális paramétereinek meghatározására) egy további lehetőség az $O(1)$ modell vizsgálata $d = 3$ dimenzióban. A Wilson-Fisher (WF) fixpont kritikus exponenseit meg tudjuk határozni RG módszer segítségével, amik jellemző módon regulátor-függők. Ilyen például a ν exponens, ami a korrelációs hossz kritikus viselkedését írja le. Az egy-módusú bozonizált QED₂ vizsgálatához hasonlóan, az $O(1)$ modellt is egy "drasztikusan" csonkolt közelítésben vizsgálom, azaz a dimenziótlan potenciál

$$\tilde{V} = \frac{1}{2} \tilde{g}_1 \tilde{\varphi}^2 + \frac{1}{4!} \tilde{g}_2 \tilde{\varphi}^4, \quad (41)$$

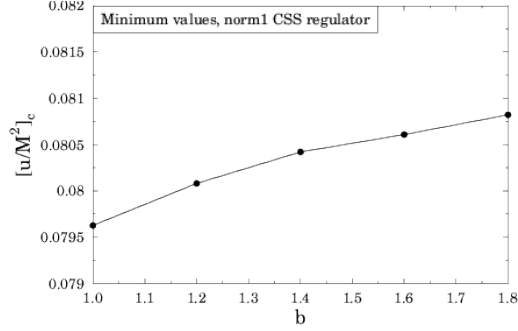


Figure 5: A lineárisan normált CSS regulátorral kapott kritikus hányadosok minimum értékeit ábrázoltam a b paraméter függvényében. Ez demonstrálja, hogy a $b \rightarrow 1$, $c \rightarrow 0$ és $h = 1$ limesz nyújtja a legjobb numerikus eredményeket.

a $\tilde{g}_1$ és $\tilde{g}_2$ dimenziótlan csatolásokkal. Ezzel a csonkolással, a csatolásokra kapott evolúciós RG egyenletek [16],

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{g}}_1 &= -2\tilde{g}_1 + \tilde{g}_2 \bar{\Phi}_{3/2}^2(\tilde{g}_1), \\ \dot{\tilde{g}}_2 &= -\tilde{g}_2 + 6\tilde{g}_2^2 \bar{\Phi}_{3/2}^3(\tilde{g}_1),\end{aligned}\tag{42}$$

ahol a $\bar{\Phi}_n^p(\omega)$ függvény nem más, mint

$$\bar{\Phi}_n^p(\omega) = \frac{1}{(4\pi)^n \Gamma(n)} \int_0^\infty dy \frac{y^{n+1} r'}{(y(1+r) + \omega)^p}.\tag{43}$$

Az evolúciós egyenletek nyilvánvalóan regulátor-függők, és a WF fixpont körül számolt ν exponens is. A szakirodalomban a $\bar{\Phi}_n^p(\omega)$ függvényt kiszámolták minden egyes főbb regulátor típusra, lásd [6–9]. Ezen regulátorok közül köztudottan a Litim adja a ”legjobb” kritikus exponenst (az ”egzakt” értékhez legközelebbit). A két csatolásra kapott ν a Litim regulátor alakot használva $\nu \approx 0.54277$ [16].

A lineárisan normált CSS regulátort (20) tanulmányozták a [16]-ban, ahol megerősítették, hogy a lineárisan normált CSS optimális paraméterei a Litim limeszt adják vissza, összhangban a 6. fejezet megfigyeléseivel. Az exponenciálisan normált CSS-t még nem tanulmányozták az $O(1)$ modell keretén belül, ami a jelen dolgozat egyik célkitűzése. CSS regulátor ezen normálásával (22) készítettem egy részletes analízist, az optimális paraméterek után kutatva.

7.2 Az $O(1)$ modell és a CSS regulátor exponenciális normálással

Ebben az alfejezetben az $O(1)$ modell (41) RG vizsgálatát hajtom végre az exponenciálisan normált CSS regulátorral (22). A célom ugyanaz, mint a QED_2 esetében volt, azaz, az optimális paraméter beállítást keresem (b , h , c). Itt az $O(1)$ modell (két csatolásra) ν kritikus exponensét határozom meg, a ν maximumát megkeresve. A 8. ábrán, az

Critical ratio χ_c for bosonized QED₂ (regulator in exponential normalization, b parameter fixed)

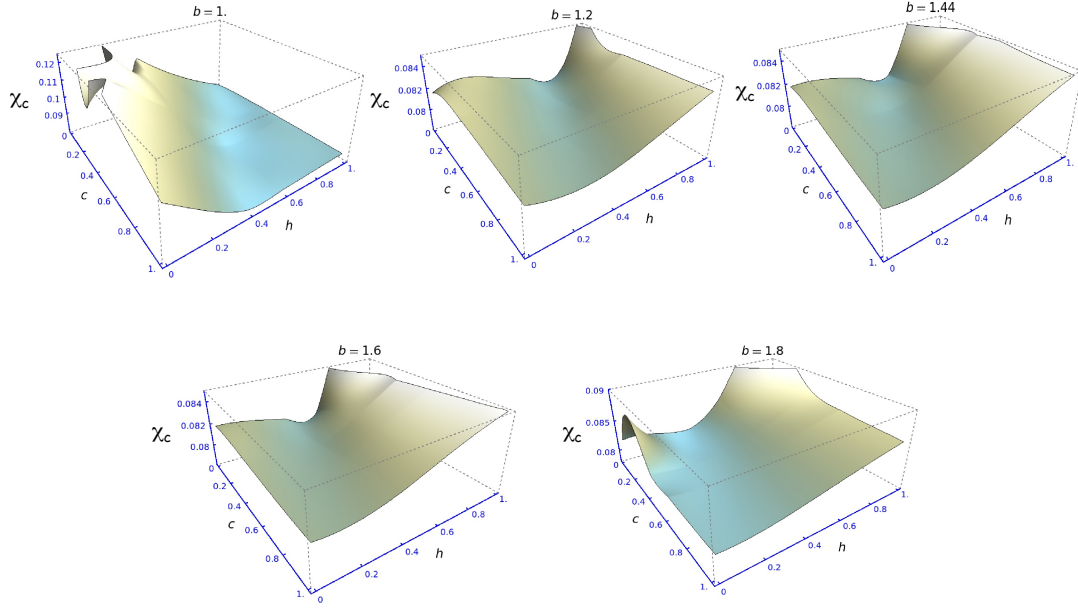


Figure 6: A bozonikus QED₂-ben az exponenciálisan normált CSS regulátorral kapott kritikus hányadost χ_c -t ábrázoltam (22). A kritikus hányados χ_c a függőleges tengelyen van feltüntetve. Kisebb kritikus hányados jobb regulátort jelent, így a $b = 1$, $c = 0.001$ és $h = 1$ (CSS Litim limesze) adódtak optimális választásnak. Az ábrák geometriája hasonló a 4 ábrához, de numerikus különbségek vannak. Nagy b értékek felé $b \approx 1.8$, egy extra lokális maximum jelenik meg c függvényében, a $(h = 0)$ terület mentén.

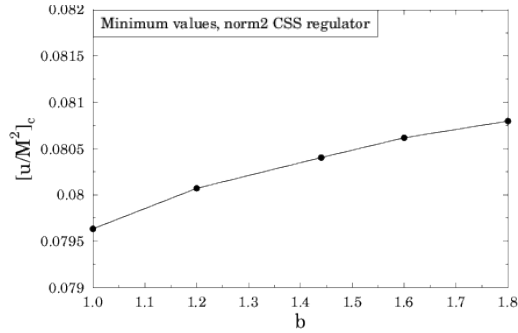


Figure 7: Az exponenciálisan normált CSS regulátorral kapott kritikus hányadosok minimum értékeit ábrázoltam a b paraméter függvényében. A legjobb eredményeket újra a $b \rightarrow 1$, $c \rightarrow 0$ és $h \rightarrow 1$ limesz adja. Megjegyzendő, hogy az így kapott optimális kritikus hányados $[u/M^2]_c$, $b \rightarrow 1$ -re kisebb mint a $b = 1.44$ -ben kapott "optimális" érték (a c és h változók figyelembevételével).

Critical exponent ν for the 3D $O(1)$ model (regulator in exponential normalization, b parameter fixed)

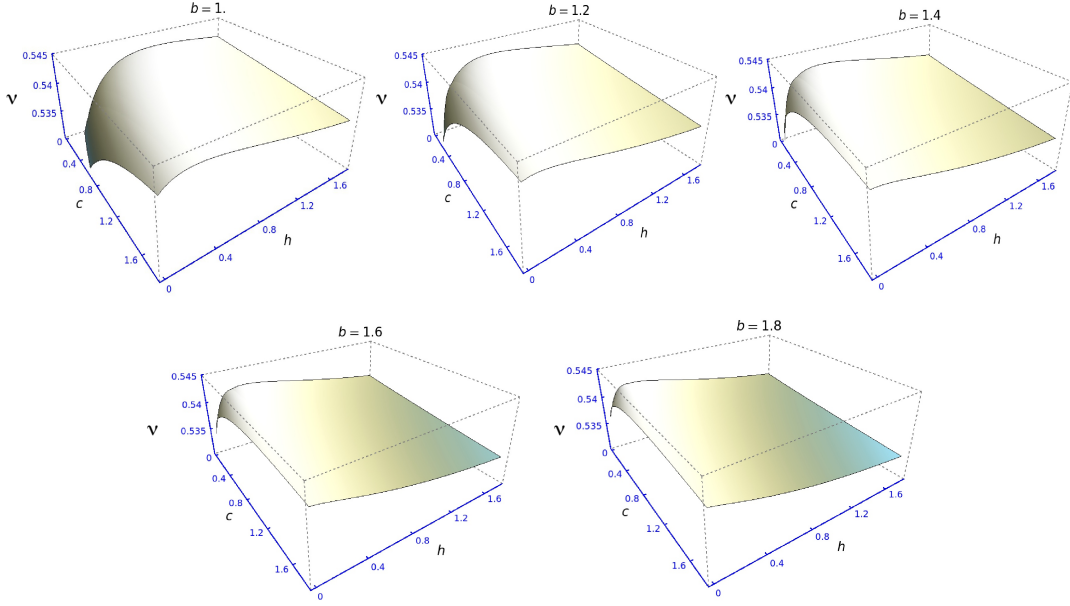


Figure 8: A három-dimenziós $O(1)$ modell ν kritikus exponense két csatolásra, a (41) egyenletben adott potenciálból, a CSS regulátor exponenciális normálásának (22) különböző paramétereinek függvényében. Nagyobb exponens jobb regulátort jelent. A ν kritikus exponens a függőleges tengelyen van ábrázolva.

exponenciálisan normált CSS regulátor b , h és c paramétereinek függvényében ábrázoltam a ν kritikus exponenst.

Alkalmazzuk a PMS stratégiát. Az optimális paraméterek közelében a modell RG vizsgálatával a kapott ν értéknek a kis perturbációkra nézve minimális az érzékenysége. Az így kapott optimális paraméterek körül megtaláljuk a platókat a 8. egyes alábráin is. Ha bevezetjük a ν_{max} -ot, azaz a 8. ábra egyes alábráin kapott ν maximumát c és h függvényében, és ezt ábrázoljuk a b függvényében, akkor a 9. ábrát kapjuk. Erről leolvashatjuk az abszolút maximumot a PMS elvét használva. Ezen módszer segítségével, az optimális értékek $b = 1$, $c = 0.001$ és $h = 1$, ami (numerikusan közel áll) a CSS regulátor Litim limeszéhez. Emlékezzünk, hogy mindkét normálás (20) és (22) $c \rightarrow 0$ és $h = 1$ határértékben a Litim limeszhez konvergál.

Egy másik rálátást kapunk a problémára, ha a CSS regulátor c és h paraméterét fix értéknek vesszük, és a ν kritikus exponenst vizsgáljuk a b függvényében. Az exponenciálisan normált CSS regulátorral (22) kapott eredmények a Litim, power-law és exponenciális limeszben a 10. ábrán láthatók. A CSS regulátor Litim limesze a PMS stratégiával az optimális eredményt a $b = 1$ -ben adja (ami az általánosan elfogadott érték a szakirodalomban). A CSS power-law limeszében $b \approx 2$ az optimális

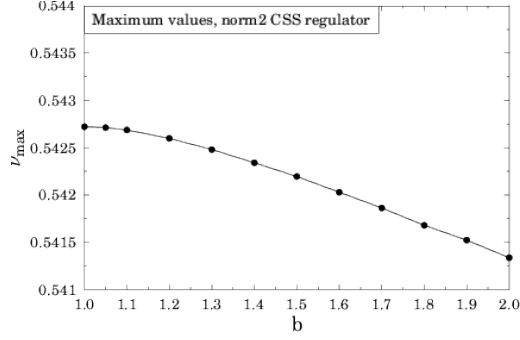


Figure 9: Az exponenciálisan normált (22) CSS regulátorral kapott ν kritikus exponens maximum értékei, különböző b paraméterereken. A PMS eljárást használva azt találjuk, hogy a Litim limesz $b \rightarrow 1$ adja az optimális eredményt.

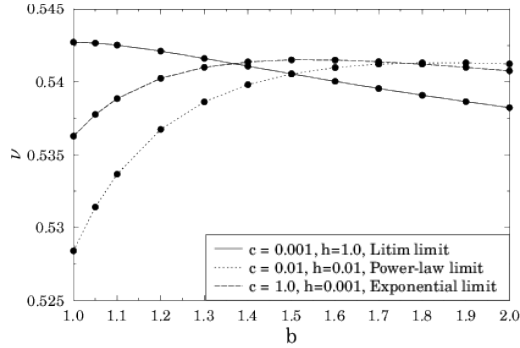


Figure 10: A ν kritikus exponens b függése, amit a CSS regulátor exponenciális normálásával (22) kaptam különböző határértékekben.

paraméter. A mező-amplitúdó sorfejtésre alapozva köztudott, hogy a power-law regulátor optimális paramétere $b = 2$. A CSS exponenciális limeszében (22) a legkedvezőbb eredményt a $b \approx 1.5$ szolgáltatta. Ismert, hogy a mező-amplitúdó sorfejtésre alapozva az exponenciális regulátor optimális paraméter választása $b = 1.44$. Ezen megfigyelések az optimalizálási stratégiánk helyességét igazolják hiszen visszaadják a szakirodalomban ismert eredményeket.

8 Összefoglalás

Jelen munkában [1] a funkcionális RG egyenletek regulátor-függésének optimalizálását tárgyaltam, LPA-ban, a bozonikus QED₂ és a három-dimenziós $O(1)$ skaláris elméletre. Optimalizáltam a PMS eljárás keretén belül. Köztudott volt [7–9], hogy a Litim-féle regulátor vezet a leggyorsabb konvergenciához a mező amplitúdó sorfejtésében. Ez a regulátor, optimális regulátorként is ismert LPA-ban, ami az $O(N)$ modellben a kritikus

exponens értékét nagyon közel adja az "egzakthoz". A nemrég bevezetésre került CSS regulátort [14], aminek egy nagyon általános függvényalakja van [lásd (18)], még nem vetették alá optimalizálásnak. A CSS regulátor a megfelelő határértékekben visszaadja a főbb regulátor típusokat [lásd (21) és (23)]. Ennek a sokoldalú függvény alaknak köszönhetően, a CSS regulátor egy remek "játsszóteret" biztosít a PMS eljárásnak, a regulátor optimalizálásának szisztematikus vizsgálatát megengedve, egy meglehetősen széles regulátor függvény osztályon belül. Alkalmaztam a CSS regulátort kétféle normálással (20) és (22) ("lineáris" és "exponenciális" norma). Annak érdekében, hogy numerikusan tanulmányozzam az RG egyenletek konvergenciájának tulajdonságait különböző regulátorokra, egy csonkolást használtam a mező sorfejtésére mindkét modellre, azaz az egyetlen Fourier-módus közelítést a bozonikus QED₂-re és egy polinomiális közelítést az $O(1)$ modellre három dimenzióban (tehát a φ^4 tagot meghagyjuk a blokkosított hatásban, de magasabb rendű tagokat nem). Az eredményeim az alábbiak szerint foglalhatók össze.

(i) A CSS regulátor Litim-féle alakját találtam az optimális választásnak mindkét esetben. Pontosabban, nem tudtam olyan paraméterbeállítást találni, amely esetén az általános CSS regulátor jobb numerikus eredményt adott volna a Litim-féle alaknál. Ez az állítás a QED₂ és a három-dimenziós $O(1)$ modellre egyaránt igaz.

(ii) A PMS eljárás nagyon hatásosan használható a CSS RG analízisére. Azaz, lehetővé teszi a numerikusan optimális paraméter megkeresését az általános CSS regulátor (18) b , h és c három-dimenziós terében. Megerősítést nyert, hogy a Litim-féle regulátor alak vezet a legjobb numerikus eredményhez LPA-ban. Legjobb tudomásom szerint, a PMS eljárás ilyen részletes vizsgálatára még nem volt példa a szakirodalomban. További vizsgálatokra való tekintettel, szeretném leszögezni, hogy a CSS regulátor és a PMS kombinációja egy nagyon hatásos eljárásnak bizonyult, akárhány dimenzióban, akármilyen modellre, a gradiens sorfejtés bármely rendjében.

(iii) Különböző eredményeket kaptam a CSS regulátor különböző határértékeiben. Például a CSS exponenciális limeszében a három-dimenziós $O(1)$ modell esetében, az optimális ν kritikus exponenst $b \approx 1.5$ paraméterrel kaptam, ami jó egyezést mutat a mező-amplitúdó sorfejtéssel, ahol az exponenciális regulátorra kapott optimális paraméter $b = 1.44$.

Végül hadd jegyezzem meg, hogy a CSS regulátor végtelenszer differenciálható a c és h bármely nem nulla esetében, míg az egzakt $c \rightarrow 0$ határesetben, a Litim limeszben $y = 1$ -nél egy törés van. Nyilvánvalóan nem nulla c értékre, mondjuk $c = 0.001$ -ra a gradiens sorfejtés bármilyen magas rendű tagjára alkalmazható. Ez azt jelzi, hogy egy "optimalizált CSS regulátor" alak, egy nem nulla c értéknél, kompatibilis a gradiens sorfejtéssel, miközben az optimális értéket szolgáltatja a χ_c kritikus hányados és ν kritikus exponensre, a megfelelő határértékekben.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőmnek a dolgozat megírásában és a kutatómunkában nyújtott segítségét. Jelen kutatást a Szuperszámítógép, a nemzeti virtuális laboratórium című, TÁMOP-4.2.2.C-11/1/KONV-2012-0010 azonosítószámú projekt támogatta az Európai Unió és az Európai Szociális Alap társfinanszírozása mellett.

References

- [1] I. G. Máriań, U. D. Jentschura, I. Nándori, J. Phys. G **41** 055001 (2014).
- [2] F. J. Wegner, A. Houghton, Phys. Rev. A. **8**, 401 (1973); J. Polchinski, Nucl. Phys B **231**, 269 (1984).
- [3] C. Wetterich, Nucl. Phys. B **352**, 529 (1991); *ibid*, Phys. Lett. B **301**, 90 (1993); J. Berges, N. Tetradis, C. Wetterich, Phys. Rept. **363**, 223 (2002).
- [4] T. R. Morris, Int. J. Mod. Phys. A **9**, 2411 (1994).
- [5] J. Alexandre, J. Polonyi, Annals Phys. **288**, 37 (2001); J. Alexandre, J. Polonyi, K. Sailer, Phys. Lett. B **531**, 316 (2002).
- [6] R. D. Ball, P. E. Haagensen, J. I. Latorre and E. Moreno, Phys. Lett. B **347**, 80 (1995); D. F. Litim, Phys. Lett. B **393**, 103 (1997); K. Aoki, K. Morikawa, W. Souma, J. Sumi and H. Terao, Prog. Theor. Phys. **99**, 451 (1998); S.B. Liao, J. Polonyi, M. Strickland, Nucl. Phys. B **567**, 493 (2000); J. I. Latorre and T. R. Morris, JHEP **0011**, 004 (2000); F. Freire and D. F. Litim, Phys. Rev. D **64**, 045014 (2001); D. F. Litim, JHEP **0507**, 005 (2005); C. Bervillier, B. Boisseau, H. Giacomini, Nucl. Phys. B **789**, 525 (2008); C. Bervillier, B. Boisseau, H. Giacomini, Nucl. Phys. B **801**, 296 (2008); C. S. Fischer, A. Maas, J. M. Pawłowski, Ann. Phys. **324**, 2408 (2009).
- [7] J. M. Pawłowski, Ann. Phys. **322**, 2831 (2007).
- [8] D. F. Litim, Phys. Lett. B **486**, 92 (2000); *ibid*, Phys. Rev. D **64**, 105007 (2001); *ibid*, JHEP **0111**, 059 (2001).
- [9] D. F. Litim, Nucl.Phys. B **631**, 128 (2002).
- [10] T. R. Morris, JHEP **0507**, 027 (2005).
- [11] O. J. Rosten, Phys. Rept. **511**, 177 (2012).
- [12] L. Canet, B. Delamotte, D. Mouhanna and J. Vidal, Phys. Rev. D **67**, 065004 (2003); *ibid*, Phys.Rev. B **68** 064421 (2003); L. Canet, Phys.Rev. B **71** 012418 (2005).

- [13] I. Nándori, I. G. Máriań, V. Bacsó, Phys. Rev. D **89** 047701 (2014).
- [14] I. Nándori, JHEP **1304**, 150 (2013).
- [15] I. Nándori, Phys. Lett. B **662** 302 (2008). Nándori, Phys. Rev. D **84**, 065024 (2011).
- [16] S. Nagy, B. Fazekas, L. Juhasz, K. Sailer, e-Print: arXiv:1307.0765 [hep-th].
- [17] I. Nándori, S. Nagy, K. Sailer, A. Trombettoni, Phys. Rev. D **80**, 025008 (2009); *ibid*, JHEP **1009**, 069 (2010).
- [18] S. Nagy, K. Sailer, Annals Phys.**326**, 1839 (2011).
- [19] J. Kovács, S. Nagy, I. Nándori, K. Sailer, JHEP **01** 126 (2011).
- [20] S. R. Coleman Phys. Rev. D **11**, 2088 (1975); I. Nándori, J. Polonyi, K. Sailer, Phys. Rev. D **63**, 045022 (2001).
- [21] I. Nándori, K. Vad, S. Mészáros, U. D. Jentschura, S. Nagy and K. Sailer, J. Phys.: Condens. Matter **19** 496211 (2007).
- [22] S. Nagy, I. Nándori, J. Polonyi, K. Sailer, Phys. Rev. Lett. **102** 241603 (2009); S. Nagy, Nucl. Phys. B **864**, 226 (2012); S. Nagy, Phys. Rev. D **86**, 085020 (2012).
- [23] M. Reuter, Phys. Rev. D **57**, 971 (1998); M. Reuter, F. Saueressig, New J. Phys. **14**. 055022 (2012); D. F. Litim, Phys. Rev. Lett. **92**, 201301 (2004); M. Reuter, F. Saueressig, Phys. Rev D **65**, 065016 (2002); S. Nagy, J. Krizsan, K. sailer, JHEP **1207** 102 (2012); S. Nagy, arXiv:1211.4151 [hep-th].
- [24] S. Nagy, J. Polonyi, K. Sailer, Phys. Rev. D **70**, 105023 (2004); I. Nándori, J. Phys. A: Math. Gen. **39**, 8119 (2006); I. Nándori, Phys. Lett. B **662**, 302 (2008); S. Nagy, Phys. Rev. D **79**, 045004 (2009); J. Kovács, S. Nagy, I. Nándori, K. Sailer, JHEP **1101**, 126 (2011).
- [25] T. M. Byrnes, P. Sriganesh, R. J. Bursill and C. J. Hamer, Phys. Rev. D **66**, 013002 (2002).
- [26] S. Wolfram, *The Mathematica Book* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1999).

A Függelék

Jelen munkában [1] a célom a funkcionális RG egyenletek regulátor-függésének optimalizálása volt, LPA-ban, a bozonikus QED₂ és a három-dimenziós $O(1)$ skaláris elméletekre, a PMS eljárás keretén belül, a CSS regulátor használatával.

A kutatómunka során elvégzett önálló feladataim:

1. Analitikus számolások – renormálási csoport egyenletek származtatása (CSS regulátorra mindkét normálásra, mindkét modellre)
2. C++ differenciálegyenlet megoldó program általánosítása CSS regulátorra
3. Konzisztenciaellenőrzések numerikus úton (ismert fázisdiagramok reprodukálása)
4. C++ program futtatása szuperszámítógépen
5. Eredmények ábrázolása (2D és 3D ábrák készítése)
6. Eredmények közzlése publikáció formájában

Feladatok végrehajtásához szükséges kutatási technikai módszerek, ismeretek:

- a, C++ nyelv használata numerikus differenciálegyenletek megoldásához (2,3,4)
- b, Wolfram Mathematica szimbolikus programozás használata, ábrák készítése (1,2,5)
- c, Gle program használata grafikus megjelenítéshez (3,5)
- d, Szuperszámítógép használata nagy számításigényű numerikus feladatok megoldásához (4)
- e, Latex szövegszerkesztő használata (6)

A fenti módszerek elsajátítása elengedhetetlen modern elméleti fizikai számolásokhoz, amiket a kutatómunkám során is alkalmaztam.

B Kivonat

A fizikában az egyes modellek, összefüggések megkonstruálásakor gyakran előfordul, hogy nélkülözhetetlen egy nem fizikai paraméter bevezetése. Ennek következménye, hogy az eredmények származtatásakor a fizikai mennyiségek függést mutathatnak ettől a bevezetett paramétertől. Így felmerül a kérdés, hogy hogyan kell az adott paramétert megválasztani, hogy tényleges fizikai eredményeket kapjunk. Ilyenkor egy általános elv,

hogyan válasszuk meg a paramétert úgy, hogy a fizikai mennyiségek a lehető legkevésbé függjenek, legkevésbé legyenek érzékenyek ettől a választástól. Ez az elv a minimális érzékenység elve. Jelen munkában ezt az elvet alkalmaztam a renormálási csoport módszer keretén belül az optimális regulátor kiválasztásához.

Az elemi részecskéket, a téridő felett értelmezett folytonos függvények segítségével írjuk le. Ezen terek kvantálását leíró elméleti keret a kvantumtérelmélet. Például a nemrég felfedezett Higgs részecske leírására skalárteret használunk. Egy másik példa az elektromágneses kölcsönhatást közvetítő részecske, azaz a foton, melyet vektortér segítségével jellemezünk. Függetlenül attól, hogy milyen elemi részecskét, illetve milyen kvantumtérelméleti modellt vizsgálunk nélkülözhetetlen az úgynevezett renormálás végrehajtása, mert csak így kaphatunk mérhető fizikai mennyiségeket. Azonban a renormálásra kidolgozott eljárások alkalmazhatósága korlátozott. Például a perturbatív renormálás nem használható, ha a csatolás, ami szerint perturbálunk nagy. Ilyen eset következik be a kvarkok hadronizációjánál. A nem-perturbatív technikák, mint például a funkcionális renormálási csoport (RG) módszerrel kapott eredmények pedig függenek az úgynevezett regulátor függvény megválasztásától. Jelen munkában arra a kérdésre kerestem a választ, hogy lehet-e a minimális érzékenység elvét használni az optimális regulátor kiválasztásához.