

Szegedi Tudományegyetem

**Elektromágneses hullámvezetők vizsgálata
a végeselemek módszerével**

Analysis of Electromagnetic Waveguides by the Finite
Element Method

TDK-dolgozat

Készítette:

Somogyi Anikó

matematika-fizika tanári szakos hallgató

Belső témavezető:

Dr. Czirjákné Dr. Csete Mária

egyetemi adjunktus

Külső témavezető:

Dr. Van Leeuwen-Polner Mónika

egyetemi adjunktus

Szeged

2014

Tartalomjegyzék

Bevezetés	4
1. Maxwell-egyenletek	5
1.1. A Maxwell-egyenletek integrál- és differenciálegyenletes alakja	5
1.2. Az optikai közeg tulajdonságainak figyelembevétele	7
2. Az elektromágneses hullámok terjedése	8
2.1. Időben periodikus elektromágneses tér	8
2.2. Vektor-hullámegyenletek forrásos elektromágneses tér esetén	9
2.3. Vektor-hullámegyenletek forrásmentes elektromágneses tér és homogén, izotrop közeg esetén	10
3. Hullámvezetők	12
3.1. Az elektromágneses tér a hullámvezetőben	12
3.2. A tökéletes vezető peremfeltétel (PEC)	15
3.3. A hullámegyenletek megoldása homogén hullámvezetőben	16
3.3.1. Párhuzamos vezetősíkokból álló hullámvezetőben terjedő elektromágneses módusok analitikus meghatározása	18
3.3.2. A téglalap keresztmetszetű homogén hullámvezető módusainak analitikus meghatározása	20
3.4. A hullámegyenletek megoldása inhomogén hullámvezetőben	25
3.4.1. A téglalap keresztmetszetű transzverzálisan inhomogén hullámvezető módusainak analitikus meghatározása	27
3.5. A Galerkin-módszer	33
3.5.1. Párhuzamos vezetősíkokból álló homogén hullámvezetőben terjedő elektromágneses módusok numerikus megoldása	35
3.5.2. A téglalap keresztmetszetű homogén hullámvezető módusainak numerikus megoldása	38
3.6. Kétdimenziós differenciálegyenlet-rendszer megoldása a végeselemek módszerével	41

3.6.1. Inhomogén hullámvezetőben terjedő módusok meghatározása a végeselemek módszerével	43
4. Sajátértékek és sajátmódusok keresése RGC-SPR-modellekben	46
4.1. RGC-SPR - a modellprobléma leírása	47
4.1.1. Diszperzív és veszteséges hullámvezetők, nemlineáris sajátérték-problémák	47
4.1.2. Geometria	48
4.1.3. Diszperzív anyagi paraméterek	49
4.1.4. Peremfeltételek	49
4.1.5. A sajátérték-probléma megoldása	49
4.1.6. A megoldások kiértékelése	50
Összefoglalás	56
Függelékek	56
A Tevékenység leírása	57
B A vektoranalízis alapvető fogalmai	59
C Elektrodinamikai alapfogalmak	61
C.1. Az elektromágneses tér jellemző mennyiségei	61
C.2. A térerősségvektorok viselkedése két közeg határfelületén	62
D A végeselemek módszere	65
D.1. Egydimenziós differenciálegyenlet megoldása a végeselemek módszerével	65
D.2. Kétdimenziós differenciálegyenlet megoldása a végeselemek módszerével	73
Nyilatkozat	82
Köszönetnyilvánítás	83
Irodalomjegyzék	84

Bevezetés

A modern elektrotechnikában kiemelkedő szerepe van azoknak az eszközöknek, amelyek lehetővé teszik az elektromágneses teljesítmény vagy kommunikációs jel továbbítását, jelentős intenzitásveszteségek nélkül.

A hullámvezetők (waveguide-ok) olyan eszközök, amelyek bizonyos frekvenciatartományon gyakorlatilag a teljes elektromágneses energiát át tudják bocsátani, mindemellett pontosan oda irányítják, ahol arra szükség van. Ezen eszközök pontos megtervezéséhez elengedhetetlen, hogy meghatározzuk, milyen hullámmódusok terjedése megengedett bennük adott frekvencián.

A hullámmódusok megkeresése egy elektromágneses sajátérték-feladatra vezet. Ezen sajátértékek, illetve a hozzájuk tartozó sajátfüggvények (módusok) ismeretében meg tudjuk határozni a teljes elektromágneses teret a hullámvezetőben.

A Maxwell-egyenletekből származtatott parciális differenciálegyenletek, illetve a már említett sajátérték-problémák numerikus megoldására a végeselemek módszere (FEM) bizonyult az egyik legelőnyösebbnek.

Számos, ezen a módszeren alapuló felhasználóbarát program áll rendelkezésre, amelyek modellezik a fizikai problémát, és nagyban hozzájárulnak az eszközök fejlesztéséhez. Egyik legismertebb ezek közül a COMSOL Multiphysics programcsomag, melyet parciális differenciálegyenletek numerikus megoldására terveztek. Fizikai és mérnöki alkalmazások széles körét tartalmazza. Moduljai között megtalálható pl. az elektromágnesség, a hővezetés, a strukturális mechanika, ezek összekapcsolásával pedig lehetőség nyílik komplex fizikai jelenségek modellezésére. A TDK-dolgozatomat főként az motiválja, hogy át kívánom tekinteni, milyen matematikai apparátus áll a COMSOL megoldási módszereinek háttérében. Ehhez elengedhetetlen a FEM elméletében való elmélyedés, illetve annak alkalmazása különböző modellproblémákra.

1. fejezet

Maxwell-egyenletek

A James Clerk Maxwell (1831-1879) által felállított egyenleteket az elektromágneses tér-elmélet axiómáiként tartjuk számon. Ezek a törvények kísérleti tapasztalatok általánosításaként születtek, és kapcsolatot létesítenek a makroszkopikus elektromágneses mennyiségek között. (Az itt használt vektoranalízisbeli, illetve elektrodinamikai fogalmakat, mennyiségeket a B., illetve a C.1. függelékben ismertetjük.)

A Maxwell-egyenletek integrálegyenletes formában a tér véges tartományaira érvényesek. Tegyük fel, hogy ezek bármely felületre és görbére fennállnak. Tekintsünk egy pontot a térben, ahol az elektromágneses mező mennyiségei és azok deriváltjai mind folytonosak. Ekkor a Gauss- és Stokes-féle integráltételek alkalmazásával a tér minden egyes pontjára vonatkozó parciális differenciálegyenleteket nyerünk (differenciálegyenletes alak) [1, 2].

1.1. A Maxwell-egyenletek integrál- és differenciálegyenletes alakja

1.1. Faraday-féle indukciós törvény. Az elektromos mező C zárt görbe menti integrálja, azaz cirkulációja, egyenlő a görbe által határolt S felületre vett indukciófluxus idő szerinti deriváltjának (-1) -szerezésével:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}. \quad (1.1)$$

Differenciálalakban:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.2)$$

Jelentése: Az elektromos mező örvényes, örvényerőssége arányos a mágneses indukció időegységre eső változásával.

1.2. Ampère-féle gerjesztési törvény, a Maxwell–Ampère-törvény. A *stacionárius áram mágneses mezőjének cirkulációja, vagyis egy zárt C görbére vett integrálja, arányos a görbe által határolt S felületen áthaladó áram erősségével.*

Maxwell felfedezte, hogy nem stacionárius esetben az áramokhoz hozzá kell adni az eltolódási áramot is:

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{f} + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} d\mathbf{s}. \quad (1.3)$$

Differenciálalakban:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}. \quad (1.4)$$

Jelentése: A mágneses mező örvényes. Az örvényerősség az eltolódási és a vezetési áram-sűrűség összegével arányos.

1.3. Elektromos Gauss-törvény. Az *elektromos eltolásnak egy zárt S felületre vett fluxusa, azaz felületi integrálja egyenlő a felület által határolt V térfogatban található töltések algebrai összegével (Q):*

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q = \int_V \rho(\mathbf{r}) dv, \quad (1.5)$$

ahol $d\mathbf{s}$ a felületről kifelé mutató normális irányába mutat.

Differenciálalakban:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho. \quad (1.6)$$

Jelentése: Az elektromos tér forrásos, forráserőssége egyenesen arányos a töltéssűrűséggel.

1.4. Mágneses Gauss-törvény. A *mágneses indukcióvektor bármely zárt S felületre vonatkozó fluxusa 0, azaz:*

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad (1.7)$$

Differenciálalakban:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.8)$$

Jelentése: A mágneses mező forrásmentes, vagyis nem létezik mágneses monopólus.

1.5. A kontinuitási egyenlet. Az *S felület által bezárt V térfogathoz időegység alatt kiáramló töltésmennyiség egyenlő a térfogatban lévő töltés időegységre jutó csökkenésével:*

$$\oint_S \mathbf{J} d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dv. \quad (1.9)$$

Differenciálalakban:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (1.10)$$

Összegezve, a Maxwell-egyenletek differenciálalakja:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.11)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (1.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (1.15)$$

Időben változó mágneses mező esetén a fenti differenciálegyenletek közül csupán három független egymástól. Ezek lehetnek az (1.11), az (1.12) és az (1.13), vagy az (1.11), az (1.12) és az (1.15) egyenletek.

1.2. Az optikai közeg tulajdonságainak figyelembevétele

Vegyük észre, hogy a három független Maxwell-egyenletben az ismeretlenek száma hat, ezért ezek meghatározásához szükség van rá, hogy kiegészítsük az egyenletrendszert az optikai közeg dielektromos tulajdonságait jellemző anyagi egyenletekkel [2].

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (1.16)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1.17)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (1.18)$$

ahol ε az anyag permittivitása, μ a permeabilitása, σ az elektromos vezetőképesség. Ezek az állandók izotróp anyagok esetén skalár mennyiségek, anizotróp esetben tenzorok.

2. fejezet

Az elektromágneses hullámok terjedése

2.1. Időben periodikus elektromágneses tér

Tekintsük azt az esetet, amikor az elektromágneses térmennyiségek időben harmonikusan oszcillálnak [3], azaz

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \phi) = \text{Re}(\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{j\phi} e^{j\omega t}) = \text{Re}(\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}), \quad (2.1)$$

ahol ω a hullám körfrekvenciája, ϕ a fázisa, j az imaginárius egység. Az $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{j\phi}$ a komplex amplitudó (fázor), amely független az időtől, és információt hordoz mind az amplitudóról, mind a kezdőfázisról. Az elektromágneses mezőt jellemző mennyiségek mindig valósak, ezért amíg a komplex mennyiségekkel lineáris műveleteket végzünk, addig Re jelzést legtöbbször el is hagyjuk.

Azért érdemes a komplex térerősségvektorokkal dolgozni, mert a mező idő szerinti deriváltja:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{Re}(j\omega \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}). \quad (2.2)$$

Vagyis az idő szerinti deriválást egy $j\omega$ szorzóval helyettesíthetjük, és így az időfüggő egyenletekből az $e^{j\omega t}$ kifejezéssel való egyszerűsítés révén a komplex amplitudóra vonatkozó egyenletet nyerhetünk.

A következőkben minden időben harmonikus egyenletet a fázorra fogunk felírni. A továbbiakban a $\sim$ -vel való jelölést elhagyjuk.

Ennek megfelelően írjuk át a Maxwell-egyenleteket az időben harmonikus esetre. Ha

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z, t) &= \mathbf{E}(x, y, z) e^{j\omega t} \\ \mathbf{B}(x, y, z, t) &= \mathbf{B}(x, y, z) e^{j\omega t}, \end{aligned}$$

akkor az (1.11), az (1.12), az (1.15) egyenletek a következő alakúak lesznek:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\mathbf{D} + \mathbf{J} \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega\rho. \quad (2.5)$$

Megjegyezzük, hogy a COMSOL megoldások is a fázorra vonatkoznak.

2.2. Vektor-hullámgörvények forrásos elektromágneses tér esetén

Ebben a szakaszban a célunk, hogy a Maxwell-görvények időben harmonikus formájából kiindulva matematikai átalakításokkal olyan egyenleteket kapjunk, amelyekben már csak az egyik térerősség-komponens szerepel. Ezeket vektor-hullámgörvényeknek nevezzük [1]. A hullámgörvények megoldásai az elektromágneses hullámok. A Gauss-törvényből A (2.3) kiindulva, és felhasználva az (1.17) anyagi egyenletet, kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mathbf{B} = -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \mu^{-1}\nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mathbf{H}. \end{aligned}$$

Vegyük az utóbbi egyenlet mindkét oldalának rotációját:

$$\nabla \times (\mu^{-1}\nabla \times \mathbf{E}) = -j\omega\nabla \times \mathbf{H}.$$

Használva a (2.4) egyenletet, és az (1.16) összefüggést, kapjuk, hogy

$$\nabla \times (\mu^{-1}\nabla \times \mathbf{E}) = \omega^2\epsilon\mathbf{E} - j\omega\mathbf{J}. \quad (2.6)$$

A $\mathbf{H}$ -ra vonatkozó vektor-hullámgörvényt hasonlóképpen nyerjük az Ampère-törvényből a (2.4), ha felhasználjuk az (1.16), a (2.3), valamint az (1.17) egyenleteket:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= j\omega\mathbf{D} + \mathbf{J} = j\omega\epsilon\mathbf{E} + \mathbf{J} \\ \epsilon^{-1}(\nabla \times \mathbf{H}) &= j\omega\mathbf{E} + \epsilon^{-1}\mathbf{J} \\ \nabla \times (\epsilon^{-1}\nabla \times \mathbf{H}) &= j\omega\nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times \epsilon^{-1}\mathbf{J}, \end{aligned}$$

amiből

$$\nabla \times (\varepsilon^{-1} \nabla \times \mathbf{H}) = \omega^2 \mu \mathbf{H} + \nabla \times \varepsilon^{-1} \mathbf{J} \quad (2.7)$$

2.3. Vektor-hullámegyenletek forrásmentes elektromágneses tér és homogén, izotrop közeg esetén

Legyen a közeg homogén (μ és ε állandó), izotrop, az EM-mező forrásmentes ($\rho = 0$, $\mathbf{J} = 0$), ekkor az elektromágneses tér leírására új, forrásmentes vektor-hullámegyenleteket állíthatunk fel, az előző fejezetben eredményül kapott vektor-hullámegyenletekből kiindulva [2]. A fenti egyszerűsítések révén (2.6.) és (2.7.) a következő egyenletekre egyszerűsödnek:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \omega^2 \varepsilon \mu \mathbf{E} \quad (2.8)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \omega^2 \varepsilon \mu \mathbf{H} \quad (2.9)$$

Alkalmazzuk a Laplace-operátorra vonatkozó azonosságot, B függelék, (B.4).

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = \omega^2 \varepsilon \mu \mathbf{E} \quad (2.10)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = \omega^2 \varepsilon \mu \mathbf{H}. \quad (2.11)$$

Mivel az (1.14) törvény szerint $\mathbf{H}$ divergenciamentes, forrásmentes közeg esetén pedig $\mathbf{E}$ divergenciája is zérus, ezért mindkét térerősségvektorra azt kapjuk, hogy kielégíti a következő forrásmentes vektor-hullámegyenletet:

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = \omega^2 \varepsilon \mu \mathbf{E} \quad (2.12)$$

$$-\nabla^2 \mathbf{H} = \omega^2 \varepsilon \mu \mathbf{H}, \quad (2.13)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} + \omega^2 \varepsilon \mu \mathbf{E} = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} + \omega^2 \varepsilon \mu \mathbf{H} = 0. \quad (2.15)$$

Vezessük be a $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$ jelölést! Beláttuk tehát, hogyha a közeg homogén és izotrop, valamint forrásmentes, akkor mindkét térerősségvektor komponensei kielégítik a homo-

gén Helmholtz-egyenletet, azaz a

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + k^2 \phi = 0 \quad (2.16)$$

egyenlet teljesül az $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$ komponensek mindegyik e. Az így kapott parciális differenciálegyenleteket fogjuk a következő fejezetben megoldani, speciálisan a hullámvezetőkben terjedő elektromágneses tér meghatározására.

3. fejezet

Hullámvezetők

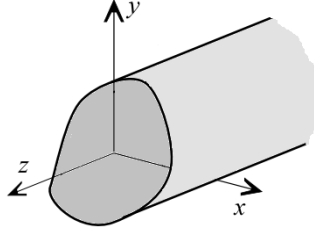
Ebben a fejezetben az időben harmonikus elektromágneses teret speciális körülmények között vizsgáljuk. Olyan közeget tekintünk, ahol a tér forrásai a közegen kívül helyezkednek el, így az elektromágneses térmennyiségek a forrásmentes közegre felírt Maxwell-egyenleteket, valamint hullámegyenleteket oldjuk meg. A tengely menti hullámterjedést olyan struktúrákban fogjuk tanulmányozni, amelyek ezen tengelyük irányában változatlanok, tehát állandó a keresztmetszetük.

Elsőként párhuzamos fémlamezék (távvezeték) közötti hullámok terjedését vizsgáljuk. Ezután majd a zárt hullámvezetők (waveguide) elektromágneses terét tanulmányozzuk először homogén, majd inhomogén izotrop közegben. Ezek az eszközök alkalmasak, és széles körben használatosak az elektromágneses hullámok nagy hatásfokú továbbítására. Feltesszük, hogy a hullámvezetők fala ideális fém, így eltekinthetünk az energiavesztéstől [5, 6].

3.1. Az elektromágneses tér a hullámvezetőben

Hogyan terjed az időben harmonikus elektromágneses tér egy üreges hullámvezető testben? Ebben a fejezetben olyan ideális elrendezéseket, hullámvezetőket fogunk vizsgálni, amelyek a z tengely mentén végtelen hosszúak, keresztmetszetük e tengely mentén változatlanok, tehát z kitüntetett irány. Induljunk ki abból a feltételezésből, hogy az elektromágneses tér a hullámvezetőben forrás-, azaz árammentes, és hogy az elektromágneses hullám terjedési iránya szintén z , (3.1. ábra).

Időben harmonikus elektromágneses teret vizsgálunk. Így a hullámvezetőben az elektromos és mágneses térerősségvektorok időfüggése leválasztható, mint ahogy azt korábban



3.1. ábra. z irányban állandó keresztmetszetű hullámvezető

megjegyeztük.

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}(x, y, z)e^{j\omega t} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = \mathbf{H}(x, y, z)e^{j\omega t} \quad (3.2)$$

Mivel a struktúrát z irányban végtelen hosszúnak és változatlannak tekintjük, a térerősségvektorok z -függése az időfüggéshez hasonlóan leválasztható. Az elektromágneses mező térerősségvektorai tehát kifejezhetők

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}(x, y)e^{j(\omega t \pm k_z z)}$$

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = \mathbf{H}(x, y)e^{j(\omega t \pm k_z z)}$$

alakban, ahol k_z a $\mathbf{k}$ hullámszámvektor z komponense, amely z irányú terjedés esetén megegyezik az ún. terjedési konstanssal, azaz $k_z = \beta$. Feltehető, hogy a hullám $e^{-j\beta z}$ szerint terjed. (Hasonlóképpen feltehetnénk az $e^{j\beta z}$ szerinti terjedést.)

Vegyük észre, hogy

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} = \mathbf{E}(x, y)e^{j(\omega t - \beta z)} \cdot (-j\beta) = -j\beta \mathbf{E}, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = \mathbf{H}(x, y)e^{j(\omega t - \beta z)} \cdot (-j\beta) = -j\beta \mathbf{H}. \quad (3.4)$$

A következő lépésben megmutatjuk, hogy valójában elegendő a z irányú komponenseket, azaz E_z -t és H_z -t meghatározni. Ehhez induljunk ki abból, hogy időben harmonikus, forrásmentes esetben a Maxwell-egyenleteket a következőképp írhatjuk:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \quad (3.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \mathbf{D}. \quad (3.6)$$

Fejtsük ki a (3.5) egyenlőséget:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -j\omega\mu\mathbf{H}. \quad (3.7)$$

Ez ekvivalens a következő egyenletrendszerrel, ha figyelembe vesszük az idő- és z -függésről feljebb leírtakat:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} : \frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta E_y &= -j\omega\mu H_x \\ \hat{\mathbf{y}} : \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\beta E_x &= j\omega\mu H_y \\ \hat{\mathbf{z}} : \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -j\omega\mu H_z. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ugyanígy kaphatjuk a (3.6) egyenletből az

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} : \frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta H_y &= j\omega\varepsilon E_x \\ \hat{\mathbf{y}} : -\frac{\partial H_z}{\partial x} - j\beta H_x &= j\omega\varepsilon E_y \\ \hat{\mathbf{z}} : \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= j\omega\varepsilon E_z \end{aligned} \quad (3.9)$$

egyenletrendszert. Valóban, a terjedési irányra merőleges (ún. transzverzális) térerősség-komponenseket kifejezhetjük E_z és H_z segítségével:

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{j}{k_c^2} \left(\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \\ H_y &= -\frac{j}{k_c^2} \left(\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \beta \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \\ E_x &= -\frac{j}{k_c^2} \left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \\ E_y &= -\frac{j}{k_c^2} \left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

ahol bevezettük a $k_c^2 = \omega^2\mu\varepsilon - \beta^2$ jelölést. Valóban, a z kitüntetett iránnyal rendelkező hullámvezető elektromágneses terének meghatározásához elegendő meghatározni a mező E_z és H_z komponensét.

3.2. A tökéletes vezető peremfeltétel (PEC)

A (3.20) és a (3.21) differenciálegyenletekhez a fizikai környezet által megkövetelt peremfeltételeket kell kapcsoljunk. Az $\mathbf{E}$ és $\mathbf{B}$ vektorok két közeg határfelületén a Maxwell-egyenletekből levezethető szabályok szerint viselkednek, (C.2. függelék). Leszögeztük, hogy azt idealizált esetet vizsgáljuk, amikor a hullámvezető tökéletesen vezető (Perfect Electric Conductor) fémből készült, ($\sigma \rightarrow \infty$) [3].

Ezért tetszőleges dielektrikum (1. közeg) és tökéletesen vezető fém (2. közeg) közötti határátlépésre kell specializálni a

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (3.11)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0. \quad (3.12)$$

határfeltételeket, ahol az 1 és 2 indexek a közegek sorszámára utalnak.

A $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ összefüggés miatt az $\mathbf{E}$ vektor határfelületet érintő komponensének nullának kell lenni, hogy ne keletkezzen a vezetőben végtelen áram:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = 0. \quad (3.13)$$

Másrészt az ideális vezető belsejében nem létezhet időben változó mágneses tér, hiszen az vezető belsejében elektromos teret hozna létre. $\mathbf{E} = 0$ miatt $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$, ezért a vezető belsejében az időfüggő B_{2n} -nek nullának kell lenni, így $B_{1n} = B_{2n} = 0$. Ezt kifejezhetjük az

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.14)$$

alakban, azaz a $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ anyagi egyenlet értelmében a hullámvezető falán a mágneses térerősségvektor normális komponensének is nullának kell lenni.

Ezeket a peremfeltételeket a z kitüntetett irányú hullámvezető esetén még egyszerűbb formában adhatjuk meg. Ebben az esetben az $\mathbf{E}$ vektor érintőleges komponense maga E_z , vagyis a hullámvezető falán $\phi = E_z$ -re teljesülnie kell a

$$\phi = E_z = 0 \quad (3.15)$$

Dirichlet-peremfeltételnek.

A hullámvezető falára merőleges irányú (normális irányú) térkomponens felbontható x és y irányú komponensekre, azaz H_x -nek és H_y -nak 0-nak kell lenni a vezető falánál.

A (3.10) egyenletrendszerben kifejeztük ezen komponenseket:

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{j}{k_c^2} \left(\omega \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) = 0 \\ H_y &= -\frac{j}{k_c^2} \left(\omega \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \beta \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

$E_z = 0$ miatt ez csak úgy teljesülhet, ha

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = 0 \text{ és } \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0, \quad (3.17)$$

azaz $\phi = H_z$ kielégíti a

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (3.18)$$

Neumann-peremfeltételt. Itt $\frac{\partial}{\partial n}$ jelöli a normális deriváltat a fal egy pontjában.

3.3. A hullámgörvények megoldása homogén hullámvezetőben

Tekintsük először azokat a hullámvezetőket, amelyeket homogén, izotrop anyag tölt ki (μ és ε állandó), és az elektromágneses mező forrása a hullámvezetőn kívül helyezkedjen el ($\rho = 0$, $\mathbf{J} = 0$)! A 2. fejezetben megmutattuk, hogy ezek mellett a feltételek mellett minden elektromágneses mezőkomponens kielégíti a homogén Helmholtz-egyenletet, vagyis

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + k^2 \phi = 0 \quad (3.19)$$

egyenlet teljesül az E_x , E_y , E_z , H_x , H_y , H_z komponensek mindegyikére, ahol $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$. Az előző szakaszban pedig láttuk, hogy elegendő 2 komponenst, E_z -t és H_z -t meghatározni.

Azt is láttuk, hogy ezek

$$\begin{aligned} E_z(x, y, z) &= E_z(x, y) e^{j(\omega t - \beta z)} \\ H_z(x, y, z) &= H_z(x, y) e^{j(\omega t - \beta z)} \end{aligned}$$

alakúak, ezért a

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = -\beta^2 E_z$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} = -\beta^2 H_z$$

helyettesítéssel azt kapjuk, hogy a z kitüntetett irányú hullámvezetőben az E_z -re és H_z -re teljesülő (3.19) homogén Helmholtz-egyenlet kétdimenziós lesz:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_c^2 E_z = 0, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k_c^2 H_z = 0 \quad (3.21)$$

ahol $k_c^2 = k^2 - \beta^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - \beta^2$. Jelölje Ω a hullámvezető belsejét, Γ pedig az Ω tartomány határát, azaz a hullámvezető tökéletes vezetőből készült falát. Az a feladatunk, hogy megoldjuk a

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k_c^2 \phi = 0 \quad (3.22)$$

Helmholtz-típusú parciális differenciálegyenletet $\phi = \phi(x, y, z, t)$ -re az Ω tartományon, a PEC peremfeltételek mellett.

A $\phi = E_z$ -nek teljesítenie kell a (3.13) alapján a homogén Dirichlet-feltételt a hullámvezető falán:

$$\phi|_{\Gamma} = 0. \quad (3.23)$$

Ezzel szemben a H_z -nek teljesítenie kell a homogén Neumann-peremfeltételt.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}|_{\Gamma} = 0. \quad (3.24)$$

A (3.21) és a (3.20) kétdimenziós parciális differenciálegyenletek a (3.23) és a (3.24) peremfeltételekkel egy-egy sajátérték-problémát határoznak meg. Adott β esetén csak bizonyos ω körfrekvenciák megengedettek (üregrezonancia-feltétel). Esetünkben adott ω -hoz csak bizonyos β -k elégítik ki a differenciálegyenleteket és a határfeltételeket, azaz adott frekvencián csak bizonyos, úgynevezett sajátmódusok (a sajátértékhez tartozó sajátvektor) jelennek meg a hullámvezetőben, (hullámvezetési feltétel) [7].

Mivel az E_z -re és H_z -re vonatkozó peremfeltételek különbözőek, ezért ϕ mezőkomponensre két peremérték-problémát oldunk meg. A hullámvezetőkben megkülönböztetjük a következő módusokat:

- TE - transzverzális elektromos ($E_z = 0$, $H_z \neq 0$)

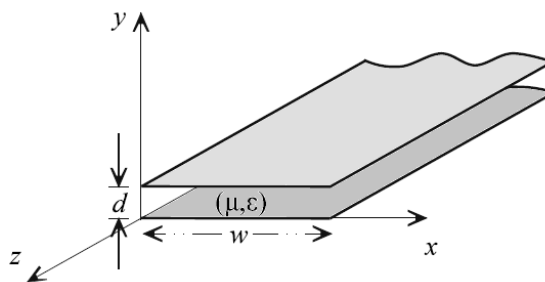
- TM - transzverzális mágneses ($E_z \neq 0, H_z = 0$)
- TEM - transzverzális elektromágneses ($E_z = 0, H_z = 0$).

E_z és H_z ismeretében a transzverzális komponenseket meghatározó összefüggések a (3.10) segítségével meghatározhatjuk a teljes elektromágneses teret a hullámvezetőben [1].

3.3.1. Párhuzamos vezetősíkokból álló hullámvezetőben terjedő elektromágneses módusok analitikus meghatározása

Ebben a fejezetben a fent vázolt peremértékprobléma megoldásával keressük meg az elektromágneses módusokat a párhuzamos vezetősíkokból álló hullámvezetőben, vagy más néven távvezetékben. Ez az egyszerű példa jól illusztrálja, hogyan lehet a felhasznált matematikai módszereket és fizikai intuíciót később általánosítani bonyolultabb struktúrákra, melyeknek egy adott irányban állandó a keresztmetszete.

Tegyük fel tehát, hogy a hullámvezető két tökéletesen vezető fémlapból áll, amelyek mindegyike z irányban végtelen hosszú, közöttük homogén szigetelőanyag vagy levegő van, x irányban a síklapok szélessége (w) jóval nagyobb, mint a távolságuk (d =állandó). Tegyük fel továbbá azt is, hogy a hullámvezető x irányban változatlan, azaz a mező független lesz x -től. Ez természetesen csak jó közelítéssel igaz, de igen széles vezeték esetén eltekinthetünk a széleken jelentkező perturbációtól, (3.2. ábra)



3.2. ábra. Párhuzamos vezetősíkokból álló hullámvezető

Felhasználva tehát, hogy $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$, a (3.22) egyenlet még egyszerűbb, közönséges differenciálegyenlet alakot ölt:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k_c^2 \phi = 0. \quad (3.25)$$

A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + k_c^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \sqrt{-k_c^2} = \pm jk_c, \quad (3.26)$$

ezért az egyenlet általános megoldása

$$\phi(y) = c_1 \cos(k_c y) + c_2 \sin(k_c y) \quad (3.27)$$

alakú, ahol a c_1, c_2 konstansokat tökéletes vezetőre vonatkozó a peremfeltételekből határozhatjuk meg.

A TE módusok ($E_z = 0, H_z \neq 0$) meghatározásához a differenciálegyenlethez a Neumann-féle peremfeltételt kell kapcsolni, majd a peremérték-problémát megoldani $\phi = H_z$ -re, azaz

$$H_z = c_1 \cos(k_c y) + c_2 \sin(k_c y) \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (3.29)$$

Ez utóbbi feltétel esetünkben a következőt jelenti:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial H_z}{\partial y} \Big|_{y=d} = 0 \quad (3.30)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial y} \Big|_{y=0} = (-c_1 k_c \sin(k_c y) + c_2 k_c \cos(k_c y)) \Big|_{y=0} = c_2 = 0. \quad (3.31)$$

$c_1 \neq 0$, mivel $H_z = 0$ esetén a teljes elektromágneses tér zérus lenne, így

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} \Big|_{y=d} = -c_1 k_c \sin(k_c d) = 0 \Leftrightarrow k_c = \frac{m\pi}{d}, m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.32)$$

Most már H_z ismeretében a (3.10) alapján meghatározhatjuk a lehetséges hullámmódusokat, amelyek z irányban haladhatnak a vezetősíkok között:

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0 \\ H_y &= -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{j\beta}{k_c^2} A_m \sin\left(\frac{m\pi}{d}y\right) \\ H_z &= A_m \cos\left(\frac{m\pi}{d}y\right) \\ E_x &= -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} A_m \sin\left(\frac{m\pi}{d}y\right) \\ E_y &= -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0 \\ E_z &= 0, \end{aligned} \quad (3.33)$$

A különböző transzverzális elektromos módusokat TE_m -mel jelöljük, ahol $m = 0, 1, 2, \dots$

Ezután hasonlóképp keressük meg a TM-módusokat ($H_z = 0$, $H_z \neq 0$) is. Azaz oldjuk meg $\phi = E_z$ -re a peremérték-problémát a Dirichlet-feltétel mellett, vagyis

$$E_z(y) = c_1 \cos(k_c y) + c_2 \sin(k_c y) \quad (3.34)$$

$$E_z|_{\Gamma} = 0, \quad (3.35)$$

ami esetünkben azt jelenti, hogy

$$E_z|_{y=0} = E_z|_{y=d} = 0. \quad (3.36)$$

$$\Rightarrow E_z|_{y=0} = c_1 = 0, \quad (3.37)$$

$$\text{és } E_z|_{y=d} = c_2 \sin(k_c d) = 0, c_2 \neq 0 \Leftrightarrow k_c = \frac{m\pi}{d}, m = 1, 2, \dots \quad (3.38)$$

Ezzel a TM-módusok:

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} A_m \cos\left(\frac{m\pi}{d}y\right) \\ H_y &= -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 \\ H_z &= 0 \\ E_x &= -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 \\ E_y &= -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{j\beta}{k_c^2} A_m \cos\left(\frac{m\pi}{d}y\right) \\ E_z &= A_m \sin\left(\frac{m\pi}{d}y\right). \end{aligned} \quad (3.39)$$

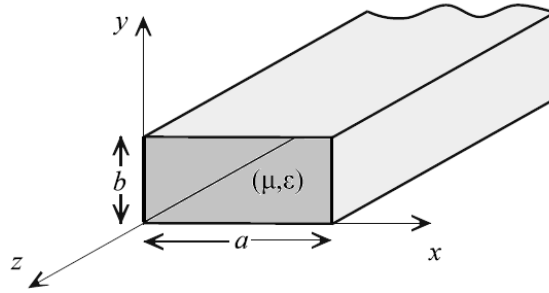
A különböző transzverzális mágneses módusokat TM_m -mel jelöljük, ahol $m = 1, 2, 3, \dots$

3.3.2. A téglalap keresztmetszetű homogén hullámvezető módusainak analitikus meghatározása

Gyakorlati szempontból a legfontosabbak a téglalap keresztmetszetű hullámvezetők. A következőkben a peremértékproblémák megoldásaként ezen hullámvezetőkben terjedő elektromágneseshullám-módusokat fogjuk meghatározni [6].

Vizsgáljuk a 3.3. ábrán látható hullámvezetőt. A kétdimenziós Helmholtz-egyenletet a változók szétválasztásának módszerével oldhatjuk meg. Keressük tehát a

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k_c^2 \phi = 0 \quad (3.40)$$



3.3. ábra. Téglalap keresztmetszetű hullámvezető

egyenlet megoldását $\phi = X(x) \cdot Y(y) \cdot e^{j(\omega t - \beta z)}$ alakban. Behelyettesítés után azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_c^2 = 0. \quad (3.41)$$

Ez ekvivalens a következő egyenletrendszerrel:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 = 0 \quad (3.42)$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 = 0 \quad (3.43)$$

$$k_x^2 + k_y^2 = k_c^2 \quad (3.44)$$

Az általános megoldás X -re, és analóg módon Y -ra:

$$X(x) = c_1 \cos(k_x x) + c_2 \sin(k_x x) \quad (3.45)$$

$$Y(y) = c_3 \cos(k_y y) + c_4 \sin(k_y y), \quad (3.46)$$

amiből következik, hogy a (3.22) általános megoldása

$$\phi(x, y, z, t) = (c_1 \cos(k_x x) + c_2 \sin(k_x x)) (c_3 \cos(k_y y) + c_4 \sin(k_y y)) \cdot e^{j(\omega t - \beta z)}. \quad (3.47)$$

A c_i konstansokat a (3.23) és a (3.24) határfeltételekből határozhatjuk meg.

TE hullámoknál $E_z = 0$ és $\phi = H_z$, és a Helmholtz-egyenlet megoldása:

$$H_z = (c_1 \cos(k_x x) + c_2 \sin(k_x x)) (c_3 \cos(k_y y) + c_4 \sin(k_y y)) \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (3.49)$$

TM hullámoknál $H_z = 0$ és $\phi = E_z$, és a Helmholtz-egyenlet megoldása

$$E_z = (c_5 \cos(k_x x) + c_6 \sin(k_x x)) (c_7 \cos(k_y y) + c_8 \sin(k_y y)) \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (3.50)$$

$$E_z|_T = 0 \quad (3.51)$$

Megmutatható, hogy az általunk választott feltételek mellett a hullámvezetőben nem terjedhet TEM-módus [7].

3.3.2.1. TE módusok

Transzverzális elektromos hullámok esetén ($E_z = 0$, $H_z \neq 0$) alkalmazzuk a (3.49) peremfeltételt a hullámvezető falára.

1. Az $y = 0$ és $y = b$ síkokon $\frac{\partial H_z}{\partial y} = 0$ kell teljesülnön, azaz, hogy H_z -nek ne legyen y irányú gradiense. A (3.48) alapján:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = (c_1 \cos(k_x x) + c_2 \sin(k_x x)) (-c_3 k_y \sin(k_y y) + c_4 k_y \cos(k_y y)) \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} = 0$$

a) Ha $y = 0$ $c_4 k_y \cos(k_y y) = 0$ kell teljesülnön, ezért $c_4 = 0$.

b) Ha $y = b$, akkor $-c_3 k_y \sin(k_y b) = 0$, de most $c_3 \neq 0$, mert akkor $H_z \equiv 0$ lenne. Így

$$k_y \sin(k_y b) = 0 \Leftrightarrow k_y = \frac{n\pi}{b}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.52)$$

2. Az $x = 0$ és $x = a$ síkokon teljesülnie kell, hogy $\frac{\partial H_z}{\partial x} = 0$, azaz

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = (-c_1 k_x \sin(k_x x) + c_2 k_x \cos(k_x x)) (c_3 \cos(\frac{n\pi}{b} y)) \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} = 0$$

a) Ha $x = 0$, akkor $c_2 k_x \cos(k_x x) = 0$ teljesüléséhez szükséges, hogy $c_2 = 0$ legyen.

b) Ha $x = a$, akkor $c_1 \neq 0$ miatt

$$k_x \sin(k_x a) = 0 \Leftrightarrow k_x = \frac{m\pi}{a}, m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.53)$$

Tehát azt kaptuk, hogy transzverzális elektromos hullámok esetében

$$H_z = A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{j(\omega t - \beta z)}, m = 0, 1, 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots, m^2 + n^2 \neq 0. \quad (3.54)$$

Ezután a (3.10) alapján a TE-módusok transzverzális komponenseit is meghatározhatjuk. Így a téglalap keresztmetszetű hullámvezető transzverzális elektromos módusainak

elektromágneses mezőkomponensei:

$$\begin{aligned}
E_x &= \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - \beta z)} \\
E_y &= -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - \beta z)} \\
E_z &= 0 \\
H_x &= \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - \beta z)} \\
H_y &= \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - \beta z)} \\
H_z &= A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - \beta z)} \tag{3.55}
\end{aligned}$$

3.3.2.2. TM módusok

A transzverzális mágneses módusok ($H_z = 0$, $E_z \neq 0$) meghatározása hasonlóképpen történik. Itt E_z -t határozzuk meg a (3.51) határfeltétel mellett.

1. Az $y = 0$, $y = b$ síkokon $E_z = 0$, és $E_y = 0$, azaz az $\mathbf{E}$ -nek ne legyen a falon érintő irányú komponense. A (3.50) alapján:

$$E_z = (c_5 \cos(k_x x) + c_6 \sin(k_x x)) (c_7 \cos(k_y y) + c_8 \sin(k_y y)) \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} = 0 \tag{3.56}$$

$$a) \text{ Ha } y = 0 \Rightarrow c_7 = 0$$

$$b) \text{ Ha } y = b, c_8 \neq 0 \Rightarrow k_y = \frac{n\pi}{b}, n = 1, 2, \dots$$

2. Az $x = 0$, $x = a$ síkokon $E_z = 0$ és $E_x = 0$.

$$a) \text{ } x = 0 \Rightarrow c_5 = 0$$

$$b) \text{ } x = 0, c_6 \neq 0 \Rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a}, m = 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow E_z = A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - \beta z)}, m = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots \tag{3.57}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ekkor E_x -re és E_y -ra is teljesülnek a megfelelő határfeltételek. Tehát a téglalap keresztmetszetű hullámvezető transzverzális mágneses módusainak

elektromágneses mezőkomponensei:

$$\begin{aligned}
E_x &= -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - \beta z)} \\
E_y &= -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - \beta z)} \\
E_z &= A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - \beta z)} \\
H_x &= \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - \beta z)} \\
H_y &= -\frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - \beta z)} \\
H_z &= 0.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

TM módusok esetében, $m = 0$ vagy $n = 0$ esetén a (3.58) alapján láthatjuk, hogy $\mathbf{E} = 0$ és $\mathbf{H} = 0$ megoldásokat kapnánk, ezért $m \neq 0, n \neq 0$.

3.3.2.3. A téglalap keresztmetszetű hullámvezető levágási frekvenciája

Korábban (3.10.) bevezettük a $k_c^2 = \omega^2\mu\varepsilon - \beta^2$ kifejezést, (ahol $\beta = k_z$), majd a 3.40. megoldása során felbontottuk komponensekre ($k_c^2 = k_x^2 + k_y^2$). Tehát

$$\omega^2\mu\varepsilon = \frac{\omega^2}{c^2} = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_x^2 + k_y^2 + \beta^2, \tag{3.59}$$

ahol c a hullám terjedési sebessége, $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ a hullámszámvektor.

Mind TE, mind pedig TM hullámok esetén azt kaptuk, hogy

$$k_c^2 = k^2 - \beta^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2. \tag{3.60}$$

Ha $\beta^2 > 0$, akkor β valós, azaz valóban terjed hullám a végtelen hosszú vezetőkben. Ha $\beta^2 < 0$, akkor β imaginárius, ezért $e^{-j\beta z}$ valós, amely exponenciálisan lecsengő hullámokat ír le. Tehát a hullámterjedés létrejöttének határát a $\beta = 0$ jelenti. Ezzel

$$k_{c,mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \tag{3.61}$$

Az ehhez a hullámszámhoz tartozó levágási frekvencia

$$f_{c,mn} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}, \tag{3.62}$$

ahol a c a vákuumbeli fénysebességet jelöli. TE: $m, n = 0, 1, 2, \dots, m^2 + n^2 \neq 0$, TM: $m, n = 1, 2, \dots$

Tehát $f_{c,mn}$ azt a legalacsonyabb frekvenciát jelenti, amely felett az elektromágneses hullám képes terjedni az üreges hullámvezetőben [7].

Például vegyünk egy hullámvezetőt $a = 4$ cm, $b = 2$ cm paraméterekkel. Ekkor $f_{c,10} = 3,75$ GHz, $f_{c,20} = f_{c,01} = 7,5$ GHz, $f_{c,11} = 8,39$ GHz, stb. Láthatjuk, hogy a $3,75 - 7,5$ GHz frekvenciatartományban csupán a TE_{10} módus képes terjedni, függetlenül attól, hogy hogyan keltettük az elektromágneses hullámot, ezért ez a frekvenciatartomány alkalmazások szempontjából igen kedvelt (single mode operation).

3.4. A hullámegyenletek megoldása inhomogén hullámvezetőben

Számos alkalmazás esetében a hullámvezetőket részben vagy inhomogén módon dielektrikummal töltik fel. Ebben az esetben tiszta TE és TM módusok nem léteznek, éppen a kitöltő közeg inhomogenitásának köszönhetően. Eredményképp mind az E_z , mind pedig a H_z komponens, melyek meghatározása ekkor is elegendő a többi mezőkomponens megadásához, szimultán jelen van, tehát hibrid módusok jelennek meg a hullámvezetőben [1]. Ebben a dolgozatban továbbra is longitudinálisan változatlan struktúrákkal foglalkozunk.

Inhomogén hullámvezetők esetében is élhetünk korábbi feltételezésünkkel, miszerint

$$E_z(x, y, z) = E_z(x, y)e^{j(\omega t - \beta z)}$$

$$H_z(x, y, z) = H_z(x, y)e^{j(\omega t - \beta z)}$$

alakúak, és a hullámvezető határán teljesítik a tökéletes vezetőre vonatkozó peremfeltételeket. A közeg tehát ebben az esetben inhomogén, izotrop, tehát $\mathbf{E}$ a (2.6.), míg $\mathbf{H}$ a (2.7.) egyenletet elégíti ki. Forrásmentes esetet vizsgálunk, azaz $\mathbf{J} = 0$. Ezzel a (2.6.), a (2.7.) egyenletek a következő alakra egyszerűsödnek:

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) - \omega^2 \varepsilon \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (3.63)$$

$$\nabla \times (\varepsilon^{-1} \nabla \times \mathbf{H}) - \omega^2 \mu \mathbf{H} = \mathbf{0} \quad (3.64)$$

Tekintsük a (3.63.) vektoregyenlet z komponensét, figyelembe véve a z szerinti deriválásnál a korábbi észrevételeket!

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) - jk_z \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} E_x \right) - jk_z \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} E_y \right) - \omega^2 \varepsilon E_z = 0. \quad (3.65)$$

Láttuk a (3.10.)-ben, hogy E_x és E_z a következőképpen fejezhető ki ($\beta = k_z$):

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{j}{k_c^2} \left(k_z \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \\ E_y &= -\frac{j}{k_c^2} \left(k_z \frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (3.66)$$

Behelyettesítés után kapjuk:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) - k_z^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) - k_z \omega \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \\ - k_z^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) + k_z \omega \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) - \omega^2 \varepsilon E_z = 0. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Az egyenletet elosztva ω^2 -tel, és kihasználva, hogy $\omega \mu \varepsilon = k_c^2 + k_z^2$, majd elvégezve a lehetséges összevonásokat az egyenlet a következő alakot veszi fel:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{k_z}{\omega k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{k_z}{\omega k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) - \varepsilon E_z = 0. \quad (3.68)$$

Hasonlóan járjunk el a (3.64.) egyenlet z komponensének átalakításakor! Tekintsük az eredeti egyenletet:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) - j k_z \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\varepsilon} H_x \right) - j k_z \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\varepsilon} H_y \right) - \omega^2 \mu H_z = 0. \quad (3.69)$$

Ezúttal H_x és H_y helyébe helyettesítsük be a következőket:

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{j}{k_c^2} \left(\omega \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \\ H_y &= -\frac{j}{k_c^2} \left(\omega \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \beta \frac{\partial H_z}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

A fentiekhez hasonló átalakítások után kapott egyenlet:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{k_z}{\omega k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{k_z}{\omega k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) - \mu H_z = 0. \quad (3.70)$$

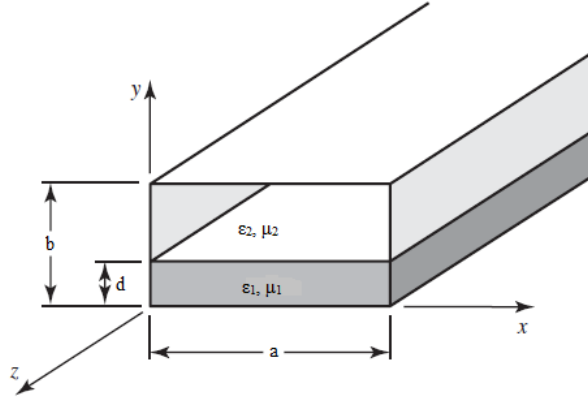
Az eljárás során a (3.68.) és a (3.70.) egyenletekből álló parciális differenciálegyenlet-rendszerhez jutottunk, melyek a megfelelő peremfeltétel melletti megoldása révén meghatározhatjuk az E_z és H_z komponenseket, így közvetve a teljes elektromágneses mezőt.

Azt is beláthatjuk, hogy ha ε , μ , k_c nem lenne a hely függvénye, akkor a csatolást jelentő tagok mindkét egyenletből kiesnének, így visszakapnánk a homogén hullámveztőre nyert homogén Helmholtz-típusú egyenleteket a mezőkomponensekre.

A fenti egyenletrendszernek általánosan nincsen analitikus megoldása, csak néhány speciális esetben. Ilyen például a dielektrikummal félig kitöltött hullámvezető esete.

3.4.1. A téglalap keresztmetszetű transzverzálisan inhomogén hullámvezető módusainak analitikus meghatározása

Egy speciális esetben oldjuk meg az előzőekben felírt differenciálegyenlet-rendszert. Tekintsünk egy transzverzálisan inhomogén hullámvezetőt, azaz egy olyan elrendezést, amelyben a tökéletes vezető kétféle homogén, izotrop dielektrikummal van kitöltve, inhomogenitást az y tengely mentén tartalmaz, ahogyan a 3.4. ábrán látható [9, 10].



3.4. ábra. Transzverzálisan inhomogén, kétféle dielektrikummal kitöltött hullámvezető

A vezető belsejében, azaz ha $(x, y) \in \Omega = (0, a) \times (0, d)$ az elektromágneses mező E_z és H_z komponensei kielégítik a

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{k_z}{\omega k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{k_z}{\omega k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) - \varepsilon E_z &= 0. \\ -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{k_z}{\omega k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{k_z}{\omega k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) - \mu H_z &= 0 \end{aligned} \quad (3.71)$$

differenciálegyenlet-rendszert. Mivel ezek a két dielektrikum határfelületére nézve tangenciális komponensei $\mathbf{E}$ és $\mathbf{H}$ mezőnek, ezért határfelületen folytonosnak kell lenniük. A kétféle dielektrikumról, amely a hullámvezetőt kitölti, tudjuk, hogy x tengely mentén homogének, ezért $k_c^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - k_z^2$ szintén nem függ x -től. Célszerű külön tekinteni az egyenletrendszert a $\Omega_1 = (0, d) \times (0, a)$ és $\Omega_2 = (d, b) \times (0, a)$ tartományokon ($\Omega =$

$= \Omega_1 \cup \Omega_2$). Így az egyenletrendszer, ha $(x, y) \in \Omega_i$, $(i = 1, 2)$:

$$-\frac{\varepsilon_i}{k_{c,i}^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{k_z}{\omega k_{c,i}^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial y} - \frac{\varepsilon_i}{k_{c,i}^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{k_z}{\omega k_{c,i}^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial y} - \varepsilon_i E_z = 0 \quad (3.72)$$

$$-\frac{\mu_i}{k_{c,i}^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{k_z}{\omega k_{c,i}^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial y} - \frac{\mu_i}{k_{c,i}^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} - \frac{k_z}{\omega k_{c,i}^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial y} - \mu_i H_z = 0 \quad (3.73)$$

$$(x, y) \in \Omega_i, (i = 1, 2)$$

Egyszerűsítések és bővítések után kapjuk, hogy E_z és H_z egy-egy homogén Helmholtz-egyenletet elégít ki az egyes tartományokon:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_{c,i}^2 E_z = 0, \quad (3.74)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k_{c,i}^2 H_z = 0, \quad (3.75)$$

$$(x, y) \in \Omega_i, (i = 1, 2)$$

azaz kétféle dielektrikummal töltött waveguide (nem meglepő módon) úgy kezelhető, mint két összeillesztett homogén hullámvezető, amelyek közös határfelületén előírjuk a folytonosságot E_z -re és H_z -ra. A homogén hullámvezető esetén láttuk, hogy a homogén Helmholtz-egyenlet általános megoldása:

$$\phi(x, y, z, t) = (c_1 \cos(k_x x) + c_2 \sin(k_x x)) (c_3 \cos(k_y y) + c_4 \sin(k_y y)) \cdot e^{j(\omega t - \beta z)}, \quad (3.76)$$

ahol $k_x^2 + k_y^2 = k_c^2$, és a c_i , $i = 1 \dots 4$ konstansokat a tökéletes vezetőre vonatkozó peremfeltételekből határozhatjuk meg.

3.4.1.1. Hibrid módusok

Mivel $E_z = 0$ az Ω tartomány határán, ezért a homogén Dirichlet-peremfeltétel mellett oldjuk meg a 3.74 peremérték-problémát. Tudjuk, hogy k_c ezúttal a hely függvénye:

$$k_c^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - \beta^2 = \begin{cases} k_{c,1}^2 = \omega^2 \mu_1 \varepsilon_1 - \beta^2, & \text{ha } 0 \leq y \leq d \\ k_{c,2}^2 = \omega^2 \mu_2 \varepsilon_2 - \beta^2, & \text{ha } d \leq y \leq b. \end{cases}$$

Ezúttal is válasszuk szét a változókat, azaz keressük a megoldást

$$E_z = X_E(x) \cdot Y_E(y) \cdot e^{j(\omega t - \beta z)}$$

alakban! A k_c függvényt szétválasztjuk a szokásos módon $k_{c,i}^2 = k_{x,i}^2 + k_{y,i}^2$, $i = 1, 2$ alakban úgy, hogy k_x konstans, azaz ($k_{x,1} = k_{x,2} = k_x$). (Ezt az indokolja, hogy a hul-

lámvezető x mentén homogén.) Ekkor a következő egyenletrendszer áll elő:

$$\frac{1}{X_E} \frac{d^2 X_E}{dx^2} + k_x^2 = 0, \quad x \in (0, a) \quad (3.77)$$

$$\frac{1}{Y_E} \frac{d^2 Y_E}{dy^2} + k_{y,1}^2 = 0, \quad x \in (0, d) \quad (3.78)$$

$$\frac{1}{Y_E} \frac{d^2 Y_E}{dy^2} + k_{y,2}^2 = 0, \quad x \in (d, b) \quad (3.79)$$

$$k_x^2 + k_y^2 = k_c^2 \quad (3.80)$$

Ezek már konstans együtthatós, másodrendű differenciálegyenletek, amelyeket a már látott módon lehet megoldani a megfelelő peremfeltételek mellett. Az egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy

$$E_z = \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot Y_E(y) \cdot e^{j(\omega t - \beta z)},$$

ahol $m = 0, 1, 2, \dots$, és X_E konstans együtthatóját beolvasztottuk Y_E -be:

$$Y_E(y) = \begin{cases} A_1 \cdot \sin(k_{y,1}y) + B_1 \cos(k_{y,1}y), & \text{ha } 0 \leq y \leq d \\ A_2 \cdot \sin(k_{y,2}y) + B_2 \cos(k_{y,2}y), & \text{ha } d \leq y \leq b, \end{cases}$$

ahol A_1, A_2, B_1, B_2 konstansokat a már ismert peremfeltételekből határozhatjuk meg. Az E_z komponens zérus a hullámvezető felső és alsó határoló síklapján,

$$1. \quad y = 0 \Rightarrow B_1 = 0$$

$$2. \quad y = b \Rightarrow A_2 \sin(k_{y,2}b) + B_2 \cos(k_{y,2}b) \Leftrightarrow B_2 = -A_2 \frac{\sin(k_{y,2}b)}{\cos(k_{y,2}b)}$$

Az $Y_E(y)$ kifejezésében ($d \leq y \leq b$) közös nevezőre hozunk, és felhasználjuk, hogy minden valós α, β esetén $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$. Így kapjuk, hogy

$$Y_E(y) = \begin{cases} A_1 \cdot \sin(k_{y,1}y), & \text{ha } 0 \leq y \leq d \\ -\frac{A_2}{\cos(k_{y,2}b)} \cdot \sin(k_{y,2}(b - y)), & \text{ha } d \leq y \leq b. \end{cases}$$

Ezután vegyük figyelembe, hogy a két dielektrikum közötti határfelületen E_z és így $Y_E(y)$ folytonos, azaz $k_{y,1}$ -re és $k_{y,2}$ -re teljesülni kell a következő feltételnek:

$$A_1 \cdot \sin(k_{y,1}d) = -\frac{A_2}{\cos(k_{y,2}b)} \cdot \sin(k_{y,2}(b - d)). \quad (3.81)$$

Tekintsük a (3.75.) differenciálegyenletet! A hullámvezető falával párhuzamos $\mathbf{E}$ komponenseknek el kell tűnni Ω határán:

1. ha $y = 0$ vagy $y = b$, akkor E_x és E_z zérus, amiből következik, mivel ω és μ állandó ezen a síkon, $\frac{\partial H_z}{\partial y} = 0$.
2. ha $x = 0$ vagy $x = a$, akkor E_y és E_z zérus, és mivel feltehető, hogy $\frac{\omega\mu}{k_c^2}$ sehol sem zérus, ezért $\frac{\partial H_z}{\partial x} = 0$.

Keressük tehát a 3.74. és 3.75. egyenletekből álló rendszer megoldását $X_H(x) \cdot Y_H(y) \cdot e^{j(\omega t - \beta z)}$ alakban! Oldjuk meg az egyenletrendszert, és tekintsük a 2. peremfeltételt! Így azt kapjuk, hogy

$$H_z = \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) Y_H(y) e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (3.82)$$

$m = 0, 1, 2, \dots$, és X_H konstans együtthatóját beolvasztottuk Y_H -ba:

$$Y_H(y) = \begin{cases} A_3 \cdot \sin(k_{y,1}y) + B_3 \cos(k_{y,1}y), & \text{ha } 0 \leq y \leq d \\ A_4 \cdot \sin(k_{y,2}y) + B_4 \cos(k_{y,2}y), & \text{ha } d \leq y \leq b, \end{cases}$$

ahol A_3, A_4, B_3, B_4 konstansokat a peremfeltételekből határozhatjuk meg:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) Y_H'(y) e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (3.83)$$

$$Y_H'(y) = \begin{cases} A_3 k_{y,1} \cos(k_{y,1}y) - B_3 k_{y,1} \sin(k_{y,1}y), & \text{ha } 0 \leq y \leq d \\ A_4 k_{y,2} \cos(k_{y,2}y) - B_4 k_{y,2} \sin(k_{y,2}y), & \text{ha } d \leq y \leq b. \end{cases}$$

Alkalmazzuk most az 1. feltételünket a hullámvezető vízszintes határoló síklapjaira:

1. $y = 0 \Rightarrow A_3 = 0$
2. $y = b \Rightarrow A_4 k_{y,2} \cos(k_{y,2}b) - B_4 k_{y,2} \sin(k_{y,2}b) = 0 \Leftrightarrow A_4 = B_4 \frac{\sin(k_{y,2}b)}{\cos(k_{y,2}b)}$

Az $Y_H(y)$ kifejezésében ($d \leq y \leq b$) most is közös nevezőre hozunk, és felhasználjuk, hogy minden valós α, β esetén $\cos(\alpha - \beta) = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta$. Így

$$Y_H(y) = \begin{cases} B_3 \cdot \cos(k_{y,1}y), & \text{ha } 0 \leq y \leq d \\ \frac{B_4}{\cos(k_{y,2}b)} \cdot \cos(k_{y,2}(b - y)), & \text{ha } d \leq y \leq b. \end{cases}$$

Alkalmazzuk most H_z -re a folytonossági kritériumot ($y = d$)! Ekkor $k_{y,1}$ -re és $k_{y,2}$ -re teljesülni kell a következő feltételnek:

$$B_3 \cdot \cos(k_{y,1}d) = \frac{B_4}{\cos(k_{y,2}b)} \cdot \cos(k_{y,2}(b-d)) \quad (3.84)$$

A homogén hullámvezető esetén láttuk, hogy csak TE- és TM-polarizált EM-hullám terjedhet a hullámvezető belsejében. Felmerül a kérdés, hogy igaz-e ez ebben az esetben is. Keressük az inhomogén hullámvezető TE-polarizált saját módusait! ($E_z = 0$, $H_z \neq 0$) Ekkor a mezőkomponensek a 3.10. szerint:

$$\begin{aligned} H_x &= -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) Y_H(y) e^{j(\omega t - \beta z)} \\ H_y &= -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = -\frac{j\beta}{k_c^2} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) Y'_H(y) e^{j(\omega t - \beta z)} \\ H_z &= \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) Y_H(y) e^{j(\omega t - \beta z)} \\ E_x &= -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) Y'_H(y) e^{j(\omega t - \beta z)} \\ E_y &= \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) Y_H(y) e^{j(\omega t - \beta z)} \\ E_z &= 0. \end{aligned} \quad (3.85)$$

A H_x komponensnek folytonosnak kell lenni a dielektrikum határfelületén. Az $Y_H(y)$ függvény folytonosságát már garantáltuk d -ben, ezért H_z csak úgy lehet folytonos, ha

$$\frac{m}{k_{y,1}^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) = \frac{m}{k_{y,2}^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \Leftrightarrow m = 0,$$

hiszen k_y különböző a kétféle dielektrikumban. Tehát az $m = 0$ esetet leszámítva nem létezik TE-polarizált saját hullám az inhomogén hullámvezetőben.

Hasonlóképpen megmutatjuk, hogy TM-polarizált EM-hullám sem létezik az inhomogén hullámvezetőben. Legyen tehát $H_z = 0$, $E_z \neq 0$! Az elektromágneses mező

komponensei:

$$\begin{aligned}
H_x &= \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot Y'_E(y) \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} \\
H_y &= -\frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot Y_E(y) \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} \\
H_z &= 0 \\
E_x &= -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot Y_E(y) \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} \\
E_y &= -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{j\beta}{k_c^2} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot Y'_E(y) \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} \\
E_z &= \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot Y_E(y) \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} \tag{3.86}
\end{aligned}$$

Az E_y komponens folytonosságát elő kell írunk $y = d$ -ben. Mivel $Y_E(y)$ folytonosságát már biztosítottuk, ez akkor és csak akkor lehetséges, ha $m = 0$, ami azonban magával vonná, hogy $E_z \equiv 0$, és így a teljes EM-tér zérus lenne. Tehát TM-polarizált saját hullám valóban nem terjedhet a tekintett inhomogén hullámvezetőben.

Beláttuk, hogy tiszta transzverzális módusok (TE $m = 0$ esetet kivéve) nem terjedhetnek az inhomogén hullámvezetőben, ezért csak hibrid, azaz TEM módusok lesznek a megoldásaink. Az A_1 , A_2 , B_3 , B_4 együtthatókra vonatkozó feltételek a folytonossági feltételekből következnek.

$$\begin{aligned}
H_x &= \frac{j}{k_c^2} \left(\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) = \\
&= \frac{j}{k_c^2} \left(\omega\varepsilon \cdot Y'_E(y) - \beta \frac{m\pi}{a} Y_H(y) \right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) e^{j(\omega t - \beta z)}, \tag{3.87}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_x &= -\frac{j}{k_c^2} \left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) = \\
&= -\frac{j}{k_c^2} \left(\beta \frac{m\pi}{a} \cdot Y_E(y) + \omega\mu Y'_H(y) \right) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) e^{j(\omega t - \beta z)}, \tag{3.88}
\end{aligned}$$

továbbá E_z és H_z legyen folytonos a két közeg határfelületén ($y = d$)! Elvégezve a megfelelő összevonásokat, kapjuk, hogy teljesülnie kell az alábbi összefüggéseknek:

$$\frac{\omega\varepsilon_1 A_1 k_{y,1} - \beta \frac{m\pi}{a} B_3}{k_{y,1}^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} \cos(k_{y,1}d) = \frac{\omega\varepsilon_2 A_2 k_{y,2} - \beta \frac{m\pi}{a} B_4}{k_{y,2}^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} \cdot \frac{\cos(k_{y,2}(b-d))}{\cos(k_{y,2}b)}. \tag{3.89}$$

$$\frac{\beta \frac{m\pi}{a} \cdot A_1 - \omega \mu_1 B_3 k_{y,1}}{k_{y,1}^2 + (\frac{m\pi}{a})^2} \sin(k_{y,1}d) = \frac{-\beta \frac{m\pi}{a} A_2 + \omega \mu_2 B_4 k_{y,2}}{k_{y,2}^2 + (\frac{m\pi}{a})^2} \cdot \frac{\sin(k_{y,2}(b-d))}{\cos(k_{y,2}b)} \quad (3.90)$$

$$A_1 \cdot \sin(k_{y,1}d) = -A_2 \frac{\sin(k_{y,2}(b-d))}{\cos(k_{y,2}b)} \quad (3.91)$$

$$B_3 \cdot \cos(k_{y,1}d) = B_4 \frac{\cos(k_{y,2}(b-d))}{\cos(k_{y,2}b)} \quad (3.92)$$

Így egy homogén lineáris egyenletrendszerhez jutottunk, amelynek a triviálisától ($A_1 = A_2 = B_3 = B_4 = 0$) különböző megoldását keressük. Ahhoz, hogy ilyen létezzen, az egyenletrendszer determinánsa el kell tűnjön.

Ha kifejtjük a determinánst, és elhagyjuk a triviális megoldásokat, két transzcendens egyenlethez juthatunk:

$$\frac{k_{y,1}}{\mu_1} \cot(k_{y,1}d) = -\frac{k_{y,2}}{\mu_2} \cot(k_{y,2}(b-d)) \quad (3.93)$$

$$\frac{k_{y,1}}{\varepsilon_1} \tan(k_{y,1}d) = -\frac{k_{y,2}}{\varepsilon_2} \tan(k_{y,2}(b-d)) \quad (3.94)$$

A peremérték-probléma megoldásai tehát olyan hullámok lesznek, amelyeknek a hullám-számvektor komponensei kielégítik az

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + k_{y,i}^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu_i \varepsilon_i, \quad (i = 1, 2) \quad (3.95)$$

egyenletekből, valamint a 3.93. és a 3.94. egyenletek egyikéből álló egyenletrendszert. A két egyenletet különböző megoldások elégítik ki, így különböző hullámok tartoznak hozzájuk. Az első egyenlet kielégítő megoldások esetén $E_y = 0$, vagyis hiányzik az egyik transzverzális elektromos mezőkomponens. Ezeket a hullámokat a szakirodalom LSE^y (longitudinal-section electric) módusoknak nevezi. A 3.94. egyenletet kielégítő hullám-számhoz tartozó sajátmegoldások az ún. LSM^y (longitudinal-section magnetic) módusok, amelyeknél a hiányzó mezőkomponens a H_y .

3.5. A Galerkin-módszer

Természetes igény, hogy amennyiben lehetséges, analitikusan oldjuk meg az összes elektrodinamikai problémát. Azonban a Maxwell-egyenletek analitikus megoldását mindössze néhány speciális problémára ismerjük.

Éppen ezért szükséges egy olyan numerikus módszer kiválasztása, amely nagy pontossággal közelíti meg a peremérték-probléma megoldását. A végeselemek módszere, a FEM (Finite Element Method) egy numerikus technika, melyet többek között a matema-

tikai fizika számos magasabb dimenziós peremérték-problémájának megoldására alkalmazhatunk. Többféle eljárás ismert, ezek közül dolgozatomban a klasszikus Galerkin-módszert alkalmazom.

Mivel a FEM itt csupán egy eszköz számunkra, ezért nem törekszünk teoretikus precizításra, sokkal inkább arra, hogy eredményeink könnyen implementálhatóak legyenek, valamint hogy számítógéppel is könnyen kezelhető módszert dolgozzunk ki.

Egy numerikus módszer felépítésénél igen fontos, hogy először olyan modellproblémát oldjunk meg, ahol összehasonlíthatjuk a numerikus közelítést az analitikus megoldással. Az előző fejezetben tárgyalt hullámvezetőkre felállított három peremérték-probléma esetén ismerjük az analitikus megoldást. Így az egy és két dimenziós parciális differenciálegyenletekre általánosan felépített módszert (D Függelék) ezekre a konkrét modellproblémákra fogjuk alkalmazni, így a továbbiakban a módszer pontosságának vizsgálatára is lehetőség nyílik [1, 4].

A Galerkin-módszer egyike az úgynevezett súlyozott reziduális módszereknek.

Tekintsük a következő differenciálegyenletet az Ω tartományon:

$$\mathfrak{L}\phi = f, \quad (3.96)$$

ahol $\mathfrak{L}$ egy differenciáloperátor, f a forrás- vagy gerjesztés függvénye, és ϕ az ismeretlen függvény. Tegyük fel, hogy $\tilde{\phi}$ egy közelítő megoldása a (3.96)-nek. Ha behelyettesítünk ϕ helyére, akkor ez egy nem nulla reziduális eredményez:

$$r = \mathfrak{L}\tilde{\phi} - f \neq 0. \quad (3.97)$$

Nyilvánvaló módon ahhoz, hogy a legjobb közelítést adjuk ϕ -re, minimalizálni kell r -et az Ω tartomány minden pontján. A súlyozott reziduális módszerek a következőképpen járnak el: választunk egy függvényhalmazt, melynek w_i elemeivel mint súlyfüggvényekkel besorozzuk az r reziduális, majd integráljuk az Ω tartományon, és előírjuk, hogy az így kapott ún. reziduális integrál (R_i) eltűnjön (Galerkin-értelemben minimalizáljuk):

$$R_i = \int_{\Omega} w_i r d\Omega = 0. \quad (3.98)$$

A különböző FEM módszerek abban térnek el, hogy más és másféleképpen választják meg a w_i súlyfüggvényeket.

A Galerkin-módszer lényege, hogy a w_i függvényeket ugyanabból a véges dimenziós bázisból választja meg, mint amelyben a közelítő megoldást írja fel. Tegyük fel, hogy az egzakt megoldás, $\phi \in V$, ahol V egy végtelen dimenziós vektortér. A közelítő megoldás

pedig előáll $\tilde{\phi} = \sum_{i=1}^N \phi_i v_i$ alakban, ahol v_i a véges dimenziós V_h vektortér báziseleme ($V_h \subset V$). A Galerkin-módszernél tehát a választás: $v_i = w_i$, ($i = 1, 2, 3, \dots, N$). Ez egy mátrixegyenlethez vezet, melynek megoldásával meghatározzuk a ϕ_i együtthatókat, és így a $\tilde{\phi}$ közelítő megoldást.

Egy peremérték-probléma végelemek módszerével történő analízise mindig a következő lépésekből áll:

1. A tartomány diszkretizálása
2. A megfelelő bázis kiválasztása az interpolációhoz
3. A megfelelő egyenletrendszer (mátrixegyenlet) felállítása.
4. Az egyenletrendszer megoldása.

A D függelékben részletesen tárgyalom, hogy hogyan épül fel a végelemek módszere egy-, és kétdimenzióban. A továbbiakban konkrét modellproblémára, az elektromágneses hullámvezetőkre fogjuk implementálni az ott bemutatott módszert. Az egy- és kétdimenziós esetre is a MATLAB-ban írtam programot, ezekkel oldottam meg a mátrixegyenleteket.

3.5.1. Párhuzamos vezetősíkokból álló homogén hullámvezetőben terjedő elektromágneses módusok numerikus megoldása

Oldjuk most meg a (3.25) egyenletet numerikusan is, a végelemek módszerének segítségével, a 3.2. fejezetben látott módon. A homogén Helmholtz-egyenlet a (D.1) egyenlet speciális esete, amikor $\hat{\alpha} = 1$, $\hat{\beta} = -k_c^2$ és $f = 0$.

Oldjuk meg tehát a

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k_c^2 \phi = 0 \quad (3.99)$$

differenciálegyenletet a $(0,1)$ intervallumon elsőként a homogén Neumann-típusú peremfeltétel mellett, azaz legyen

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{(y=0)} = 0, \quad (3.100)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{(y=1)} = 0. \quad (3.101)$$

A Galerkin-módszer a közelítő megoldásra a

$$[K]\{\tilde{\phi}\} = \{b\} + \{g\}. \quad (3.102)$$

mátrixegyenlethez vezet.

Mivel $f = 0$, ezért $\{b\} = \{0\}$. Alkalmazva a homogén Neumann-feltételt, a $\{g\}$ vektorra azt kapjuk, hogy $g_1 = 0$, és $g_{M+1} = 0$, így $\{g\} = \{0\}$. Ezért

$$[K]\{\tilde{\phi}\} = \{0\}, \quad (3.103)$$

ahol $[K]$ a globális mátrix, melyet az elemi $[K^e]$ mátrixokból állítottunk össze (Lásd a D.1. szakaszban). A $[K^e]$ elemei:

$$\begin{aligned} K_{11}^e &= K_{22}^e = \frac{1}{l^e} - k_c^2 \frac{l^e}{3} \\ K_{12}^e &= K_{21}^e = -\frac{1}{l^e} - k_c^2 \frac{l^e}{6}. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Bontsuk két részre az elemi mátrixokat a következőképp:

$$K_{ij}^e = A_{ij}^e - k_c^2 B_{ij}^e, \quad i, j = 1, 2 \quad (3.105)$$

ahol

$$A_{ij}^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} \frac{dN_i^e}{dx} \frac{dN_j^e}{dx} dx, \quad \text{és} \quad B_{ij}^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} N_i^e N_j^e dx. \quad (3.106)$$

$$\begin{aligned} A_{11}^e &= A_{22}^e = \frac{1}{l^e} \\ A_{12}^e &= A_{21}^e = -\frac{1}{l^e} \\ B_{11}^e &= B_{22}^e = \frac{l^e}{3} \\ B_{12}^e &= B_{21}^e = \frac{l^e}{6}. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Így a (3.103) egyenlet átírható az

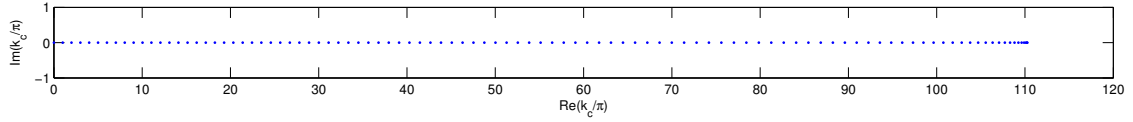
$$[A]\{\tilde{\phi}\} = k_c^2 [B]\{\tilde{\phi}\} \quad (3.108)$$

egyenletté, ami egy általánosított sajátérték-probléma. Vegyük észre, hogy $[A]$ és $[B]$ valós, szimmetrikus mátrixok, és $[B]$ ezenkívül pozitív definit, ezért a (3.108) egyenlet megoldható. Számos standard algoritmus létezik, mellyel ez a probléma megoldható (pl. a Cholesky-módszer),

Jelen dolgozatban a MATLAB programban definiáljuk az $[A]$ és $[B]$ mátrixokat, majd a beépített `eig(A, B)` parancs segítségével megoldjuk a sajátérték-egyenletet [4].

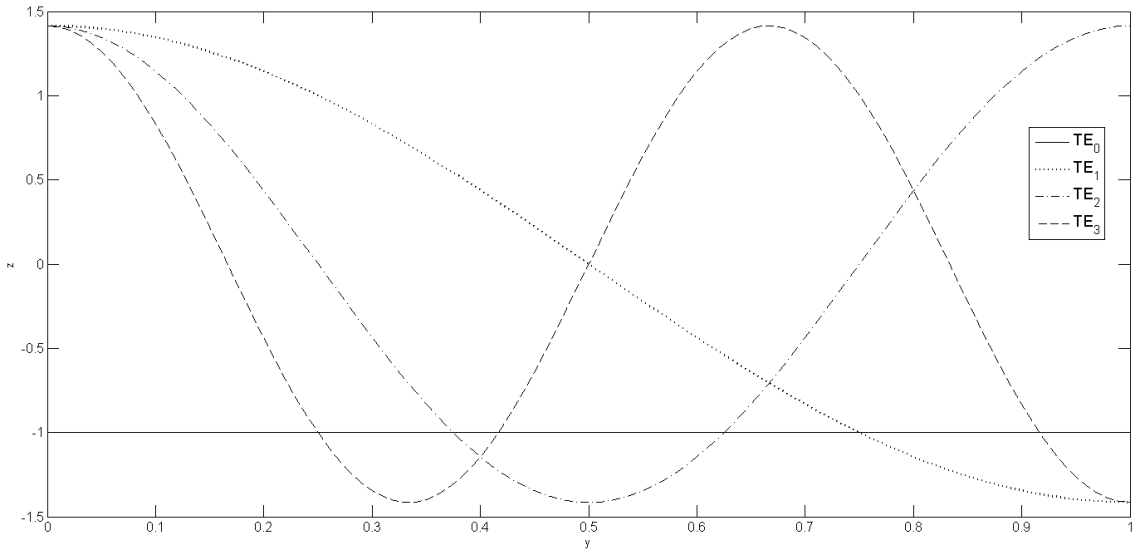
Az analitikus megoldás szerint azt vártuk, hogy $k_c = m\pi$, ahol $m = 0, 1, 2, \dots$. A mát-

rixegyenletünknek $M + 1$ sajátértéke van, míg a valóságban a hullámvezetőben végtelen sok módus terjedhet. A numerikus eredmény az első 10 sajátértéket jó közelítéssel igazolja. A 3.5. ábrán látható, hogy a numerikus megoldás is megközelítőleg az egész értékeket szolgáltatja.



3.5. ábra. A $\frac{k_c}{\pi}$ értékek numerikusan

A sajátvektorok valóban az analitikus megoldásnál látott TE módus H_z komponenseinek koszinuszgörbéit szolgáltatják igen jó közelítéssel (3.6. ábra).



3.6. ábra. Az első négy TE módus H_z komponense

Ezek után vizsgáljuk a TM esetet, azaz alkalmazzuk most a homogén Dirichlet-féle perem feltételt a $(0, d)$ intervallum végpontjaiban. Ez egyrészt a $\{g\}$ eltűnéséhez vezet, másrészt alkalmazzuk $[K]$ mátrixra a (D.47) pontban leírt módszert mindkét végpontra, így a következőképpen módosul a globális mátrix:

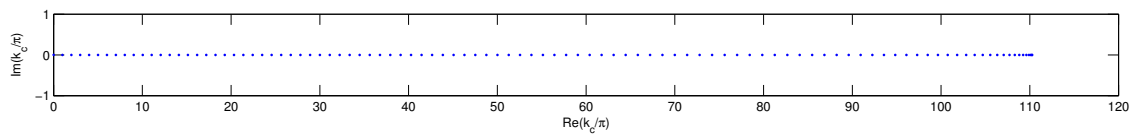
$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \cdots & K_{1,M+1} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \cdots & K_{3,M+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{M1} & K_{M2} & K_{M3} & \cdots & K_{MM+1} \\ K_{M+1,1} & K_{M+1,2} & K_{M+1,3} & \cdots & K_{M+1,M+1} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & K_{M2} & K_{M3} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.109)$$

Mivel a végpontokban ϕ_1 és ϕ_{M+1} meghatározott, ezért az első és utolsó sort elhagyhatjuk, így elegendő egy $(M-1) \times (M-1)$ -es mátrixszal felírni a mátrixegyenletet:

$$\begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} & \cdots & K_{2M} \\ K_{32} & K_{33} & \cdots & K_{3M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{M2} & K_{M3} & \cdots & K_{MM} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.110)$$

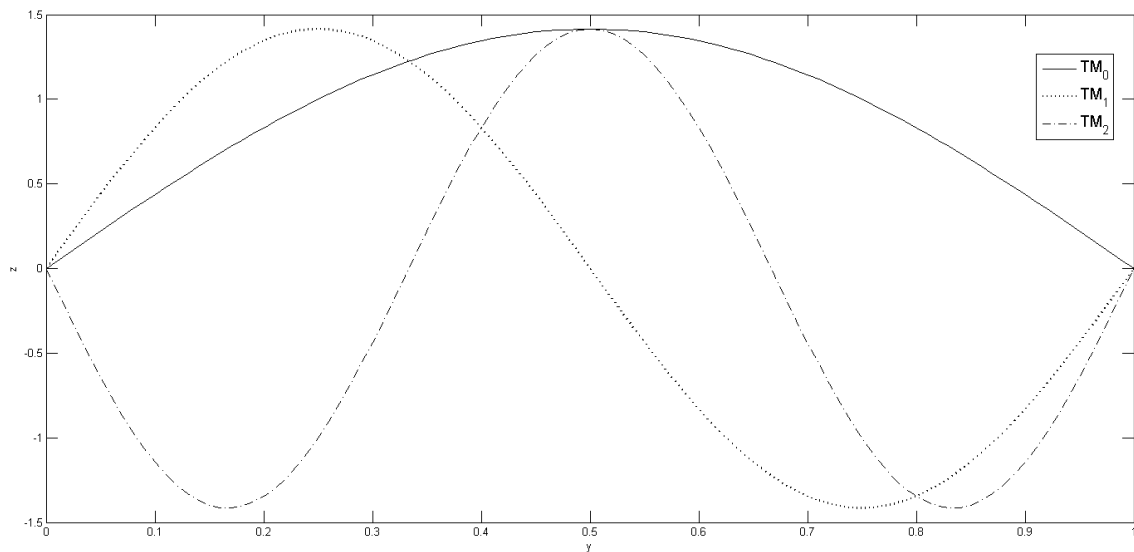
Ennek megfelelően módosítjuk az $[A]$ és $[B]$ mátrixot, majd ismét megkeressük az általánosított sajátérték-probléma sajátértékeit és sajátvektorait.

A numerikus analízis k_c értékeire jó közelítéssel adja π egész számú többszöröseit.



3.7. ábra. A $\frac{k_c}{\pi}$ értékek numerikusan

A 3.8 ábrán pedig kirajzolódik az első három TM módus E_z szinuszgörbéje.



3.8. ábra. Az első három TM módus E_z komponense

3.5.2. A téglalap keresztmetszetű homogén hullámvezető módusainak numerikus megoldása

Oldjuk most meg a (3.40) egyenletet a végeselemek módszerével. Hasonlóképpen az egydimenziós esethez, a D.2. fejezetben ismertetett eljárás az $\hat{\alpha}_x = \hat{\alpha}_y = 1, \hat{\beta} = -k_c^2, f = 0$

feltételekkel most is a következő egyenletrendszerhez vezet:

$$[K]\{\phi\} = \{0\}, \quad (3.111)$$

ahol a $[K]$ globális mátrixot a következő elemi mátrixokból állítottuk össze:

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} - k_c^2 N_i^e N_j^e \right) dx dy, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.112)$$

Mivel ez esetben is k_c^2 az ismeretlen, amelyre meg szeretnénk oldani az egyenletrendszert, ezért most is két részre osztjuk az elemi mátrixokat:

$$K_{ij}^e = A_{ij}^e - k_c^2 B_{ij}^e, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.113)$$

ahol

$$A_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \left(\frac{dN_i^e}{dx} \frac{dN_j^e}{dx} + \frac{dN_i^e}{dy} \frac{dN_j^e}{dy} \right) d\Omega = \frac{1}{4\Delta^e} (b_i^e b_j^e + c_i^e c_j^e) \quad (3.114)$$

és

$$B_{ij}^e = \int_{\Omega^e} N_i^e N_j^e d\Omega = \frac{\Delta^e}{12} (1 + \delta_{ij}). \quad (3.115)$$

Ezzel a (3.111) egyenletrendszert most is átírhatjuk a következő alakra:

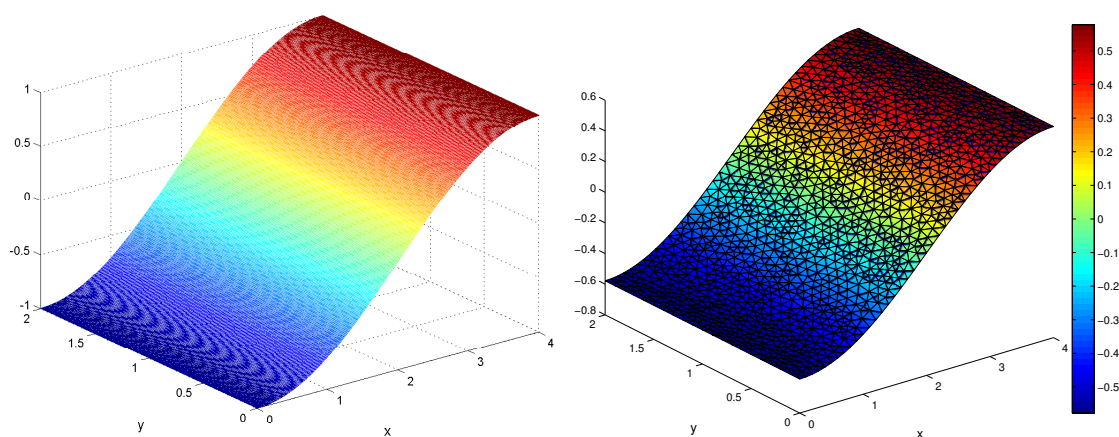
$$[A]\{\tilde{\phi}\} = k_c^2 [B]\{\tilde{\phi}\}, \quad (3.116)$$

amely ismét egy általánosított sajátérték-probléma.

Az egyenletrendszert ebben az esetben is számítógép segítségével oldjuk meg. A MATLAB program beépített PDE toolbox csomagját használtam az automatikus háromszögelés generálására, majd programoztam a FEM-et, és megoldottam a modellproblémát a megfelelő peremfeltételek mellett.

A Dirichlet-peremfeltétel alkalmazása nem egyszerű feladat. Itt ugyanis a határhoz tartozó csúcsokban (legyen a globális számuk i) $\phi_i = 0$. Az ezekhez tartozó sorok és oszlopok elhagyása után a csökkentett dimenziójú mátrixegyenlet megoldása megadja a többi csúcs feletti közelítő értéket. Ezután a közelítő megoldás oszlopvektorába a megfelelő helyekre be kell illeszteni a 0 elemeket.

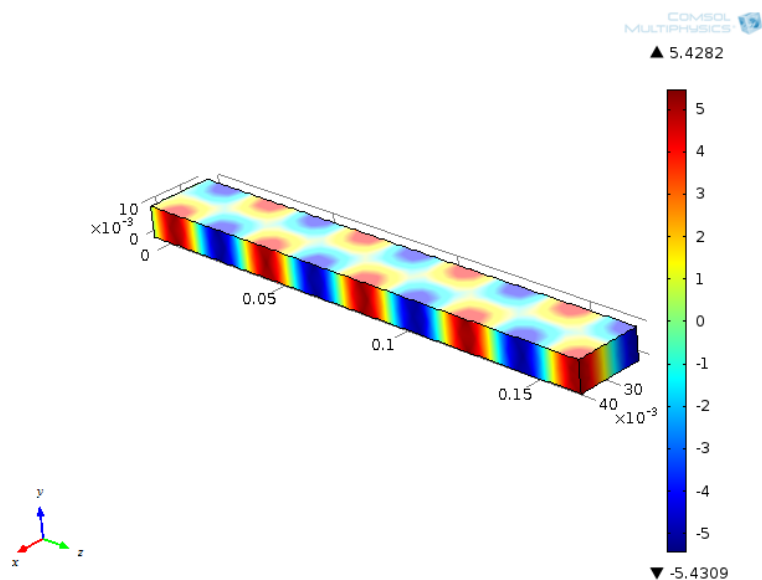
A sajátfüggvényeket tudjuk ábrázolni az xy sík felett, így alkalmunk nyílik, hogy összehasonlítsuk a kapott eredményeinket az analitikus megoldásokkal, melyeket szintén ábrázolhatunk a MATLAB segítségével. Vegyük például a TE_{10} domináns módust. A 3.9. ábra bal oldalán láthatjuk az analitikus, míg a jobb oldalon a numerikus megoldást.



3.9. ábra. A TE_{10} módus $H_z(x, y)$ komponense

Ez a téglalap keresztmetszetű hullámvezető egy adott xy síkkal párhuzamos - szeleténél mutatja H_z nagyságát.

A COMSOL Multiphysics program Boundary Mode Analysis parancsával szintén megkerestük a domináns módust. (Itt három dimenziós modellel dolgoztunk, tetraédes meshsel.) A 3.10. ábrán az elektromágneses mező H_z komponense látható, ahol már hozzákapcsoltuk a harmonikus z -függést.



3.10. ábra. A $\mathbf{H}$ vektor z komponense a téglalap keresztmetszetű hullámvezetőben

3.6. Kétdimenziós differenciálegyenlet-rendszer megoldása a végelemek módszerével

Tekintsük a következő kétdimenziós parciális differenciálegyenlet-rendszert:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\hat{\alpha}_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{\alpha}_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\hat{\alpha}_3 \frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{\alpha}_4 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \hat{\beta}_1 \phi = f_1 \quad (3.117)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\hat{\alpha}_5 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \hat{\alpha}_6 \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\hat{\alpha}_7 \frac{\partial \psi}{\partial y} + \hat{\alpha}_8 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \hat{\beta}_2 \psi = f_2, \quad (3.118)$$

$$(x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$

ahol ϕ és ψ a keresett függvények, $\hat{\alpha}_i$, $\{i = 1, \dots, 8\}$ ismert függvényei (x, y) -nak, amelyek a tartomány fizikai tulajdonságaival állnak kapcsolatban, míg $\hat{\beta}_1$ és $\hat{\beta}_2$ ismert paraméterek, f pedig a forrás mint (x, y) függvénye.

Erre az esetre kell módosítsuk az előző szakaszban megismert kétdimenziós végelem-analízist.

A tartományt diszkretizáljuk ($\Omega = \bigcup_e \Omega^e$), és ezúttal is a már megismert lineáris interpolációt hajtjuk végre. Az e -edik elem felett a közelítő $\tilde{\phi}$ és $\tilde{\psi}$ értéke kifejezhető a következőképp:

$$\phi^e(x, y) = \sum_{j=1}^3 N_j^e(x, y) \phi_j^e,$$

$$\psi^e(x, y) = \sum_{j=1}^3 N_j^e(x, y) \psi_j^e, \quad (3.119)$$

ahol az $\{N_1^e, N_2^e, N_3^e\}$ a $\mathcal{Q}^e(\Omega^e)$ vektortér bázisa. A közelítésből adódó reziduálisok:

$$r_1 = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\hat{\alpha}_1 \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} + \hat{\alpha}_2 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\hat{\alpha}_3 \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} + \hat{\alpha}_4 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \right) + \hat{\beta}_1 \tilde{\phi} - f_1 \neq 0, \quad (3.120)$$

$$r_2 = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\hat{\alpha}_5 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} + \hat{\alpha}_6 \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\hat{\alpha}_7 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y} + \hat{\alpha}_8 \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right) + \hat{\beta}_2 \tilde{\psi} - f_2 \neq 0. \quad (3.121)$$

A közelítés hibáját minimalizáljuk Galerkin-értelemben:

$$R_{1,i}^e = \int_{\Omega^e} N_i^e(x, y) r_1(x, y) dx dy = 0, \quad (3.122)$$

$$R_{2,i}^e = \int_{\Omega^e} N_i^e(x, y) r_2(x, y) dx dy = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.123)$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\mathbf{D}_1 = \left(\hat{\alpha}_1 \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} + \hat{\alpha}_2 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\hat{\alpha}_3 \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} + \hat{\alpha}_4 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}}, \quad (3.124)$$

$$\mathbf{D}_2 = \left(\hat{\alpha}_5 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} + \hat{\alpha}_6 \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\hat{\alpha}_7 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y} + \hat{\alpha}_8 \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}}. \quad (3.125)$$

Ezzel az integrálegyenlet-rendszer:

$$R_{1,i}^e = - \int_{\Omega^e} N_i^e \nabla \cdot \mathbf{D}_1 dx dy + \int_{\Omega^e} N_i^e \hat{\beta}_1 \tilde{\phi} dx dy - \int_{\Omega^e} N_i^e f_1 dx dy = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.126)$$

$$R_{2,i}^e = - \int_{\Omega^e} N_i^e \nabla \cdot \mathbf{D}_2 dx dy + \int_{\Omega^e} N_i^e \hat{\beta}_2 \tilde{\psi} dx dy - \int_{\Omega^e} N_i^e f_2 dx dy = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.127)$$

Ezúttal is integráljunk „parciálisan” a D.64 felhasználásával:

$$R_{1,i}^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{D}_1 \nabla N_i^e + N_i^e \hat{\beta}_1 \tilde{\phi}) dx dy - \int_{\Omega^e} N_i^e f_1 dx dy - \int_{\Gamma^e} N_i^e \mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}^e d\Gamma = 0, \quad (3.128)$$

$$R_{2,i}^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{D}_2 \nabla N_i^e + N_i^e \hat{\beta}_2 \tilde{\psi}) dx dy - \int_{\Omega^e} N_i^e f_2 dx dy - \int_{\Gamma^e} N_i^e \mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}^e d\Gamma = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.129)$$

A fenti integrálegyenletek első tagjaiba helyettesítsünk be a (3.119) kifejezést, és végezzük el a lehetséges összevonásokat:

$$\begin{aligned} R_{1,i}^e &= \sum_{j=1}^3 \left[\phi_j^e \int_{\Omega^e} \left(\hat{\alpha}_1 \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \hat{\alpha}_3 \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} + \hat{\beta}_1 N_i^e N_j^e \right) dx dy + \right. \\ &\quad + \psi_j^e \int_{\Omega^e} \left(\hat{\alpha}_2 \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} + \hat{\alpha}_4 \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \right) dx dy \Big] - \\ &\quad - \int_{\Omega^e} N_i^e f_1 dx dy - \int_{\Gamma^e} N_i^e \mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}^e d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.130)$$

$$\begin{aligned} R_{2,i}^e &= \sum_{j=1}^3 \left[\psi_j^e \int_{\Omega^e} \left(\hat{\alpha}_5 \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \hat{\alpha}_7 \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} + \hat{\beta}_2 N_i^e N_j^e \right) dx dy + \right. \\ &\quad + \phi_j^e \int_{\Omega^e} \left(\hat{\alpha}_6 \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} + \hat{\alpha}_8 \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \right) dx dy \Big] - \\ &\quad - \int_{\Omega^e} N_i^e f_2 dx dy - \int_{\Gamma^e} N_i^e \mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}^e d\Gamma = 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (3.131)$$

Ez az integrálegyenlet-rendszer felírható a következő mátrixegyenlet formájában:

$$\begin{bmatrix} K & L \\ L' & K' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\phi} \\ \tilde{\psi} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.132)$$

ahol a $[K]$, $[K']$, $[L]$, $[L']$ mátrixokat az alábbi 3×3 -as elemi mátrixokból építjük fel:

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \left(\hat{\alpha}_1 \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \hat{\alpha}_3 \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} + \hat{\beta}_1 N_i^e N_j^e \right) dx dy \quad (3.133)$$

$$K_{ij}'^e = \int_{\Omega^e} \left(\hat{\alpha}_5 \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \hat{\alpha}_7 \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} + \hat{\beta}_2 N_i^e N_j^e \right) dx dy \quad (3.134)$$

$$L_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \left(\hat{\alpha}_2 \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} + \hat{\alpha}_4 \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \right) dx dy \quad (3.135)$$

$$L_{ij}'^e = \int_{\Omega^e} \left(\hat{\alpha}_6 \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \hat{\alpha}_8 \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) dx dy, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (3.136)$$

továbbá a b_k , g_k vektorokat az alábbi $\{b_k^e\}$, illetve $\{g_k^e\}$, ($k = 1, 2$) elemi vektorokból egyesíthetjük:

$$b_{k,i}^e = \int_{\Omega^e} N_i^e f_k dx dy, \quad (3.137)$$

$$g_{k,i}^e = \int_{\Gamma^e} N_i^e \mathbf{D}_k \cdot \hat{\mathbf{n}}^e d\Gamma, \quad i = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2. \quad (3.138)$$

A megfelelő peremfeltételeket ezúttal is a $\{g_k\}$ vektorok alkalmas megválasztásával vehetjük figyelembe.

3.6.1. Inhomogén hullámvezetőben terjedő módusok meghatározása a végelemek módszerével

Az imént megadott módszer alkalmas arra, hogy 3.71 egyenletrendszert megoldjuk az $(x, y) \in \Omega = (0, a) \times (0, d)$ tartományon. Legyen tehát $\phi = E_z$, $\psi = H_z$, amelyek kielégítik a tökéletes vezetőre vonatkozó peremfeltételeket, továbbá az eddigiekhez hasonlóan itt is $f_1 = f_2 = 0$. Vezessük be még az $\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_3 = \frac{\varepsilon}{k_c^2}$, $\hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha}_4 = \hat{\alpha}_6 = \hat{\alpha}_8 = \frac{k_z}{\omega k_c^2}$, $\hat{\alpha}_5 = \hat{\alpha}_7 = \frac{\mu}{k_c^2}$, továbbá a $\hat{\beta}_1 = \varepsilon$, $\hat{\beta}_2 = \mu$ jelöléseket. A fenti 3.132 egyenletrendszer az $f = 0$ és a peremfeltételek miatt a következőre egyszerűsödik:

$$\begin{bmatrix} K & L \\ L' & K' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\phi} \\ \tilde{\psi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.139)$$

A homogén hullámvezetőnél alkalmazott eljárás analógiájára bontsuk fel a $[K]$, $[K']$, $[L]$, $[L']$ mátrixokat az alábbi módon $[A]$ és $[B]$, $[A']$ és $[B']$ mátrixokra:

$$\begin{bmatrix} A & L \\ L' & A' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{E}_z \\ \tilde{H}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{E}_z \\ \tilde{H}_z \end{Bmatrix}. \quad (3.140)$$

Itt az $[A]$, $[A']$, $[B]$, $[B']$, $[L]$, $[L']$ mátrixokat az alábbi elemi 3×3 -as mátrixokból építjük fel:

$$A_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \frac{\varepsilon}{k_c^2} \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) dx dy \quad (3.141)$$

$$A'_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \frac{\mu}{k_c^2} \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) dx dy \quad (3.142)$$

$$L_{ij}^e = \frac{k_z}{\omega} \int_{\Omega^e} \frac{1}{k_c^2} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) dx dy \quad (3.143)$$

$$L'_{ij}^e = \frac{k_z}{\omega} \int_{\Omega^e} \frac{1}{k_c^2} \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) dx dy \quad (3.144)$$

$$B_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \varepsilon N_i^e N_j^e dx dy \quad (3.145)$$

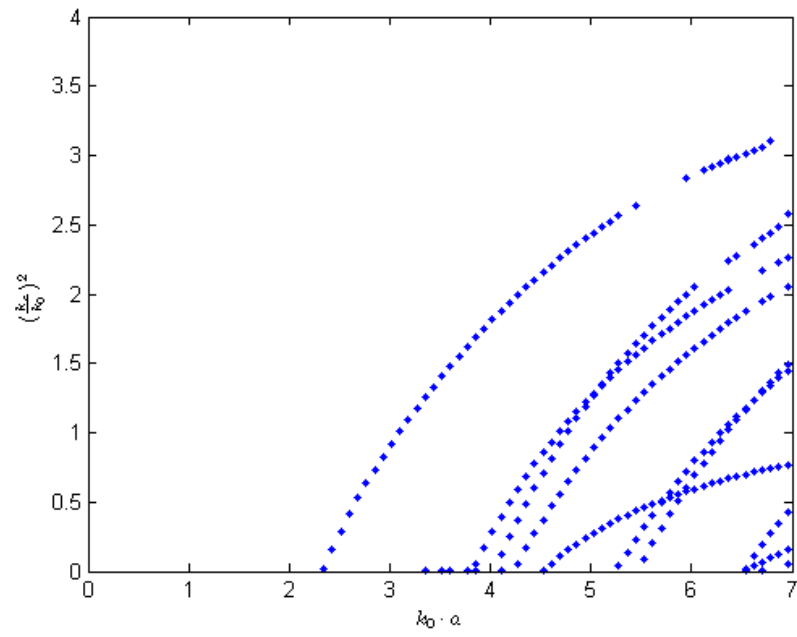
$$B'_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \mu N_i^e N_j^e dx dy, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.146)$$

Belátható, hogy $[A^e]$, $[A'^2]$, $[B^e]$, $[B'^e]$ szimmetrikus, illetve hogy $[C^e]$ és $[C'^e]$ egymás transzponáltjai. A mátrixegyenlet megoldásával meghatározhatók az inhomogén hullámvezető sajátmódusai.

3.6.1.1. Diszperziós reláció számítás a sajátértékek segítségével

Az ideális hullámvezető sajátmódusai azok az elektromágneses hullámok, amelyek energiavesztés nélkül terjedhetnek a hullámvezetőben, vagyis a reflexió ideális esetben zérus. A vezetőben terjedő sajátmódusok terjedési konstansa függ a gerjesztés frekvenciájától ($k_z = k_z(\omega)$), a rájuk vonatkozó diszperziós görbét megadhatjuk, ha ábrázoljuk pl. a $\left(\frac{k_z}{k_0}\right)^2$ értékeket a gerjesztés ($k_0 \cdot a$) függvényében. A végeselemek módszerével megoldottam a fenti differenciálegyenlet-rendszert, és a kapott k_z értékek segítségével meghatároztam az első néhány sajátmódushoz tartozó diszperziós görbét. Az első néhány módusra 3.11. ábrán látható diagramot nyertem, mely tökéletes egyezést mutat a szakirodalomban megadott értékekkel [1]. Adott vezető struktúra diszperziós karakterisztikája sokat elárul a vezető optikai tulajdonságairól, ezért megállapítható, hogy ez egy igen hasznos módszerré válhat, amelyet bonyolultabb nanofotonikai rendszerek esetében

is kiválóan alkalmazhatunk.



3.11. ábra. Az első néhány LSE, illetve LSM módus diszperziós görbéje ($\varepsilon_1 = 4$, $\varepsilon_2 = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$)

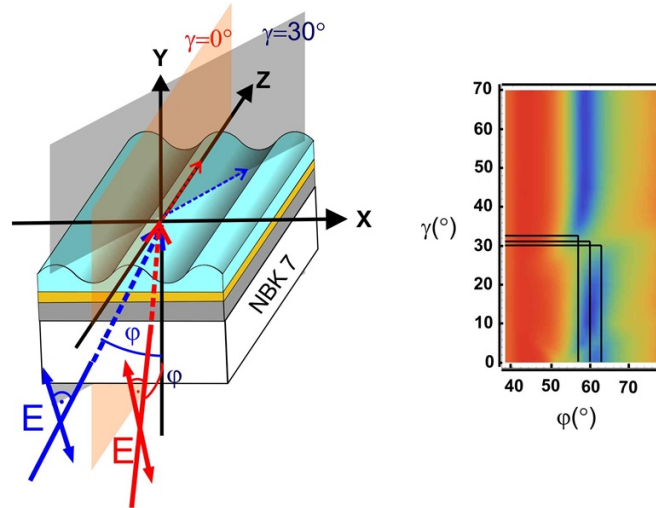
4. fejezet

Sajátértékek és sajátmódusok keresése RGC-SPR-modellekben

Az egydimenziós fém-dielektrikum határfelülettel rendelkező rácsok optikai viselkedését gyakran vizsgálják a szakirodalomban. Bebizonyították, hogy a geometriai tulajdonságok determinálják, hogy a periodikus rácsmintázatok képesek-e csatolni különböző típusú felületi plazmonikus hullámokat (SPP-s). Az ilyen típusú rácsok különböző azimutális szögnél történő kivilágítása esetében ráccsatolási effektusokat figyeltek meg, amelyek ígéretesen alkalmazhatóak különböző bioszenzorizációs eszközökben. A Szegedi Tudományegyetem Optikai és Kvantumelektronikai Tanszékén működő Nanoplazmonika Kutatócsoport módosított Kretschmann-elrendezéssel végzett kísérleti vizsgálatokat polikarbonátréteggel bevont bimetális rácsokon. Megmutatták, hogy az azimutális szög változtatása a poláriszög-függő felületi plazmon rezonanciagörbéken a minimum felhasadását eredményezi, (*RGC-SPR*: 'rotated grating coupling of surface plasmon resonance') [12].

A célunk az alábbiakban ismertetett rács matematikai modellezése és numerikus vizsgálata révén ezen (lokális) minimumkettőzések megmagyarázása. A feladatom az volt, hogy határozzam meg a rendszer által támogatott terjedő sajátmódusokat, hogy meg tudjuk magyarázni a reflexióban mutatkozó minimumhelyek eredetét.

A kutatócsoport korábbi modelljeiben különböző azimutális és polárszöggel, 532 nm hullámhosszú p-polarizált fénnel történő kivilágítások esetében vizsgálta a rácsokon megjelenő felületi plazmon polaritonokat. Az optikai jelben ekkor is megmutatkozott a lokális minimumkettőződés, amely jelenség mögött jól definiált sajátmódusok csatolási effektusait feltételeztük.



4.1. ábra. Sematikus ábra az RGC-SPR-modellek kivilágításáról, illetve a különböző orientációjú kivilágítások esetében számolt reflexiós diagram

4.1. RGC-SPR - a modellprobléma leírása

4.1.1. Diszperzív és veszteséges hullámvezetők, nemlineáris sajátérték-problémák

Az alábbiakban részletesen bemutatott rácsmodelleket nyitott hullámvezetőként értelmezhetjük.

Már az eddigi problémáknál is láttuk, hogy a hullámvezetők adott frekvencián csak bizonyos terjedési konstanssal rendelkező hullámmódusokat támogatnak. Az eddigi modellproblémáink mindegyike olyan volt, amelyben a hullámvezetőt tökéletesen vezető fémnek tekintettük, az anyagi paraméterek tisztán valósak voltak. A valós fizikai rendszerekben azonban a hullámvezetési jelenségeket mindig energiavesztés követi. Ezúttal is z irányban végtelen hosszú, és állandó keresztmetszetű modellt fogunk tekinteni, így a sajátérték-problémát a korábbiakhoz hasonló módon az xy -síkból lévő keresztmetszeten, azaz egy kétdimenziós tartományon kell megoldani megfelelő peremfeltételek mellett. A kitértetett z irány mentén így az elektromos mező exponenciálisan lecseng, ezt fejeződik ki a komplex értékű k_z hullámszám-komponensben a következőképp:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}(\tilde{\mathbf{E}}(x, y)e^{j\omega t - \alpha z}), \quad (4.1)$$

ahol $\alpha = \delta_z + j\beta = -\lambda$ paraméter képzetes része (β) az ún. terjedési konstans, míg a valós része (δ_z) reprezentálja a z irányú lecsengést. Az optikai hullámvezetők tanulmányozásánál fontos karakterisztikus jellemző az egyes módusokat jellemző effektív módus

index (effektív törésmutató), mint a frekvencia függvénye:

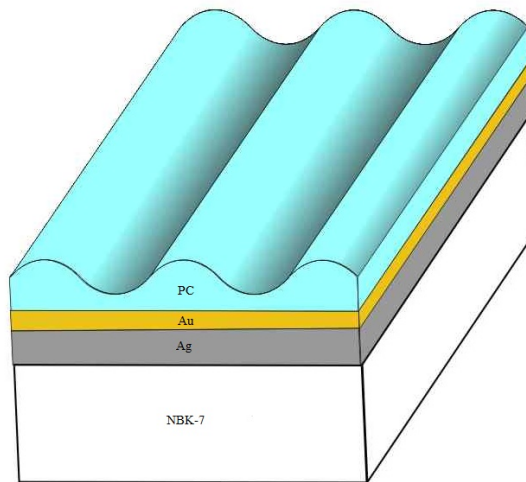
$$n_{\text{eff}} = \frac{\beta}{k_0}, \quad (4.2)$$

ahol k_0 a vákuumban terjedő fény hullámszáma.

Mivel az anyagok törésmutatója (ill. permittivitása) hullámhosszfüggő ($n = n(\lambda)$, $\varepsilon = \varepsilon(\lambda)$), ezért a sajátértékegyenlet nemlineárisává válik. A nemlineáris sajátérték-problémákat alapvetően nehéz megoldani. Az iteratív megközelítések mindig egy megfelelő közelítő értéket kívánnak, és a konvergencia sem garantált. Általában egyetlen sajátmódust határozhatunk meg egy adott közelítő érték körül [11]. A véges-elemek módszerével a probléma egy általánosított, lineáris sajátérték-problémává redukálható, így viszonylag könnyen kezelhetővé válik, ám ebben az esetben körültekintően kell eljárni, és megfelelő közelítő értéket, linearizációs pontot kell választani, hogy korrekt eredményt kapjunk.

4.1.2. Geometria

Tanulmányomban NBK7-üvegre helyezett arany-ezüst bimetálréteg felületére felvitt periodikus polikarbonátrácsot modelleztem (4.2.ábra).



4.2. ábra. Sematikus ábra a vizsgált fém-dielektrikum multiréteghez ($d_{Ag} = 38$ nm, $d_{Au} = 7$ nm, $d_{PC_1} = 15$ nm, $d_{PC_2} = 50$ nm, az ábrán két periódus látható: $p = 416$ nm.)

A sajátérték-problémát azon a kétdimenziós tartományon oldottam meg, amely megfelel a fenti fizikai rendszer rácsra merőleges kétdimenziós metszetének. A teljes geometriát és az egyes résztartományokat a COMSOL Multiphysics programban definiáltam. Ezt követően a kutatócsoportban kifejlesztett, háromszögelemekből álló mesht készítettem, így diszkretizáltam a tartományt a FEM analízishez.

4.1.3. Diszperzív anyagi paraméterek

Az arany-ezüst bimetál (38 nm és 7 nm) NBK-7 üvegszubsztráton van elhelyezve. Az ezüst réteg biztosítja a hatékony plazmoncsatolást, míg a vékony aranyréteg a megfelelő kémiai stabilitást. Az aranyat borító szigetelőréteg polikarbonát, amelyet szinuszos profilú periodikus rácsként illesztettünk a modellhez. A rács amplitúdómodulációja 35 nm, 15 nm vastag a szinuszgörbe minimumhelyeinél („völgyben”), míg 50 nm a maximumoknál („dombon”). Az egydimenziós rács periódusa 416 nm.

4.1.4. Peremfeltételek

Mivel a modell y irányban nyílt hullámvezetőnek tekinthető, a korábban megismert tökéletes vezető peremfeltétel nem felelt meg a céljainknak. A megoldást a programcsomagba beépített, „tökéletesen illesztett réteg” (Perfectly Matched Layer) elnevezésű (egydimenziós) komplex koordinátatranszformáció jelentette, mellyel egy koordinátanyújtás révén adott irányban jól abszorbeáló közeget lehet modellezni. Ezekhez ún. Scattering Boundary Conditiont kell párosítani, mellyel elérhető, hogy a szórt fényt nem reflektáló tartományhatárt hozzunk létre.

A modell geometriáját 2 egységcellára rajzoltam meg, a függőleges peremeken a Bloch-Floquet peremfeltételt állítottam be. Ennek köszönhetően kezelhető a tangenciális komponensekben fellépő ugrás, amelyet a hullámszámvektorral lehet megadni [3].

4.1.5. A sajátérték-probléma megoldása

Az NBK-7 hullámhosszfüggő törésmutatóját a Cauchy-formula segítségével, míg az aranyra és ezüstre jellemző dielektromos állandókat a Johnson-Christy adatbázis alapján számoltam ki, majd lineáris interpolációt alkalmaztam az adatsorra [13].

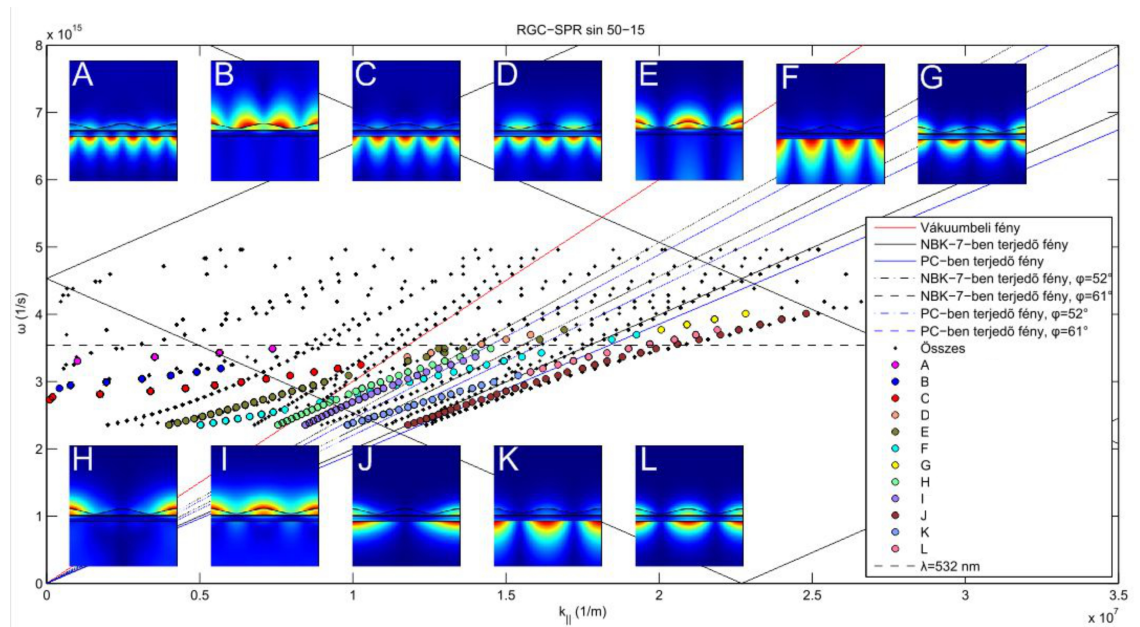
A fent definiált tartományon és ismertetett peremfeltételek mellett kellett tehát megoldani a nemlineáris

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) - \omega^2 \epsilon \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

hullámegyenletet, melyre a COMSOL Multiphysics program Radio Frequency moduljának Mode Analysis parancsát használtam.

A gerjesztés hullámhosszát (λ_0) variáltam 380 nm-től 800 nm-ig 10 nm-enként, és az effektív módusindexre vonatkozó kezdeti közelítő értéket futtattam paraméteresen, így számos lehetséges sajátértéket kaptam az adott gerjesztési tartományban. Az adatsorból az inhomogén waveguide-oknál kialakított technika segítségével kiszámoltam a sajátértékekhez tartozó $\omega_0(k_z)$ diszperziós diagramot, amelyben kirajzolódtak összetartozó pontpárokból álló diszperziós görbék.

Az analízis következő lépéseként végigtekintettem a sajátértékekhez tartozó sajátmódusok köztérbeli eloszlását. Kiválogattam azokat a megoldásokat, amelyek esetében az elektromágneses mező a rács közelében koncentrálódik, majd ezeket csoportosítottam a mezőkomponensek összehasonlítása révén. Az így megfigyelt módusokat is ábrázoltam a diszperziós diagramon.



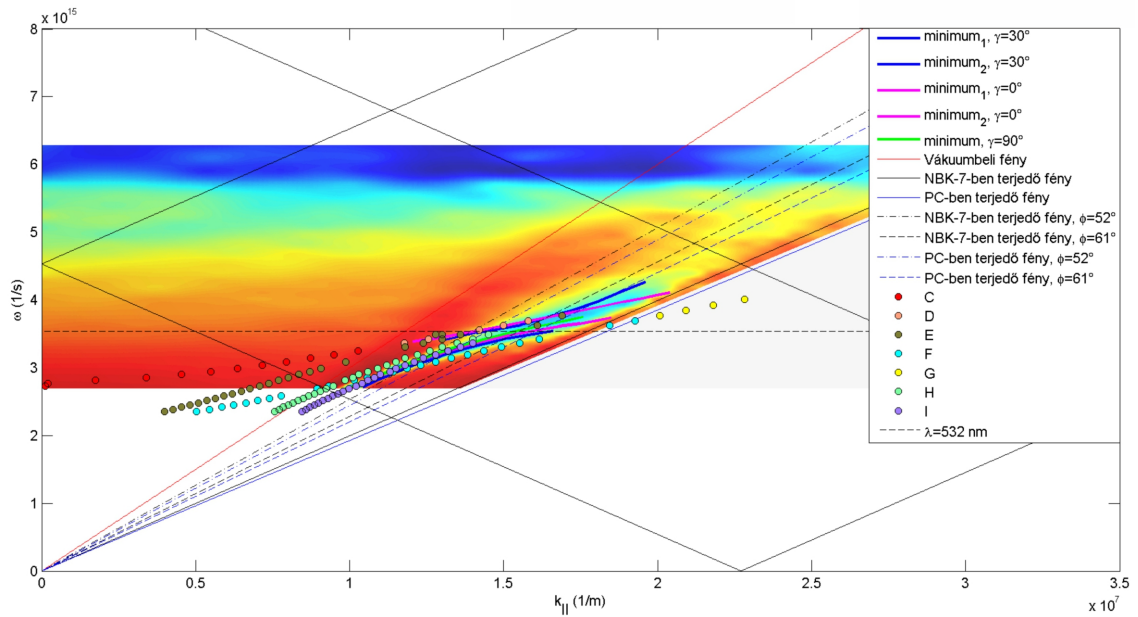
4.3. ábra. Az RGC-SPR-modell sajátértékeinek, valamint a sajátmódusokhoz és a különböző közegekben terjedő fotonikus módusokhoz tartozó diszperziós görbék ábrázolása

Látható, hogy igen sokféle sajátmódust támogat a rendszer. Vannak tisztán levegőoldali (pl. B, E), tisztán üvegoldali (pl. F, K), illetve olyan sajátmódusok, amelyek keverték. A feladatom tehát, hogy a sajátérték-egyenlet megoldásaiból megállapítsam, mely módusok gerjeszthetők a vizsgált fizikai rendszerben, és ez milyen változást okoz a kivilágító fény reflexiójában.

4.1.6. A megoldások kiértékelése

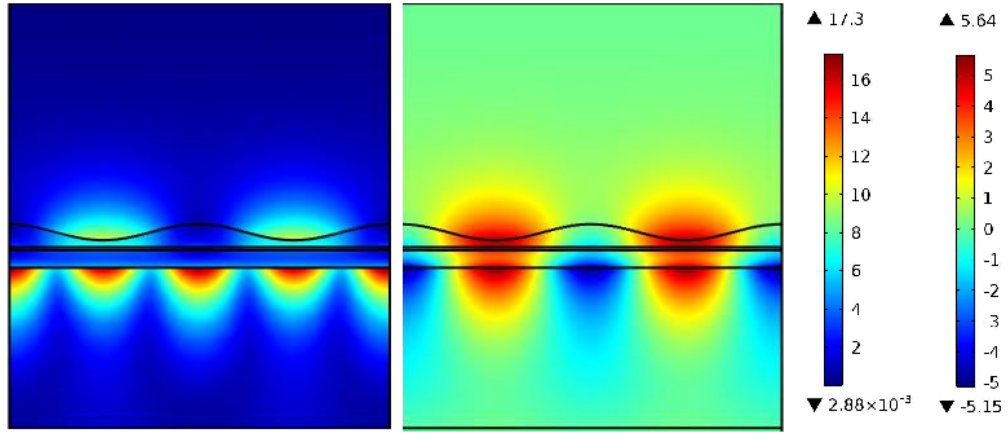
Összevettem a sajátmódusok diszperziós görbéit azokkal a görbékkel, amelyek a kivilágított modellekben számolt reflexiófüggvény lokális minimumhelyeihez tartoznak. A figyelem középpontjában a $\lambda_0 = 532$ nm hullámhosszhoz tartozó, $\omega_0 = 3.54 \cdot 10^{15}$ Hz ún. „turnaround” körfrekvenciájú gerjesztés állt. (Ezen frekvencián vált előjelet az arany dielektromos állandója.)

A kivilágított modellben ezen hullámhosszártéken figyelték meg a legjelentősebb minimumfelhasadást.



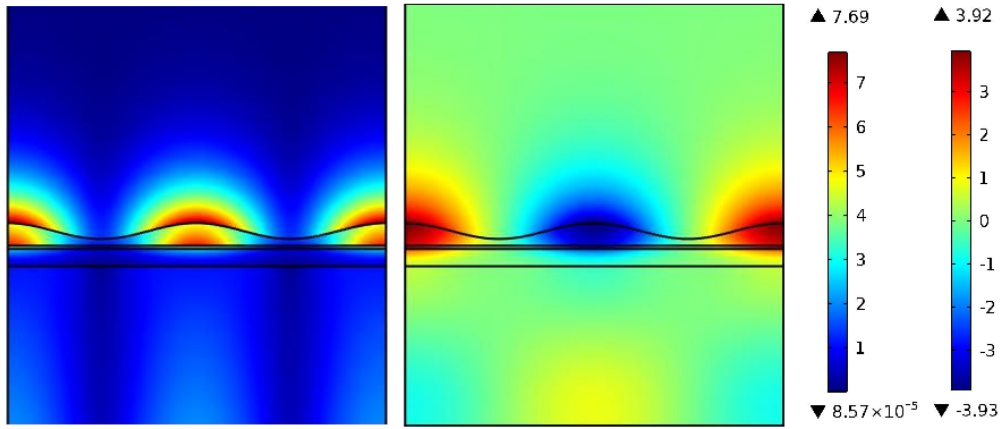
4.4. ábra. A $\gamma = 0^\circ$ azimutális szögű kivilágításnál számolt reflexióban mutatkozó minimumokat magyarázó sajátmódusok diszperziós diagramja

A 4.1 ábrán látható reflexió diagramon $\gamma = 0^\circ$ körül és $\gamma = 30^\circ$ körül is megfigyelhető a minimum felhasadása. Elsődleges célom, hogy a 0° -os azimutális orientációban jelentkező kettőződésre magyarázatot adjak. A tartomány közelében azonosítható két különböző módus, melyeket D és E betűkkel jelöltem. A D-módus az üvegoldalán koncentrált elektromágneses mezővel rendelkezik, míg a gerjesztés frekvenciája el nem éri a fény frekvenciájának megfelelő $3.3 \cdot 10^{15}$ Hz körüli körfrekvencia értéket. Ettől a ponttól kezdve az elektromágneses tér úgy oszlik el, hogy az elektromos mező egy jelentős része a rácsok völgyében koncentrálódik. 530 nm-nél ennek a módusnak a hullámhosszát kiszámítottam az effektív módusindexből és a gerjesztés hullámhosszából. $\left(\lambda = \frac{\lambda_0}{\Re n_{eff}} \right)$. A D-módus hullámhossza $\lambda_D = 442,74$ nm.



4.5. ábra. D-típusú sajátmódus: 530 nm hullámhosszon gerjesztett, $n_{eff} = 1,197092 - 0,035588i$ indexszel. A bal oldali ábra a sajátmódus normált elektromos mezőjét, míg a jobb oldali ábra az E_z komponenst mutatja.

A másik közeli módus az E-típusú. Ez a módus olyan, hogy a közeltér a rács dombjai felett koncentrálódik, az amplitúdómoduláció periódusa megegyezik a rács periódusával. Ennek a módusnak a hullámhossza $\lambda_E = 432$ nm körüli érték. A módus longitudinális komponense aszimmetrikus a völgyre nézve.

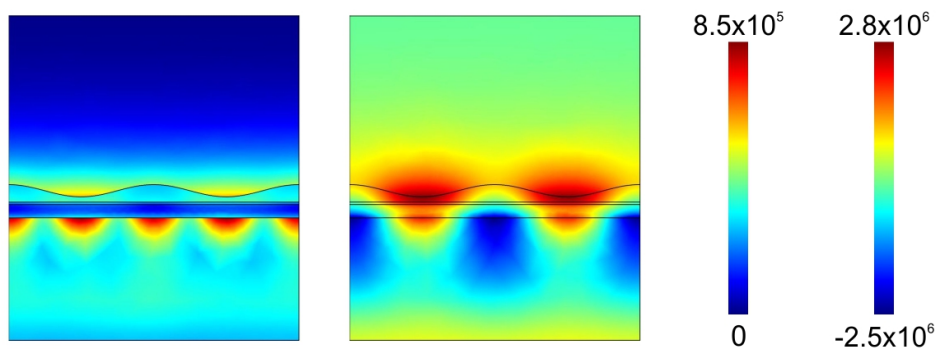


4.6. ábra. E-típusú sajátmódus: 540 nm hullámhosszon gerjesztett, $n_{eff} = 1,172039 - 0,079429i$ indexszel. A bal oldali ábra a sajátmódus normált elektromos mezőjét, míg a jobb oldali ábra az E_z komponenst mutatja.

Mind a D, mind pedig az E módus olyan, hogy diszperziós görbéje az NBK-7-ben, majd a PC-ben terjedő fotonikus módus diszperziós egyenese alá hajlik, amely arra utal, hogy ezek plazmonikus terjedő hullámok [14].

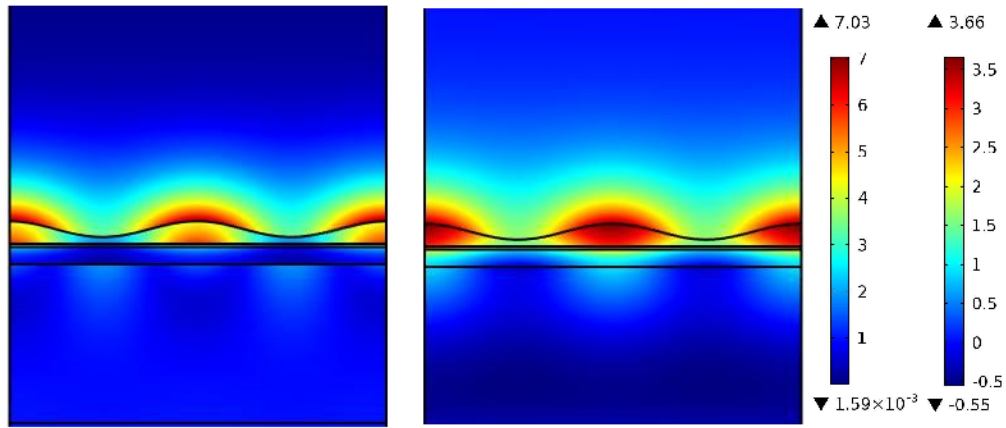
Ahhoz, hogy kiderüljön, melyik módust gerjesztjük, elkészítettem a modelletem 3 dimenzióban, hogy lehetővé váljon az azimutális szög forgatása, illetve a megfelelő kivilágítás. Kivilágítottam tehát a modelletem $\gamma = 0^\circ$ -os azimutális, illetve $\phi = 52^\circ$ -os

p-polarizált (TM) végtelen síkhullámmal, azaz a ráccsal párhuzamos beesési sík esetében vizsgáltam, hogy az első minimumhoz milyen elektromágneses közeletér tartozik. Azt találtam, hogy a kivilágítás miatt létrejövő terjedő hullám közeletérbeli intenzitáseloszlása, illetve a terjedő irányú elektromos mezőkomponens (E_z) intenzitáseloszlása teljesen megegyezik a D-típusú módusnál megfigyelttel. Ez arra enged következtetni, hogy $\gamma = 0^\circ$ esetében a $\phi = 52^\circ$ -os minimumot éppen a D-típusú módus begerjesztése okozza. Ezt támasztja alá, hogy a 3D-s modellből nyert xy-metszeten az E_z komponens látszólagos hullámhossza kb. 460 nm.



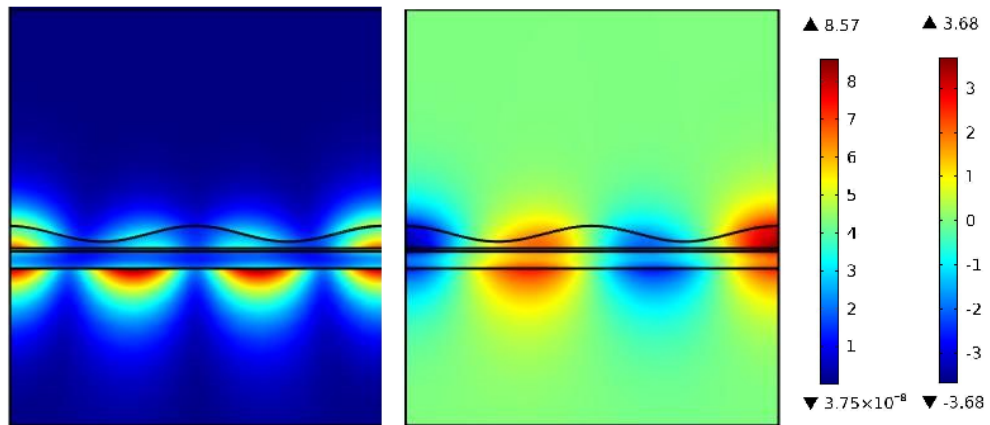
4.7. ábra. $\gamma = 0^\circ$ -os azimutális és $\phi = 52^\circ$ -os polárszögű, p-polarizált végtelen síkhullámmal kivilágított modelltartozó modell közeletér a rács közelében. A bal oldali ábra a megjelenő felületi hullám normált elektromos mezőjét, míg a jobb oldali ábra az E_z komponensét mutatja.

A másik minimumhely közelében az I és G jelű módusokat azonosítottam. Az I jelű kizárólag a polikarbonátban létezik, a polimersávok hegyei mentén koncentrálódik, és a longitudinális komponense a völgyre szimmetrikus, eltérően attól, amelyet az E-típusúnál megfigyeltem.



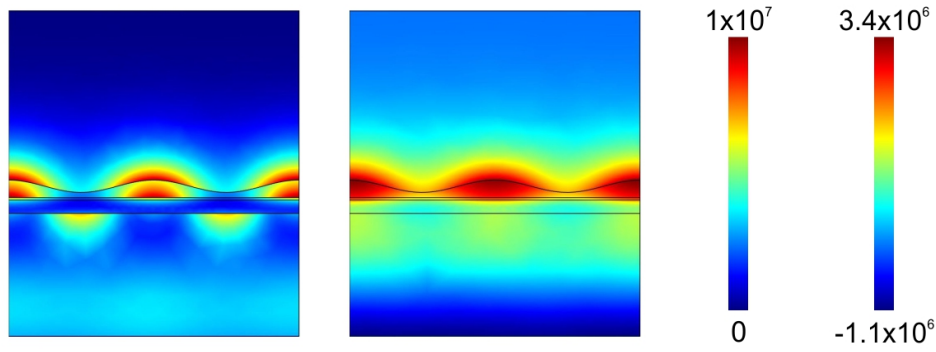
4.8. ábra. I-típusú sajátmódus: 560 nm hullámhosszon gerjesztett, $n_{eff} = 1,250479 - 0,042927i$ indexszel. A bal oldali ábra a sajátmódus normált elektromos mezőjét, míg a jobb oldali ábra az E_z komponenst mutatja.

A G-típusúak a vákuumbeli fény diszperziós egyenese előtt ($\omega = 2,5 \cdot 10^{15}$ Hz körül) a szubsztrátban (üvegoldalon) koncentrálnak, viszont nagyobb gerjesztési frekvencia esetében minden második dombon (a levegőoldalon) térnövekmény figyelhető meg.



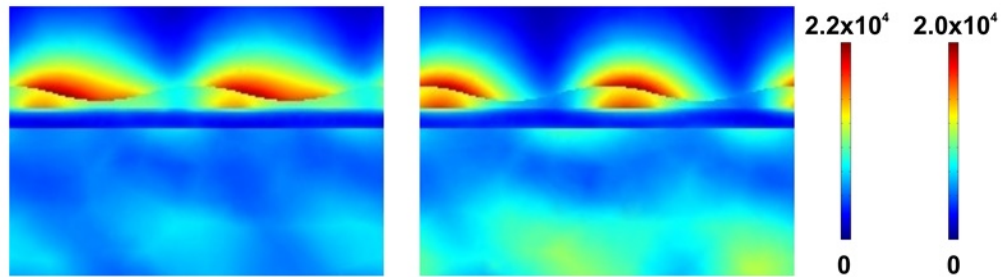
4.9. ábra. G-típusú sajátmódus: 520 nm hullámhosszon gerjesztett, $n_{eff} = 1,527003 - 0,053605i$ indexszel. A bal oldali ábra a sajátmódus normált elektromos mezőjét, míg a jobb oldali ábra az E_z komponenst mutatja.

A modellt kivilágítottam $\gamma = 0^\circ$, $\phi = 61^\circ$ -os p-polarizált síkhullámmal, és azt találtam, hogy az elektromágneses közeltér profilja a polimeroldalon teljesen megegyezik azzal, amit az I típusú módusnál megfigyeltünk. Ebben az esetben is jó egyezés van a sajátmódus $\lambda = 448$ nm-es és a látszólagos 450 nm körüli hullámhossz között.



4.10. ábra. $\gamma = 0^\circ$ -os azimutális és $\phi = 61^\circ$ -os polárszögű, p-polarizált végtelen síkhullámmal kivilágított modelltartozó modell közeltere a rács közelében. A bal oldali ábra a megjelenő felületi hullám normált elektromos mezőjét, míg a jobb oldali ábra az E_z komponenst mutatja.

Ami a $\gamma = 30^\circ$ -os beesési síkhoz tartozó minimumfelhasadást illeti, nem lehet ilyen egyértelműen megállapítani, mely sajátmódusok okozzák a jelenséget. Úgy tűnik, hogy a kisebb polárszögnél megjelenő minimumhoz a völgyben koncentrálódó felületi hullám tartozik, míg a nagyobb polárszögnél megjelenő minimumnál a dombon koncentrálódó elektromágneses köztér figyelhető meg.



4.11. ábra. A $\gamma = 30^\circ$ körüli azimutális szöghöz tartozó reflexiós minimumoknál megjelenő felületi hullámok. A bal oldali képen a $\gamma = 32,5^\circ$, $\phi = 57^\circ$ -os kivilágítás, a jobb oldali képen a $\gamma = 30^\circ$, $\phi = 63^\circ$ -os szögű kivilágítás során létrejövő köztér képek

$\gamma = 40^\circ$ esetében $\phi = 59^\circ$ -nál van a reflexiós minimum, itt ismét a D-típusú módus-hoz hasonló köztér látszik. Tehát azt a konklúziót vonhatjuk le a fenti megállapítások és a 4.1 alapján, hogy ún. "anticrossing" jelenséggel állunk szemben. Az állítások igazolásához további kivilágítási iránytól függő reflexiós és köztéri számítások szükségesek.

Összefoglalás

A dolgozat végéhez érkeztünk. Úgy vélem, hogy a matematika és fizika egy nagyon szép határterületét tekintettük át. A korábbi célkitűzéseknek megfelelően egy olyan numerikus módszert ismertünk meg, amellyel nagyszámú, változatos fizikai problémát fogunk tudni megoldani.

A dolgozat írása közben további megoldandó problémák merültek fel. A FEM esetében beosztás finomításával, illetve az elemek rendjének növelésével csökkenthető a numerikus hiba, így szükségesnek látom a részletes hibaelemzést. Felmerült továbbá, hogy célszerű lenne az eredmények más numerikus módszerekkel, pl. FDTD-val, Boundary Element Methoddal történő összehasonlítása.

Ami az RGC-SPR-elemzést illeti, a továbbiakban vizsgálni fogjuk egyéb rácsprofilon (pl. négyszöges vonalprofilon, és különböző rétegekombinációkon), és ha meggyőződünk róla, hogy valóban a megfigyelt módusok ráccsatolási effektusai állnak a háttérben, akkor próbáljuk a felületet úgy megtervezni hogy azzal pl. biodetektálni tudjunk.

A függelék

Tevékenység leírása

A végeselemek módszerével a Matematika BSc szakdolgozatomban kezdtem foglalkozni. Dr. Van Leeuwen-Polner Mónika javasolta a témát, amihez tanácsolta, hogy keressek fizikai modellproblémát. Korábbi oktatómmal, dr. Czirjárné dr. Csete Máriával így kerültem kapcsolatba. Az általa vezetett Nanoplazmonika Csoport (Optikai és Kvantumelektronikai Tanszék, SZTE) évek óta alkalmazza kutatásában a COMSOL Multiphysics FEM-en alapuló programcsomagot.

A TDK dolgozatom címe: Elektromágneses hullámvezetők vizsgálata a végeselemek módszerével. A dolgozatban témavezetőim javaslatára először két egyszerű homogén hullámvezető struktúrát tanulmányoztam analitikusan és numerikusan (saját készítésű programmal, valamint a COMSOL-lal). Ilyen módon lehetőség nyílt az eredmények összehasonlítására, valamint a FEM matematikai hátterének alaposabb, gyakorlatiasabb megértésére, valamint a COMSOL-ban olyan módszereket térképeztem fel, amit a kutatócsoportban addig nem használtak, ismertek.

A TDK-munkámat 2013 nyarán kezdtem el a csoportban. Ekkor kaptam többek között a forgatott rács-csatoláson alapuló felületi plazmon rezonancia ('Rotated Grating Coupled Surface Plasmon Resonances') projektben azt a feladatot, hogy a sajátmódusok keresésével adjak választ a reflexióban megmutatkozó minimumhelyek kettőződésére.

A szakirodalomban látott egyszerű példák nyomán jöttem rá, hogy a sajátértékek segítségével is lehet diszperziós görbéket megadni egy-egy módushoz. A módszer pontosításához tanulmányoztam az inhomogén hullámvezető esetét analitikusan és numerikusan. Ez a része a kutatásnak is teljesen önállóan folyt. A hullámvezetők leírásakor megismert, kialakított technikát alkalmaztam a bonyolultabb rácsos fizikai rendszerre, és így a forgatott rács-csatolásban szerepet játszó módusok diszperziós diagramjának analízisére. Ezzel járultam hozzá a csoport kutatómunkájához, mivel a csoport munkájába ez a projekt szervesen beleillik, hiszen az eddig kivilágítással történő analízis felfedezéseit sikerült részben indokolni a sajátérték-probléma megoldásával.

A munkából eddig egy konferenciaposzter, valamint a hozzá tartozó kiadvány készült: A. Szalai, G. Szekeres, J. Balázs, A. Somogyi, M. Csete, *Rotated grating coupled surface plasmon resonance on wavelength-scaled shallow rectangular gratings* címmel. (Proc. SPIE 8809, Plasmonics : Metallic Nanostructures and Their Optical Properties XI, 2013.). A közeljövőben a csoport a kapott eredményekből a Physical Review B folyóiratba tervez publikációt készíteni.

B függelék

A vektoranalízis alapvető fogalmai

Tekintsük át az elektrodinamikában alapvető vektoranalízis-fogalmakat [1].

B.1. Definíció (Vektormező divergenciája). Legyen $\mathbf{f}$ egy vektormező. A vektormező divergenciája a $\nabla \cdot \mathbf{f} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \oint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ skalármező, ahol S az infinitezimálisan kis Δv térfogatelem határoló felülete, és $d\mathbf{s}$ a felület külső normálisának irányába mutat.

B.2. Megjegyzés. Az $\mathbf{f}$ vektortér divergenciája derékszögű koordinátákkal kifejezve:

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

B.3. Tétel (Gauss-tétel). Legyen az $\mathbf{f}$ vektormező folytonosan differenciálható a V térfogatban és az azt határoló S felületen. Ekkor $\int_V \nabla \cdot \mathbf{f} dv = \oint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$.

B.4. Definíció (Vektormező rotációja). Egy $\mathbf{f}$ vektormező rotációja definíció szerint a $\nabla \times \mathbf{f} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \oint_S d\mathbf{s} \times \mathbf{f}$ határérték.

B.5. Megjegyzés. A rotáció vektor nagysága az $\hat{\mathbf{n}}$ irányban $\hat{\mathbf{n}} \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l}$. A rotáció derékszögű koordinátákkal kifejezve:

$$\nabla \times \mathbf{f} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}},$$

ahol $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ rendre az x, y , illetve z irányú egységvektor.

B.6. Tétel (Stokes-tétel). Legyen az $\mathbf{f}$ vektormező folytonosan differenciálható a zárt S felületen és annak C határvonalán. Ekkor

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l}$$

B.7. Definíció. Az f skalárfüggvény gradiense definíció szerint $\nabla f = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \oint_S f ds$ vektor, melynek nagysága az $\hat{n}$ normális irányában $\hat{n} \cdot \nabla f = \frac{df}{dn}$.

B.8. Megjegyzés. A gradiensvektor derékszögű koordinátákban:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad (\text{B.1})$$

Vezessük be a ∇^2 a Laplace-operátort a háromdimenziós euklideszi térben:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{B.2})$$

Ha egy ϕ skalármezőre alkalmazzuk a Laplace-operátort, akkor ennek jelentése:

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\nabla \phi) \quad (\text{B.3})$$

Ha viszont $\mathbf{f}$ vektormező, akkor ennek jelentése

$$\nabla^2 \mathbf{f} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{f}. \quad (\text{B.4})$$

C függelék

Elektrodinamikai alapfogalmak

C.1. Az elektromágneses tér jellemző mennyiségei

Az elektromágneses tér jellemzésére a következő mennyiségeket használjuk [8, 2].

- *Elektromos töltéssűrűség* (ρ): a tér egy kis Δv térfogatába eső $\mathbf{r}$ pontjában a töltéssűrűséget a $\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta v}$ határérték segítségével definiáljuk. Itt Δq a kis Δv térfogatba eső töltések algebrai összege.
- *Elektromos áramsűrűség-vektor* ($\mathbf{J}$): ha az $\mathbf{r}$ pontot tartalmazó kis Δf felületen ΔI áram halad át, akkor az áramsűrűség az $\mathbf{r}$ pontban: $\mathbf{J} = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta f} \hat{\mathbf{n}}$, ahol $\hat{\mathbf{n}}$ a felületre vett normális egységvektor.
- *Elektromos térerősségvektor* ($\mathbf{E}$): egy nyugvó, pontszerű q próbatöltésre ható $\mathbf{F}$ erő arányos a q próbatöltés nagyságával: $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, ahol $\mathbf{E}$ az elektromos térerősségvektor, mely a helytől és az időtől is függhet.
- *Elektromos dipólmomentum* ($\mathbf{p}$): semleges töltésrendszerekben, ha nem esik egybe a pozitív és negatív töltések elektromos súlypontja, akkor külső elektromos tér hatására dipólusként (egyenlő Q nagyságú, ellentétes előjelű töltésekből álló töltésrendszer) viselkedik (dielektromos polarizáció). Ha a pozitív és negatív elektromos súlypont távolsága l , akkor a semleges töltésrendszer elektromos dipólmomentuma $\mathbf{p} = Q\mathbf{l}$, ahol $\mathbf{l}$ a negatív töltésből a pozitívba mutató vektor.
- *Elektromos polarizációvektor* ($\mathbf{P}$): az anyag térfogategységének dipólmomentuma.
- *Elektromos eltolódási vektor* ($\mathbf{D}$): $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, ahol ε_0 a vákuum dielektromos állandója, vagy permittivitása.
- *Mágneses indukcióvektor* ($\mathbf{B}$): a $\mathbf{v}$ sebességgel mozgó q ponttöltésre hat a $q\mathbf{E}$ erőn kívül az $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ erő, ahol $\mathbf{B}$ a mágneses indukcióvektor.

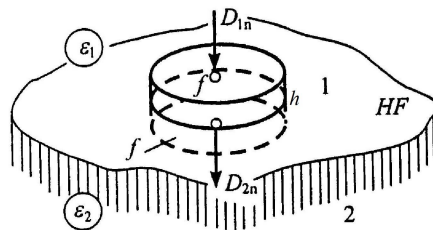
- *Mágneses momentum* ($\mathbf{p}_m$): áramjárta vezetőhurokra a mágneses mező forgatónyomatékokat is gyakorol: $\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}$, ahol a $\mathbf{p}_m$ vektormennyiséget a hurok mágneses momentumának nevezzük. A molekulák belsejében elemi köráramok folynak, így a molekuláknak is tulajdoníthatunk mágneses momentumot.
- *Mágneseszettségi vektor* ($\mathbf{M}$): az anyag térfogategységének a mágneses momentuma.
- *Mágneses térerősségvektor* ($\mathbf{H}$): $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$, ahol μ_0 a vákum mágneses permeabilitása.

C.2. A térerősségvektorok viselkedése két közeg határfelületén

Ebben a fejezetben ismertetjük, hogy miként viselkedik az elektromágneses mező két különböző közeg határfelületén. Ezek a törvények, amelyek itt levezetünk, természetes módon peremfeltételeket rónak ki, amelyeket figyelembe kell vennünk az anyagban terjedő elektromágneses tér meghatározásakor.

Tekintsük két közeg határfelületét (HF). Tegyük fel, hogy a közegek elektromágneses tulajdonságai különbözőek. Vezessünk le az ismertetett integrálegyenletekből (1.1. fejezet) olyan határfeltételeket, amelyek leírják a térmennyiségek határon való viselkedését [8].

Alkalmazzuk az (1.5) Gauss-törvényt a C.1 ábrán látható képzeletbeli kis Gauss-henger S felületére. Jelölje h a henger magasságát, f pedig az alaplapjának területét.



C.1. ábra. A $\mathbf{D}$ vektor normális komponensének vizsgálata két közeg határfelületén

Tartassuk a henger magasságát nullához, így a $\mathbf{D}$ vektorra vonatkozó feltételt nyerjük:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \rightarrow D_{2n}f - D_{1n}f = (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}f, \text{ amint } h \rightarrow 0,$$

$$q = \int_V \rho(\mathbf{r})dv \rightarrow \sigma f, \text{ ha } h \rightarrow 0,$$

$$\implies \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma, \quad (\text{C.1})$$

ahol D_{1n} és D_{2n} a $\mathbf{D}_1$, illetve a $\mathbf{D}_2$ vektorok HF-re merőleges, azaz normális irányú komponenseit jelölik.

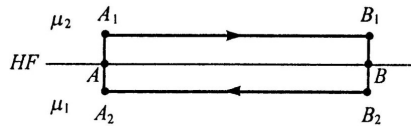
Láthatjuk, hogy ha nincsenek szabad töltések ($\sigma = 0$), az eltolódásvektor normális irányú komponense folytonos ($D_{1n} = D_{2n}$). Ellenben az (1.16) anyagi egyenlet alapján az elektromos térerősség a dielektromos állandók reciproka által meghatározott ugrást szenved: $E_{1n} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} E_{2n}$.

Hasonló gondolatmenettel kapjuk az (1.7) Mágneses Gauss-törvényből a

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad (\text{C.2})$$

feltételt $\mathbf{B}$ -re. Eszerint a $\mathbf{B}$ mágneses indukcióvektor normális komponense folytonos, míg az (1.17)-ből adódóan a $\mathbf{H}$ térerősségvektor a mágneses permeabilitások által meghatározott ugrást szenved ($H_{1n} = \frac{\mu_2}{\mu_1} H_{2n}$). (Az n indexszel itt a megfelelő vektorok normális komponensét jelöljük.)

A $\mathbf{H}$ vektor vizsgálatához alkalmazzuk a Maxwell-Ampère-törvény integrálegyenletes alakját (1.3) egy kicsiny, ún. Stokes-féle hurokra (C.2. ábra), majd képezzük $A_1, A_2 \rightarrow A$, $B_1, B_2 \rightarrow B$ határátmenetet. Legyen továbbá $\mathbf{J}_s$ egy idealizált felületi áramsűrűség.



C.2. ábra. A $\mathbf{H}$ vektor érintőleges komponensének vizsgálata két közeg határfelületén

Ekkor

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} &\rightarrow \int_A^B (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) dl \\ \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{s} &\rightarrow 0 \\ \int_S \mathbf{J} \hat{\mathbf{n}} d\mathbf{s} &\rightarrow \int_A^B \mathbf{J}_s \hat{\mathbf{n}} dl,\end{aligned}$$

ahol $\mathbf{t}$ a Stokes-felületre merőleges, a határfelületet érintő egységvektor, amely a hurok irányításával jobbsavart alkot.

Mivel $(\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \hat{\mathbf{t}}$, és a fentiek az AB szakasz választásától függetlenek, ezért

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s. \quad (\text{C.3})$$

Vagyis, ha nincs a felületen töltésáramlás, akkor a mágneses térerősség tangenciális komponense nem változik a határfelületnél, viszont az indukcióvektor ugrást szenved $(B_{1t} = \frac{\mu_1}{\mu_2} B_{2t})$.

Ugyanezzel az eljárással kaphatjuk meg az (1.1)-ből az $\mathbf{E}$ -re vonatkozó határfeltételt:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0. \quad (\text{C.4})$$

Tehát a határfelületnél az elektromos térerősség érintőleges komponense változatlan marad $(E_{1t} = E_{2t})$, míg az eltolódásvektor ugrást szenved $(D_{1t} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} D_{2t})$. Itt Mind $\mathbf{B}$, mind $\mathbf{E}$ esetében a t index a megfelelő vektorok tangenciális komponensét jelöli.

D függelék

A végelemek módszere

D.1. Egydimenziós differenciálegyenlet megoldása a végelemek módszerével

Tekintsük a következő – alkalmazásaink szempontjából – általános differenciálegyenletet:

$$-\frac{d}{dx}\left(\hat{\alpha}\frac{d\phi}{dx}\right) + \hat{\beta}\phi = f, \quad x \in (0, L), \quad (\text{D.1})$$

ahol ϕ a keresett függvény, $\hat{\alpha}(x)$ és $\hat{\beta}(x)$ ismert függvények vagy paraméterek, f pedig a forrás vagy gerjesztés függvénye. Ez az egyenlet a Helmholtz-típusú egyenletnek az általánosítása.

Ehhez az egyenlethez kapcsoljuk a határfeltételeket a Γ határon, az $x = 0$ és $x = L$ végpontokban.

1. típus (Dirichlet):

$$\phi|_{\Gamma} = p \quad (\text{D.2})$$

2. típus (Neumann):

$$\left(\hat{\alpha}\frac{d\phi}{dx}\right)\Big|_{\Gamma} = q \quad (\text{D.3})$$

3. típus:

$$\left(\hat{\alpha}\frac{d\phi}{dx} + \hat{\gamma}\phi\right)\Big|_{\Gamma} = q \quad (\text{D.4})$$

Itt p , q és $\hat{\gamma}$ ismert paraméterek vagy függvények. A második típus a 3. speciális esete, amikor $\hat{\gamma} = 0$.

Ha $\hat{\alpha}$ -nak szakadása, vagy hirtelen változása van a tartomány valamely $x_d \in (0, L)$ belső pontjában, akkor ϕ -nek teljesítenie kell a folytonossági feltételeket is:

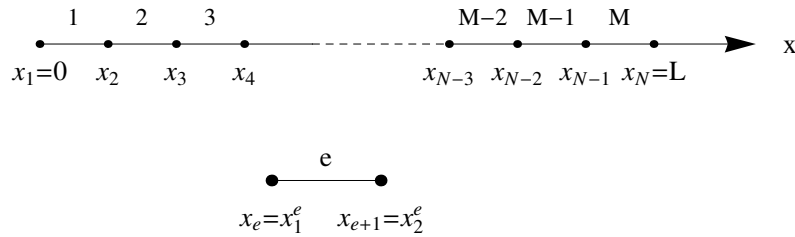
$$\phi|_{x=x_d^+} = \phi|_{x=x_d^-} \quad (\text{D.5})$$

$$\left(\hat{\alpha} \frac{d\phi}{dx} \right) \Big|_{x=x_d^+} = \left(\hat{\alpha} \frac{d\phi}{dx} \right) \Big|_{x=x_d^-}. \quad (\text{D.6})$$

A Galerkin-módszert fogjuk alkalmazni a (D.1) egyenletre. Ha $\tilde{\phi}$ egy közelítő megoldása az egyenletnek, akkor a reziduális:

$$r = -\frac{d}{dx} \left(\hat{\alpha} \frac{d\tilde{\phi}}{dx} \right) + \hat{\beta} \tilde{\phi} - f \neq 0 \quad (\text{D.7})$$

Ezt szeretnénk tehát a Galerkin-módszerrel minimalizálni. Első lépésként diszkrétizáljuk a az értelmezési tartományt. Felosztjuk a $[0, L]$ szakaszt M elemre. Jelölje l^e ($e = 1, 2, 3, \dots, M$) az e -edik elem hosszát, x_i ($i = 1, 2, 3, \dots, N$) a csomópontok helyét úgy, hogy legyen $x_1 = 0$ és $x_N = x_{M+1} = L$. Magasabb dimenzióban az elemek lokális és a végpontok globális számozása közötti kapcsolat megadása igen fontos feladat, éppen ezért itt is bevezetjük az elemek lokális számozását: $x_1^e = x_e$ és $x_2^e = x_{e+1}$, $e = 1, 2, 3, \dots, M$.



D.1. ábra. Az elemek lokális számozása

Második lépésként kiválasztjuk a véges dimenziós teret, és meghatározzuk annak bázisfüggvényeit. A legegyszerűbb eset, ha lineáris függvényekkel közelítjük a megoldást az egyes elemeken. Ugyanakkor fontos megjegyezni, hogy ha magasabb rendű bázisfüggvényeket választunk, a közelítés jóval pontosabb lehet. Legyen $I = [x_e, x_{e+1}]$ egy intervallum a valós számegyenesen, és legyen az I intervallumon lineáris függvények vektortere a

$$\mathcal{P}^e(I) = \{\phi^e(x) = a^e + b^e x, x \in I, a^e, b^e \in \mathbb{R}\}. \quad (\text{D.8})$$

Az x_1^e és x_2^e csomópontokban ϕ^e értékei értékei:

$$\phi_1^e = \phi^e(x_1^e) = a^e + b^e x_1^e \quad (\text{D.9})$$

$$\phi_2^e = \phi^e(x_2^e) = a^e + b^e x_2^e. \quad (\text{D.10})$$

Mivel bármely egyenest egyértelműen meghatározza kettő, az egyenesre illeszkedő pont, ezért ϕ_1^e és ϕ_2^e egyértelműen meghatározza $\phi^e(x)$ -et. Kifejezhetjük a^e -t és b^e -t a következő módon:

$$b^e = \frac{\phi_2^e - \phi_1^e}{x_2^e - x_1^e} \quad (\text{D.11})$$

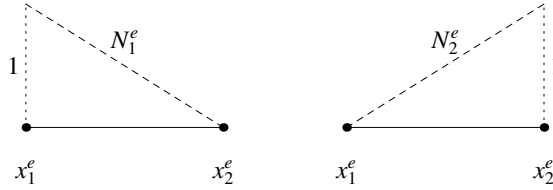
$$a^e = \frac{\phi_2^e + \phi_1^e}{2} - \frac{\phi_2^e - \phi_1^e}{2(x_2^e - x_1^e)}(x_1^e + x_2^e). \quad (\text{D.12})$$

Behelyettesítve $\phi^e(x)$ -be, kapjuk, hogy $\mathcal{P}^e(I)$ minden eleme kifejezhető a

$$\phi^e(x) = \phi_1^e \frac{x_2^e - x}{x_2^e - x_1^e} + \phi_2^e \frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e} = \sum_{j=1}^2 N_j^e(x) \phi_j^e \quad (\text{D.13})$$

alakban, ahol

$$N_1^e(x) = \frac{x_2^e - x}{x_2^e - x_1^e} = \frac{x_2^e - x}{l^e}, \quad \text{és} \quad N_2^e(x) = \frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e} = \frac{x - x_1^e}{l^e}. \quad (\text{D.14})$$



D.2. ábra. Lineáris bázisfüggvények egydimenziós elemeken

Tehát $\{N_1^e, N_2^e\}$ a $\mathcal{P}^e(I)$ vektortér bázisa, melyre teljesül, hogy:

$$N_j^e(x_i^e) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j. \end{cases} \quad (\text{D.15})$$

A lehető legjobb közelítő megoldást keressük az egyes elemeken, és így az egész értelmezési tartományon. Az r maradéknak a lehető legkisebbnek kell lennie az értelmezési tartomány minden pontján. Ez a következő feltételt fogja kiszabni az e -edik elemre:

$$R_i^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} N_i^e(x) r(x) dx = 0, \quad i = 1, 2. \quad (\text{D.16})$$

Helyettesítsük r helyébe a (D.7) kifejezést:

$$R_i^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} N_i^e \left\{ -\frac{d}{dx} \left(\hat{\alpha} \frac{d\tilde{\phi}}{dx} \right) + \hat{\beta} \tilde{\phi} \right\} dx - \int_{x_1^e}^{x_2^e} N_i^e f dx = 0 \quad (\text{D.17})$$

Integráljuk parciálisan R_i^e első tagját:

$$\int_{x_1^e}^{x_2^e} N_i^e \left\{ -\frac{d}{dx} \left(\hat{\alpha} \frac{d\tilde{\phi}}{dx} \right) + \hat{\beta} \tilde{\phi} \right\} dx = - \left[\hat{\alpha} N_i^e \frac{d\tilde{\phi}}{dx} \right]_{x_1^e}^{x_2^e} + \int_{x_1^e}^{x_2^e} \hat{\alpha} \frac{dN_i^e}{dx} \frac{d\tilde{\phi}}{dx} dx, \quad (\text{D.18})$$

ezzel

$$R_i^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} \left(\hat{\alpha} \frac{dN_i^e}{dx} \frac{d\tilde{\phi}}{dx} + \hat{\beta} N_i^e \tilde{\phi} \right) dx - \int_{x_1^e}^{x_2^e} N_i^e f dx - \left[\hat{\alpha} N_i^e \frac{d\tilde{\phi}}{dx} \right]_{x_1^e}^{x_2^e} = 0. \quad (\text{D.19})$$

Helyettesítsük be az első integrálba $\tilde{\phi}$ helyére ϕ^e -t. A (D.13) kifejezés alapján:

$$R_i^e = \sum_{j=1}^2 \phi_j^e \int_{x_1^e}^{x_2^e} \left(\hat{\alpha} \frac{dN_i^e}{dx} \frac{dN_j^e}{dx} + \hat{\beta} N_i^e N_j^e \right) dx - \int_{x_1^e}^{x_2^e} N_i^e f dx - \left[\hat{\alpha} N_i^e \frac{d\tilde{\phi}}{dx} \right]_{x_1^e}^{x_2^e} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (\text{D.20})$$

Ez utóbbi felírható a következő elemi mátrixegyenlet formájában:

$$\{R^e\} = [K^e] \{\phi^e\} - \{b^e\} - \{g^e\} = \{0\}, \quad (\text{D.21})$$

ahol

$$[K^e] = \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e \end{bmatrix}, \text{ és } K_{ij}^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} \left(\hat{\alpha} \frac{dN_i^e}{dx} \frac{dN_j^e}{dx} + \hat{\beta} N_i^e N_j^e \right) dx, \quad i, j = 1, 2 \quad (\text{D.22})$$

$$\{\phi^e\} = \begin{Bmatrix} \phi_1^e \\ \phi_2^e \end{Bmatrix} \quad (\text{D.23})$$

$$\{b^e\} = \begin{Bmatrix} b_1^e \\ b_2^e \end{Bmatrix}, \text{ és } b_i^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} N_i^e f dx, \quad i = 1, 2 \quad (\text{D.24})$$

$$(\text{D.25})$$

$$\{g^e\} = \begin{Bmatrix} g_1^e \\ g_2^e \end{Bmatrix}, \text{ és } g_i^e = \left(\hat{\alpha} N_i^e \frac{d\tilde{\phi}}{dx} \right) \Big|_{x=x_1^e} - \left(\hat{\alpha} N_i^e \frac{d\tilde{\phi}}{dx} \right) \Big|_{x=x_2^e} = \mp \left(\hat{\alpha} \frac{d\tilde{\phi}}{dx} \right) \Big|_{x=x_1^e}, \quad i = 1, 2 \quad (\text{D.26})$$

továbbá $[.]$ négyzetes mátrixot jelöl, míg $\{.\}$ oszlopvektort.

Terjesszük ki az egyes részintervallumhoz tartozó elemi mátrixokat oszlopvektorokat

az egész (x_1, x_{M+1}) intervallumra a következőképp:

$$[\overline{K}^e] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & \dots & e & e+1 & \dots & M+1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & K_{11}^e & K_{12}^e & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & K_{21}^e & K_{22}^e & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ e \\ e+1 \\ \vdots \\ M+1 \end{matrix}, \text{ és } \{\overline{\phi}^e\} = \begin{matrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \phi_1^e \\ \phi_2^e \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ e \\ e+1 \\ \vdots \\ M+1 \end{matrix} \end{matrix} \quad (\text{D.27})$$

és a szorzatuk:

$$[\overline{K}^e]\{\overline{\phi}^e\} = \begin{matrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ K_{11}^e\phi_1^e + K_{12}^e\phi_2^e \\ K_{21}^e\phi_1^e + K_{22}^e\phi_2^e \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ e \\ e+1 \\ \vdots \\ M+1 \end{matrix} \end{matrix} \quad (\text{D.28})$$

Továbbá

$$\{\overline{b}^e\} = \begin{matrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_1^e \\ b_2^e \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ e \\ e+1 \\ \vdots \\ M+1 \end{matrix} \end{matrix}, \quad \{\overline{g}^e\} = \begin{matrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_1^e \\ g_2^e \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ e \\ e+1 \\ \vdots \\ M+1 \end{matrix} \end{matrix} \quad (\text{D.29})$$

Az a célunk, hogy az elemi egyenletekből globális egyenleteket nyerjünk, a fenti ki-terjesztett elemi mátrix és oszlopvektorok segítségével:

$$\{R\} = \sum_{e=1}^M \{\overline{R}^e\} = \sum_{e=1}^M ([\overline{K}^e]\{\overline{\phi}^e\} - \{\overline{b}^e\} - \{\overline{g}^e\}) = \{0\}. \quad (\text{D.30})$$

Összegezzük most a $[K^e]\{\phi^e\}$ szorzatokat ($e = 1, 2, \dots, M$):

$$\sum_{e=1}^M [\overline{K}^e]\{\overline{\phi}^e\} = \left\{ \begin{array}{c} K_{11}^{(1)}\phi_1^{(1)} + K_{12}^{(1)}\phi_2^{(1)} \\ K_{21}^{(1)}\phi_1^{(1)} + K_{22}^{(1)}\phi_2^{(1)} + K_{11}^{(2)}\phi_1^{(2)} + K_{12}^{(2)}\phi_2^{(2)} \\ \vdots \\ K_{21}^{e-1}\phi_1^{e-1} + K_{22}^{e-1}\phi_2^{e-1} + K_{11}^e\phi_1^e + K_{12}^e\phi_2^e \\ \vdots \\ K_{21}^{(M-1)}\phi_1^{(M-1)} + K_{22}^{(M-1)}\phi_2^{(M-1)} + K_{11}^{(M)}\phi_1^{(M)} + K_{12}^{(M)}\phi_2^{(M)} \\ K_{21}^{(M)}\phi_1^{(M)} + K_{22}^{(M)}\phi_2^{(M)} \end{array} \right\} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ e \\ \vdots \\ M \\ M+1 \end{array} \quad (\text{D.31})$$

Használjuk most fel az elemek lokális és globális számozása közötti kapcsolatot:

$$\phi_1 = \phi_1^{(1)}, \phi_2 = \phi_2^{(1)} = \phi_1^{(2)}, \dots, \phi_e = \phi_2^{(e-1)} = \phi_1^{(e)}, (e = 2, \dots, M), \dots, \phi_{M+1} = \phi_2^{(M)}. \quad (\text{D.32})$$

Ezzel

$$\sum_{e=1}^M [\overline{K}^e]\{\overline{\phi}^e\} = \left\{ \begin{array}{c} K_{11}^{(1)}\phi_1 + K_{12}^{(1)}\phi_2 \\ K_{21}^{(1)}\phi_1 + (K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)})\phi_2 + K_{12}^{(2)}\phi_3 \\ \vdots \\ K_{21}^{e-1}\phi_{e-1} + (K_{22}^{e-1} + K_{11}^e)\phi_e + K_{12}^e\phi_{e+1} \\ \vdots \\ K_{21}^{(M-1)}\phi_{M-1} + (K_{22}^{(M-1)} + K_{11}^{(M)})\phi_M + K_{12}^{(M)}\phi_{M+1} \\ K_{21}^{(M)}\phi_M + K_{22}^{(M)}\phi_{M+1} \end{array} \right\} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ e \\ \vdots \\ M \\ M+1 \end{array}, \quad (\text{D.33})$$

azaz

$$\sum_{e=1}^M [\overline{K}^e]\{\overline{\phi}^e\} = [K]\{\tilde{\phi}\}, \text{ ahol} \quad (\text{D.34})$$

$$\{\tilde{\phi}\} = \left\{ \begin{array}{c} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_{M+1} \end{array} \right\} \quad (\text{D.35})$$

és

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & K_{21}^{(M-1)} & K_{22}^{(M-1)} + K_{11}^{(M)} & K_{12}^{(M)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & K_{21}^{(M)} & K_{22}^{(M)} \end{bmatrix} \quad (\text{D.36})$$

Láthatjuk, hogy $[K] \subset \mathbb{R}^{(M+1) \times (M+1)}$ egy szimmetrikus, tridiagonális mátrix, melynek elemei:

$$\begin{aligned} K_{11} &= K_{11}^{(1)} \\ K_{ii} &= K_{22}^{(i-1)} + K_{11}^{(i)}, \quad i = 2, 3, 4, \dots, M \\ K_{i+1,i} &= K_{i,i+1} = K_{21}^{(i)} = K_{12}^{(i)}, \quad i = 2, 3, 4, \dots, M \\ K_{M+1,M+1} &= K_{22}^{(M)}. \end{aligned} \quad (\text{D.37})$$

Mint azt már többször hangsúlyoztuk, szeretnénk számítógéppel könnyen kezelhető egyenletrendszerhez jutni, ezért szükséges, hogy a $[K]$ globális mátrix elemeiben az integrálokat valamiképp egyszerűbb alakra hozzuk. Közelítsük az $\hat{\alpha}$ és $\hat{\beta}$ függvényeket konstansokkal az egyes elemeken. Egy lehetséges megoldás erre az ún. középpontos kvadratura: pl. $\hat{\alpha} \approx \hat{\alpha}^e = \hat{\alpha} \left(\frac{x_1^e + x_2^e}{2} \right)$.

Így a $[K^e]$ elemi mátrix és a $\{b^e\}$ elemi vektor elemei approximálhatóak a következőképp:

$$K_{ij}^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} \left(\hat{\alpha} \frac{dN_i^e}{dx} \frac{dN_j^e}{dx} + \hat{\beta} N_i^e N_j^e \right) dx \approx \hat{\alpha}^e \int_{x_1^e}^{x_2^e} \frac{dN_i^e}{dx} \frac{dN_j^e}{dx} dx + \hat{\beta}^e \int_{x_1^e}^{x_2^e} N_i^e N_j^e dx \quad (\text{D.38})$$

$$\begin{aligned} K_{11}^e &= K_{22}^e \approx \frac{\hat{\alpha}^e}{l^e} + \hat{\beta}^e \frac{l^e}{3} \\ K_{12}^e &= K_{21}^e \approx -\frac{\hat{\alpha}^e}{l^e} + \hat{\beta}^e \frac{l^e}{6} \end{aligned} \quad (\text{D.39})$$

Hasonlóképpen adjuk össze a $\{\bar{b}^e\}$ kiterjesztett elemi vektorokat ($e = 1, 2, \dots, M$):

$$\sum_{e=1}^M \{\bar{b}^e\} = \{b\} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} + b_1^{(2)} \\ b_2^{(1)} + b_1^{(3)} \\ \vdots \\ b_2^{(M-1)} + b_1^{(M)} \\ b_2^{(M)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_M \\ b_{M+1} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.40})$$

Itt is alkalmazzunk középpontos kvadratúra közelítést f-re:

$$b_i^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} N_i^e f dx \approx f^e \int_{x_1^e}^{x_2^e} N_i^e dx \quad (\text{D.41})$$

$$b_1^e = b_2^e \approx f^e \frac{l^e}{2}. \quad (\text{D.42})$$

Ezután pedig a $\{\bar{g}^e\}$ vektorokat szummázzuk:

$$\sum_{e=1}^M \{\bar{g}^e\} = \{g\} = \begin{pmatrix} g_1^{(1)} \\ g_2^{(1)} + g_1^{(2)} \\ g_2^{(1)} + g_1^{(3)} \\ \vdots \\ g_2^{(M-1)} + g_1^{(M)} \\ g_2^{(M)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_M \\ g_{M+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_M \\ g_{M+1} \end{pmatrix} \quad (\text{D.43})$$

Vizsgáljuk tovább a $\{g\}$ vektort. Mivel $x_2^{(i-1)} = x_1^{(i)} = x_i$, és mivel $\hat{\alpha} \frac{d\tilde{\phi}}{dx}$ folytonos x_i -ben, $i = 2, 3, \dots, M$, ezért $i = 2, 3, \dots, M$ esetén

$$g_i = g_2^{(i-1)} + g_1^{(i)} = \left(\hat{\alpha} \frac{d\tilde{\phi}}{dx} \right) \Big|_{x=x_2^{(i-1)}} - \left(\hat{\alpha} \frac{d\tilde{\phi}}{dx} \right) \Big|_{x=x_1^{(i)}} = 0, \quad (\text{D.44})$$

ezért

$$\{g\} = \begin{pmatrix} g_1^{(1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_2^{(M)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_{M+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\hat{\alpha} \frac{d\phi}{dx} \right) \Big|_{x=x_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \left(\hat{\alpha} \frac{d\phi}{dx} \right) \Big|_{x=x_{M+1}} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.45})$$

azaz láthatjuk, hogy $\{g\}$ -nek csak az első és utolsó eleme nem zérus.

Tehát a (D.30) globális mátrixegyenlet ezekkel a fenti jelölésekkel a következőképpen írható fel:

$$[K]\{\tilde{\phi}\} = \{b\} + \{g\}. \quad (\text{D.46})$$

Ennek az egyenletnek a $\{\tilde{\phi}\}$ megoldása a $\tilde{\phi}$ közelítő megoldás csomópontokban felvett értékeit adja meg.

Utolsó lépésként alkalmazzuk a különféle peremfeltételeket az egyenletrendszerünkre. Először tekintsük azt az esetet, amikor az egyik végpontban, pl. $x_1 = 0$ -ban a Dirichlet-feltételt írjuk elő, azaz $\phi|_{x=x_1} = \phi_1 = p$. Ezt könnyen megvalósíthatjuk a következő módosítással:

$$K_{11} = 1, \quad b_1 = p, \quad K_{1j} = 0, \quad j = 2, 3, 4, \dots, M+1. \quad (\text{D.47})$$

Legyen továbbá $g = 0$. Elimináljuk továbbá az első oszlop elemeit is a másodiktól kezdve. Ezzel egyrészt elérjük, hogy a globális mátrixunk újra szimmetrikus legyen, másrészt elegendő egy kisebb egyenletrendszert kezelni. Ezek főként magasabb dimenziós differenciálegyenletek megoldásakor válnak fontos szempontokká, hiszen a számítógép memóriaigényét, és a megoldás időtartamát jelentősen csökkenti.

Alkalmazzuk most 3. típusú határfeltételt pl. az $x_{M+1} = L$ végpontra:

$$g_{M+1} = \left(\hat{\alpha} \frac{d\phi}{dx} \right) \Big|_{x=L} = q - \hat{\gamma} \phi_{M+1}. \quad (\text{D.48})$$

Homogén Neumann-feltétel esetén, azaz ha $\hat{\gamma} = 0, q = 0$, akkor $g_{M+1} = 0$. Egyéb esetben beolvaszthatjuk a $[K]$ mátrixba, és a $\{b\}$ vektorba, ha hozzáadjuk q -t b_{M+1} -hez, és $\hat{\gamma}$ -t $K_{M+1, M+1}$ -hez.

Tehát azt kaptuk, hogy bármelyik peremfeltételt is alkalmazzuk a végpontokra, mindig

$$[K]\{\tilde{\phi}\} = \{b\} \quad (\text{D.49})$$

alakú mátrixegyenlethez jutunk, ahol $[K]$ szimmetrikus, tridiagonális mátrix. Így az egyenletrendszer könnyen megoldható $\{\tilde{\phi}\}$ -re pl. Gauss-eliminációval, így megkapjuk az egydimenziós peremérték-probléma $\tilde{\phi}$ közelítő megoldását.

D.2. Kétdimenziós differenciálegyenlet megoldása a végeselemek módszerével

Tekintsük a következő kétdimenziós parciális differenciálegyenletet:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\hat{\alpha}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\hat{\alpha}_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \hat{\beta} \phi = f, \quad (x, y) \in \Omega \in \mathbb{R}^2, \quad (\text{D.50})$$

ahol ϕ a keresett függvény, $\hat{\alpha}_x$, $\hat{\alpha}_y$ és $\hat{\beta}$ ismert függvények vagy paraméterek, amelyek az értelmezési tartomány fizikai tulajdonságaival állnak összefüggésben, f pedig a forrás vagy gerjesztés függvénye.

Bontsuk két részre, az általánosság kedvéért, az Ω tartomány határát, és az egyikre alkalmazzuk a Dirichlet, míg a másik részre a 3. típusú peremfeltételt, azaz legyen

$$\phi|_{\Gamma_1} = p \quad (\text{D.51})$$

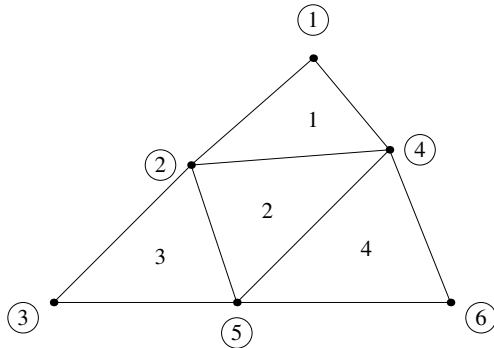
és

$$\left\{ \left(\hat{\alpha}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \hat{\alpha}_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} \right) \hat{\mathbf{n}} + \hat{\gamma} \phi \right\} \Big|_{\Gamma_2} = q, \quad (\text{D.52})$$

ahol $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ az Ω tartomány határa, $\hat{\mathbf{n}}$ ennek a külső normális irányú egységvektora, és $\hat{\gamma}$, p és q adott paraméterek, vagy függvények, amelyek a perem fizikai tulajdonságait tükrözik. A Neumann-féle peremfeltétel a 3. típusúnak a speciális esete, amikor $\hat{\gamma}=0$.

Az első feladat ebben az esetben is a tartomány felosztása. Válasszuk ezeket az elemeket háromszögeknek. A háromszögek élei mindig élben találkoznak a szomszéd háromszöggel, csúcsaik pedig csúcsban, és nem fedik át egymást. Általában az bizonyul jó választásnak, ha kisebb elemeket alkalmazunk, ahol a megoldás drasztikusabban változik, és nagyobbakat ott, ahol kevésbé hirtelen a változás. Jelölje Ω^e az e -edik elemet, $\Omega = \bigcup_e \Omega^e$.

Az elemeket és csomópontokat különböző egészekkel címkézhetjük. Az elemeket sorszámmal látjuk el, valamint az egyes elemeken a csúcsok lokális számozását vezetjük be. Ugyanakkor a csúcsokra globális számozást is alkalmazunk, így szükség van egy áttekinthető számozási rendszerre, amely összeköti a lokális és globális számozást. Bevezetünk egy $3 \times M$ -as táblázatot, nevezzük ezt kapcsolódási táblázatnak vagy mátrixnak. Jelölje $n(i, e)$ az e -edik elem i -edik csomópontjának globális számát, pl. a D.2. ábrához tartozó lehetséges mátrix:



e	1	2	3	4
n(1,e)	2	5	3	5
n(2,e)	4	4	5	6
n(3,e)	1	2	2	4

D.1. táblázat. Kapcsolódási mátrix

D.3. ábra. Egy egyszerű kétdimenziós tartomány háromszögekre bontása

Miután elkészítettük az értelmezési tartomány felosztását, idegen szóval a mesht, kiválasztjuk az interpolációs bázist. Legyen

$$\mathcal{Q}(\Omega^e) = \{\phi^e(x, y) = a^e + b^e x + c^e y, (x, y) \in \Omega^e, a^e, b^e, c^e \in \mathbb{R}\}. \quad (\text{D.53})$$

az Ω^e tartományon lineáris függvények vektortere, azaz az e -edik elemen a keresett ϕ függvényt elemi síklapokkal közelítjük.

Mivel lineáris trianguláris elemeket használunk, ezért 3 csomópont tartozik minden háromszöghöz. Tegyük fel, hogy ezek az óramutató járásával ellentétesen vannak a $j = 1, 2, 3$ számokkal ellátva, és hogy ezek fölött a csomópontok felett $\tilde{\phi}$ értékét ϕ_1^e , ϕ_2^e és ϕ_3^e jelöli. Az egyes csúcsokban ϕ^e értéke:

$$\begin{aligned} \phi_1^e(x_1^e, y_1^e) &= a^e + b^e x_1^e + c^e y_1^e \\ \phi_2^e(x_2^e, y_2^e) &= a^e + b^e x_2^e + c^e y_2^e \\ \phi_3^e(x_3^e, y_3^e) &= a^e + b^e x_3^e + c^e y_3^e, \end{aligned} \quad (\text{D.54})$$

ahol $x_j^e, y_j^e, (j = 1, 2, 3)$ jelöli az e -edik elem j -edik csomópontjának koordinátáit. Ha megoldjuk a (D.54) egyenletrendszert az együtthatókra, majd visszahelyettesítünk $\phi^e(x, y)$ -ba, akkor azt kapjuk, hogy

$$\phi^e(x, y) = \sum_{j=1}^3 N_j^e(x, y) \phi_j^e. \quad (\text{D.55})$$

Itt $N_j^e(x, y)$ a következőképp adható meg:

$$N_j^e(x, y) = \frac{1}{2\Delta^e} (a_j^e + b_j^e x + c_j^e y), \quad j = 1, 2, 3, \quad (\text{D.56})$$

ahol

$$\begin{aligned} a_1^e &= x_2^e y_3^e - y_2^e x_3^e & b_1^e &= y_2^e - y_3^e & c_1^e &= x_3^e - x_2^e \\ a_2^e &= x_3^e y_1^e - y_3^e x_1^e & b_2^e &= y_3^e - y_1^e & c_2^e &= x_1^e - x_3^e \\ a_3^e &= x_1^e y_2^e - y_1^e x_2^e & b_3^e &= y_1^e - y_2^e & c_3^e &= x_2^e - x_1^e, \end{aligned}$$

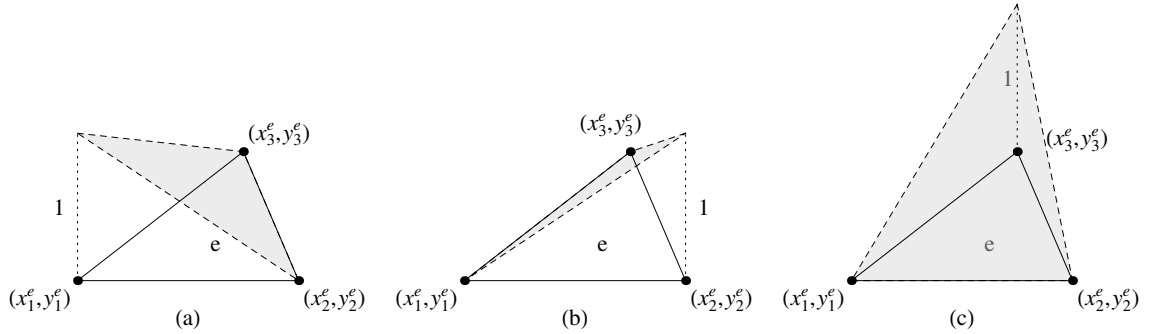
és

$$\Delta^e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (b_1^e c_2^e - b_2^e c_1^e) \quad (\text{D.57})$$

az e -edik háromszög területe. Könnyen megmutatható, hogy

$$N_i^e(x_j^e, y_j^e) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases} \quad (\text{D.58})$$

Szintén megmutatható, hogy $N_j^e(x, y) = 0$, ha az (x, y) pont a j csomóponttal szemben lévő élen van.



D.4. ábra. Lineáris bázisfüggvények trianguláris elemeken. (a) N_1^e , (b) N_2^e , (c) N_3^e

Az $\{N_1^e, N_2^e, N_3^e\}$ a $\mathcal{Q}^e(\Omega^e)$ vektortér bázisa. A bázisfüggvények segítségével meghatározható a $\phi^e(x, y)$ függvény a (D.55) által.

Ezután felépítjük azt a mátrixegyenletet, amelynek megoldása a legjobb közelítést adja a fenti bázisban. A peremérték-probléma közelítéséből adódó maradékot szeretnénk minimalizálni az egész Ω tartományon. Ezért legyen az e elemen a súlyozott reziduális

$$R_i^e = \int_{\Omega^e} N_i^e(x, y) r(x, y) dx dy = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (\text{D.59})$$

ahol

$$r = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\hat{\alpha}_x \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\hat{\alpha}_y \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} \right) + \hat{\beta} \tilde{\phi} - f \neq 0. \quad (\text{D.60})$$

Behelyettesítve a reziduálist (D.60) a (D.59) integrálegyenletbe, azt kapjuk, hogy

$$R_i^e = \int_{\Omega^e} N_i^e \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} \left(\hat{\alpha}_x \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\hat{\alpha}_y \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} \right) + \hat{\beta} \tilde{\phi} - f \right\} dx dy = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{D.61})$$

A következő lépéshez általánosítsuk a parciális integrálást magasabb dimenziós esetre. Alkalmazzuk a B. függelékben ismertetett Gauss-tételt egy g skalár- és egy $\mathbf{D}$ vektormező szorzatára, azaz tetszőleges zárt Ω tartományra fennáll, hogy

$$\int_{\Omega} \nabla(g\mathbf{D}) d\Omega = \int_{\Gamma} (g\mathbf{D}) \hat{\mathbf{n}} d\Gamma. \quad (\text{D.62})$$

Alkalmazzuk a

$$\nabla(g\mathbf{D}) = g\nabla \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D}\nabla g \quad (\text{D.63})$$

szorzatszabályt, majd rendezzük át az egyenletet. Így valóban a parciális integrálás for-

mulájára emlékeztető összefüggéshez jutunk:

$$-\int_{\Omega} g \nabla \cdot \mathbf{D} d\Omega = -\int_{\Gamma} g \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{D} \nabla g d\Omega \quad (\text{D.64})$$

Alkalmazzuk ezt az összefüggést a (D.61) egyenletre, bevezetve a következő jelöléseket:

$$g = N_i^e \Rightarrow \nabla g = \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} \quad (\text{D.65})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\hat{\alpha}_x \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\hat{\alpha}_y \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} \right) \Rightarrow \mathbf{D} = \hat{\alpha}_x \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \hat{\alpha}_y \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} \hat{\mathbf{y}}. \quad (\text{D.66})$$

Így a következő egyenletrendszerhez jutunk ($i = 1, 2, 3$):

$$R_i^e = \int_{\Omega^e} \left(\hat{\alpha}_x \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} + \hat{\alpha}_y \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} + \hat{\beta} N_i^e \tilde{\phi} \right) dx dy - \int_{\Omega^e} N_i^e f dx dy - \int_{\Gamma^e} N_i^e \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}^e d\Gamma = 0 \quad (\text{D.67})$$

Helyettesítsük $\tilde{\phi}$ helyére a (D.55) kifejezést, azaz a lineáris bázisfüggvényekkel való közelítést:

$$\begin{aligned} R_i^e &= \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega^e} \left(\hat{\alpha}_x \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \hat{\alpha}_y \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} + \hat{\beta} N_i^e N_j^e \right) \phi_j^e dx dy \\ &- \int_{\Omega^e} N_i^e f dx dy - \int_{\Gamma^e} N_i^e \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}^e d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (\text{D.68})$$

Ilyen módon az egydimenziós esettel teljesen analóg mátrixegyenlethez jutottunk:

$$\{R^e\} = [K^e] \{\phi^e\} - \{b^e\} - \{g^e\} = \{0\}, \quad (\text{D.69})$$

ahol

$$\{\phi^e\} = \begin{Bmatrix} \phi_1^e \\ \phi_2^e \\ \phi_3^e \end{Bmatrix}, \quad [K^e] = \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & K_{23}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e \end{bmatrix}, \quad (\text{D.70})$$

és

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \left(\hat{\alpha}_x \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \hat{\alpha}_y \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} + \hat{\beta} N_i^e N_j^e \right) dx dy, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{D.71})$$

$$(\text{D.72})$$

$$\{b^e\} = \begin{Bmatrix} b_1^e \\ b_2^e \\ b_3^e \end{Bmatrix}, \text{ és } b_i^e = \int_{\Omega^e} N_i^e f dx dy, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{D.73})$$

$$(\text{D.74})$$

$$\{g^e\} = \begin{Bmatrix} g_1^e \\ g_2^e \\ g_3^e \end{Bmatrix}, \text{ és } g_i^e = \int_{\Gamma^e} N_i^e \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}^e d\Gamma. \quad (\text{D.75})$$

A $[K^e]$ mátrix természetesen kétdimenziós esetben is szimmetrikus.

Adjunk ismét numerikus közelítést a fenti integrálokra. Tegyük fel, hogy $\hat{\alpha}_x, \hat{\alpha}_y, \hat{\beta}$ és f függvények állandók az egyes elemeken. Ha ez nem teljesül, akkor egydimenziós esettel analóg módon használhatjuk a középpontos kvadraturát.

Megmutatható továbbá, hogy érvényes a következő formula:

$$\int_{\Omega} (N_1^e)^l (N_2^e)^m (N_3^e)^n dx dy = \frac{l! m! n!}{(l + m + n + 2)!} 2\Delta^e, \quad l, m, n \in \mathbb{N}. \quad (\text{D.76})$$

Ezzel

$$K_{ij}^e = \frac{1}{4\Delta^e} (\hat{\alpha}_x b_i^e b_j^e + \hat{\alpha}_y c_i^e c_j^e) + \frac{\Delta^e}{12} \hat{\beta}^e (1 + \delta_{ij}) \quad (\text{D.77})$$

$$b_i^e = \frac{\Delta^e}{3} f^e. \quad (\text{D.78})$$

Egyesítsük az elemi egyenleteket, hogy a globális mátrixegyenlethez jussunk:

$$\{R\} = \sum_{e=1}^M \{\bar{R}^e\} = \sum_{e=1}^M ([\bar{K}^e] \{\bar{\phi}^e\} - \{\bar{b}^e\} - \{\bar{g}^e\}) = \{0\}. \quad (\text{D.79})$$

Gyűjtsük össze az elemi mátrixokat és vektorokat a teljes tartományra. Ez két dimenzióban nagyobb körültekintést igényel, mint egy dimenzióban. Illusztráljuk elsőként a már említett példán (D.2. ábra). Mind a 4 elemnek 3 csomópontja van, a teljes tartományon összesen 6 csomópont található. Így az egyes elemekhez 3×3 -as elemi mátrix tartozik, míg a tartományhoz 6×6 -os globális mátrix. A $[K]$ mátrix K_{kl} eleme a globális rendszer k -adik és l -edik csomópontjához tartozik. Induljunk ki tehát egy 6×6 -os nullmátrixból. Ezután adjuk hozzá $[K^e]$ megfelelő elemeit $[K]$ megfelelő elemeihez ($e = 1 \dots 4$). Tekintsük általánosan K_{ij}^e -t ($i, j = 1, 2, 3$). Ez az e -edik elem i -edik és j -edik csomópontjához tartozik. A kapcsolódási táblázat szerint ezek a globális rendszerben az $n(i, e)$ és $n(j, e)$ számú csomópontok, így a globális mátrix $K_{n(i, e), n(j, e)}$ eleméhez kell hozzáadni.

A példánkra ez a következőképp néz ki. Elsőként az első elemi mátrix elemeit adjuk

hozzá a nullmátrixhoz:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{33}^{(1)} & K_{31}^{(1)} & 0 & K_{32}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{13}^{(1)} & K_{11}^{(1)} & 0 & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{23}^{(1)} & K_{21}^{(1)} & 0 & K_{22}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{D.80})$$

majd folytassuk tovább az algoritmus szerint mind a négy elemre. Így a globális mátrix erre a tartományra:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{33}^{(1)} & K_{31}^{(1)} & 0 & K_{32}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{13}^{(1)} & K_{11}^{(1)} + K_{33}^{(2)} + K_{33}^{(3)} & K_{31}^{(3)} & K_{12}^{(1)} + K_{32}^{(2)} & K_{31}^{(2)} + K_{32}^{(3)} & 0 \\ 0 & K_{13}^{(3)} & K_{11}^{(3)} & 0 & K_{12}^{(3)} & 0 \\ K_{23}^{(1)} & K_{21}^{(1)} + K_{23}^{(2)} & 0 & K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(2)} + K_{33}^{(4)} & K_{21}^{(2)} + K_{31}^{(4)} & K_{32}^{(4)} \\ 0 & K_{13}^{(2)} + K_{23}^{(3)} & K_{21}^{(3)} & K_{12}^{(2)} + K_{13}^{(4)} & K_{11}^{(2)} + K_{22}^{(3)} + K_{11}^{(4)} & K_{12}^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & K_{23}^{(4)} & K_{23}^{(4)} & K_{22}^{(4)} \end{bmatrix} \quad (\text{D.81})$$

Hasonlóképp állítjuk össze a $\{b\}$ vektort. Induljunk ki itt is egy nullvektorból, majd adjunk hozzá b_i^e -t $b_{n(i,e)}$ -hez.

$$\{b\} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_3^{(1)} \\ b_1^{(1)} + b_3^{(2)} + b_3^{(3)} \\ b_1^{(3)} \\ b_2^{(1)} + b_2^{(2)} + b_3^{(4)} \\ b_1^{(2)} + b_2^{(3)} + b_1^{(4)} \\ b_2^{(4)} \end{bmatrix} \quad (\text{D.82})$$

Analóg módon:

$$\{g\} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_3^{(1)} \\ g_1^{(1)} + g_3^{(2)} + g_3^{(3)} \\ g_1^{(3)} \\ g_2^{(1)} + g_2^{(2)} + g_3^{(4)} \\ g_1^{(2)} + g_2^{(3)} + g_1^{(4)} \\ g_2^{(4)} \end{bmatrix} \quad (\text{D.83})$$

Tekintsük a 2. csúcshoz tartozó g_2 elemet. Használjuk a (D.75) kifejezést $g_1^{(1)}$, $g_3^{(2)}$ és

$g_3^{(3)}$ meghatározására, felhasználva, hogy az i -edik csúccsal szemben lévő élen $N_i^e = 0$.

$$g_2 = \left\{ \int_{\textcircled{1}}^{\textcircled{2}} N_1^{(1)} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(1)} d\Gamma + \int_{\textcircled{2}}^{\textcircled{4}} N_1^{(1)} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(1)} d\Gamma \right\} \quad (\text{D.84})$$

$$+ \left\{ \int_{\textcircled{2}}^{\textcircled{5}} N_3^{(2)} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(2)} d\Gamma + \int_{\textcircled{4}}^{\textcircled{2}} N_3^{(2)} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(2)} d\Gamma \right\} \quad (\text{D.85})$$

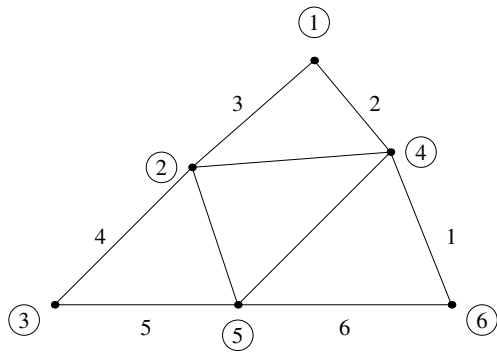
$$+ \left\{ \int_{\textcircled{2}}^{\textcircled{3}} N_3^{(3)} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(3)} d\Gamma + \int_{\textcircled{5}}^{\textcircled{2}} N_3^{(3)} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(3)} d\Gamma \right\} \quad (\text{D.86})$$

Vegyük észre, hogy $\hat{\mathbf{n}}^{(1)} = -\hat{\mathbf{n}}^{(2)}$, és hogy $N_1^{(1)} = N_3^{(2)}$. Mivel $\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ folytonos Ω -n, ezért a 2. és 4. csúcsok közötti integrálok nem járulnak hozzá g_2 -höz. Ugyanígy a 2. és 5. csúcsok közötti integrálok is kiejtik egymást. A példa alapján látható, hogy csak a peremen lévő háromszögöldalak járulnak hozzá $\{g\}$ -hez. Így a tartomány minden belső csúcspontjához tartozó $g_i = 0$. Általánosan a $g_i \neq 0$ elemre:

$$g_i = \int_{\Omega^s} N_j^e \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}^e d\Gamma + \int_{\Omega^{s+1}} N_{\tilde{j}}^{\tilde{e}} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{\tilde{e}} d\Gamma, \quad (\text{D.87})$$

ahol Γ^s és Γ^{s+1} az e -edik és $\tilde{e}$ -edik elem határon fekvő oldalai, és e, j, i , illetve $\tilde{e}, \tilde{j}, \tilde{i}$ indexek kapcsolatát az $i = n(j, e)$, illetve a $\tilde{i} = n(\tilde{j}, \tilde{e})$ összefüggésekkel fejezhetjük ki.

A peremfeltételek alkalmazása előtt vezessünk be egy újabb mátrixot, amely az élek és a globális számozás közötti kapcsolatot tartalmazza. Legyen $ns(i, s)$ a globális száma az s -edik él i -edik csúcsának. Tekintsük a korábban alkalmazott egyszerű példánkat:



s	1	2	3	4	5	6
ns(1,s)	6	4	1	2	3	5
ns(2,s)	4	1	2	3	5	6

Ezután alkalmazzuk a peremfeltételeket. A Dirichlet-peremfeltétel meghatározza a ϕ_i értékeket a Γ_1 -en fekvő csúcsokban, legyen $\phi_i = p_i$. Az egydimenziós esethez hasonlóan ezt implementálhatjuk a

$$g_i = 0, \quad b_i = p_i, \quad K_{ii} = 1 \quad \text{és} \quad K_{ij} = 0, \quad j \neq i\text{-re} \quad (\text{D.88})$$

választással. Ahhoz, hogy a szimmetria ne sérüljön, itt is elimináljuk az i -edik oszlop elemeit, $K_{ji} = 0$, $j \neq i$ esetén. Eredményképp itt is azt találjuk, hogy elegendő egy kisebb rendszerre meghatározni a megoldást.

A 3. típusú peremfeltételt alkalmazzuk a Γ_2 -n lévő csúcsokra: $\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} = q - \hat{\gamma}\phi$. Így

$$g_i = \int_{\Gamma^s} N_j^e(q - \hat{\gamma}\phi) d\Gamma + \int_{\Gamma^{s+1}} N_j^{\bar{e}}(q - \hat{\gamma}\phi) d\Gamma, \quad (\text{D.89})$$

ahol Γ^s , illetve Γ^{s+1} jelöli az i -edik csúcsba jobbról, illetve balról befutó élt. Az N_j^e értéke az i -edik csúcsban 1, és lineárisan változik a szomszédos csúcsokig, ahol 0 értéket vesz fel.

Ezek felett az élek felett a ϕ megoldás közelíthető a következőképp:

$$\phi^s(x, y) = \sum_{j=1}^2 N_j^s(x, y) \phi_j^s, \quad (\text{D.90})$$

ahol

$$N_1^s = 1 - \xi, \quad N_2^s = \xi, \quad (\text{D.91})$$

és ξ az s él 1-es csúcsától vett normalizált távolságot jelöli $\xi \in (0, 1)$. Ezért

$$\begin{aligned} g_i &= \int_0^1 \xi(q - \hat{\gamma}\phi^s) l^s d\xi + \int_0^1 (1 - \xi)(q - \hat{\gamma}\phi^{s+1}) l^{s+1} d\xi \\ &= \int_0^1 N_2^s \left(q - \hat{\gamma} \sum_{j=1}^2 N_j^s \phi_j^s \right) l^s d\xi + \int_0^1 N_1^{s+1} \left(q - \hat{\gamma} \sum_{j=1}^2 N_j^{s+1} \phi_j^{s+1} \right) l^{s+1} d\xi, \end{aligned} \quad (\text{D.92})$$

vagy a

$$K_{ij}^s = \int_0^1 \hat{\gamma} N_i^s N_j^s l^s d\xi \quad (\text{D.93})$$

$$b_i^s = \int_0^1 q N_i^s l^s d\xi \quad (\text{D.94})$$

jelölésekkel:

$$g_i = b_2^s - \sum_{j=1}^2 K_{2j}^s \phi_j^s + b_1^{s+1} - \sum_{j=1}^2 K_{1j}^{s+1} \phi_j^{s+1}. \quad (\text{D.95})$$

Tehát $[g_i]$ -t beolvaszthatjuk a $[K]$ mátrixba, illetve a b vektorba, ha b_2^s -et és b_1^{s+1} -et hozzáadjuk b_i -hez, valamint K_{2j}^s értéket $K_{j,ns(j,s)}$ -hez, és a K_{1j}^{s+1} -et $K_{i,ns(j,s+1)}$ -hez. Ha a Γ_2 -n a homogén Neumann-peremfeltételt írjuk elő, akkor

$$\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \Rightarrow g_i = 0. \quad (\text{D.96})$$

Nyilatkozat

Alulírott Somogyi Anikó kijelentem, hogy a TDK-dolgozatban foglaltak a saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, programok, stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy TDK-dolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

Szeged, 2015. január 7.

.....

aláírás

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, *dr. Czirjákné dr. Csete Máriának*, az Optikai és Kvantumelektronikai Tanszék oktatójának, a téma ötletéért, a megvalósításban nyújtott segítségért. Köszönöm a távlati célok iránti lelkesítést.

Ezúton szeretnék köszönetet mondani külső témavezetőmnek, *dr. Van Leeuwen-Polner Mónikának*, az Alkalmazott és Numerikus Matematika Tanszék oktatójának, aki a végeelem-analízisbe vezetett be.

Továbbá köszönettel tartozom a Nanoplazmonika csoport tagjainak, *Sipos Áronnak*, és *Szekeres Gábornak*, akiktől a COMSOL használatát elsajátítottam, valamint *Szalai Anikónak* akivel az RGC-SPR-projektben közösen veszünk részt.

Köszönetet mondok továbbá a családomnak és a barátaimnak, akik végig támogattak a dolgozat megírása alatt.

Irodalomjegyzék

- [1] J. Jin, *The finite element method in electromagnetics*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 2002.
- [2] Hevesi I., *Elektromosságtan*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1998.
- [3] COMSOL Multiphysics, *RF Module User's Guide*, 2008.
- [4] M. G. Larson, F. Bengzon, *The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Practice*, Springer, Umeå, 2010.
- [5] H. A. Haus, J. R. Melcher, *Electromagnetic Fields and Energy*, Prentice-Hall, New Jersey, 1989.
- [6] Simonyi K., *Elméleti villamosságtan*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1967.
- [7] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1962.
- [8] Benedict M., *Elektrodinamika*, JATEPress, Szeged, 2000.
- [9] Harrington, R. F. *Time-harmonic Electromagnetic Fields* McGraw-Hill, Inc., New York, 1961.
- [10] Pincherle, L., *Electromagnetic waves in metal tubes filled longitudinally with two dielectrics*, Physical Review, Vol. 66, 1944.
- [11] Davanço, M., Urzhumov, Y., Shvets, G., *The complex Bloch bands of a 2D plasmonic crystal displaying isotropic negative refraction*, Opt. Express 15, 2007.
- [12] A. Szalai, G. Szekeres, J. Balázs, A. Somogyi, M. Csete, *Rotated grating coupled surface plasmon resonance on wavelength-scaled shallow rectangular gratings* Proc. SPIE 8809, Plasmonics: Metallic Nanostructures and Their Optical Properties XI, 2013.

- [13] Johnson, P. B., Christy, R. W., *Optical constants of the noble metals*, Phys. Rev. B 6/12, 1972.
- [14] Raether, H., *Surface Plasmons on Smooth and Rough Surfaces and on Gratings*, Springer Tracts in Modern Physics, Vol. 111, 1988.