

Tartalom

1	Előszó	2
2	Bevezetés	4
3	Geometriai transzformációk	5
4	Analitikus geometria	6
4.1	Koordinátarendszerek	7
4.2	Derékszögű - Descartes - koordinátarendszer	7
4.3	Polárkoordináták	8
4.4	Ferdeszögű koordinátarendszer	9
4.5	Affin sík	10
4.6	Projektív sík	11
5	Koordinátarendszerek alkalmazása	13
6	Derékszögű koordinátarendszer eszközei	14
7	Ferdeszögű koordinátarendszer eszközei	16
7.1	Két pont távolsága, szakasz hossza	16
7.2	Két vektor merőlegességi feltétele	17
7.3	Kör egyenlete	18
8	Derékszögű koordinátarendszer alkalmazása feladatokban	19
9	Ferdeszögű koordinátarendszer alkalmazása feladatokban	26
10	Mértani hellyel kapcsolatos feladatok	37
11	Feladatgyűjtemény	45
12	Irodalomjegyzék	48

1 Előszó

Mai modern világunkban megengedhetetlennek tartom, hogy a különféle lehetőségeket nyújtó témaköröket figyelmen kívül hagyhassuk a matematika különböző területein. Úgy gondolom, hogy egy pedagógusnak nyitottnak kell lenni az ilyen fajta tanításra, még akkor is, ha az iskola keretei nem engedhetik meg ilyen mélységekben a tanítást. Ugyanakkor fontosnak tartom, hogy a diákok többféle képet is lássanak egy matematikai problémáról, nem szabad elfelejteni azt, hogy ami számunkra könnyű, az lehetséges, hogy másoknak sokkal nehezebben fog menni. Ennek tudatában igyekszem tanítani is.

A munkám által rövid áttekintést szeretnék adni a koordinátarendszer nyújtotta lehetőségekről, a dolgozat kerete nem teszi lehetővé számomra a téma teljes kibontását és körüljárását. Nem is ez volt a célom, hiszen rengeteg kiváló szerző tollából született már szakirodalom e témában, melyek az érdeklődők rendelkezésére állnak.¹

Munkám célja egy *Geometriai* probléma megoldása a koordinátarendszer segítségével.

Ezzel a megoldással a gyakorlat szempontjából egyaránt fontos ismeretekre tehetünk szert, hiszen az eredmények az *egyes problémák* érdekes részleteire világíthatnak rá, másrészt lehetővé tehetik a tanulók más szempontból való vizsgálódását az egyes feladatokban.

A geometriai feladatok ma is az egyik legfontosabb és talán legnehezebb része a matematikaoktatásnak, széles körben előkerülő feladat típusok egyike a világon. Sajnos igen sok tanuló küszködik ezen feladatok megoldásával.

Középiskolás éveim óta az az elképzelésem, hogy matematika-tanítással szeretnék foglalkozni életem során, valamint leendő matematika és biológia szakos tanárként mondhatom, hogy a matematika mindig is érdekelt. Az analitikus geometria témakör volt az egyik legkedvesebb számomra a középiskolás matematika tanításában. Úgy vélem, az ebben a témakörben megfogalmazott kérdéskör lehet a legalkalmasabb dolgozatom témájául.

Sajnos, az utóbbi évtizedben a koordinátageometria oktatása leszűkült olyan feladattípusokra, amelyek előre adják a koordinátarendszer használatát, mint például adva van az egyenes egyenlete vagy pont koordinátája. E dolgozat célja, hogy a különböző feladatokban

¹ FARAGÓ LÁSZLÓ: A koordináta-geometria tanításának módszertana Tankönyvkiadó vállalat Budapest 1957
HÓDI ENDRE: Matematika IV [Az analitikus geometria tanítása] középiskolai általános továbbképzés tananyag Budapest 1952

segédeszközként használjuk a koordinátarendszereket, esetenként olyan problémák során, melyek első elolvasás után nem feltétlen a koordinátageometriai megoldása jut eszünkbe.

EINSTEIN egyik mondata a tanulás egyik leglényegesebb összetevőjét hangsúlyozza:

„... meglehetősen érdeklődő vagyok”.

Nekünk, akik eredményesen szeretnénk tanítani, komoly odafigyelést kell fordítanunk erre a tényezőre. Feladatunk az, hogy gazdagabb oktatási-tanulási lehetőségeket biztosítsunk a modern társadalom igényeinek megfelelően gyermekeink számára.

Emiatt dolgozatomat kedvformálónak szánom minden olvasónak, szaktársaimnak, akik érdeklődnek e téma iránt, de kevés idejük van belemélyedni. Szeretném szűkebb környezetem figyelmét felkelteni a tehetséggondozás és versenyzés témakörén belül a pedagógiai lehetőségekre.

Nem szeretném azt a látszatot kelteni, hogy a „hagyományos” módon történő oktatást nem tartom fontosnak, vagy éppenséggel hatékonynak. Sokkal inkább az a véleményem, hogy a több módszer együttes, egy időben történő alkalmazásával érhető el a maximális eredmény.

2 Bevezetés

A magyar középiskolákban az 1850-es évek óta önálló anyagrészként szerepel az analitikus geometria. A reformmozgalom szószólói már az 1900-as évek elején felhívták a figyelmet ennek az anyagrésznek a fontosságára a matematika-oktatáson és a fizikaoktatáson – időbeli sebesség változás ábrázolása - belül, mind a függvényábrázolásban, mind pedig a geometria problémák tárgyalásában.

Dolgozatomban csak a sík analitikus geometriájával foglalkozom. Megismerkedünk a különböző típusú koordinátarendszerekkel, s az általuk nyújtotta lehetőségekkel. Röviden bemutatom az analitikus geometria kialakulását és jelenlegi helyzetét a közoktatásban. Figyelembe veszem az elemi geometria módszereit a feladat megoldásokban, hiszen e módszerek ismerete nélkül alkalmazhatatlan a koordinátarendszer a megoldások során.

A megoldott feladatokat csoportokba sorolom, az első csoportban lesznek azok a feladatok, melyek derékszögű - Descartes - koordinátarendszer segítségével oldhatók meg a legkönnyebben. A második csoportban alkalmazom a ferdeszögű koordinátarendszer által nyújtott lehetőségeket a problémákban. Végül a harmadik csoportban mértani helyes feladatokat gyűjtöttem.

Elismerem, hogy a példákat, amelyeket gyűjtöttem más eljárásokkal, sőt néha *szebben* is meg lehet oldani, de a célom az volt, hogy megmutassam a koordinátarendszerek nyújtotta lehetőségeket, amelyek felett egy pedagógus nem hunyhat szemet.

3 Geometriai transzformációk

Ebben a fejezetben azt vizsgálom meg, hogy melyek a tanulóknak azok a legfontosabb ismereteik a geometriában, amelyek az analitikus geometria tanítását előkészítik.

A *geometriai transzformációk* olyan függvények - egyértelmű hozzárendelések - amelyek ponthoz pontot rendelnek hozzá, azaz értelmezési tartományuk is és értékkészletük is ponthalmaz.²

„Egy geometriai transzformációnak a *fixpontja* az a pont, amelynek a képe önmaga. *Fix egyenes - tengely* - az olyan egyenes, amelynek minden pontjának a képe önmaga. Ha egy egyenes képe önmaga, de nem minden pontja fixpont, akkor azt invariáns egyenesnek nevezzük.”³ Azt a geometriai transzformációt, amely a sík – vagy tér – minden pontjához önmagát rendeli hozzá, *identikus transzformációnak*, vagy röviden *identitásnak* nevezzük.⁴ A *centrum* egy fix pont, amelyre az illeszkedő egyenesek invariáns egyenesek.

„Egy geometriai transzformációra azt mondjuk, hogy:

- Szimmetrikus, ha a egy Q pont képe Q' és Q' képe Q .
- Távollágtartó, ha bármely QP szakasz képe vele azonos hosszúságú $Q'P'$ szakasz.
- Aránytartó, ha bármely két szakasz hosszának aránya egyenlő a képszakaszok hosszának arányával.
- Szögtartó, ha bármely szög képe vele azonos nagyságú szög.
- Irányítástartó, ha bármely síkidom és a képének a körüljárása azonos.
- Irányításváltó, ha bármely síkidom és a képének a körüljárása ellentétes.

Ha egy geometriai transzformáció távollágtartó, akkor *egybevágósági transzformációnak* nevezzük. Minden síkbeli egybevágósági transzformáció előállítható legfeljebb három tengelyes tükrözés egymás utáni alkalmazásával. Minden térbeli egybevágósági transzformáció előállítható legfeljebb négy síkra való tükrözés egymás utáni alkalmazásával.

Ha egy geometriai transzformáció aránytartó, akkor *hasonlósági transzformációnak* nevezzük. Minden hasonlósági transzformáció előállítható egy középpontos hasonlóság és egy egybevágósági transzformáció egymás utáni alkalmazásával. Két alakzat egybevágó, ha van olyan *egybevágósági transzformáció*, amely egyiket a másikba viszi. Két alakzat hasonló, ha van olyan *hasonlósági transzformáció*, amely egyiket a másikba viszi.”⁵

²² DR. KOSZTOLÁNYI JÓZSEF: Sokszínű matematika 9, Mozaik kiadó, Szeged, 2011 (ISBN: 978 963 697 347 6)

³ Forrás: <http://users.itk.ppke.hu/~adorjan/matematika/list.html> (utolsó letöltés: 2014.11.01)

⁴ DR. KOSZTOLÁNYI JÓZSEF: Sokszínű matematika 9, Mozaik kiadó, Szeged, 2011 (ISBN: 978 963 697 347 6)

⁵ Forrás: <http://users.itk.ppke.hu/~adorjan/matematika/list.html> (utolsó letöltés: 2014.11.01)

4 Analitikus geometria

A koordináta geometria, a geometriai fogalmaknak algebrai fogalmakat feleltet meg, vagyis a síkbeli – vagy térbeli – geometriai alakzatokhoz mennyiséget rendel.

Például, a sík geometriában egy pontnak az x, y koordináta rendszerben egy számpár felel meg – $P(x; y)$. Az egyenesnek egy elsőfokú (lineáris) egyenlet, a körnek, ellipszisnek, parabolának, hiperbolának kétváltozós másodfokú egyenlet felel meg.

Azaz a koordináta geometria a matematika azon ága, mely algebrai úton, egy koordináta rendszerben vizsgálja a síkbeli – vagy térbeli elemek egymáshoz viszonyított kölcsönös helyzetét.

Ez a tudományág Descartes (René Descartes (1596-1650)⁶-féle derékszögű sík koordináta rendszer) és Leonard Euler (1707-1783)⁷ matematikusok nevéhez fűződik, akik sokat tettek az analitikus geometria fejlődéséért.

A matematikai analízis alapjául szolgált a XVII. század innovációja, a mozgás matematikájának megszületése. Nem Descartes jelenti a kezdetet, hanem Apollóniosz, habár ő nem vezette be a koordináta rendszer fogalmát, de valójában ferdeszögű koordináta rendszerben dolgozott. A derékszögű koordináta rendszert elsőként Oresme (1320-1382)⁸ alkalmazza az időbeli sebességváltozás ábrázolásakor, ennél nem fejlettebb a mai Descartes nevével összekapcsolódott koordináta rendszer. Mégis ezt a fogalmat nem véletlen

⁶ René Descartes

Francia filozófus, matematikus, természettudós

Forrás: <http://tudosnapar.kfki.hu/historia/egyen.php?nanev=descartes> (utolsó letöltés: 2014.09.09)

⁷ Leonard Euler

Svájci matematikus és fizikus

Forrás: <http://tudosnapar.kfki.hu/historia/egyen.php?nanev=euler> (utolsó letöltés: 2014.09.09)

⁸ Nicolas Oresme

Francia természettudós, matematikus, fizikus, csillagász, filozófus, lisieux püspöke.

Forrás: <http://tudosnapar.kfki.hu/historia/egyen.php?nanev=oresme> (utolsó letöltés: 2014.09.09)

azonosítjuk a nevével, hiszen ő volt az, aki az algebrai és a geometriai módszereket együttesen használta.

Önálló témakörként az analitikus geometria a középiskola tizenegyedik osztályának tananyagaként került be. Az ezt megelőző tanévekben a koordinátagometria segédeszközeivel ismerkednek meg a diákok. Alkalmazzák a derékszögű koordinátarendszert, megismerik a vektorokat. Egyértelművé válik számukra a vektorfogalom, megismerkednek a vektorok összegével, különbségével, számmal való szorzásával és az összetevőkre bontásával. Ilyenkor a tanításban az ismeretszerzés az elsődleges cél. A vektorkoordinátákat tizenegyedik osztályban ismertetjük, és ezzel előkészítjük azok analitikus geometriában való alkalmazását.

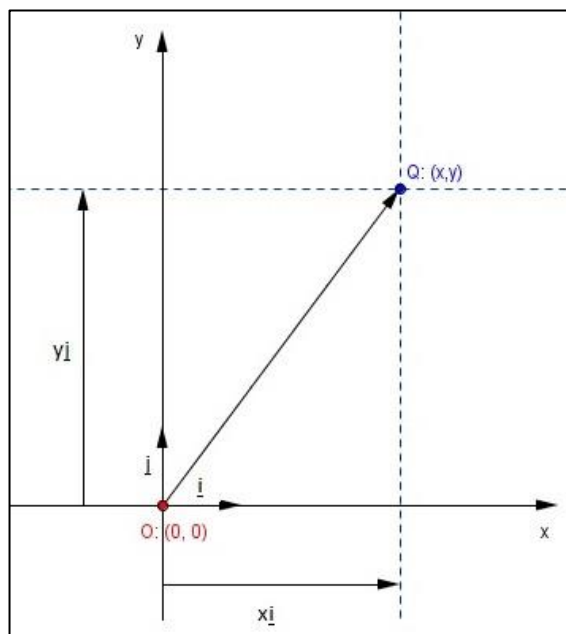
Dolgozatomban derékszögű /Descartes-féle/ - és ferdeszögű - koordinátarendszerrel dolgozom, de bemutatom a különböző típusú koordinátarendszereket, hogy mely feladattípusoknál érdemes használni.

4.1 Koordinátarendszerek

Síkon számpárokkal jellemezzük a pontok helyzetét, melyeket pontkoordinátáknak nevezünk. A koordinátarendszer típusa határozza meg, hogy milyen koordinátákkal adjuk meg a pontok helyét.

4.2 Derékszögű - Descartes - koordinátarendszer

A síkon rögzítjük az O kezdőpontot - origó -, e síkon bármely Q pontnak a helyzetét egyértelműen megadhatjuk az $\overrightarrow{OQ}$ helyvektorral - jelölés az 1. ábra szerint -. A vektorokat koordinátáikkal adjuk meg. Ehhez veszünk a síkon két egymásra merőleges vektort, ezek az $\underline{i}$ és a $\underline{j}$ egységvektorok. A közös kezdőpont – origó – körüli $+90^\circ$ -os elforgatás át viszi $\underline{i}$ -t a $\underline{j}$ -be. Az $\underline{i}$ és $\underline{j}$ egyenesét nevezzük koordinátatengelyeknek, melyek iránya megegyezik a vektorok irányával. Az abszcissza vagy más néven x tengely az $\underline{i}$ egyenese, az ordináta vagy más néven y tengely a $\underline{j}$ egyenese. A



1. ábra: Derékszögű - Descartes - koordinátarendszer

koordinátarendszer tengelyein az egységet az egységvektorok hosszával adjuk meg. A két tengely az egységgel egy koordinátarendszert alkot. A Q pont derékszögű koordinátái alatt az $\overrightarrow{OQ}$ helyvektor koordinátáit értjük (1. ábra). A Q pont koordinátái x és y , ha, az $\overrightarrow{OQ}$ helyvektor. $\overrightarrow{OQ} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, ahol az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ a koordinátarendszer egységvektorai. A Q pontot $Q(x; y)$ -nal jelöljük, zárójelben a koordinátáit tüntetjük fel.

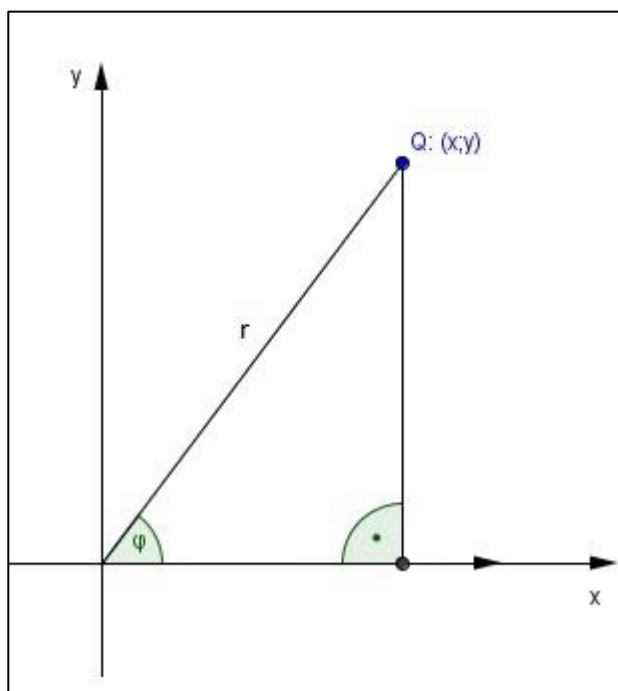
4.3 Polárkoordináták

A síkban elhelyezkedő pontoknak a helyét értelmezhetjük egy irányított szöggel és egy távolsággal - jelölés a 2. ábra szerint -. A síknak egy tetszőleges O pontjából - origó - húzunk egy félegyenest, ennek az irányát kezdőiránynak nevezzük. Ebben a síkban egy tetszőleges Q pontjának helyzetét megadhatjuk az $|\overrightarrow{OQ}| = r$ távolsággal és a φ irányított szöggel. Az r és φ a Q pont *polárkoordinátái*.

Vegyünk egy olyan derékszögű koordinátarendszert, ahol az origó megegyezik a polár koordinátarendszer O kezdőpontjával, az x tengely iránya pedig a kezdőiránnyal. Az alábbi összefüggések megadják a Q pont polárkoordinátáit, ahol az $\overrightarrow{OQ}$ irányszöge a φ .

$$x = r \cos \varphi,$$

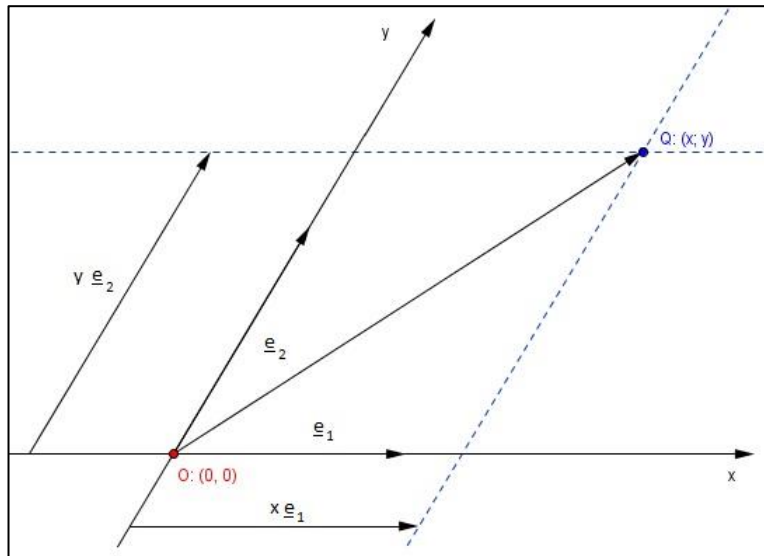
$$y = r \sin \varphi.$$



2. ábra: Polár koordinátarendszer

4.4 Ferdeszögű koordinátarendszer

Tulajdonképpen a derékszögű koordinátarendszer speciális ferdeszögű koordinátarendszer. Most tekintsük a síkon az egymásra nem merőleges $\underline{e}_1$ és $\underline{e}_2$ vektorokat, ahol $\underline{e}_1 \nparallel \underline{e}_2$. Az ezekre épített koordinátarendszert ferdeszögűnek – affin rendszernek – nevezzük. Az előbb említett vektorok síkjában van a rögzített O pont - jelölés a



3. ábra: Ferdeszögű koordinátarendszer

3. ábra szerint -. A síknak a Q pontjához húzott $\overrightarrow{OQ}$ helyvektor egyértelműen felírható a következő alakban:

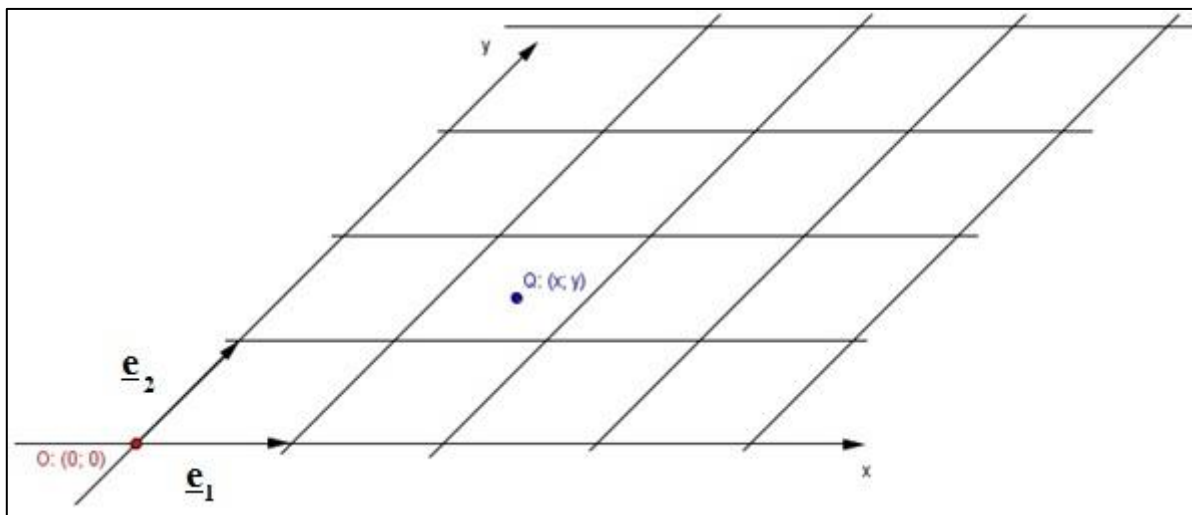
$$\overrightarrow{OQ} = x\underline{e}_1 + y\underline{e}_2$$

az $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ vektorokra vonatkozóan. Az $(x; y)$ rendezett számpárt a Q pont ferdeszögű koordinátáinak nevezzük (3. ábra). Vegyünk a síkon három nem egy egyenesre illeszkedő pontot, ekkor e három pont meghatároz egy ferdeszögű koordinátarendszert. Egyes geometriai problémák tárgyalásánál előnyösebb a derékszögű koordinátarendszer helyett a ferdeszögű koordinátarendszert választani, amely során a vizsgált síkidomnak a két oldalának a hosszát választjuk meg egységként, ezzel jelentősen megkönnyíthető a számolás. A 9. fejezetben a példák során alkalmazom, például lásd 3. feladat.

4.5 Affin sík

Ebben a fejezetben a síkbeli *affin koordinátákkal* foglalkozom. Az alap sík marad az euklideszi.

A $Q(x; y)$ jelentse azt a pontot, amely az $O(0; 0)$ kezdőpontból az $\underline{e}_1$ és $\underline{e}_2$ egységvektorokkal való eltolás határozza meg - jelölés a 4. ábra szerint -.



4. ábra: Affin koordinátarendszer

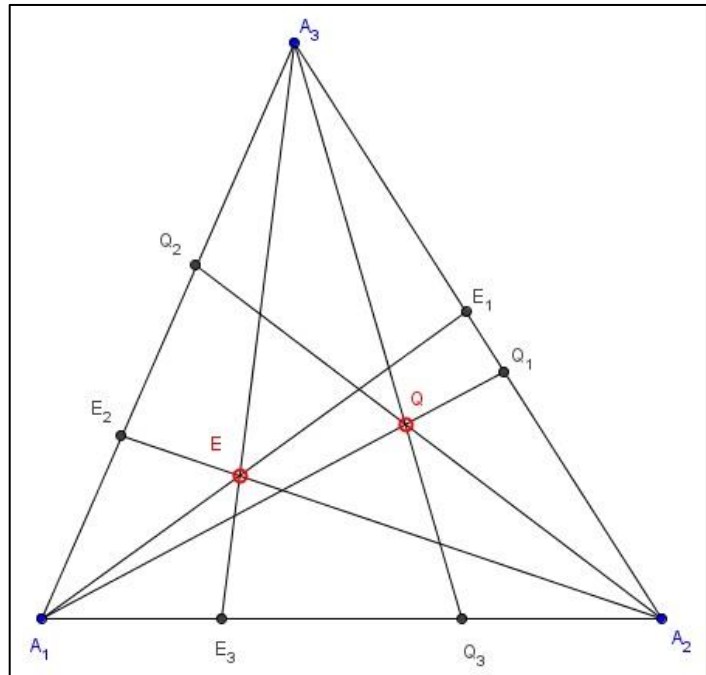
Ekkor a sík pontjai a rendezett számpárokkal kölcsönösen egyértelmű leképezést eredményez. Amennyiben az x és az y egészek az $(x; y)$ pontok *kétdimenziós rácsot* alkotnak (4. ábra). A többi pont a rácpontok „között” helyezkedik el.

Az affin koordinátarendszerben is az egyenes egyenlete lineáris elsőfokú egyenlet. Az $\underline{e}_1$ és $\underline{e}_2$ vektorokkal való eltolás a kezdőpontot azokba az $(\underline{e}_1 a; \underline{e}_2 b)$ pontokba viszi, melyek mértani helye az $ax + by = 0$ egyenes. Ennek folyamán az egyenes egyenletét felírhatjuk irányvektoros alakban.

A nyújtás speciális affinitás; *affinitásnak* nevezzük a teljes síkot önmagára, vagy másik síkra leképező egyenestartó és osztóviszonytartó transzformációkat. Ennek következtében az affinitás a párhuzamos egyeneseket párhuzamos egyenesekbe viszi át. A párhuzamos egyenesek mentén megmarad a távolságok aránya. Ezt nevezzük *dilatációnak*. Az *affinitás* megadható három nem kollineáris ponttal és annak képével.

4.6 Projektív sík

Vegyünk egy projektív síknak tetszőleges A_1, A_2, A_3, E pontjait - jelölés az 5. ábra szerint -, úgy hogy a négy pontból nincs három egy egyenesen. Esetünkben a projektív sík az ideális elemekkel bővített euklideszi sík. A projektív koordináta-rendszer alappontjai az A_1, A_2, A_3 pontok, E pedig az egység pont. Legyen Q a síknak egy tetszőleges pontja, melynek koordinátáin olyan $(x_1; x_2; x_3)$ homogén számhármast értünk, amely felírható a következő alakban (5. ábra):



5. ábra: Projektív koordináta-rendszer

$$\frac{x_i}{x_k} = (A_i A_k E_l Q_l), \text{ ahol } i; k; l = \overline{1; 3} \text{ és } i \neq k \neq l \neq i$$

A projektív koordinátákat a kettősviszony fogalmának⁹ felhasználásával értelmezzük.

Derékszögű koordináta-rendszertől függő értelmezés is adható a következőképpen (jelölések a korábbiak szerint):

A fenti négy pontnak megadjuk a derékszögű homogén koordinátáját. Az A_1, A_2, A_3 pontokat meghatározó $\underline{a}_1; \underline{a}_2; \underline{a}_3$ vektorokat fixáljuk, a következő módon:

$$\underline{a}_1 + \underline{a}_2 + \underline{a}_3 = \underline{e}$$

Ahol $\underline{e}$ az E -t meghatározó vektor. A Q -t meghatározó vektor a $\underline{q}(q_1; q_2; q_3)$, mely előállítható az $\underline{a}_1; \underline{a}_2; \underline{a}_3$ vektorok egy lineáris kombinációjával:

$$\rho \underline{q} = x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + x_3 \underline{a}_3$$

⁹ A **KETTŐSVISZONY** egy egyenes (pontosor) négy pontjára illetve egy sugársor négy elemének kölcsönös elhelyezkedésére jellemző viszonyszám.

forrás: <http://hu.wikipedia.org/wiki/Kett%C5%91svizony> (utolsó letöltés: 2014.10.30)

Egy adott nem elfajuló másodrendű görbén (kör, ellipszis, hiperbola) felvesszünk három pontot $\{A_1; A_2; E\}$. Továbbá A_1 és A_2 pontokba az érintőket, ezek metszés pontja az A_3 pont. Az $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ projektív koordinátarendszerben minden nem elfajuló görbe egyenlete $x_1x_2 - x_3^2 = 0$ alakban adható meg.¹⁰

Az $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ projektív rendszerben az $(x_1; x_2; x_3)$ számhármast a Q pont projektív koordinátájának nevezzük.

¹⁰ forrás: HORVAY KATALIN – RIEMAN ISTVÁN: Projektív geometria - Kézirat ELTE TTK Tankönyvkiadó 1983

5 Koordinátarendszerek alkalmazása

A koordinátarendszerek alkalmazásának két alapvető módját különböztetjük meg:

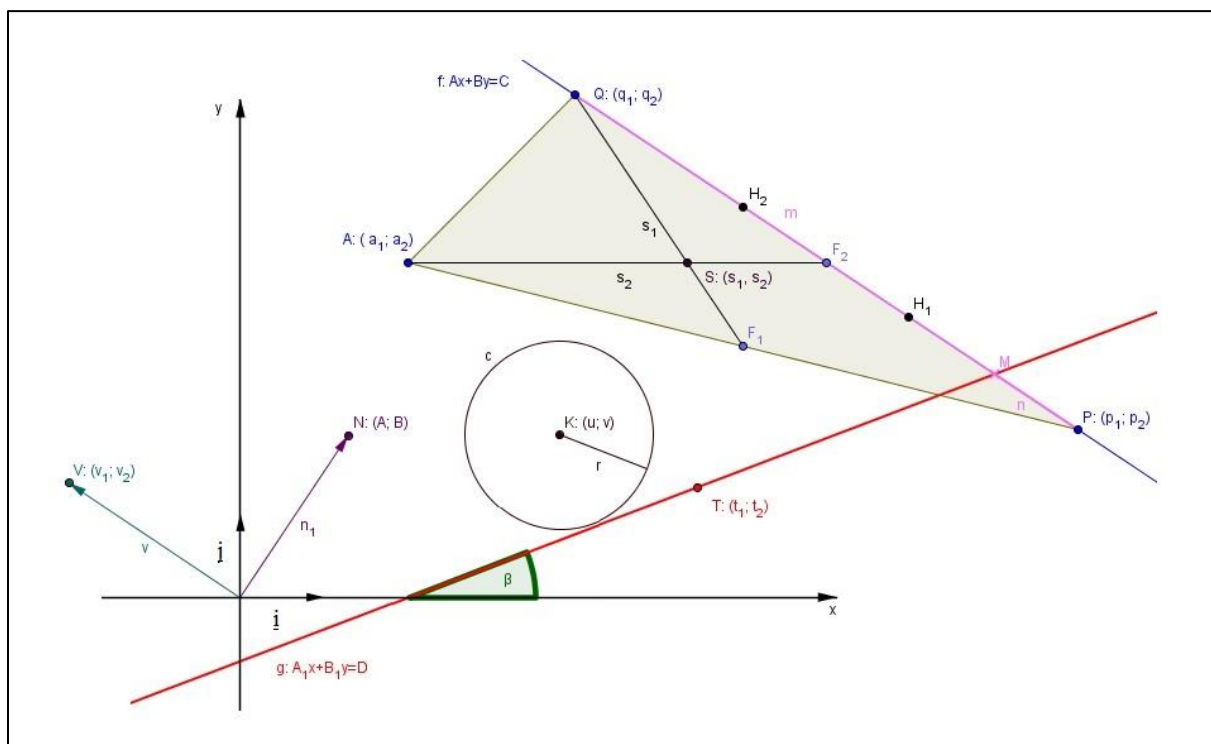
1. Maga a feladat adottnak tekinti a koordinátarendszer alkalmazását, és egyértelműen megadja az alakzat egyenletét és tulajdonságait. A mai koordináta geometria oktatása leszűkült erre a módszerre a hazai középiskolákban. Ilyen feladat például egy kétváltozós másodfokú egyenlet által meghatározott alakzat analízisa.
2. Adott egy alakzat és ehhez hívjuk segítségül a legcélszerűbb koordinátarendszert. Igyekszünk a koordinátarendszert úgy elhelyezni, hogy az alakzat egyenlete a lehető legegyszerűbb módon legyen meghatározható. A középiskolai oktatásban erre jelenleg nincsen lehetőség, hiszen a szigorú óraszámok mellett, nincsen idő arra, hogy a tanulóknak ilyen típusú feladatokat mutassunk. A továbbiakban, a *dolgozatomban* jó magam erre a módszerre fektetem a hangsúlyt.

Egy feladat megoldásában hatása van annak, hogy milyen típusú koordinátarendszert választunk, így egy adott feladatott egyszerűsíthetünk, vagy éppen túlbonyolíthatjuk. A geometria feladatok határozzák meg, hogy milyen típusú koordinátarendszert választunk.

Azon fajta feladatok, amelyekben derékszögű síkidomok szerepelnek célszerű derékszögű rendszert használni, míg általános helyzetű alakzatok esetén, a ferdeszögű koordinátarendszer alkalmazása a leghatékonyabb.

6 Derékszögű koordinátarendszer eszközei

Ebben a fejezetben ismertetem a - középiskolából jól ismert - derékszögű koordinátarendszerben alkalmazott képleteket. Egy ábra segítségével összefoglalom egy táblázatban, melyeket majd a későbbi fejezetekben alkalmazok a feladatok megoldása során. Bármely képlet levezetése megtalálható a *Sokszínű matematika 11.* évfolyamnak szóló tankönyvben¹¹. Jelölések az ábra szerint.



6. ábra: Derékszögű - Descartes - koordinátarendszer eszközei

Derékszögű koordinátarendszer eszközei – jelölés a 6. ábra szerint.	
Két pont távolsága, szakasz hossza: $Q(q_1; q_2)$ és $P(p_1; p_2)$ pontokkal	$\overrightarrow{PQ}(q_1 - p_1; q_2 - p_2) \Rightarrow$ $ \overrightarrow{PQ} = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}.$
$Q(q_1; q_2)$ és $P(p_1; p_2)$ pontok felezőpontja:	$F_2\left(\frac{p_1+q_1}{2}; \frac{p_2+q_2}{2}\right).$

¹¹ DR. KOSZTOLÁNYI JÓZSEF: Sokszínű matematika 11 Mozaik kiadó Szeged 2011 (ISBN: 978 963 697 414 5)

$Q(q_1; q_2)$ és $P(p_1; p_2)$ pontok harmadoló pontjai - H_1 a P -hez közelebbi:	$H_1\left(\frac{2p_1 + q_1}{3}; \frac{2p_2 + q_2}{3}\right),$ $H_2\left(\frac{p_1 + 2q_1}{3}; \frac{p_2 + 2q_2}{3}\right).$
$Q(q_1; q_2)$ és $P(p_1; p_2)$ pontok által meghatározott $m:n$ arányú osztópontja:	$M\left(\frac{np_1 + mq_1}{m+n}; \frac{np_2 + mq_2}{m+n}\right).$
Az $ABC\Delta$ súlypontjának koordinátái:	$S\left(\frac{a_1 + q_1 + p_1}{3}; \frac{a_2 + q_2 + p_2}{3}\right).$
Egy egyenest egyértelműen meghatároz: 1. egy pontja $Q(q_1; q_2)$ és az irányvektora $\vec{v}(v_1; v_2)$ 2. egy pontja $Q(q_1; q_2)$ és a normálvektora $\vec{n}(A; B)$ 3. egy pontja $T(t_1; t_2)$ és (ha létezik) az iránytangens $m = tg\beta$ 4. két pontja $Q(q_1; q_2)$ és $P(p_1; p_2)$	Egyenes egyenlete:
	$v_2(x - q_1) = v_1(y - q_2),$
	$Ax + By = Aq_1 + Bq_2,$
	$y = m(x - t_1) + t_2,$
	$(y - p_2)(q_1 - p_1) = (x - p_1)(q_2 - p_2).$
$\vec{v}(v_1; v_2)$ $\vec{n}(A; B)$ merőlegesége: A koordináta tengelyekkel párhuzamos egyenesek esetén $ax + by + c = 0$ esetén nem lehet egyszerre a és b is 0. A két egyenes egyenlete felírható: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ és $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ alakban. A két egyenes merőleges egymásra, ha teljesül a $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ egyenlőség.	$v_1 = B$ és $v_2 = -A.$ Vagy $v_1 = -B$ és $v_2 = A.$
Két egyenes metszés pontja: $f: Ax + By = C$ $g: A_2x + B_2y = D$	megoldása $M \begin{cases} Ax + By = C \\ A_2x + B_2y = D. \end{cases}$
Kör egyenlete $K(u; v)$ középponttal és $r > 0$ sugárral:	$c: (x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2.$

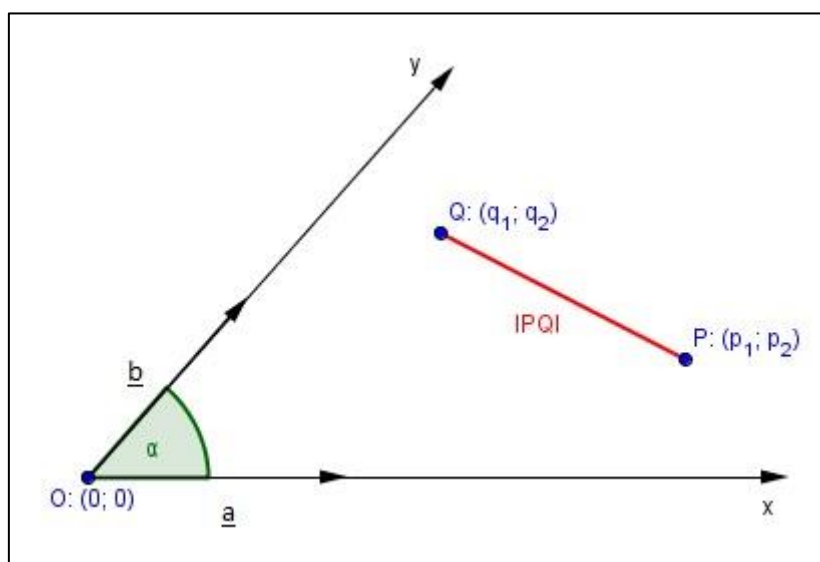
7 Ferdeszögű koordinátarendszer eszközei

Ebben a rendszerben a két alapvektornak a hossza nem feltétlenül azonos. A vektorok összeadása, kivonása, számmal való szorzása ugyan úgy történik, mint a derékszögű koordinátarendszerben. Egy egyenesen elhelyezkedő vagy párhuzamos egyeneseken lévő távolságok arányáról tudunk csak beszélni. Amennyiben párhuzamos szakaszokhoz hozzárendelünk egy vektort a megfelelő koordináták arányának abszolút értéke egyenlő a párhuzamos szakaszok arányával. Ferdeszögű koordinátarendszerben egy egyenes megadásához szükségünk van egy pontra és egy irányvektorra. Az egyenes egyenletének felírása ugyanúgy történik, mint a derékszögű koordinátarendszerben, akár csak az osztópont koordinátáinak kiszámítására vonatkozó képlet.

A továbbiakban azokat a sémákat mutatom meg, amelyek eltérőek a derékszögű és ferdeszögű koordinátarendszerben.

7.1 Két pont távolsága, szakasz hossza

A tetszőleges $Q(q_1; q_2)$ és $P(p_1; p_2)$ koordinátákkal adott pontok távolságát a következő képlet segítségével számíthatjuk ki - jelölés a 7. ábra szerint -, ahol $\underline{a}$ és $\underline{b}$ egységvektorok, az általuk közbe zárt szög pedig α .



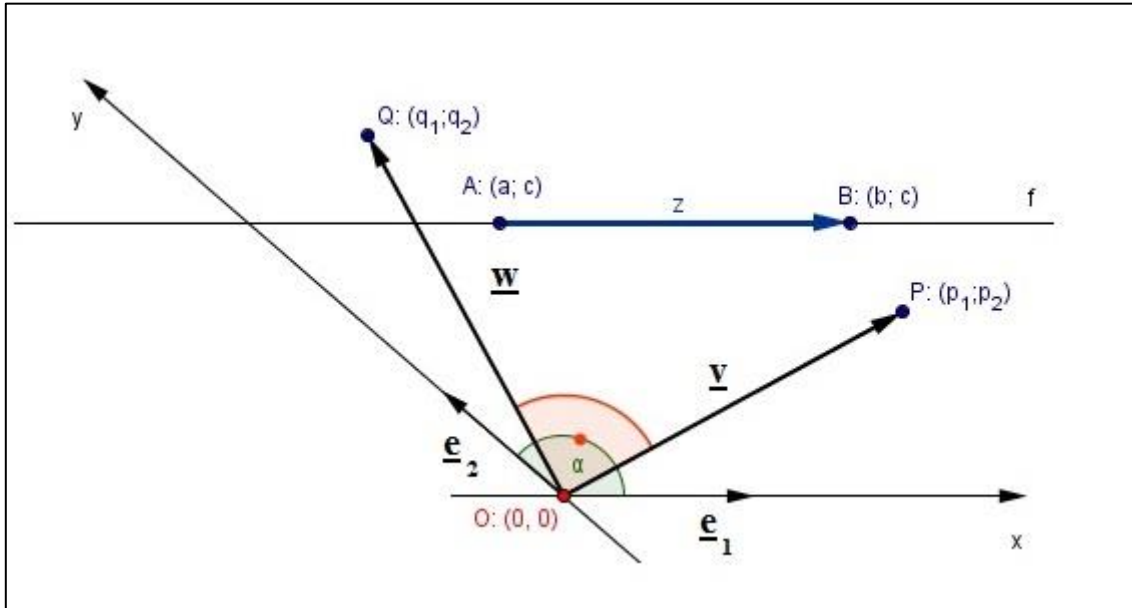
7. ábra: Két pont távolsága, szakasz hossza

$\overrightarrow{PQ}[(q_1 - p_1)\underline{a}; (q_2 - p_2)\underline{b}]$ hosszának kiszámításából következik, hogy:

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + 2(q_1 - p_1)(q_2 - p_2)\cos \alpha + (q_2 - p_2)^2}$$

7.2 Két vektor merőlegességi feltétele

Tekintsük a következő ferdeszögű koordináta-rendszer. Jelölés a 8. ábra szerint:



8. ábra: Két vektor merőlegességi feltétele

A derékszögű koordináták mintájára értelmezzük a vektorok merőlegességét a skaláris szorzattal:

$$|\underline{e}_1| = |\underline{e}_2| = 1 \text{ és } \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 = \cos \alpha = \lambda$$

$$\underline{v} = p_1 \underline{e}_1 + p_2 \underline{e}_2,$$

$$\underline{w} = q_1 \underline{e}_1 + q_2 \underline{e}_2,$$

$\underline{v} \perp \underline{w}$ akkor, ha $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$, tehát:

$$(p_1 \underline{e}_1 + p_2 \underline{e}_2)(q_1 \underline{e}_1 + q_2 \underline{e}_2) = 0,$$

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 + \lambda(p_1 q_2 + p_2 q_1) = 0,$$

$$q_1(p_1 + \lambda p_2) + q_2(p_2 + \lambda p_1) = 0,$$

$$\frac{q_1}{q_2} = -\frac{\lambda p_1 + p_2}{\lambda p_2 + p_1}.$$

Amennyiben az egyik vektor párhuzamos valamelyik tengellyel, a fenti számítási módszer ugyan úgy érvényben marad:

Tekintsük az x tengellyel párhuzamos $A(a; c)$ és $B(b; c)$ pontok által meghatározott f egyenes egy $\underline{z}(b - a; 0)$ irányvektorát.

$\underline{z} \perp \underline{w}$ akkor, ha $\underline{z} * \underline{w} = 0$, tehát:

$$(be_1 - ae_1)(q_1e_1 + q_2e_2) = 0$$

$$bq_1 - aq_1 + bq_2\lambda - aq_2\lambda = 0$$

$$q_1(b - a) = -q_2(\lambda(b - a))$$

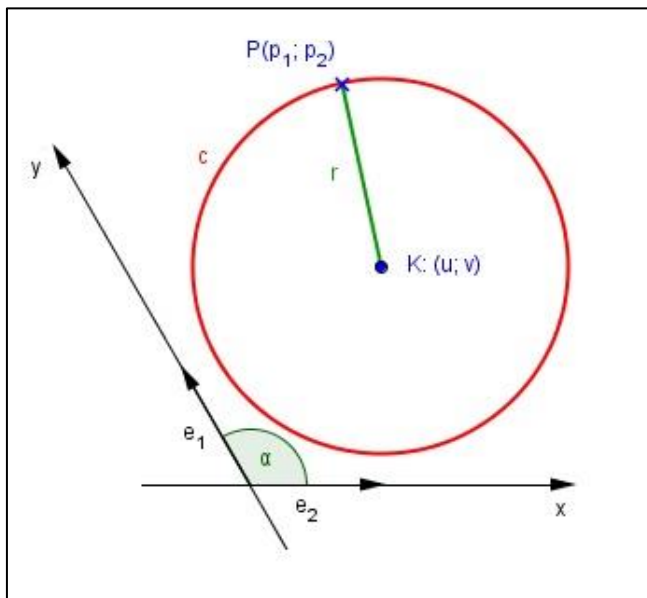
$$\frac{q_1}{q_2} = -\lambda$$

Az y tengellyel párhuzamos egyenes esetén ugyan így számolható.

Amennyiben $\alpha = 90^\circ$, azaz $\lambda = 0$ akkor megkapjuk a derékszögű koordináta-rendszerben használt merőlegesség feltételét:

$$\frac{q_1}{q_2} = -\frac{p_2}{p_1}$$

7.3 Kör egyenlete



9. ábra: Kör egyenlete

A ferdeszögű koordináta rendszerben kissé módosul a kör egyenlet. Tekintsük a körnek $K(u; v)$ középpontját és $r > 0$ sugarát. A körnek az egyenletét felírhatjuk a következő alakban - jelölés a 9. ábra szerint -.

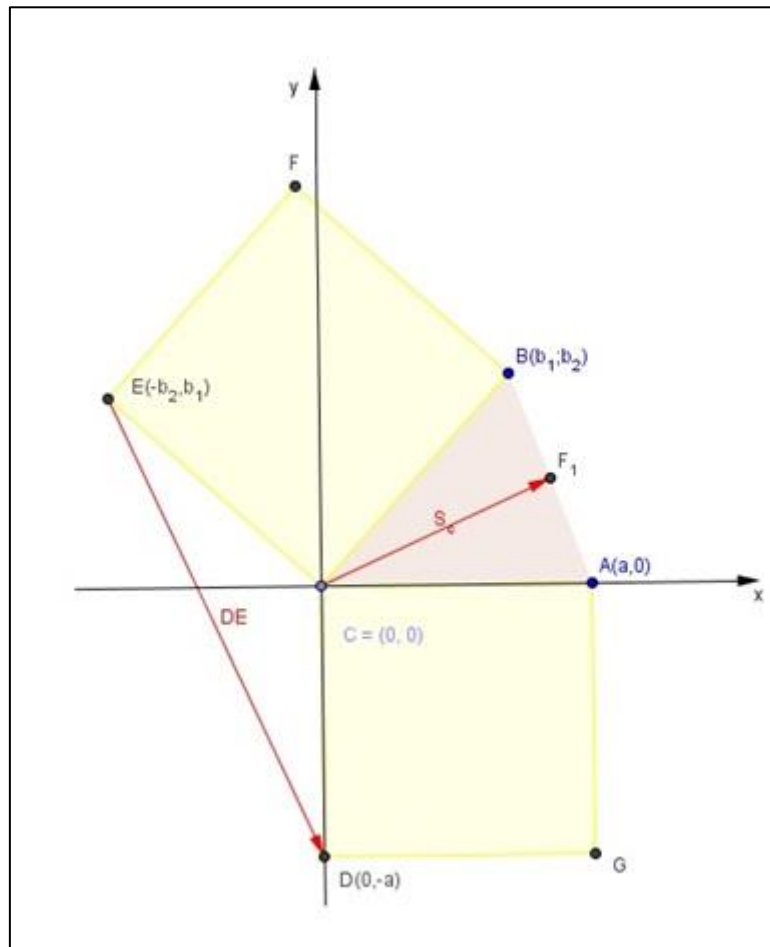
Legyen $|\underline{e}_1| = |\underline{e}_2| = 1$, ekkor $K(u; v)$ középpontú és r sugarú körnek az egyenlete az α ferdeszögű koordináta-rendszerben a következő, amely a 7.1 alapján könnyen adódik:

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 + 2\cos\alpha (x - u)(y - v) = r^2$$

8 Derékszögű koordinátarendszer alkalmazása feladatokban

- 1) Az ABC háromszög AC és BC oldalaira kifelé rajzolunk négyzeteket. A C -hez közelebbi négyzetcsúcsokat jelöljük D -vel és E -vel. Bizonyítsuk be, hogy DE távolság a háromszög egyik súlyvonalának a kétszerese és merőleges rá.

Megoldás: Helyezzük a háromszögünket egy derékszögű koordinátarendszerbe a következő módon (10. ábra):



10. ábra

Áll: DE merőleges $\underline{s_c}$ és $2\underline{s_c} = DE$

Biz:

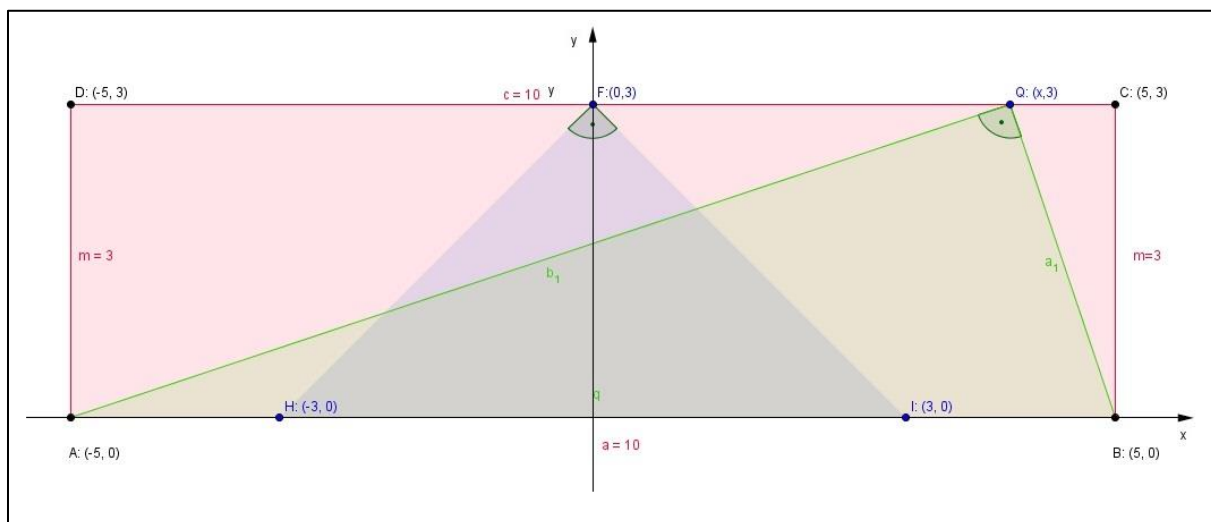
$$\overrightarrow{DE}(b_2; -a - b_1)$$

$$\overrightarrow{CF_1}\left(\frac{b_1 + a}{2}; \frac{b_2}{2}\right) = \frac{1}{2}(b_1 + a; b_2)$$

Tehát, valóban $|\overrightarrow{DE}|$ egyenlő az s_c kétszeresével, és merőlegesség is teljesül.

- 2) Egy 10 m hosszú, téglalap alakú tanterem mennyezetén két olyan lámpát helyeztünk el, amelyek kúp alakú, 90° -os nyílásszögű fénynyalábot bocsátanak ki. Az egyik lámpa a mennyezet közepén található, és a padlón egy 6 m átmérőjű kört világít meg. A másik lámpa búráját elfordították úgy, hogy az általa megvilágított részen a terem hosszanti irányában elfér egy 10 m-es szakasz, de a két szemközti falra már nem esik fény. Milyen messze van a két lámpa egymástól?

Megoldás: Helyezzük a téglalapunkat egy derékszögű koordinátarendszerbe a következő módon (11. ábra).



11. ábra

Az IHF háromszögre a Thalész-tételből¹² következik, hogy a magasság 3 m.

Tekintsük az EFQ derékszögű háromszöget. Használjuk most az ABQ háromszögre a Thalész-tételt amelyből következik, hogy az EQ szakasz hossza 5 m. Ebből számítsuk ki x hiányzó koordinátát.

$$|\overrightarrow{EQ}| = \sqrt{x^2 + 9}$$

$$x = 4$$

$$\overrightarrow{FQ} = (-4, 0) \Rightarrow |\overrightarrow{FQ}| = 4$$

Tehát a két lámpa távolsága 4 m.

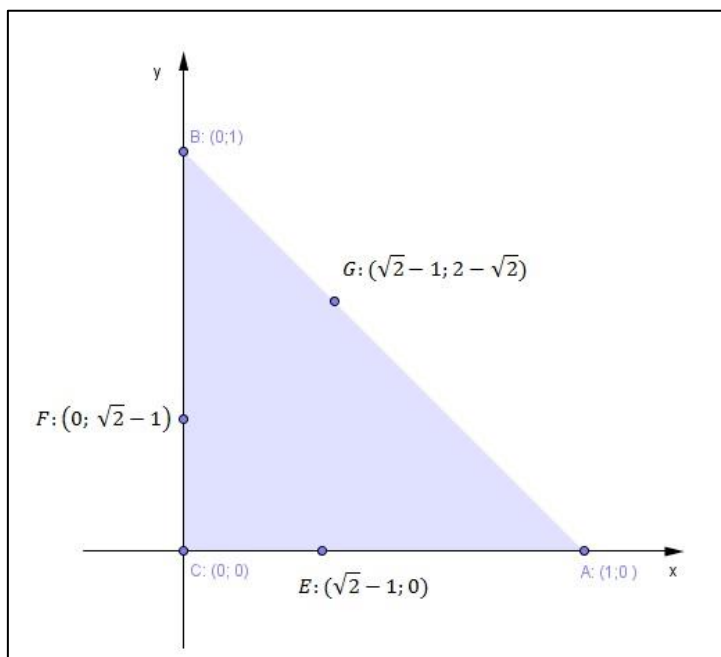
¹² THALÉSZ - TÉTEL: Ha egy kör átmérőjének A és B végpontját összekötjük a körív A -tól és B -től különböző tetszőleges C pontjával, akkor az ABC háromszög C -nél lévő szöge derékszög lesz.

forrás: <http://hu.wikipedia.org/wiki/Thal%C3%A9sz-t%C3%A9tel> (utolsó letöltés: 2015.01. 07)

- 3) Egy egységnyi befogójú egyenlőszárú derékszögű háromszög lemez valamennyi pontját kiszínezzük négy szín valamelyikével. Bizonyítsuk be, hogy bármely színezés esetén van két olyan azonos színű pont, amelyek távolsága legalább $2 - \sqrt{2}$.

Megoldás:

Tegyük fel, hogy bármely két azonos színű pont távolsága kisebb, mint $2 - \sqrt{2}$. Helyezzük el az ábránkat egy derékszögű koordináta-rendszerben - jelölés a 12. ábra szerint.



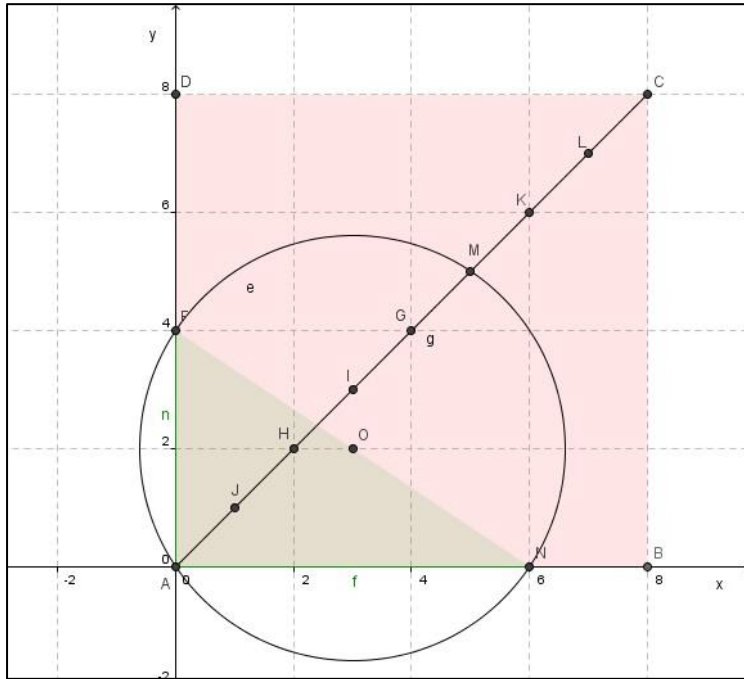
12. ábra

A befogókon felveszünk olyan E és F pontokat, hogy $AE = EF = FB = 2 - \sqrt{2}$ legyen. Mivel $|AB| = \sqrt{2}$, $AF = BE > 1$, az $A B E F$ pontok közötti távolságok mindegyike legalább $2 - \sqrt{2}$, ezért a feltevés szerint nem lehet közöttük azonos színű, ezért mind a négy színt képviselik. A C pont A -tól és B -tól mért távolsága 1, ezért C nem lehet sem A -val, sem B -vel azonos színű, tehát vagy E -vel, vagy pedig F -vel egyszínű. E és F szimmetrikus szerepe miatt feltehetjük, hogy C és F egyszínű.

Jelöljük ki AB -n az E -vel azonos abszcisszájú G pontot. Mivel AB egyenlete $x + y = 1$, G koordinátái $(\sqrt{2} - 1; 2 - \sqrt{2})$. Észrevehető, hogy $GB = GE = 2 - \sqrt{2}$ és $GA > GE = 2 - \sqrt{2}$ ezért G az A , B , E pontok egyikével nem lehet azonos színű. Végül: G távolsága az x tengelytől $2 - \sqrt{2}$, ezért $CD > 2 - \sqrt{2}$, emiatt C és G különböző színű, de C és F egyszínűek, ezért G és F is különböző színűek. Ez azt jelenti, hogy G színe nem lehet azonos az A , B , C , D pontok színének egyikével sem, ami lehetetlen.

- 4) Az ABCD négyzet AD oldalának felezőpontja F, az AB oldalának B-hez közelebbi negyedelő pontja N. Milyen arányban osztja az AFN háromszög köré írt köre az AC átlót?

Megoldás:



13. ábra

Helyezzük el az ábránkat egy derékszögű koordinátarendszerbe - jelölés a 13. ábra szerint -, ahol A csúcs legyen az origóban, B (0,8) pontban, ekkor a C(8,8), és a D(0,8) pontokba esnek. Ekkor tudjuk F koordinátája, F(0,4), N koordinátája pedig az N(6,0) pontba esik.

AFNΔ köré írható körének O középpontja az FN felezőpontja, ami O(3,2) a sugár hosszát pedig az OF határozza meg. $\overrightarrow{OF}(-3; 2)$, vagyis a hossza $\sqrt{13}$.

Tehát az AC -t az $x = y$ egyenletű egyenes határozza meg, a kör egyenlete pedig:

$$k: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$$

Az M metszéspontot megkapjuk az egyenletrendszer megoldásával:

$$(x - 3)^2 + (x - 2)^2 = 13$$

$$x^2 - 6x + 9 + x^2 - 4x + 4 = 13$$

$$2x^2 - 10x = 0$$

$$2x(x - 5) = 0$$

$$x_1 = 0$$

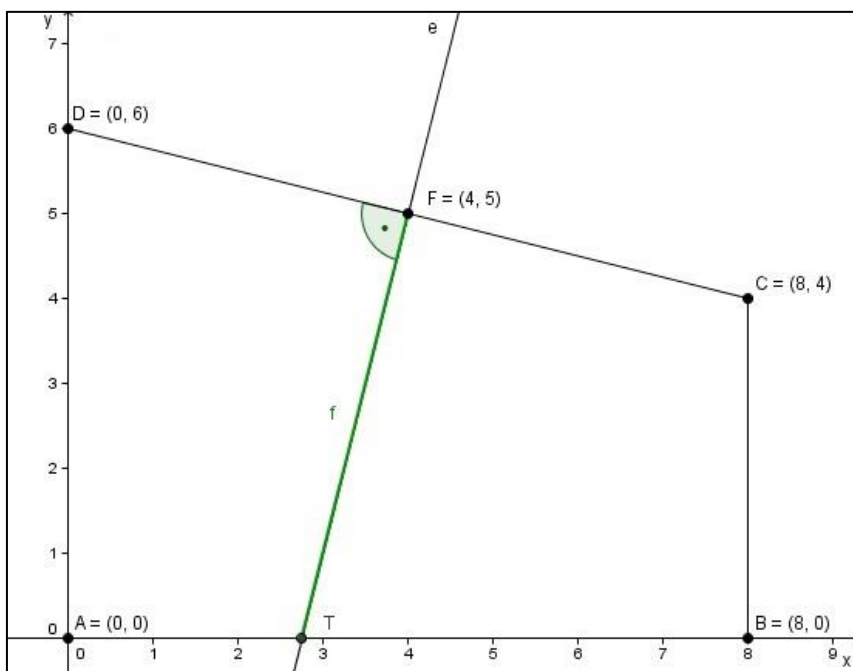
$$x_2 = 5$$

Ebből következik, hogy az M nyolcadoló pontja az AC szakasznak, mivel AC szakasz 8 egységnyi hosszúságú.

- 5) Egy derékszögű trapéz alakú tetőszerkezet párhuzamos oldalai 6m és 4m, a merőleges szára 8m. A szerkezet merőleges szára vízszintes helyzetű. A szakértők szerint a nem merőleges szár felezőpontjában, e szára merőleges legyen és a merőleges szára támaszkodjon. Milyen hosszú e gerenda.

Megoldás:

Helyezzük el az ábránkat, egy derékszögű koordináta-rendszerben a következő képen – jelölés a 14. ábra szerint:



14. ábra

FT egyenes egyenlete:

$$\overrightarrow{CD}(-4; 1) = \underline{n}$$

Használjuk a normálvektoros egyenletet:

$$-4x + y = -11$$

Az x tengellyel való metszés pontja adja, a T pont koordinátáit:

$$x = \frac{11}{4}, \quad y = 0,$$

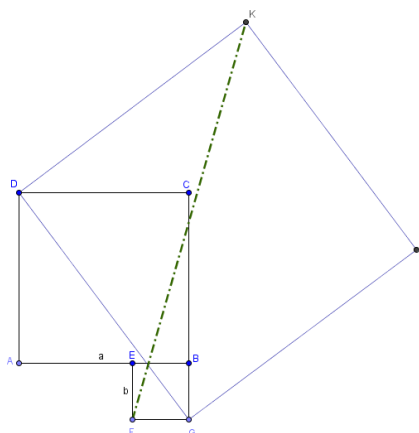
Már csak FT szakasz hosszát kell kiszámolni:

$$F(4; 5) \quad T\left(\frac{11}{4}; 0\right)$$

$$\overrightarrow{FT}\left(-\frac{5}{4}; -5\right) \Rightarrow |FT| = \sqrt{\frac{25}{16} + 25} = \sqrt{\frac{425}{16}} \approx 5,154.$$

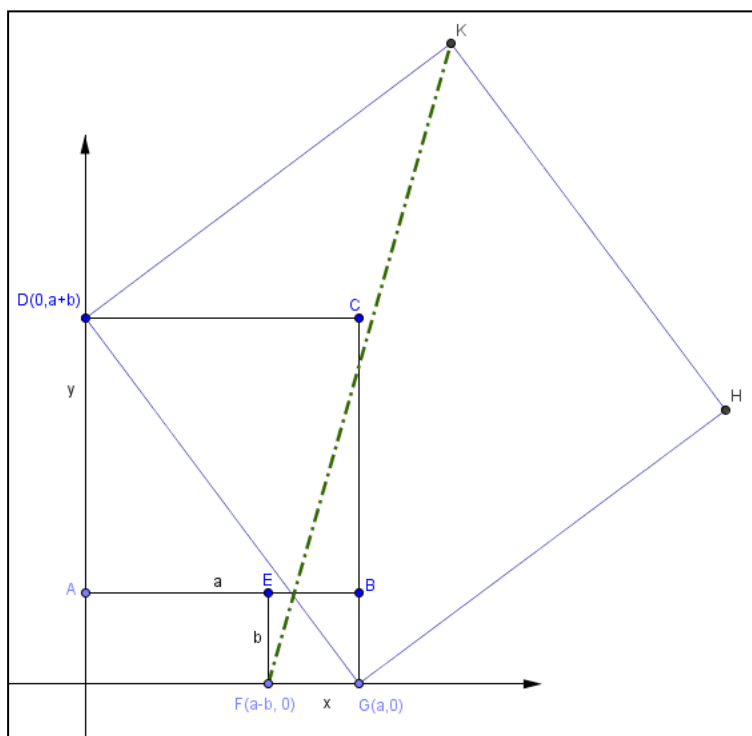
Tehát, a gerenda hossza körülbelül 5,154 m hosszú.

- 6) Az $ABCD$ a egységnyi oldalú négyzet mellé illesztettünk a 15. ábrán látható módon a $BEFG$ b egységnyi oldalú négyzetet, majd a DG szakaszra megrajzoljuk a $DGHK$ négyzetet. Milyen hosszú a KF szakasz?¹³



15. ábra

Megoldás:



16. ábra

Helyezzük el az ábránkat, egy derékszögű koordináta-rendszerben a következőképpen - jelölés a 16. ábra szerint:

$$\text{Ekkor, } \overrightarrow{DG}(a, -a - b) \\ \Rightarrow \overrightarrow{DK}(a + b, a)$$

A K pontba mutató helyvektor:

$$\overrightarrow{OK} =$$

$$\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DK} \Leftrightarrow K(a + b, 2a + b)$$

Már csak $\overrightarrow{KF}$ hosszát kell kiszámolni, azaz:

$$\overrightarrow{KF}(-2b, -2a - b) \Rightarrow |KF| = \sqrt{4b^2 + 4a^2 + 4ab + b^2} = \sqrt{5b^2 + 4ab + 4a^2}$$

Tehát, KF hossza: $\sqrt{5b^2 + 4ab + 4a^2}$.

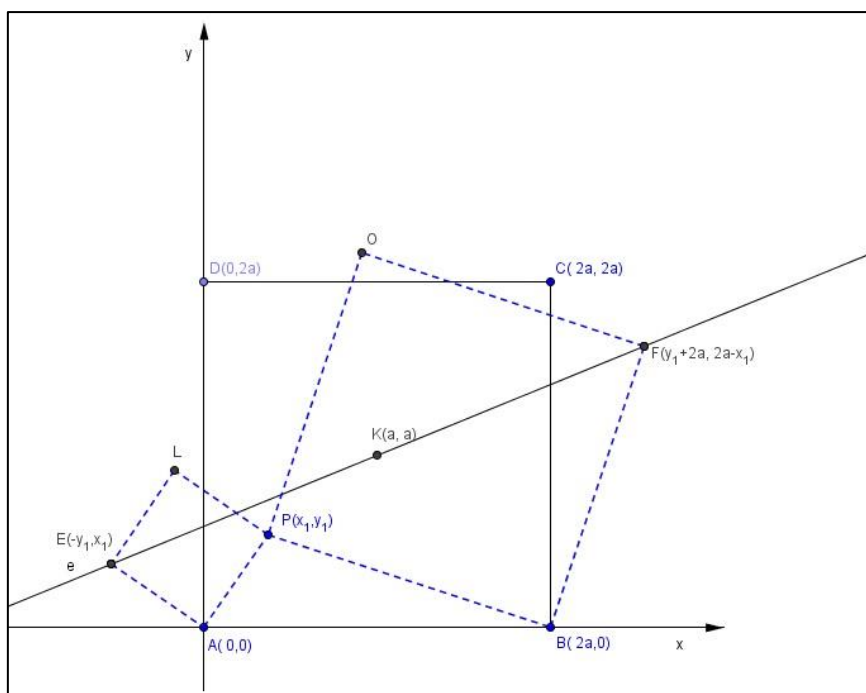
¹³ Ez a feladat a REPETA 4 könyv 2.3 feladatának az általánosítása.

- 7) Az $ABCD$ négyzet csúcsai pozitív körüljárási irányúak. A négyzet belsejében felvettünk egy tetszőleges P -t. P -t A körüli $+90^\circ$ -os elforgatottja E , B pont körüli -90° -os elforgatottja F . Bizonyítsa be, hogy EF egyenes felezi a négyzet területét.

Megoldás:

Az e egyenes akkor és csak akkor felezi a négyzet területét, ha áthalad a négyzet középpontján, ez a középpontos szimmetria miatt adódik.

Helyezzük el az ábránkat egy derékszögű koordinátarendszerben a következőképpen - jelölés a 17. ábra szerint:



17. ábra

Az EF pontokon átmenő egyenes egyenlete:

$$(y - x_1)(2y_1 + 2a) = (x + y_1)(2a - 2x_1)$$

Helyettesítsük be K -t:

$$(a - x_1)(2y_1 + 2a) = (a + y_1)(2a - 2x_1)$$

$$2ay_1 + 2a^2 - 2x_1y_1 - 2ax_1 = 2a^2 - 2x_1a + 2ay_1 - 2y_1x_1$$

azaz, illeszkedik K -ra.

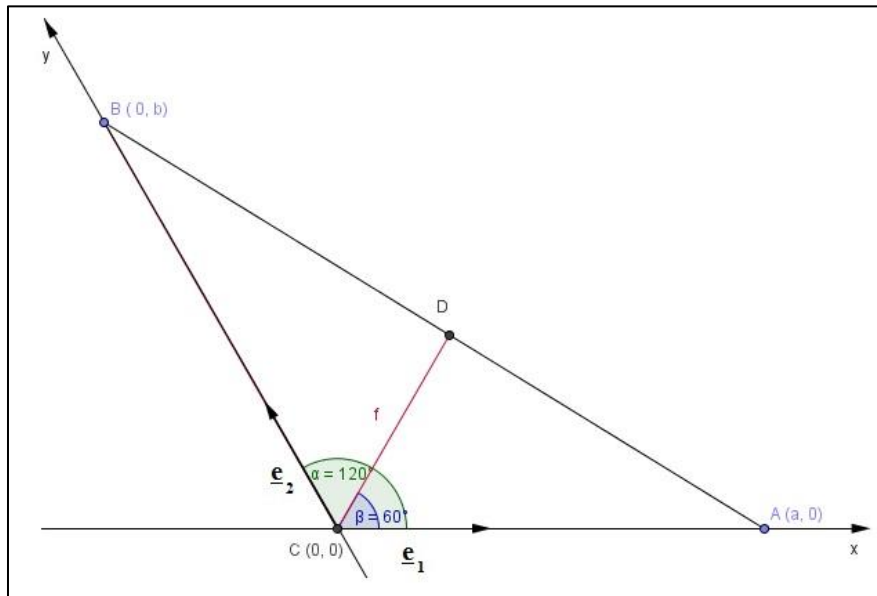
Ezzel az állítást igazoltuk, vagyis tényleg a P belső pont, és EP felezi a négyzet területét.

9 Ferdeszögű koordinátarendszer alkalmazása feladatokban

- 1) Az ABC háromszögben a C csúcsnál 120° -os szög van. D az AB oldal egy pontja. Mutassuk meg, hogy ha CD szögfelező, akkor

$$\frac{1}{CD} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC}$$

Megoldás:



18. ábra

Tekintsük a következő ábrát - egy ferdeszögű koordináta rendszerben - jelölés a 18. ábra szerint:

$$|\underline{e}_1| = |\underline{e}_2| = 1$$

$$\overrightarrow{AC}(-a, 0) \Rightarrow AC^2 = a^2$$

$$\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{BC}(0, -b) \Rightarrow BC^2 = b^2$$

AB -n átmenő egyenes egyenlete: $(y - 0)(0 - a) = (x - a)(b - 0),$

$$ab = bx + ay.$$

CD -n átmenő egyenes egyenlete:

$$y = x$$

E két egyenes metszéspontja kiadja D pontnak a koordinátáit:

$$\begin{cases} y = x \\ ab = bx + ay, \end{cases}$$

$$ab = bx + ax$$

$$ab = x(b + a).$$

$$\frac{ab}{(b+a)} = x$$

$$\frac{ab}{(b+a)} = y$$

$$D\left(\frac{ab}{(b+a)}; \frac{ab}{(b+a)}\right)$$

$$\overrightarrow{CD}\left(\frac{ab}{(b+a)}; \frac{ab}{(b+a)}\right) \Rightarrow CD^2 = \frac{a^2b^2}{(b+a)^2} - \frac{a^2b^2}{(b+a)^2} + \frac{a^2b^2}{(b+a)^2}$$

Áll: $\frac{1}{CD} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC}$

$$CD = \frac{ab}{a+b},$$

$$\frac{1}{CD} = \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a}.$$

Ezzel az állítást igazoltuk.¹⁴

¹⁴ **Megjegyzés:** Ez a feladat, területszámítás segítségével egyszerűsödik:

$$T_{ABC\Delta} = \frac{ab \sin 120^\circ}{2} = \frac{ab\sqrt{3}}{4}$$

$$T_{ACD\Delta} = \frac{af \sin 60^\circ}{2} = \frac{af\sqrt{3}}{4}$$

$$T_{ACD\Delta} = \frac{bf \sin 60^\circ}{2} = \frac{bf\sqrt{3}}{4}$$

$$ab = af + bf \quad / : abf$$

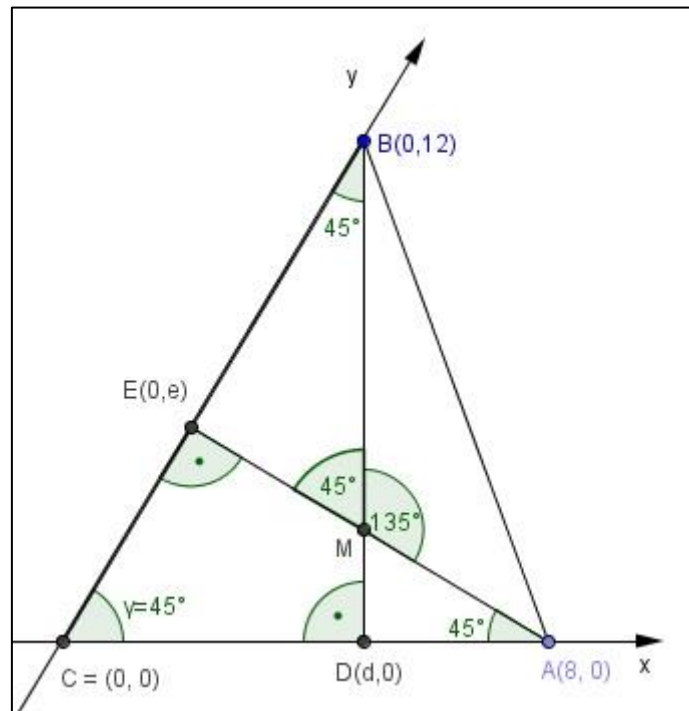
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$$

Ami éppen az igazolandó állításunk volt.

- 2) Egy γ -ban hegyesszögű háromszög két oldala $a = 8$ és $b = 12$. Az ezekhez az oldalakhoz tartozó magasságok 135° -os szöget zárnak be egymással. Számítsa ki a magasságok talppontjainak távolságát!

Megoldás:

Helyezzük el az ábránkat egy ferdeszögű koordináta rendszerben, ahol a γ csúcsa lesz az origó. Jelölés a 19. ábra szerint:



19. ábra

Mivel a $CDME$ négyszög húrnégyszög, ezért $\gamma = 45^\circ$.

CDB háromszög egyenlőszárú derékszögű háromszög, mivel a hegyesszögei egyenlők.

Ebből következik, hogy $CD = DB$.

$$\overrightarrow{CD}(d, 0) \Rightarrow |CD| = d^2$$

$$\overrightarrow{DB}(-d, 12) \Rightarrow |DB| = d^2 - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 12 \cdot d + 144.$$

Vagyis:

$$d^2 - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 12 \cdot d + 144 = d^2,$$

$$-24d = -144\sqrt{2},$$

$$d = 6\sqrt{2}.$$

CAE háromszög egyenlőszárú derékszögű háromszög, mivel a hegyesszögei egyenlők.

Ebből következik, hogy: $CE=AE$

$$\overrightarrow{CE}(0, e) \Rightarrow |CE| = e^2$$

$$\overrightarrow{AE}(-8, e) \Rightarrow |AE|^2 = 64 - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 8 \cdot e + e^2.$$

Vagyis:

$$64 - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 8 \cdot e + e^2 = e^2,$$

$$-16e = -64\sqrt{2},$$

$$e = 4\sqrt{2}.$$

Már csak, $E(0, 4\sqrt{2})$ és $D(6\sqrt{2}, 0)$ pontok távolságát kell kiszámolnunk:

$$\overrightarrow{DE}(-6\sqrt{2}, 4\sqrt{2}) \Rightarrow |DE|^2 = 72 - \frac{96}{\sqrt{2}} + 32$$

$$|DE|^2 = 104 - 48\sqrt{2}$$

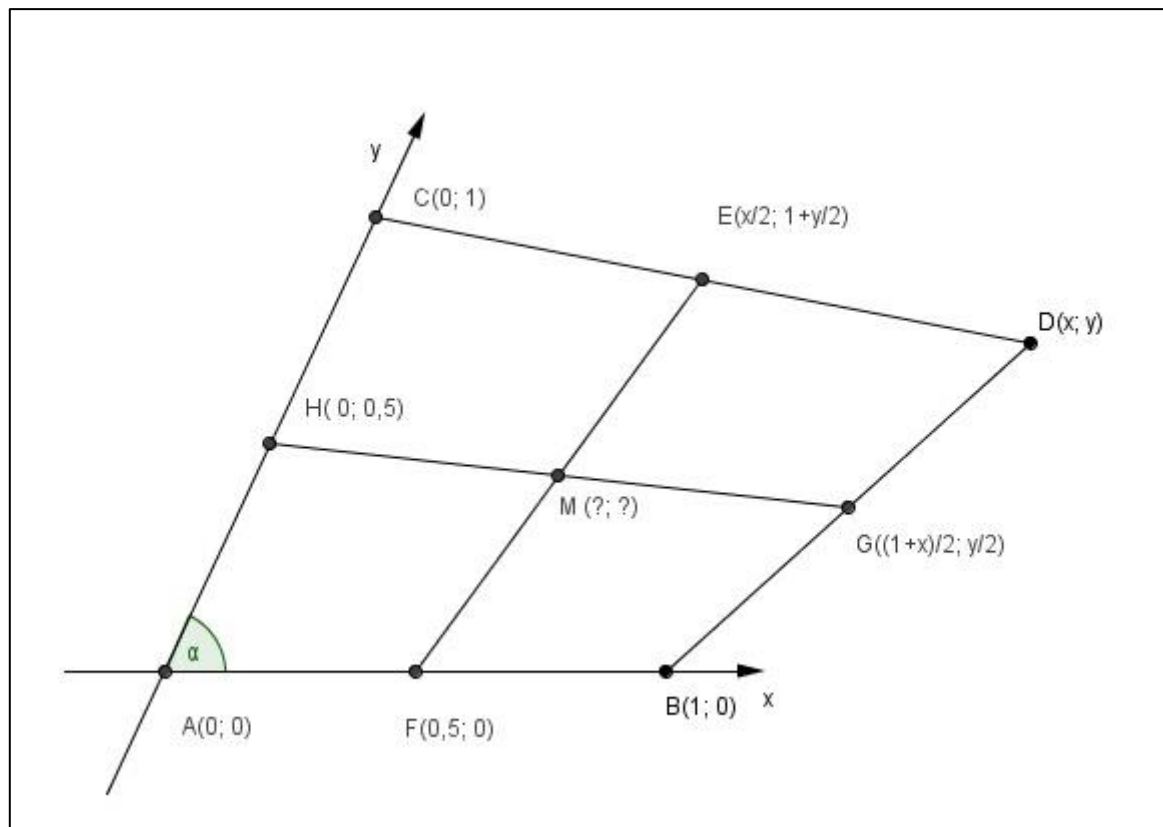
$$|DE| = \sqrt{104 - 48\sqrt{2}} \approx 6,01$$

Tehát, a merőleges talppontok távolsága körülbelül 6,01 egység.

- 3) Mutassa meg, hogy egy konvex négyszög szemközti felezőpontjait összekötő szakaszok felezik egymást.

Megoldás:

Helyezzük el az ábránkat egy ferdeszögű koordináta rendszerben, egységnek választom a négyszög két oldalát - jelölés a 20. ábra szerint:



20. ábra

$$EF \text{ felezőpontja: } \left(\frac{x+1}{4}; \frac{1+y}{4} \right)$$

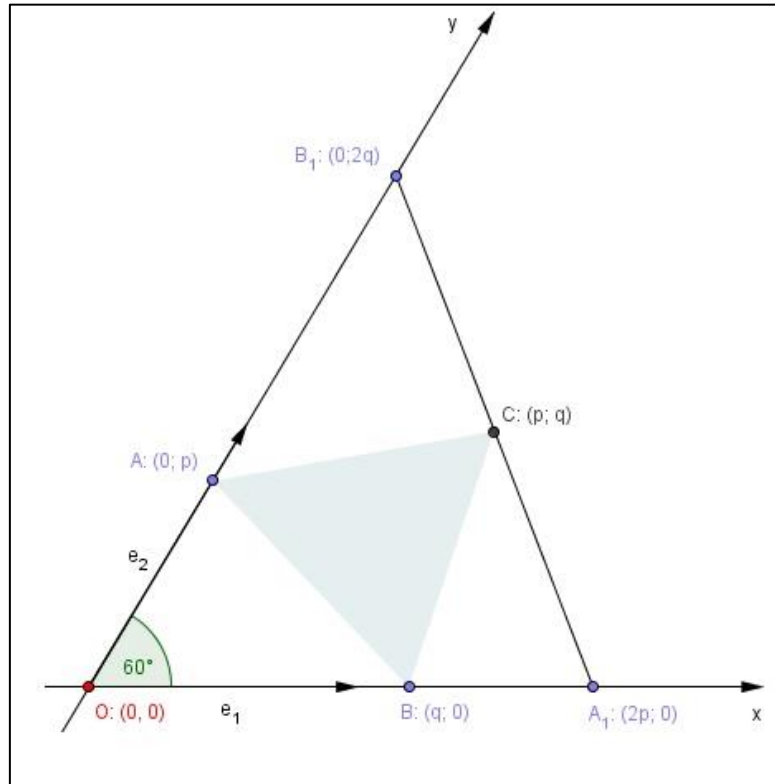
$$GH \text{ felezőpontja: } \left(\frac{x+1}{4}; \frac{1+y}{4} \right)$$

A két pont egybe esik, ezért az állítás igaz.

- 4) Az O csúcspontú 60° -os szög egyik szára $OA = p$ a másikon $OA_1 = 2p$. Az utóbbi száron $OB = q$, az első pedig $OB_1 = 2q$. Legyen C az A_1B_1 szakasz felezőpontja. Bizonyítsuk be, hogy p és q megfelelő választása esetén az ABC háromszög szabályos.

Megoldás:

Helyezzük el az ábránkat egy ferdeszögű koordináta rendszerben, egységnek választom az $\underline{e}_1$ és $\underline{e}_2$ vektorokat - jelölés a 21. ábra szerint. A számolás a 7 fejezetben leírtak alapján történik.



21. ábra

Áll: $ABC\Delta$ szabályos

Bizonyítás:

Legyen $|\underline{e}_1| = |\underline{e}_2| = 1$, ekkor $\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 = \frac{1}{2}$

$$\overrightarrow{AB}(q; -p) \Rightarrow \overrightarrow{AB}^2 = q^2 - qp + p^2$$

$$\overrightarrow{BC}(p - q; q) \Rightarrow \overrightarrow{BC}^2 = (p - q)^2 - q(p - q) + q^2 = p^2 - pq + q^2$$

$$\overrightarrow{CA}(-p; p - q) \Rightarrow \overrightarrow{CA}^2 = p^2 - p(p - q) + (p - q)^2 = p^2 - pq + q^2$$

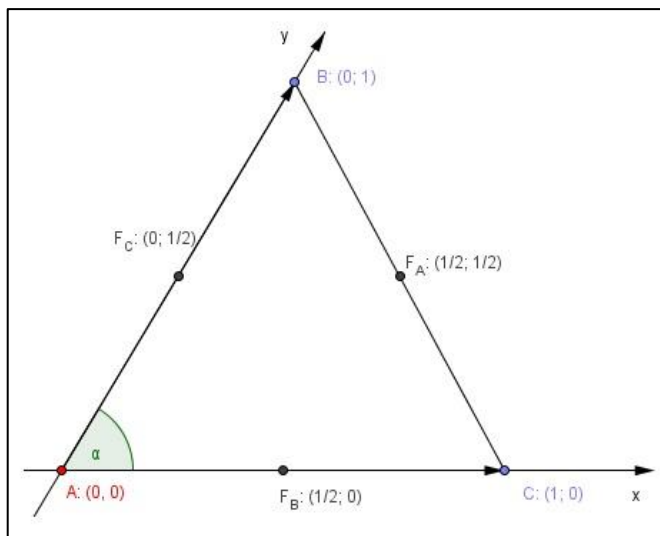
Mivel teljesül, hogy $AB^2 = CA^2 = BC^2$ ezért igaz, hogy az ABC háromszög szabályos.

- 5) Bizonyítsuk be, hogy a háromszög súlyvonalalaiból képzett háromszög súlyvonalai az eredeti háromszög oldalainak a háromnegyedével egyenlők.

Megoldás:

Helyezzük el az ábránkat egy ferdeszögű koordináta rendszerben, egységnek választom a háromszög c és b oldalát - jelölés a 22. ábra szerint.

A feladat bizonyításához elegendő a megfelelő oldalak koordinátáját kiszámolni, hiszen a koordinátákból látni lehet a hossz változását.



22. ábra

$$\overrightarrow{AB} (0; 1); \quad \overrightarrow{AC} (1; 0); \quad \overrightarrow{BC} (1; -1)$$

ABC háromszög súlyvonalalaiból képzett háromszög koordinátái:

$$\overrightarrow{F_C C} \left(1; -\frac{1}{2} \right) \quad \overrightarrow{F_B B} \left(-\frac{1}{2}; 1 \right) \quad \overrightarrow{F_A A} \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right)$$

Ebből kiszámítható a súlyvonalak hosszából képzett háromszög felezőpontjai:

Legyen $\overrightarrow{F_C C}$ felezőpontja $F_1 \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4} \right)$

Legyen $\overrightarrow{F_B B}$ felezőpontja $F_2 \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right)$

Legyen $\overrightarrow{F_A A}$ felezőpontja $F_3 \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4} \right)$

Az $F_1 F_2 F_3 \Delta$ oldalai:

$$\overrightarrow{F_1 F_2} \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4} \right) \Rightarrow \frac{-1}{4} (1; -1)$$

$$\overrightarrow{F_2 F_3} \left(0; -\frac{1}{4} \right) \Rightarrow \frac{-1}{4} (0; 1)$$

$$\overrightarrow{F_3 F_1} \left(-\frac{1}{4}; 0 \right) \Rightarrow \frac{-1}{4} (1; 0)$$

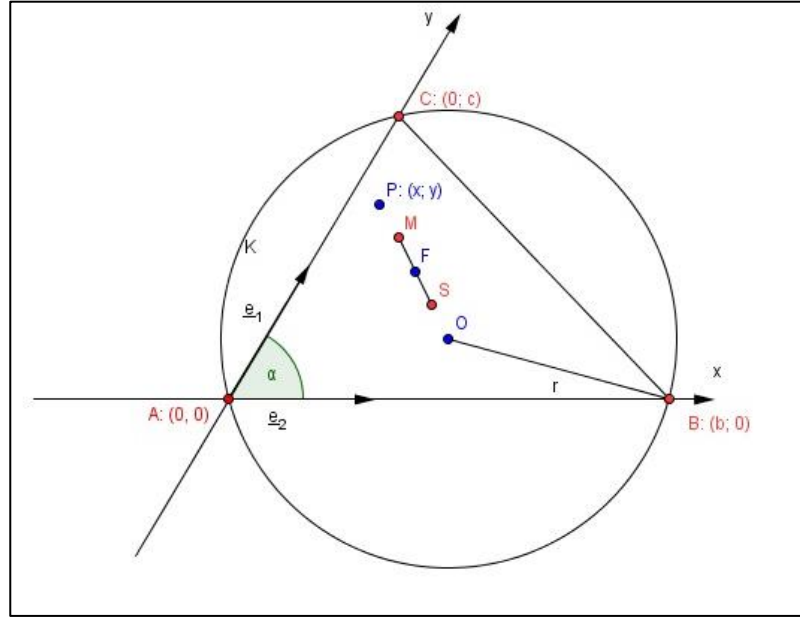
Mivel a háromszög oldalainak koordinátái $-\frac{1}{4}$ -de a súlyvonalalaiból képzett háromszög súlyvonalainak, ezért a hosszuk $\frac{3}{4}$ -del lesz kisebb.

- 6) Legyen az $ABC\Delta$ köré írt kör sugara r , a súlypontot a magasságponttal összekötő szakasz felezőpontja pedig F . Bizonyítsuk be, hogy

$$AF^2 + BF^2 + CF^2 = 3r^2$$

Megoldás:

Helyezzük el az ábránkat egy ferdeszögű koordináta-rendszerben - jelölés a 23. ábra szerint.



23. ábra

Egységnek választom az $\underline{e}_1$ és $\underline{e}_2$ vektorokat, ahol $|\underline{e}_1| = |\underline{e}_2| = 1$. Legyenek az A, B, C csúcsok koordinátái rendre $(0; 0); (b; 0); (0; c)$. Ha egy P pont koordinátái $(x; y)$, akkor a P pont csúcsoktól vett távolságainak négyzetösszege:

$$t(P) = x^2 + y^2 + (x - b)^2 + y^2 + x^2 + (y - c)^2$$

Ez átírható:

$$t(P) = 3 \left(\left(x - \frac{b}{3} \right)^2 + \left(y - \frac{c}{3} \right)^2 \right) + d$$

alakba, ahol d a P ponttól független konstans. Ez azt jelenti, hogy $t(P)$ négyzetösszeg csak a P pontnak az S súlyponttól mért távolságától függ, mástól nem. Az Euler-egyenes tulajdonságai alapján F is rajta van az Euler-egyenesen és F -nek az S -re vonatkozó tükörképe éppen az $ABC\Delta$ körül írt körének O középpontja.

Emiatt F és O azonos távolságra van S -től, és így $t(F) = t(O) = 3r^2$

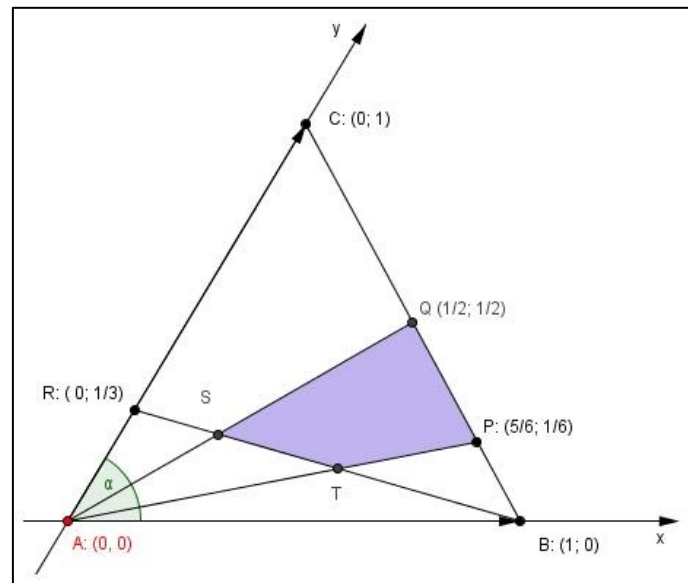
7) Az ABC háromszög BC oldalán adott a P és a Q pont úgy, hogy

$$BP:PQ:QC = 1:2:3$$

Az AC oldalt az R pont $AR:RC = 1:2$ arányban osztja. A BR szakasz az AP szakaszt T , az AQ szakaszt S pontban metszi. Az ABC háromszög területe t . Igazolja, hogy $PQST$ négyszög területe $\frac{5}{24}t$

Megoldás:

Helyezzük el az ábránkat egy ferdeszögű koordináta-rendszerben - jelölés a 24. ábra szerint:



24. ábra

Mivel az *affinitás* terület aránytartó, ezért az ábránk elhelyezésekor alkalmazhatók a következők:

Egységnek választom a háromszög b és c oldalát. Mivel a Q pont a BC szakaszfelező pontja, ezért:

$$Q\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

A P pont a BQ szakasz P -hez közelebbi harmadoló pontja, így:

$$P\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{6}\right).$$

Az R pont ugyancsak harmadoló pont, ezért

$$R\left(0; \frac{1}{3}\right).$$

Az S és a T pont egyenesek metszéspontjaiként határozhatók meg.

AQ egyenes egyenlete:

$$x = y$$

AP egyenes egyenlete:

$$x = 5y$$

BR egyenes egyenlete:

$$3y + x = 1$$

Az S pont koordinátáit az AQ , BR egyenesek metszéspontjaként határozzuk meg:

$$\begin{cases} x = y \\ 1 = 3y + x \end{cases} \Rightarrow x = y = \frac{1}{4}$$

A T pont koordinátáit az AP , BR egyenesek metszéspontjaként határozzuk meg:

$$\begin{cases} 1 = 3y + x \\ x = 5y \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{8} \text{ és } x = \frac{5}{8}$$

Tehát a pontok koordinátája:

$$S\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right); T\left(\frac{5}{8}; \frac{1}{8}\right)$$

Tekintsük a

$$t_{ABQ} = t_{PQST} + t_{ABP} + t_{ABS} - t_{ABT}$$

egyenlőséget. Felhasználjuk, hogy a felírt egyenlőségben szereplő háromszögekben az AB oldalhoz tartozó magasság rendre megegyezik a Q, T, P, S pontok ordinátájával.

$$t_{PQST} = t_{ABQ} + t_{ABT} - t_{ABP} - t_{ABS}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{12} - \frac{1}{8} \\ &= \frac{12}{48} + \frac{3}{48} - \frac{4}{48} - \frac{6}{48} \\ &= \frac{5}{48} = \frac{5}{24} \cdot t \end{aligned}$$

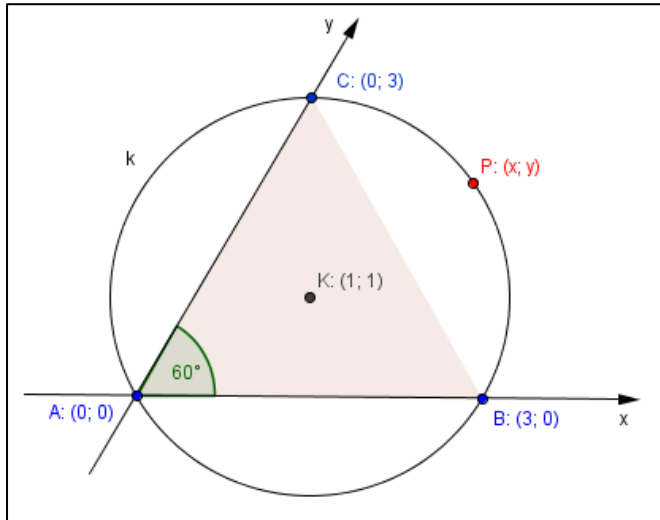
Mivel az $ABCD$ területe t , ahol

$$t = \frac{1}{2}$$

Amely pont az igazolandó állítás.

- 8) Az ABC szabályos háromszög köré írt körének egy pontja P . Mutassuk meg, hogy a $PA^2 + PB^2 + PC^2$ összeg értéke állandó, független P választásától.

Megoldás:



25. ábra

Helyezzük el az ábránkat egy ferdeszögű koordináta-rendszerben - jelölés a 25. ábra szerint.

Egységnek választom a háromszög b és c oldalának harmadát.

Az $ABC\Delta$ köré írható körének középpontja $K(1; 1)$ a körnek az egyenlete¹⁵:

$$\begin{aligned}(x-1)^2 + (y-1)^2 + 2\cos 60^\circ(x-1)(y-1) &= r^2, \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + xy - y - x + 1 &= r^2, \\ x^2 - 3x + y^2 - 3y + 3 + xy &= r^2.\end{aligned}$$

Számítsuk ki $AP^2 + BP^2 + CP^2$ hosszát:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}(x; y) &\Rightarrow AP^2 = x^2 + xy + y^2, \\ \overrightarrow{BP}(x-3; y) &\Rightarrow BP^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + xy - 3y, \\ \overrightarrow{CP}(x; y-3) &\Rightarrow CP^2 = x^2 + xy - 3x + y^2 - 6y + 9, \\ AP^2 + BP^2 + CP^2 &= 3x^2 - 9x + 3y^2 - 9y + 18 + 3xy = \\ &= 3(x^2 - 3x + y^2 - 3y + 3 + xy) + 9 = 3r^2 + 9.\end{aligned}$$

Tehát, az $AP^2 + BP^2 + CP^2$ összeg valóban független P választásától.

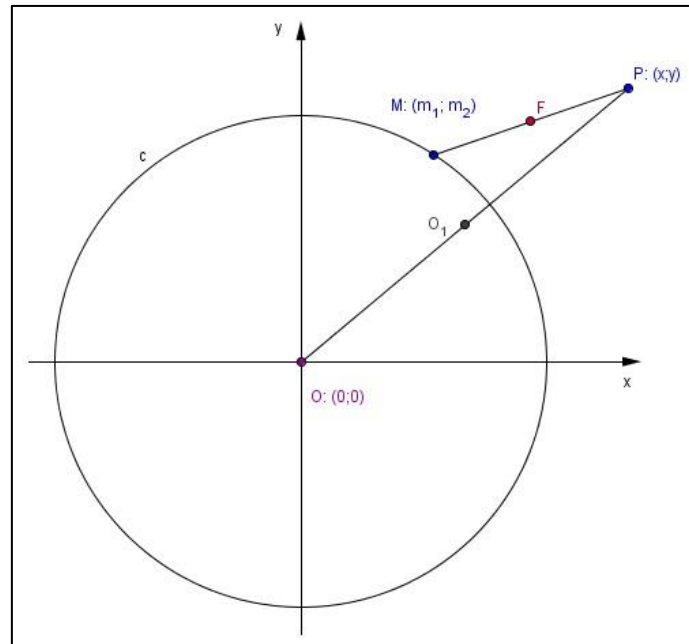
¹⁵ A számolás a 7 fejezetben leírtak alapján történik.

10 Mértani helyel kapcsolatos feladatok

- 1) Adott egy kör és egy pont a körön kívül. Mi az adott pontból a kör kerületének egyes pontjaihoz húzott szakaszok középpontjainak mértani helye?

Megoldás:

Helyezzük el az ábránkat egy derékszögű koordináta-rendszerben - jelölés a 26. ábra szerint:



26. ábra

Az origóból induló $\sqrt{m_1^2 + m_2^2}$ sugarú c kör egyenlete:

$$c: x^2 + y^2 = m_1^2 + m_2^2$$

Az $M(m_1; m_2)$ pont körbefutja a c kört. Jelöljük OP felezőpontját O_1 , a PM felezőpontját F -vel.

$$O_1 \left(\frac{x}{2}; \frac{y}{2} \right)$$

$$F \left(\frac{m_1 + x}{2}; \frac{m_2 + y}{2} \right)$$

Ekkor

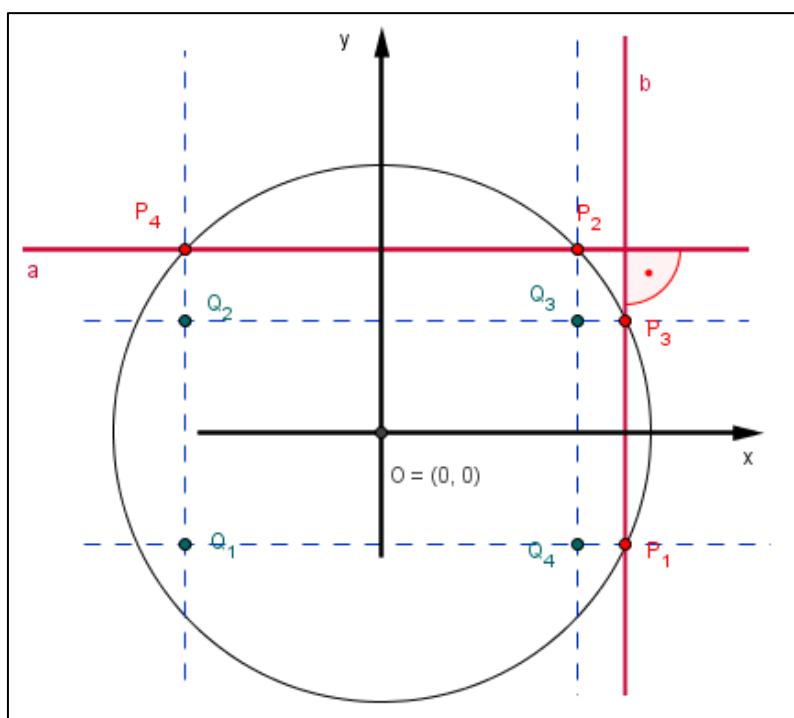
$$\overrightarrow{O_1 F} \left(\frac{m_1}{2}; \frac{m_2}{2} \right) \Rightarrow |O_1 F| = \frac{1}{2} \sqrt{m_1^2 + m_2^2}$$

Tehát F pont mértani helye olyan kör, amelynek középpontja O_1 , sugara pedig az adott kör sugarának a fele.

- 2) Legyen adva két egymásra merőleges egyenes a és b és egy O pont. Az O pont körül rajzoljunk kört tetszés szerinti sugárral, de úgy, hogy mind a két egyenest messe. E metszéspontokban emeljünk merőlegest az egyenesekre, és keressük meg ezek metszéspontjait. Milyen vonalat írnak le a metszéspontok, ha a kör sugarát változtatjuk?

Megoldás:

Helyezzük el az ábránkat egy derékszögű koordináta-rendszerben - jelölés a 27. ábra szerint:



27. ábra

A két egyenes egyenlete tehát, $y = a$ és $x = b$. Tegyük fel, hogy $b \geq a \geq 0$. Az O középpontú kör egyenlete $x^2 + y^2 = r^2$, ahol $r \geq b$. Az egyenesek és a kör metszéspontjai rendre P_1, P_2, P_3, P_4 , melyek koordinátái:

$$P_1(b; -\sqrt{r^2 - b^2}); P_2(\sqrt{r^2 - a^2}, a); P_3(b; \sqrt{r^2 - b^2}); P_4(-\sqrt{r^2 - a^2}; a).$$

A metszéspontokban emelt merőlegesek metszéspontjainak koordinátái:

$$Q_1(-\sqrt{r^2 - a^2}; -\sqrt{r^2 - b^2}); Q_2(-\sqrt{r^2 - a^2}; \sqrt{r^2 - b^2});$$

$$Q_3(\sqrt{r^2 - a^2}; \sqrt{r^2 - b^2}); Q_4(\sqrt{r^2 - a^2}; -\sqrt{r^2 - b^2}).$$

A kapott metszéspontok x koordinátái kielégítik az $x^2 = r^2 - a^2$, y koordinátái pedig az $y^2 = r^2 - b^2$ egyenletet.

Ennélfogva a kapott pontok koordinátái kielégítik az $x^2 - y^2 = b^2 - a^2$ vagyis, a keresett mértani hely $a^2 \neq b^2$ esetén az

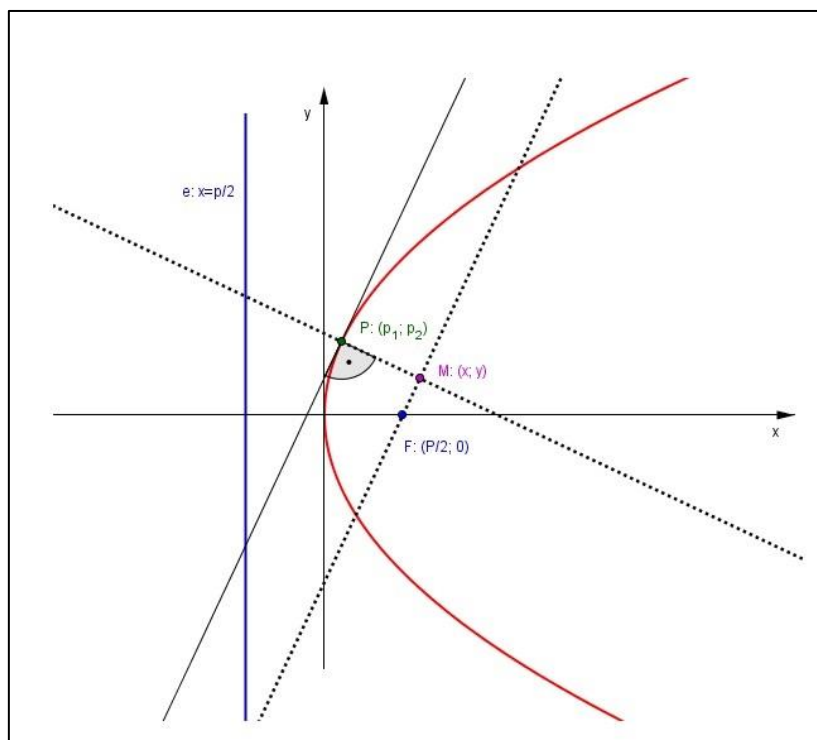
$$\frac{x^2}{b^2 - a^2} - \frac{y^2}{b^2 - a^2} = 1$$

egyenletű hiperbolán helyezkednek el, ha $a^2 = b^2$ esetén az $x - y = 0$, illetve az $x + y = 0$ egyeneseken vannak rajta.

- 3) Állítsunk merőlegest egy parabola érintőjére az érintési pontban, és ezt messük el a fókuszon átmenő, az érintővel párhuzamos egyenessel. Mi a metszéspontok mértani helye, ha az érintési pont végigfut a parabolán?

Megoldás:

Helyezzük el az ábránkat egy derékszögű koordináta-rendszerben - jelölés a 28. ábra szerint.



28. ábra

A parabolát úgy helyezzük el a derékszögű koordináta rendszerben, hogy $P(p_1; p_2)$ pontjaira teljesüljön:

$$p_2^2 - 2pp_1 = 0 \quad (p > 0)$$

Tudjuk, hogy a $(p_1; p_2)$ parabolaponthoz tartozó érintő $(x_1; y_2)$ pontjaira teljesül.

$$-p(x_1 + p_1) + p_2 y_2 = 0$$

melynek, normálvektora: $(-p; p_2)$

A keresett mértani hely $P(p_1; p_2)$ -ből származtatott $M(x; y)$ pontja rajta van az $F(\frac{p}{2}; 0)$ fókuszon átmenő, érintővel párhuzamos egyenesen:

$$-p\left(x - \frac{p}{2}\right) + p_2 y = 0$$

és az érintési ponton áthaladó, érintőre merőleges egyenesen:

$$p_2(x - p_1) + p(y - p_2) = 0$$

Az $M(x; y)$ metszéspont koordinátáját megkapjuk az egyenletrendszer megoldásával:

$$\begin{cases} -p\left(x - \frac{p}{2}\right) + p_2 y = 0 \\ p_2(x - p_1) + p(y - p_2) = 0 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} -p\left(x - \frac{p}{2}\right) + p_2 y = 0 & /(* p_2) \\ p_2(x - p_1) + p(y - p_2) = 0 & /(* p) \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}p^2 p_2 + p_2^2 y - p p_2 p_1 + p^2 y - p^2 p_2 = 0$$

$$y(p_2^2 + p^2) = p p_2 p_1 + \frac{1}{2}p^2 p_2$$

A parabola elhelyezése alapján, tudjuk, hogy:

$$\frac{1}{2}p^2 = p p_1$$

$$y(p_2^2 + p^2) = \frac{1}{2}p_2^3 + \frac{1}{2}p^2 p_2$$

$$y = \frac{1}{2}p_2 \left(\frac{p_2^2 + p^2}{p_2^2 + p^2} \right)$$

$$y = \frac{1}{2}p_2$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy:

$$-p\left(x - \frac{p}{2}\right) + \frac{1}{2}p_2^2 = 0$$

$$-px = -\frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}p_2^2$$

A parabola elhelyezése alapján, tudjuk, hogy:

$$\frac{\frac{1}{2}p_2^2}{p} = p_1$$

Ezt felhasználva kapjuk:

$$x = \frac{1}{2}p + p_1$$

$$\text{Az } \begin{cases} y = \frac{1}{2}p_2 \\ x = \frac{1}{2}p + p_1 \end{cases} \text{ rendszer egy egyértelmű kapcsolatot jelent } P(p_1; p_2) \text{ és } M(x; y) \text{ között:}$$

$$p_2 = 2y$$

$$p_1 = x - \frac{p}{2}$$

Tehát $(x; y)$ kielégíti a $p_2 = 2y$ és $p_1 = x - \frac{p}{2}$ -t behelyettesítve a $p_2^2 - 2pp_1 = 0$ egyenletbe kapjuk a következő egyenletet:

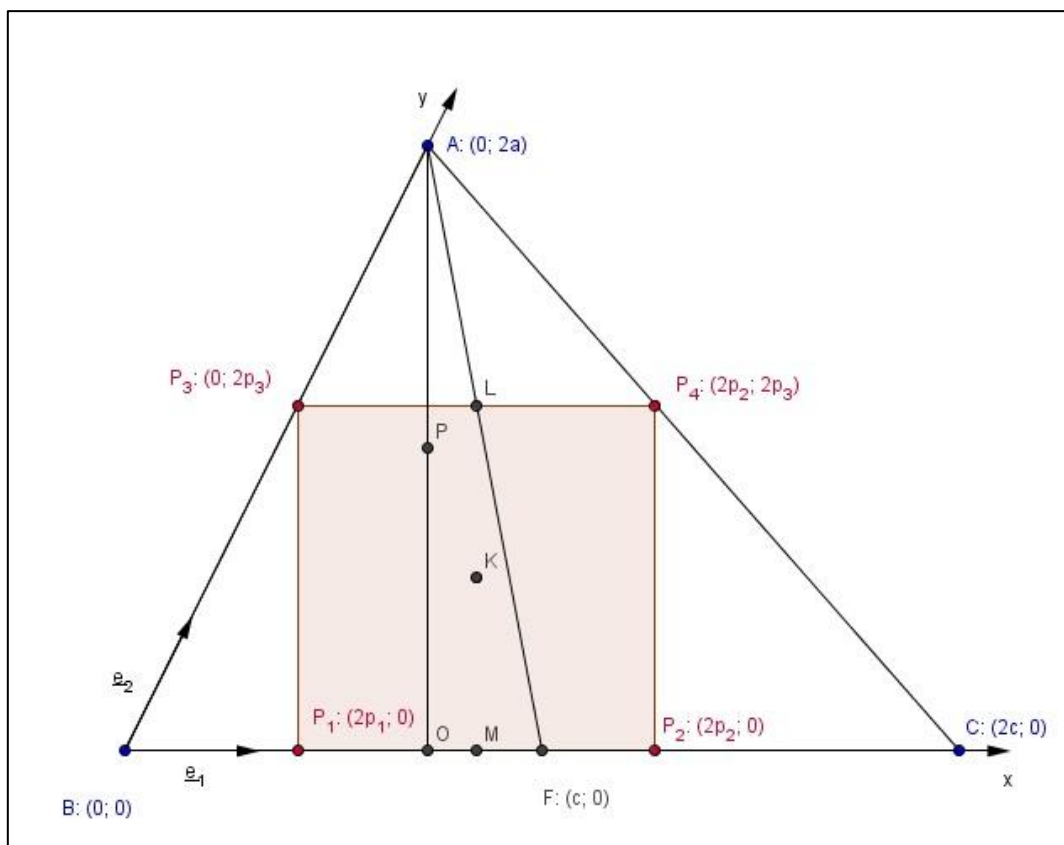
$$y^2 = \frac{p}{2}\left(x - \frac{p}{2}\right)$$

Ez egy $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ csúcsú, $\frac{p}{4}$ paraméterű parabola egyenlete.

- 4) Írjunk adott hegyesszögű háromszögbe téglalapokat, amelyeknek egyik oldala meghatározott háromszög oldalon – és a további két csúcsa is a háromszög kerületén – van. Határozzuk meg a téglalapok középpontjainak mértani helyét.

Megoldás:

Helyezzük el az ábránkat egy ferdeszögű koordináta rendszerben, egységnek választom az $\underline{e}_1$ és $\underline{e}_2$ vektorokat, ahol $|\underline{e}_1| = |\underline{e}_2| = 1$ - jelölés a 29. ábra szerint.



29. ábra

A feladat feltételeit kielégíti a P_1, P_2, P_3, P_4 téglalap. A P_3P_4 felezőpontja $L(p_2; 2p_3)$ rajta van az $ABC\Delta$ A csúcsához tartozó súlyvonalán, mivel, az $ABC\Delta \sim AP_3P_4\Delta$, ezért egy hasonlóság az L pontot F -be viszi.

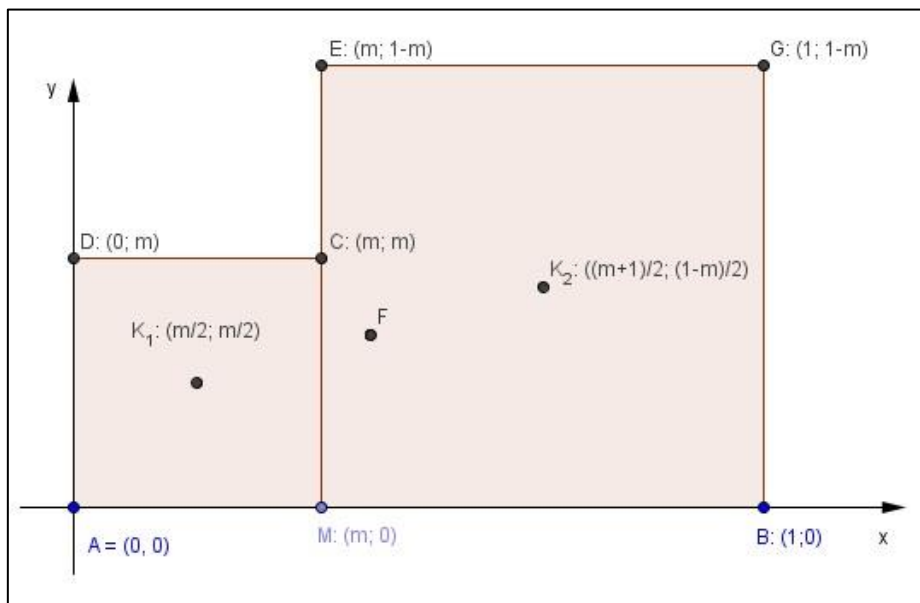
LM merőleges a téglalap P_1P_2 oldalára és AO magasságvonallal párhuzamos. A téglalap $K(\frac{p_1+p_2}{2} + p_2; p_3)$ középpontja az LM szakasz felezőpontja, ezért K rajta van az $AOF\Delta PF$ súlyvonalán. A P és F pontok akkor esnek a K ponttal egybe, ha szakasszá fajul a téglalap.

Megjegyzés: Ha megengedünk elfajuló téglalapokat, melynek oldalai a háromszög oldalainak meghosszabbítására esik, akkor a keresett mértani hely, az FP -n át menő egyenes.

- 5) Az AB szakaszon mozog az M pont. Az AM és MB szakasz fölé az AB egyenes ugyanazon oldalán megszerkesztjük $AMCD$ és $MBEG$ négyzeteket. Mi a mértani helye a két négyzet középpontját összekötő szakaszok felezőpontjainak?

Megoldás:

Helyezzük el az ábránkat egy derékszögű koordinátarendszerben - jelölés a 30. ábra szerint. Az egység legyen az AB szakasz távolsága.



30. ábra

Keressük az F pont mértani helyét, az $M(m;0)$ koordinátájának változása alapján. Az F pont koordinátáját megkapjuk, a K_1 és K_2 pont felezőpontjaként:

$$F\left(\frac{2m+1}{2}; \frac{1}{4}\right)$$

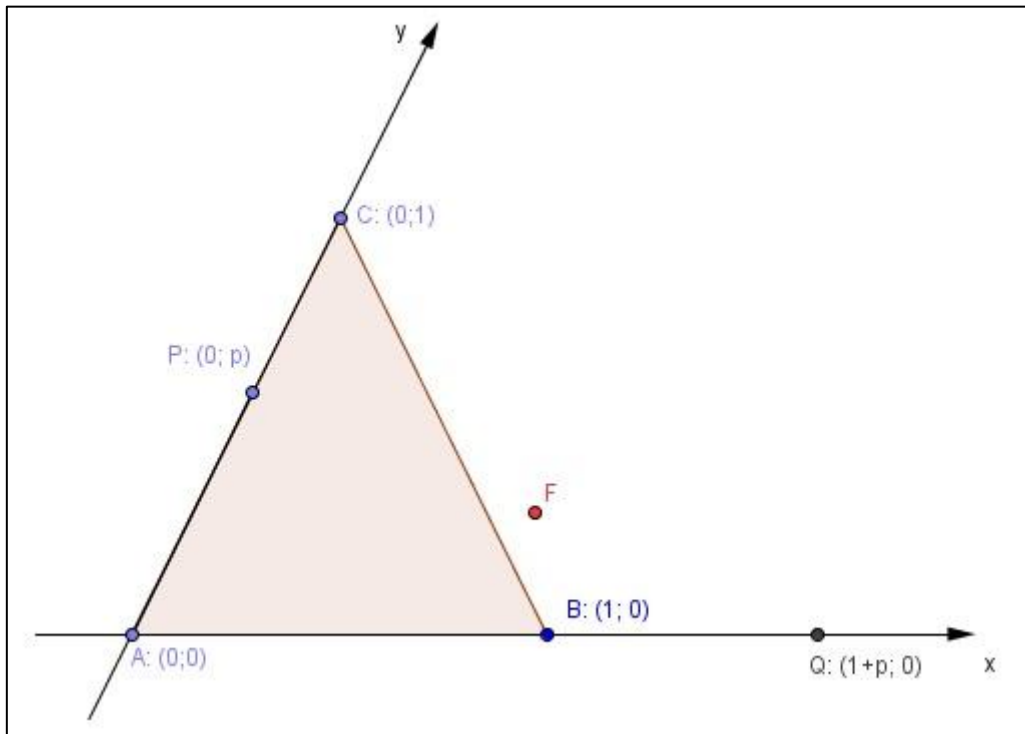
Mivel az F pont ordinátája független M -től, ezért F befutja az $y = \frac{1}{4}$ egyenest. Az F abszcisszája függ M pont választásától, ezért figyelembe kell venni a következőket:

Két szélsőséges eset van, ha az $AMCD$ négyzet az A pontra fajul, ebben az esetben az $M(0,0)$ koordinátává fajul, ekkor $F(\frac{1}{2}; \frac{1}{4})$ lesz. A másik esetben az $MBEG$ négyzet a B pontra fajul. Ekkor az $M(1,0)$ koordinátává fajul, ekkor $F(\frac{3}{2}; \frac{1}{4})$ lesz. De ebben az esetben nem beszélhetünk két négyzetről, tehát, ez a két pont nem tartozik bele a mértani helybe. Tehát a mértani hely x koordinátái az $(\frac{1}{2}; \frac{3}{4})$ intervallumban mozognak, és erre a szakaszra redukálódik a mértani hely.

- 6) Legyen az ABC szabályos háromszög AC szárának egy pontja P ! Mérjük fel B -ből a PA szakaszt az AB szár B -n túli meghosszabbítására, és jelöljük a kapott pontot Q –val! Mi a PQ szakaszok felezőpontjának halmaza, ha P befutja az AC szakaszt?

Megoldás:

Helyezzük el az ábránkat egy ferdeszögű koordináta-rendszerben - jelölés a 31. ábra szerint. Egységnek választom a háromszög a és b oldalát.



31. ábra

Keressük az F pont mértani helyét, a $P(0;p)$ koordinátájának változása alapján. A feladat alapján, a Q pont koordinátájának csak az abszcisszája tud változni p függvényében, ezért $Q(1+p;0)$ koordinátákkal írható fel. Az F pont koordinátái felírhatók a következő alakban:

$$F\left(\frac{1+p}{2}; \frac{p}{2}\right)$$

Mivel $0 \leq p \leq 1$ ezért a két szélsőséges esetben, ha $P(0;0)$ akkor az $F_1(\frac{1}{2};0)$, ha pedig $P(0;1)$ akkor $F_2(1;\frac{1}{2})$. Tehát, F befutja az F_1F_2 szakaszt, mivel az F_1F_2 összes pontjához kölcsönösen egyértelműen rendeltünk hozzá pontosan egy P pontot az AC szakaszon.

11 Feladatgyűjtemény

1. feladat:

Az ABC derékszögű háromszögbe rajzoljunk egy olyan félkört, amelynek középpontja az AB átfogón van, és amely érinti a befogókat. Jelölje ennek a sugarát r , a háromszög körül írt körének sugarát R , a két középpont távolságát d . Bizonyítsa be, hogy

$$\frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} = \frac{1}{r^2}$$

2. feladat:

Az ABC derékszögű háromszög AC és BC befogói fölé (kifelé) négyzeteket szerkesztünk: AA_1C_1C és BB_1C_2C . Igazoljuk, hogy az A_1B_1 szakaszt az ABC háromszög köré írt kör felezi.

3. feladat:

Adott a síkban két egységnyi sugarú kör: k és k_1 melyek érintik egymást. Egyik közös külső érintőjük az e egyenes. Ezután rendre megrajzoljuk a $k_2, k_3, \dots, k_n$ köröket úgy, hogy mindegyik érintse k -t, e -t és az eggyel kisebb sorszámú kört. Mekkora a k_n kör sugara?

4. feladat:

Egy derékszögű háromszög befogóira kifelé, átfogójára pedig befelé négyzeteket írunk. Igazoljuk, hogy a négyzetek középpontjai, valamint a derékszögű csúcs egy egyenesre illeszkednek.

5. feladat:

Az ABC háromszög AB és AC oldalaira kifelé négyzeteket írunk (AC_1C_2B és AB_1B_2C). Bizonyítandó, hogy B_2C_2 szakasz felezőpontja a BC átmérőjű körön van.

6. feladat:

Az ABC egyenlő oldalú háromszög A csúcsának a BC oldalra vonatkozó tükörképe körül a B csúcson átmenő kört rajzolunk. Igazoljuk, hogy a kör tetszés szerinti P pontját A -val, B -vel és C -vel összekötve, e három szakaszból derékszögű háromszög szerkeszthető.

7. feladat:

Az ABC háromszögben $AB = BC$, a ABC szög 120° . Az ABC szög szögfelezője D -ben metszi az AC oldalt. Mutassuk meg, hogy $3(AD + DB) = AC$.

8. feladat:

Az XOY szög szárain kijelölünk két egyenlő szakaszt: AB -t és CD -t; e szakaszok két belső (A, C) és két külső (B, D) végpontját egymással összekötjük. Mutassuk meg, hogy az AC és BD szakaszok középpontját összekötő egyenes az XOY szög felezőjével párhuzamos!

9. feladat:

Jelöljük az ABC háromszög súlypontját S -sel, az AS szakasz felezőpontját P -vel, a háromszög területét T -vel és a háromszög köré írt kör sugarát R -rel. Igazolja, hogy

$$PB^2 + PC^2 - 2PS^2 \geq 2 \cdot \sqrt[3]{2T^2 \cdot R^2}$$

10. feladat:

(Stewart tétel) Ha a D pont az ABC háromszög BC oldalán fekszik, akkor bizonyítsuk be, hogy teljesül:

$$AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot BC = AD^2 \cdot BC + BC \cdot DB \cdot CD$$

11. feladat:

Adva van $ABCD$ négyszög. Bizonyítsuk be, hogy

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4 \cdot MN^2,$$

ha a négyszög AC és BD átlóinak felezőpontjait M -mel és N -nel jelöljük!

12. feladat:

Adva vannak az e, f párhuzamos egyenesek és köztük az O pont; O távolsága e -től a , f -től b . Az O -n át húzott g egyenes e -t E -ben, f -et F -ben metszi. F -ben merőlegest állítunk g -re, és erre az e -vel való metszéspontja irányában felmérjük az OE szakaszt, ennek végpontja P . Mi a P pont mértani helye, ha g az O körül forog?

13. feladat:

AB legyen egy kör átmérője és C a középpontja. Hosszabbítsuk meg az AX húrt Y -ig úgy, hogy $AX = XY$ legyen, és jelöljük a CY és BX egyenesek metszéspontját Z -vel. Mi a Z pontok mértani helye, ha AX egyenes az A körül forog?

14. feladat:

Adott O középpontú körben megrajzoljuk az AOB átmérőt. O -ból tetszés szerinti sugarat húzunk, mely a kör területét C -ben metszi. C -ből OA -ra merőlegest bocsájtok, melynek talppontja D . Vegyük fel OC -n az M pontot úgy, hogy $OM = CD$. Mi az M pontok mértani helye?

15. feladat:

Adott egy kör, egy egyenes, és ezen a P külső pont. E pontból a körhöz érintőket rajzolunk, és az érintési pontokat összekötő húr középpontját M -mel jelöljük. Mi az M pont mértani helye, ha P pont az adott egyenesen mozog?

16. feladat:

Adott egy ABC háromszög. Mi azon P pontok mértani helye a síkban, amelyekre

$$AP^2 + BP^2 = CP^2$$

17. feladat:

Mi azon pontok mértani helye a síkon, amelyeknek két adott ponttól vett távolságának négyzetösszege állandó?

18. feladat:

Adott a síkon n pont. Mi azon pontok halmaza, amelyekre teljesül, hogy a pontoktól mért távolságok négyzetösszege állandó?

12 Irodalomjegyzék

■ Felhasznált irodalom:

- [1] **Dr. Gerőcs László:** *Repeta matek 1,2,3,4* Scolar kiadó Bp. 1995,1996,1997,1998
(ISBN: 963-85341-2-5; 963-85342-6-8; 963-85341-9-2; 963-919-301-1)
- [2] **Dr. Kosztolányi József:** *Sokszínű matematika 11* Mozaik kiadó Szeged 2011
(ISBN: 978 963 697 414 5)
- [3] **Faragó László:** *A koordináta-geometria tanításának módszertana* Tankönyvkiadó vállalat Budapest 1957, Tankönyvi szám: 52171.
- [4] **Hajnal Imre:** *Matematika 11* Nemzeti Tankönyvkiadó,2009 (ISBN: 9789631948844)
- [5] **Hódi Endre:** Matematika IV [Az analitikus geometria tanítása] középiskolai általános továbbképzés tananyag Budapest 1952
- [6] **Horvay Katalin –Riemann István:** *Projektív geometria - Kézirat ELTE TTK* Tankönyvkiadó 1983
- [7] **Katz Sándor:** *Matematika Versenyfeladatok Fejér Lipót matematikaverseny feladatai 1987-2006* (ISBN 978-963-06-6454-7)
- [8] **Kovács Ágnes:** *Egyedül a matek felvételin Felkészítő feladatok, felvételi feladatsorok 1986-2000* 2000, (ISBN 963-03-8715-8)
- [9] **Pogács Ferenc:** *Vektorgeometria*, Műszaki könyvkiadó Budapest 1972
- [10] **Pogács Ferenc:** *Vektorok, Koordinátageometria, Trigonometria*, Typotex 2005
(ISBN: 963 9132 24 1)
- [11] **Róka Sándor:** *Egypercesek*, Tóth könyvkereskedés és Kiadó Kft. 1997
(ISBN 963-9081-31-0)
- [12] **Schultz János:** *Elemi matematikai versenyfeladatok*, 2011
(ISBN 978- 963- 88350-3-1)
- [13] **Tolnai Jenő:** *Érdekes Matematikai Gyakorló feladatok II.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1971

■ Felhasznált honlapok:

- [14] **KöMaL:**

<http://www.komal.hu/verseny/korabbi.h.shtml> (utolsó letöltés: 2014.11.08)

[15] **Tehetséggondozás a matematikában:**

<http://users.itk.ppke.hu/~adorjan/matematika/list.html> (utolsó letöltés: 2014.11.08)

[16] **Tudósnaptár:**

<http://tudosnaptar.kfki.hu/historia/> (utolsó letöltés: 2014.11.08)

[17] **Versenyvizsga portál:**

<http://versenyvizsga.hu/external/vvszuro/vvszuro.php#5> (utolsó letöltés: 2014.11.08)

[18] **Wikipedia:**

<http://hu.wikipedia.org/wiki/Kett%C5%91svizony> (utolsó letöltés: 2014.11.08)

■ **Doktori értekezés:**

[19] **Kiss Sándor:** *A koordinátageometriai módszerek összehasonlító elemzése és különböző szintű alkalmazásai*, 2010, Debrecen.

[20] **Tóber Ernő:** *Az analitikus geometria tanítása és alkalmazása a középiskolai matematikaoktatásban*, 1980, Nagykanizsa – Budapest.