

TUDOMÁNYOS DIÁKKÖRI DOLGOZAT

TUDOMÁNYOS DIÁKKÖRI DOLGOZAT

Elemi hiperbolikus geometria szemléletesen

Intézmény: PTE-TTK

Szak: Matematika BSC

Témavezető: Dr. Horváth Jenő

Prof. Emeritus

Tartalomjegyzék

Előszó	3
1. Történelmi áttekintés	4
1.1 Euklidesz és az euklideszi sík helyettesítő axiómái	5
1.2 A hiperbolikus geometria (B-L geometria felfedezése)	6
2.1 A sztereografikus projekció	8
2.2 Gömbfelületen a körre vonatkozó tükrözés	9
3. A Pointcaré-féle félgömb modell	10
3.1 A félgömbmodell, annak merőleges vetítése. Párhuzamosság	10
3.2 Két egyenes kölcsönös helyzete. Sugársorok	11
3.3 Egyenesre vonatkozó tükrözés definíciója, és tulajdonságai	11
3.4 Két egyenes, két pont egymásba tükrözése	12
3.5 Szakaszok többszörözése, és elemzése	13
3.6 Szögmetrika euklideszi	14
3.7 Ciklusok a modellen	15
4. Elemi tételek és bizonyítások	17
4.1 A háromszög szögeinek összege kisebb 180° -nál	17
4.2 Összefüggés a háromszög oldalai és szögei között	17
4.3 A talpponti háromszög minimum tulajdonsága	18
4.4 A háromszög belső és külső szögfelezői	19
4.5 A háromszög köré írt köre (ciklusa)	20
4.6 A háromszög magasságvonalai	20
4.7 A háromszög súlyvonalai	21
4.8 A határháromszögek egybevágók	23
4.9 Steiner-féle körlánc	24
4.10 Összefüggés a párhuzamossági távolság és a szög között	25

5. Szerkesztések.....	26
5.1 Háromszög szerkesztése egy oldalból, és a rajta fekvő két szögből.....	26
5.2 Adott háromszög szögeinek összege	26
5.3 Háromszög szerkesztése, ha adott a, b oldalak és m_c	27
5.4 Háromszög szerkesztése, ha adott a két oldal és a közbezárt szög.....	28
5.5 Határháromszögeknél a beírt kör középpontja és a magasságpont egybeesik.....	28
6. Hiperbolikus sík modelljei	29
Irodalomjegyzék	30
Utószó.....	31

ELŐSZÓ

A magyar Bolyai János (1802-1860) [1] és az orosz Nyikolaj Lobacsevszkij (1792-1856) [8] közel egy időben egymástól függetlenül megmutatták, hogy létezik az euklideszi geometriától különböző geometria, olyan feltétel mellett, hogy a síkban egy adott ponton több nem metsző egyenes létezik, amely nem metsz egy adott egyenest, felépíthető egy másik geometria. Ezt nevezzük Bolyai-Lobacsevszkij geometriának (röviden B-L geometria) vagy hiperbolikus geometriának.

Az euklideszi geometriához szokott szem nehezen képzei el, hogy létezik egy ponton át adott egyeneshez több nem metsző egyenes, létezik a síkon a párhuzamos egyeneseken kívül további nem metszők. Azt is nehéz elképzelni, hogy létezik három pont, amelyek nincsenek egy egyenesen, sem egy körön, vagy, hogy a távolságvonal nem egyenes, vagy a háromszög szögeinek összege 180° -nál kisebb, a háromszögnek nem mindig van köré írt köre (stb.)

Dolgozatomban meg szeretném mutatni, hogy a B-L síkon az itt felsoroltak és további érdekes tulajdonságok léteznek. Mindezeket a B-L sík egy modelljén, a Pointcaré-féle félgömbmodellen mutatom meg. Szász Pál [6] megmutatta, hogy a hiperbolikus sík modelljei ekvivalensek a hiperbolikus síkkal, így a modelleken bebizonyított tételek érvényesek a hiperbolikus síkon is. Remélem, hogy az olvasó (pl. középiskolás diák) is megszereti ezt a geometriát, mint ahogy én megszerettem.

1. TÖRTÉNELMI ÁTTEKINTÉS

„A geometriához nem vezet királyi út.”

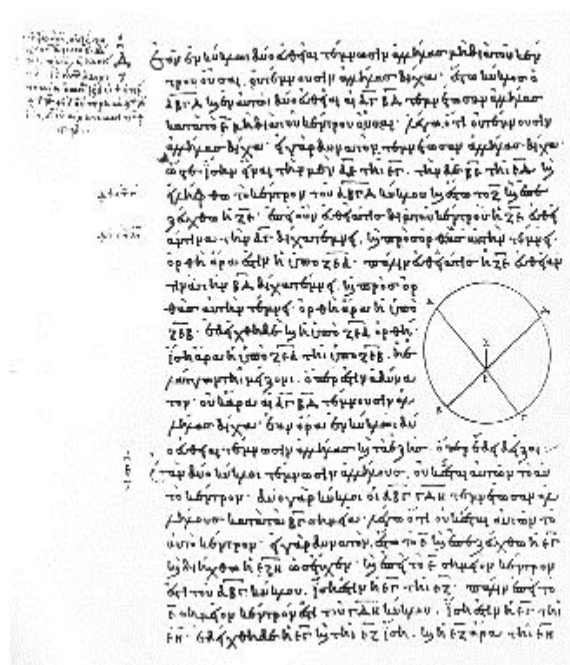
/Euklidesz mondta I.Ptolemaiosznak/

Euklidesz görög matematikus, legjelentősebb az Elemek [3] című műve, amely i.e. 300 körül íródott. Könyvének jelentősége, hogy elkövetkező századokra megadja a geometriai kutatások alapjait. A Biblia után az Elemeket fordították le a legtöbb nyelvre, így magyarra is lefordították. Az alkotása több részre tagolódik, 13 fejezetből, vagyis Könyvből áll. Az első négy a síkgeometriával foglalkozik, benne a háromszögek, négyszögek, körök és a sokszögek szerkesztését tárgyalja. Az első könyv 23 definíciót, 9 axiómát, és 5 posztulátumot tartalmaz, és most az utóbbiak következzenek.

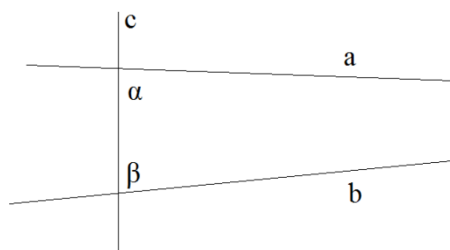
Követeltessék meg,

1. Hogy minden pontból minden ponthoz legyen egyenes húzható.
2. És hogy véges egyenes vonal egyenesben folytatólag meghosszabbítható legyen.
3. És hogy minden középponttal és távolsággal legyen kör rajzolható.
4. És hogy minden derékszög egymással egyenlő legyen.
5. És hogy ha két egyenes úgy metsz egy egyenest, hogy az egyik oldalon keletkező belső szögek (összegben) két derékszögnél kisebbek, akkor a két egyenes végtelenül meghosszabbítva találkozzék azon az oldalon, amerre az (összegben) két derékszögnél kisebbek vannak.

Ezen definíció, axiómák és posztulátumok segítségével



Euklidesz Elemek című művének egy lapja



1. ábra

$$\alpha + \beta < 180^\circ$$

Euklidesz felépítette a maga geometriáját, kimondott és bizonyított tételeket.

Euklidesznek az 5. posztulátuma a többihez viszonyítva bonyolultnak tűnik, ezért ezt sokan szerették volna bebizonyítani. Ez nem sikerült, és nem is sikerülhetett. Ezt Bolyai és Lobacsevszkij bizonyították, hogy több nem metsző is létezik. Találtak úgynevezett helyettesítő axiómákat, amelyek segítségével Euklidesz 5. posztulátuma bizonyítható. Ezek közül néhányat kiemelünk.

Proklosz i. sz. V. században a következő axiómát mondta, amit ma az euklideszi sík párhuzamossági axiómájának nevezzük.

A síkban adott egyeneshez egy adott, rá nem illeszkedő ponton át egy és csak egy egyenes létezik, amely nem metszi az adott egyenest.

További helyettesítő axiómák [5]:

Ha egy egyenes által határolt egyik félsíkban az egyenestől adott távolságra lévő pontok halmaza egyenes, akkor a sík euklideszi. (Clavio, 1574)

A sík euklideszi, ha van legalább egy háromszög, amelyben a szögek összege 180° . (Saccheri, 1773)

Bármely három különböző pont vagy egy egyenesen vagy egy körön van. (Bolyai Farkas)

Ha egy síkban bármely háromszögnél nagyobb területű háromszög létezik, akkor a sík euklideszi. (Gauss, 1799)

További helyettesítő axiómák vannak [5], de a dolgozat szempontjából ezeket tartom a legfontosabbnak.

Néhány szó Bolyai Farkas életéről

Bolyai Farkas (1775-1856) Erdélyben született. Kolozsvári Református Kollégiumba járt, majd a göttingai egyetemen Kemény Simon kísérőjeként. Itt ismerkedik meg Gaussal, akit már akkor a „matematika fejedelme”-ként tisztelték. A 19. század elejéig nem volt olyan magyar matematikus, aki Euklidesz geometriájával kiemelkedően foglalkozott volna. Gauss ismertette meg Bolyai Farkassal a párhuzamossági problémát. Így Bolyai Farkas talált kilenc helyettesítő axiómát. 1804-től a marosvásárhelyi Református Kollégium tanári testületének a tagja lett, matematikát, fizikát, kémiát tanított. Sok mindennel foglalkozott (irodalommal, verseket, színműveket írt, kályhát épített, erdészetet is tanulmányozta, mert el akarta hagyni a kollégiumot). Fő műve a Tentamen (1931),

melyben rendszerbe foglalja az aritmetikát és a geometriát. A matematikai munkásságával megalapozta fia, Bolyai János abszolút geometria iránt való érdeklődését.

Bolyai János Kolozsváron született 1802. december 12.-én. Ekkor apja, Bolyai Farkas már ismerte a párhuzamosság problémáját [6]. János már gyerekkorában feltűnően érdeklődött a matematika iránt. Apja Gausshoz szeretne volna küldeni Jánost, de Farkas levelére nem is válaszolt. Ezért fiát a Bécsi Hadmérnöki Akadémiára küldi, mert ott magas szintű matematikai oktatás folyt. 18 éves korában már foglalkozott a paralelák elméletével, de édesapja le szeretne volna beszélni. 1823. november 3.-án írta felfedezéseivel kapcsolatban a híres levelét az apjának. „semmitől egy új más világot teremtettem;”, mellyel a nem- euklideszi geometriai felfedezésére utalt. Bolyai Farkas 1829-ben engedélyt kap a Tentamen (Kísérlet) kétkötetes munkájának kiadására. Javasolja fiának, hogy dolgozata (26 oldal) jelenjen meg függelékként (Appendix) a Tentamentben. Ebből származik János munkájának rövid címe: Appendix. Az eredeti cím: A tér abszolút igaz tudománya. Mindkét mű latin nyelven íródott.

„Különösen ritka a többek között egy személyben mélyebb mathesisi és költészi szellemet egyesülve látni; e részben is, mint sok egyébben, elég csodálkozásomra, alig van párja atyámnak.”

Bolyai János

Farkas elküldte János dolgozatát Gaussnak. aki erre válaszolt, jelezte, hogy ezzel ő is foglalkozott, de nem akarta közölni, mert úgy sem érte senki. Jánost ez érthető módon nem elégítette ki. 1833-ban katonai rangban nyugdíjazták. A következő években Domáldon és Marosvásárhelyen élt. Több ezer oldalas kéziratát hagyott maga után. Ezt Kiss Elemér: Matematikai Kincsek Bolyai János kéziratok hagyatékából (Akadémiai kiadó Bp. 1999) című műben részben feldolgozta.

1960. január 27.-én halt meg. Temetésén a kötelező katonai résztvevőkön kívül hárman voltak, köztük Szóts Júlia szolgáló, aki ápolta őt, és később (1911-ben) meg tudta mutatni Bolyai János sírját. Ma a két Bolyai a Marosvásárhelyi temetőben nyugszik.



Bolyai Farkas és Bolyai János sírjai

1841-ben Gauss megkapta Lobacsevszkij munkáját, lefordította németre, és tájékoztatta a matematikus világot, de Bolyairól nem beszélt. Így a világ először Lobacsevszkij nevét ismerte meg. Bolyai János munkája Gauss hagyatékának feldolgozásánál került elő.

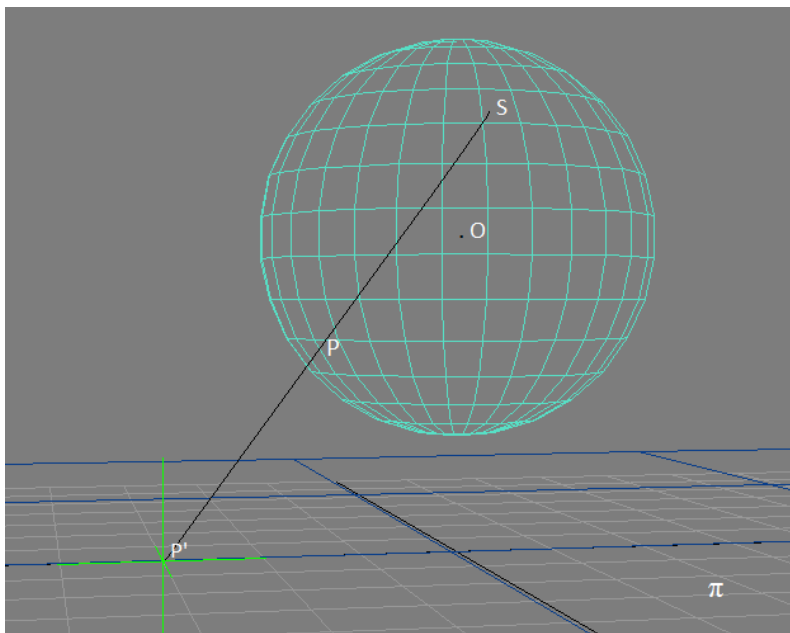
1869. júliusában Eötvös József, az Akadémia akkori elnöke az alábbi levelet írja fiának, Eötvös Lorándnak: „*A napokban levelet kaptam a Római akadémia matematikus osztálya elnökétől, melyen örültem és elszomorodtam egyszerre, és melynek tartalmából most sem tudom büszkék legyünk-e, avagy piruljunk. Az elnök tudósít, hogy ugyanezen postával Bolyai Jánosnak és Farkasnak Rómában kijött olasz biográfiáját küldi, hozzá egy Párizsban és egy Bordeaux-ban kijött biográfikus ismertetést, melyhez Bolyai Jánosnak a paralellák teóriájáról írt kisebb munkája szintén fordításban csatoltatott. Ez a munka 1834-ben jött ki, s állítólag a római tudósok nézete szerint a legnagyobb, mi a matematika körében e század alatt történt. Bolyai munkáját csak Gauss ismerte, kivel Bolyai János apja, Farkas a dolgot közlé...*” [6]

1894-ben a Matematikai Tudományok Nemzetközi Bibliográfiai Kongresszusán (Párizs) megállapodnak arról, hogy a Bolyai János és Nyikolaj Lobacsevszkij által felfedezett geometria a Bolyai-Lobacsevszkij geometria (röviden B-L geometria) nevet viseli. Ennek ellenére ma is több országban (nem csak Oroszországban) csak Lobacsevszkij geometriáról beszélnek.

2. SZTEREOGRAFIKUS PROJEKCIÓ

A sztereografikus projekció nem tartozik a nem-euklideszi geometriához, de a modellben sokszor alkalmazzuk, felhasználjuk tulajdonságait, mivel a modell az euklideszi térben van.

Tekintsünk egy Γ gömbfelületet, és rajta egy tetszőleges S pontot, és egy olyan π síkot, amely párhuzamos az S -ben Γ -hoz húzott érintő síkkal. Legyen P egy olyan pont, amely rajta van a gömbfelületen, de nem azonos S -sel. Továbbá P' a P pont S -ből való centrális vetülete a π síkra. Sztereografikus projekciónak nevezzük a megfeleltetést, amely a gömbfelület S -től különböző pontjai és a sík pontjai között van. (2. ábra)



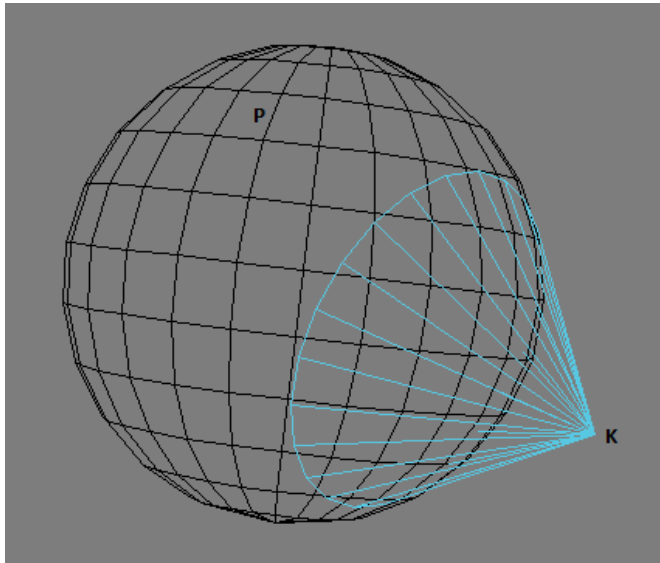
2. ábra

A sztereografikus projekció tulajdonságai: [4][7]

1. Az S -n átmenő kör vetülete π -n egyenes és π minden egyenesének megfelel Γ -n egy S -en átmenő kör.
2. S -en nem átmenő kör képe kör. Ez a leképezés nem középpont tartó. A vetületi kör nem főkör esetén úgy kapjuk a kör középpontját, hogy vesszük a körhöz tartozó érintő kúp csúcsát és ennek vetülete lesz a vetületi kör középpontja. Főkör esetén érintőhenger lesz. A kör középpontját az S -n átmenő henger érintőjével párhuzamos egyenes metszi ki a π -ből.
3. Szögtartó. Két kör szögén az érintők szögét értjük. A szögtartás azt jelenti, hogy a két kör szöge a gömbön egyenlő a vetületi körök (egyenesek) szögeivel.
A bizonyítás megtalálható [4] [7].
Számkra fontos lesz a körre való tükrözés.

Körre vonatkozó tükrözés

Legyen Γ gömbfelület, és rajta egy k kör. Ha k nem főkör, legyen K a k -hoz tartozó érintőkúp csúcsa, továbbá P a Γ gömbfelület egy tetszőleges pontja. A PK egyenes kettő pontban metszi, vagy érinti a Γ gömbfelületet. Az egyik pontja a P , a másik pontot jelöljük P_1 –el. Ha a P pont rajta van a k körön, ebben az esetben a képe önmaga. ($P = P_1$) Ha k főkör, akkor a körre vonatkozó tükrözés a k kör síkjára vonatkozó tükrözés.



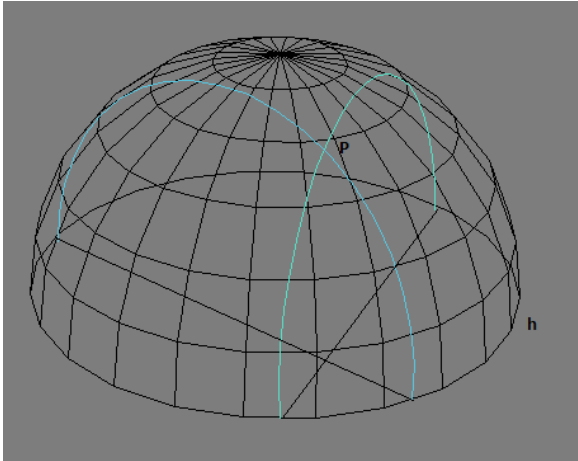
3. ábra

A körre vonatkozó tükrözés körtartó, és szögtartó.

Ha k főkör, akkor ez nyilvánvaló. Ha k nem főkör, akkor a k kör egy S pontjából sztereografikusan vetítünk a síkra. A kör- és szögtartásból következik, hogy a gömbi tükrözés sztereografikus vetülete a k kör képére, egyenesre vonatkozó tükrözés. A gömbi körre való tükrözés előállítható úgy is, hogy sztereografikusan vetítünk a π síkra, majd a síkon k' egyenesre tükrözzük, és utána visszavetítjük a gömbre. Mivel a sztereografikus vetítés az egyenesre vonatkozó tükrözés, ezért a sztereografikus vetítés inverze is szögtartó és körtartó, így a gömbfelületen a körre vonatkozó tükrözés is körtartó és szögtartó.

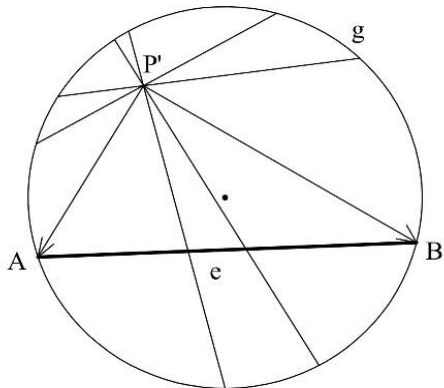
3. POINCARÉ-FÉLE FÉLGÖMBMODELL

Tekintsünk egy nyílt Γ félgömböt, melyet h főkör határol. Pontnak nevezzük a Γ felület pontjait, egyenesnek pedig a határkört merőlegesen metsző félköröket. Ezt Poincaré-féle félgömbmodellnek nevezzük. Az euklideszi térben a hiperbolikus sík félgömbmodellje a 4. ábra. [4][5][6]

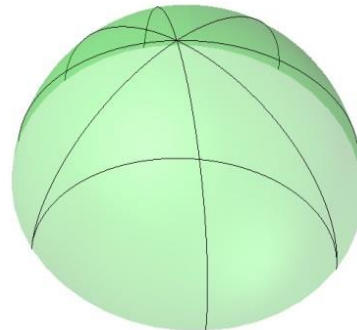


4. ábra

Az egyenesek (félkörök) és a h metszetét az egyenesek végeinek tekintjük.



5.a ábra



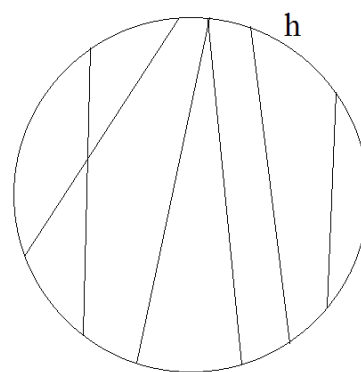
5.b ábra

Rajzolás szempontjából is talán szemléletesebb, ha a Γ félgömböt levetítjük h síkjára. Egyenes vetülete a h kör húrja. Az 5.a ábrán leolvasható, hogy az e egyeneshez P -ből húzható e -t metsző, és nem metsző egyenesek. A metszőket, és a nem metsző egyeneseket elválasztó egyeneseket nevezzük párhuzamosoknak. P ponton át két párhuzamos félegyenes húzható, és akárhány nem metsző. Ez a B-L sík párhuzamossági axiómája, a modellen teljesül.

Beszélhetünk félegyenesről, szakaszcírl, szögírl (két félegyenes szöge), fílsíkrírl, háromszögírl stb. Máris van egy másik meglepetés. Létezik olyan háromszög, melynek oldalai párhuzamosak, ezt nevezzük határháromszögírl. (20.a ábra)

Két tetszőleges egyenes helyzete lehet metsző, ha van közös pontjuk. Párhuzamosnak nevezzük, ha az egyenesek végein metszik egymást, vagyis a határkörön. Nem metszők, ha nincs közös pontjuk.

Azon egyenesek, melyeknek a síkjai síksort alkotnak, sugársornak nevezzük. Ugyan úgy a sugársor is három féle lehet. Ha van közös belső pontjuk, akkor metsző, ha páronként párhuzamosak, akkor párhuzamos, ha nincs közös belső pontjuk, akkor nem metsző sugársorokról beszélünk. (Az utóbbinak a definíciója később.)

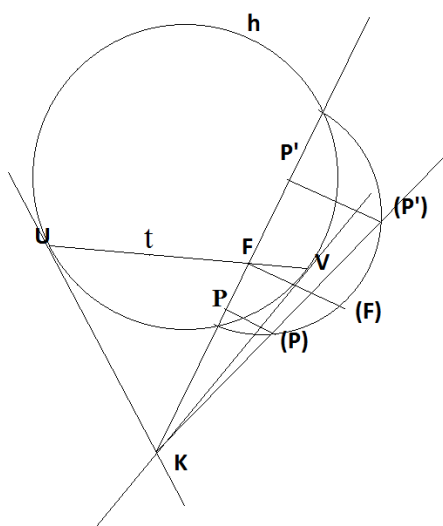


6. ábra

Tengelyes tükrözés

Már a sztereografikus projekciónál beláttuk, hogy a körre vonatkozó tükrözés körtartó és szögtartó.

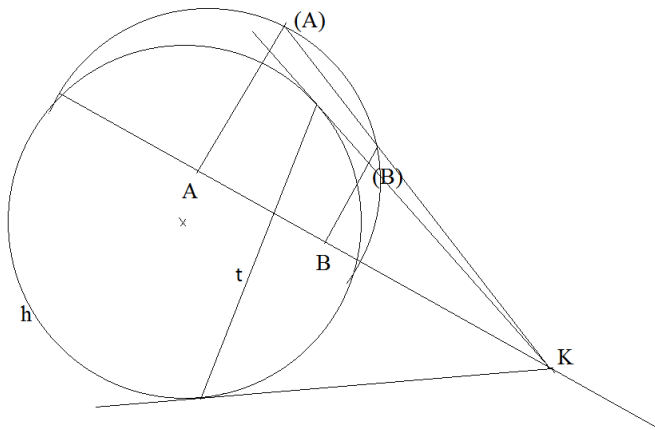
Vegyünk fel a félgömbmodellel egy t egyenest (félkört). A t egyenesre való tükrözésnek nevezzük azt a megfeleltetést, amelyet a t félkörre, mint gömbi körre vonatkozó tükrözést indukál. A 7. ábrán láthatjuk, hogy t ismeretében hogyan szerkeszthetjük meg tetszőleges pontoknak a képét. Ha t főkör, akkor vetületben t vetületére való tükrözés. Ha nem főkör, akkor vegyük a t -hez tartozó érintőkúpot, csúcsa legyen K . Ezen keresztül felvesszünk egy tetszőleges egyenest, erre illeszkedő vetítés kimetsz Γ -ből egy félkört, ezt a síkba forgatjuk. $K(P)$ egyenes még egy pontban metszi a húr lefordítottját. Ez lesz a P pont P' képe.



7. ábra

Ez a tükrözés rendelkezik az iskolában tanult tükrözések tulajdonságaival. Éspedig: A t tengely által határolt fésíkokat felcseréli, a transzformáció négyzete a helybenhagyás, PP' egyenes képe önmaga. Az $UFP\Delta$ képe $UFP'\Delta$. Mivel ezt az áttükrözést nevezzük egybevágósági transzformációnak, ezért $UFP\Delta = UFP'\Delta$, ezért ez lesz a derékszög (szög egyenlő a kiegészítő szögével). A tükrözés egyenes tartó, vagyis bárhol felvesszünk egy e egyenest, ez merőlegesen metszi h -t. Mivel a körre vonatkozó tükrözés körtartó és szögtartó, így e képe e_2 egyenes (vetületben a h kör húrja). t -re merőleges egyenesek átmennek K -n. Ezek az egyenesek nem metsző sugársort alkotnak.

Két pont egymásba tükrözése

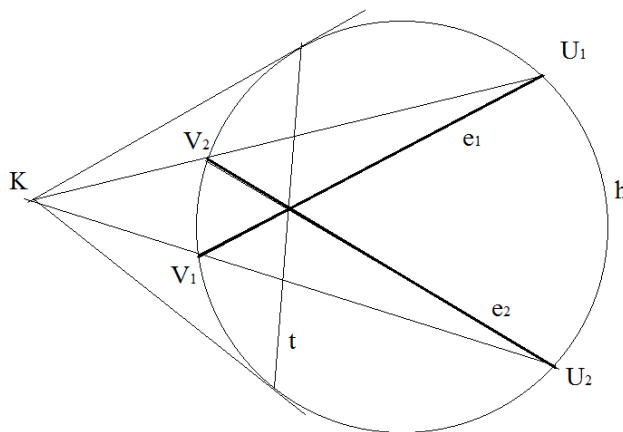


8. ábra

pont egymásba tükrözésének a tengelyét.

Gyakran alkalmazzuk, hogy tetszőleges pontot a pólusba tükrözzük. A modell pólusa az a pont, amelynek vetülete a h kör középpontja.

Két egyenes egymásba tükrözése



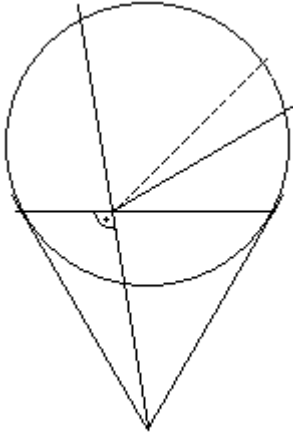
9.a ábra

végeibe, mivel a tükrözés szögtartó, ezért e_1 egyenes átmegy e_2 -be, mert mindkettő a határkört merőlegesen metszi.

A két pont egyetlen tükrözést határoz meg. A két pont meghatároz egy egyenest, melyet beforgatunk a síkba. A két pontot összekötő egyenesre merőlegeseket állítva a pontokból megkapjuk a pontok beforgatottjait. A két pontot összekötő egyenes, és a két pont beforgatottjait összekötő egyenesek metszéspontja legyen K. K-ból érintőt húzva a h-hoz, majd az érintési pontokat összekötve megkapjuk a két

Ha két egyenes metszi egymást (e_1, e_2), melynek végei U_1, V_1 és U_2, V_2 , akkor két olyan tükrözés is létezik, mely a két egyenest egymásba viszi. Az egyenesek végeiket összekötve megkapjuk a kúp csúcsát, melyből érintőt húzunk a gömbhöz, ha a végeket kétféleképpen kötjük össze, megkapjuk a két tükrözést. (9.a ábra) Az érintési pontokat összekötve megkapjuk a tükrözés t tengelyét. A t egyenesre való tükrözés e_1 végei átmennek az e_2

Szögmetrika



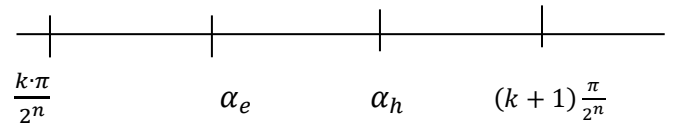
11. ábra

A pontot és a tükörképét összekötő egyenes merőleges a tükrözés tengelyére, mely euklideszi és hiperbolikus értelemben is igaz. Derékszög mértéke mindkét metrikában legyen $\frac{\pi}{2}$. Vegyünk egy tetszőleges α szöget, ennek a szögnek van egy euklideszi és egy hiperbolikus mértéke. Megfelezem a derékszöget. Az euklideszi és a hiperbolikus mértéke is $\frac{\pi}{4}$, mivel a szögfelezés, és a tükrözés szögtartó. Ha az α egybeesik a szögfelezéssel, akkor mindkét szög $\frac{\pi}{4}$. Ha nem esik egybe, akkor vesszük a nyolcadoló szögeket, ha a szög szára valamikor egybeesik, akkor készen vagyunk. ha nem, akkor végezzük el a szögfelezést $(n - 1)$ -szer, ahol n tetszőleges nagy természetes szám.

Euklideszi mérték	Hiperbolikus mérték
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{8}$
$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{16}$
:	:
$\frac{k \cdot \pi}{2^n}$	$\frac{k \cdot \pi}{2^n}$
$(k + 1) \frac{\pi}{2^n}$	$(k + 1) \frac{\pi}{2^n}$

Euklideszi mérték: $\frac{k \cdot \pi}{2^n} \leq \alpha_e < (k + 1) \frac{\pi}{2^n}$

Hiperbolikus mérték: $\frac{k \cdot \pi}{2^n} \leq \alpha_h < (k + 1) \frac{\pi}{2^n}$

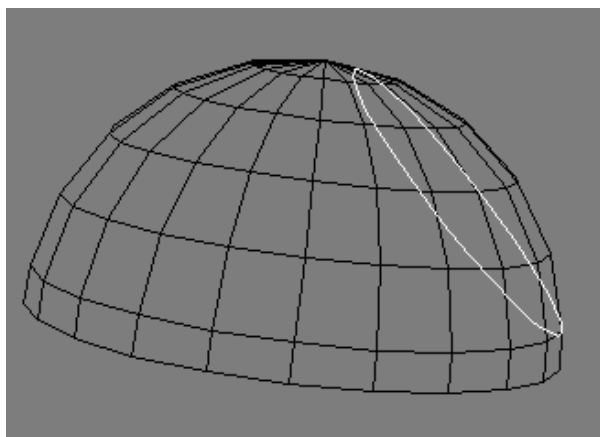


$$|\alpha_e - \alpha_h| < \frac{\pi}{2^n}$$

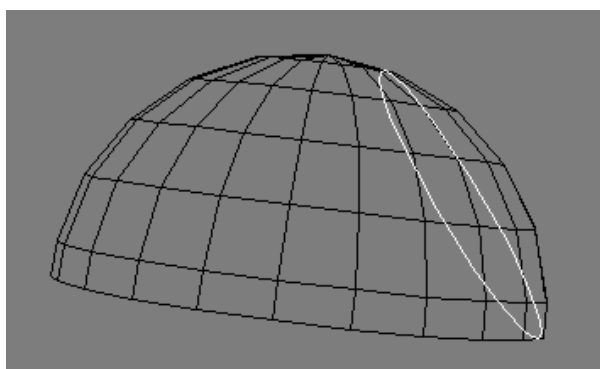
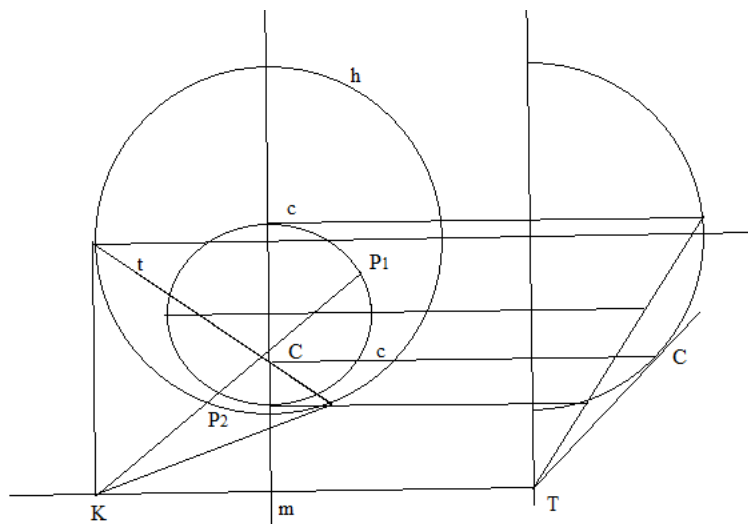
Ez igaz bármilyen nagy n esetén is, így ez csak akkor lehetséges, ha $\alpha_e = \alpha_h$.

Ciklusok

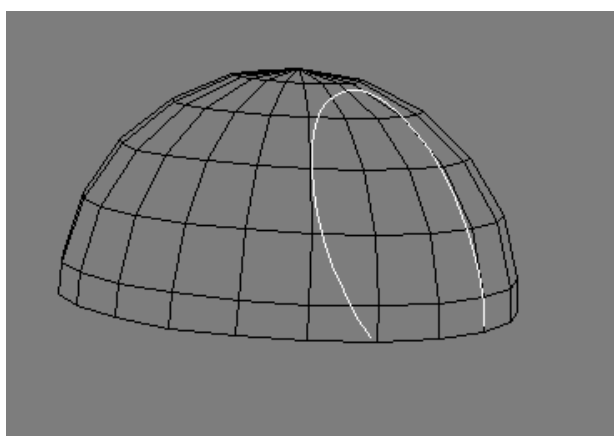
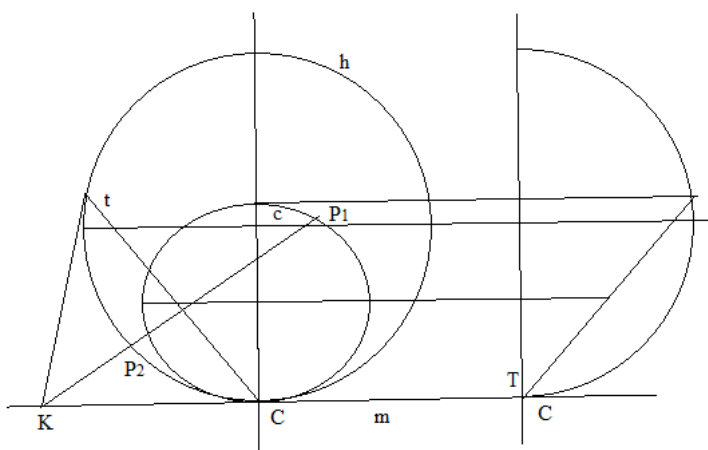
A π síkmetszetét ciklusnak nevezzük, ha a főkörrel nincs közös pontja, akkor körnek, ha egy közös pontja van, akkor paraciklusnak nevezzük. Ha két közös pontja van akkor hiperciklusnak. (12.a, b, c ábrák)



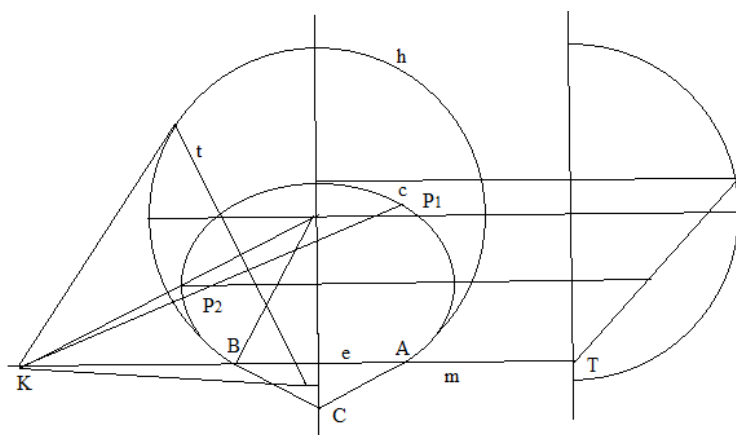
12.a ábra



12.b ábra



12.c ábra

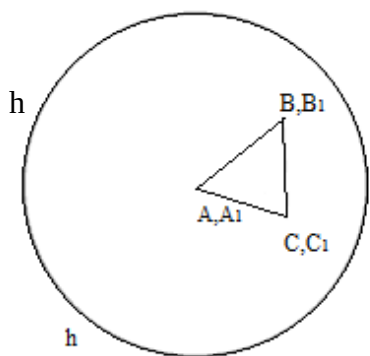


Mindhárom ciklusnak végtelen sok szimmetriatengelye van. Legyen m a ciklus síkjának, és h síkjának a metszésvonala. Az m egyeneseken tetszőlegesen vesszük fel a K pontot, ebből érintőt húzunk. Az érintőpontokat összekötve megkapjuk a szimmetriatengelyt. (P_1 tükörképe P_2). Ezek átmennek C -n, azaz kör esetén metsző sugársort, paraciklus esetén párhuzamos sugársort, hiperciklus esetén nem metsző sugársort alkotnak. Hiperciklus esetén az is látható, hogy c távolságvonala az e egyenesnek, azaz az egyenes távolságvonala nem egyenes (l. Clavio).

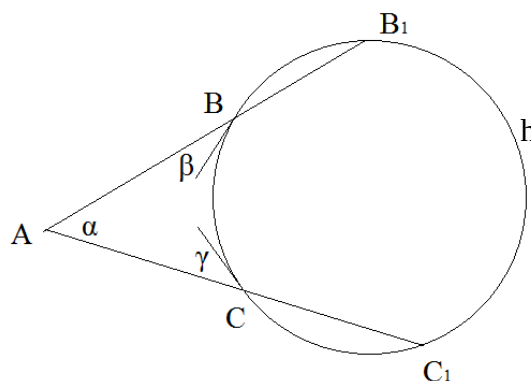
4. ELEMI TÉTELEK ÉS BIZONYÍTÁSOK

A háromszög szögeinek összege kisebb 180° -nál

Háromszögnek nevezzük a három szakasz által határolt felületrészt. Az A-t a pólusba transzformáljuk (13. a ábra). A, B, C tükröképei h síkjára A_1, B_1, C_1 . Vetítsünk A_1 -ből A-ba húzott érintő síkra. Az ABB_1 elrendezés azért igaz, mert B_1 az alsó félgömbön van.: $\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$, a szögtartás miatt, 13.b ábráról leolvasható.

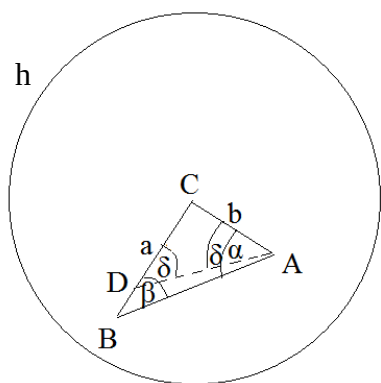


13.a ábra



13.b ábra

Összefüggés a háromszög oldalai és szögei között



14. ábra

Az A,B,C háromszög C csúcsát transzformáljuk a pólusba.

Feltétel: $a > b \Rightarrow \alpha > \beta$.

Biz: $AC=DC$, ezt körzővel, vonalzóval ki lehet mérni, mivel C a pólusban van, ezért a szerkesztés euklideszi.

$$\delta > \beta, \quad \alpha > \delta \Rightarrow \alpha > \beta$$

$$\text{Ha } \alpha > \beta \Rightarrow a > b.$$

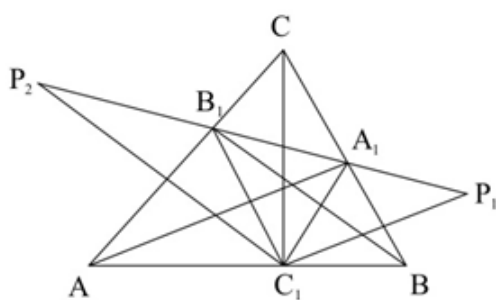
Fordítva, ha $\alpha > \beta \Rightarrow a > b$.

3 eset lehetséges:

$$a > b,$$

$$a = b \Rightarrow \alpha = \beta, \text{ ami nem lehetséges,}$$

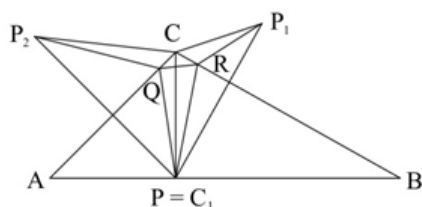
$$a < b \Rightarrow \alpha < \beta, \text{ ami szintén nem lehetséges.}$$



16.c ábra

A segédvonal miatt P_1P_2 akkor a legkisebb, ha CP a legkisebb, azaz magasságvonal. Így megvan a legkisebb kerületű háromszög (16.c ábrán $A_1B_1C_1$), melynek csúcsai magasságtalppontok. Ha pl. a B_1 nem magasságtalppont, akkor a magasságtalppontokon kívül létezik kisebb kerületű háromszög, melynek van a C_1 -től különböző csúcsa az AB oldalon, ami ellentmondás.

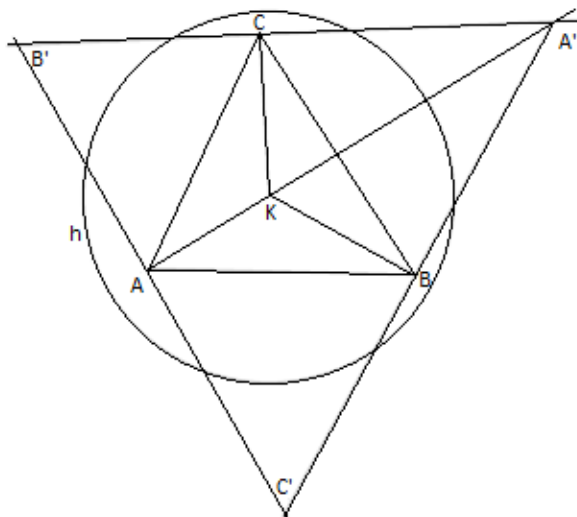
Megjegyzés:



16.d ábra

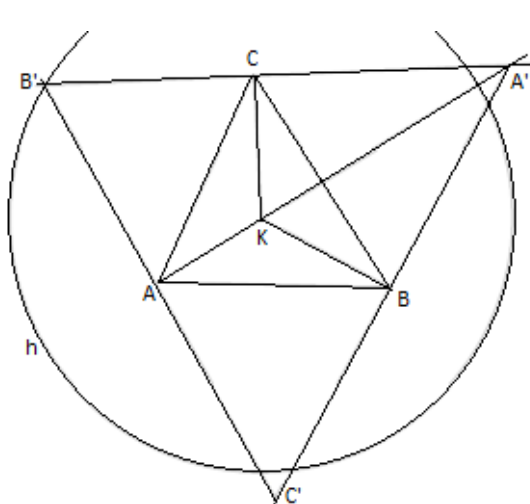
Ha a háromszög tompa- vagy derékszögű, akkor bármely háromszög kerülete nagyobb, mint a $2CC_1$. Ha itt is elvégezzük a P pontnak az oldalakra való tükrözését, és a kapott pontokat összekötjük, az nem metszi az ABC háromszöget. Így bármely háromszög kerülete nagyobb, mint $2CP = 2CC_1$.

A háromszög belső és külső szögfelezői

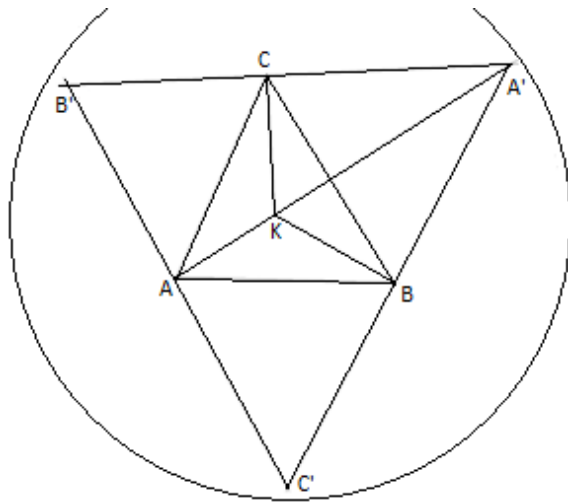


17.a ábra

Legyen K az A szög és a B szög felezőjének a metszéspontja. Ezt a felezőpontot transzformáljuk a pólusba. Mivel KA és KB metszéspontja a pólus, és szögfelezők, így az euklideszi és hiperbolikus értelemben is szögfelezők. Így CK is egyaránt szögfelező euklideszi és hiperbolikus értelemben. Külső szögfelezők merőlegesek a belsőkre, de a belsők a póluson mennek át, így euklideszi értelemben is merőlegesek. Így a két külső szögfelező, és a harmadik belső szögfelező sugársort alkotnak. Ez lehet nem metsző, mint a 17.a ábrán, vagy párhuzamos (17.b), majd metsző sugársor (17.c).



17.b ábra



17.c ábra

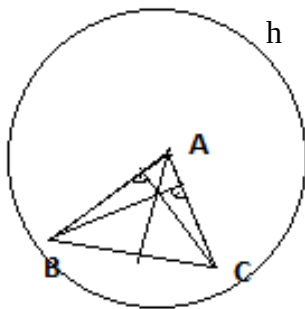
A háromszög köré írt kör

A háromszög oldalfelező merőlegesei sugársort alkotnak. (12. a, b, c ábrákon megrajzoltuk a ciklusokat) Legyen A és B a ciklus tetszőleges két pontja. Az AB felezőmerőleges a ciklus tengelye. Legyen F az AB ív felezéspontja. Vegyük a ciklus F-en átmenő tengelyét, és erre tükrözzük, mivel $\widehat{AF} = \widehat{BF}$. Így A a B-be és B az A-ba megy, azaz a tengely AB felezőmerőlegese.

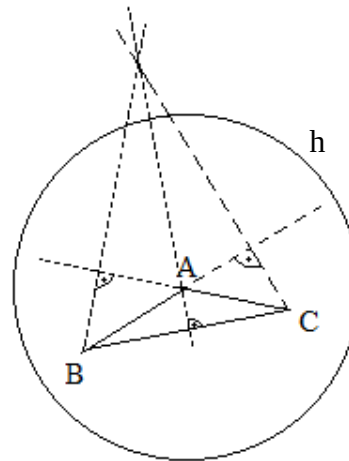
Az $ABC\Delta$ három csúcsa egy síkot határoz meg, ez a sík meghatároz vagy egy kört, vagy egy paraciklust, vagy egy hiperciklust. Így az oldalak felezőmerőlegesei metsző, párhuzamos, vagy nem metsző sugársort alkotnak. Így nem teljesül Bolyai Farkas axiómája, azaz ez nem euklideszi sík.

Magasságpont

Vegyünk egy tetszőleges ABC háromszöget a félgömbön. A háromszög egyik csúcsát, A-t a pólusba transzformáljuk, melynek így a főkörre (h-ra) való vetülete a kör középpontja. Az AB és az AC oldalai átmennek a póluson, ezért ezekhez az egyenesekhez hozzáírt henger tartozik. Melynek következménye, hogy a B és a C pontból vett magasságok h körre való vetületei magasságai lesznek a vetületi háromszögnek. Vegyük a BC egyeneshez tartozó kúp csúcsát és az A pontot összekötő egyenest, ez lesz az m_a . $m_a \perp BC$ -re vetületben, mert m_a h-nak átmérője. Így merőlegesen metszi a BC egyenest. Így m_a, m_b, m_c magasságok egy ponton mennek át az euklideszi geometriában, és ezek a magasságok sugársort alkotnak a hiperbolikus geometriában. Ez lehet metsző, párhuzamos, vagy nem metsző sugársor. (18.a, b ábra)



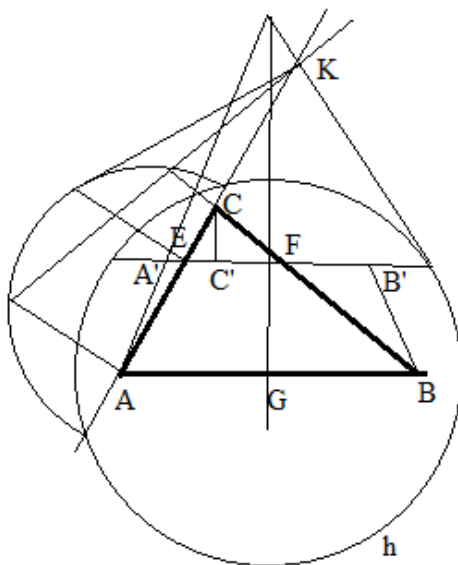
18.a ábra



18.b ábra

Súlypont

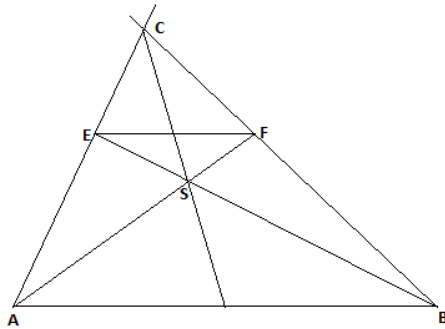
Az ABC háromszöget úgy transzformáljuk, hogy a pólus az AB oldal felezőpontja legyen, és G-vel jelöljük. A vetületi képen, mivel G a vetületi kör középpontja, ezért A és B egyenlő távolságra vannak G-től. Legyen az AC oldal felezéspontja E, a BC oldalé F. (E



19.a ábra

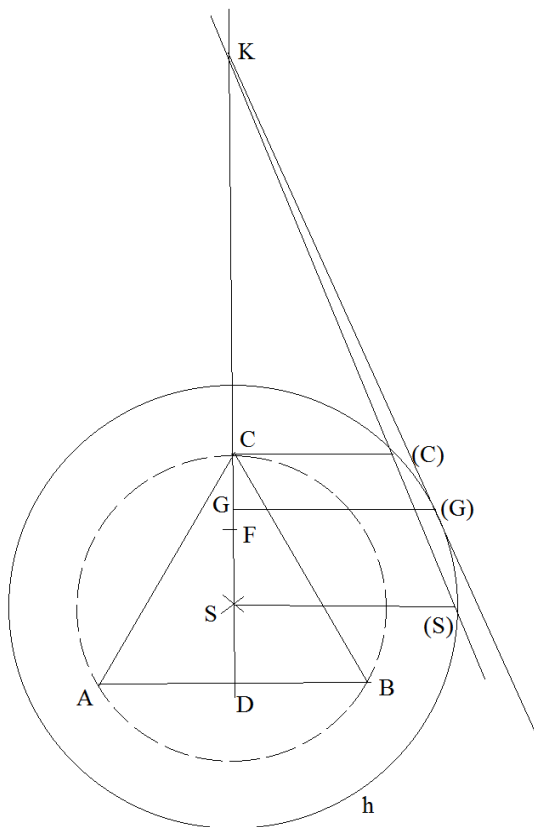
szekesztése a 19.a ábrán van) Vagyis az EF középvonala az ABC háromszögnek. Húzzunk az A, B, C pontokból merőlegest az EF középvonalra, a metszéspontok legyenek A', B', C'. Mivel AE=EC és CF=FB, ezért AA'=BB'=CC'. Az ABC háromszögből átdarabolt BB'A'A négyszöget Saccheri-négyszögnek nevezzük. Ennek a négyszögnek a szimmetriatengelye az A'B' egyenes felezőmerőlegese, amely az AB-nek is felezőmerőlegese. Így átmegy az AB pont felezőpontján, vagyis a G ponton, amely a félgömb pólusa. Az AB oldal és az EF egyenesének vetülete egyaránt merőlegesek a felezőmerőleges vetületére. Így az ABFE négyszög vetülete trapéz.

Ismert, hogy a trapéz szárainak és átlóinak metszéspontjait összekötő egyenes felezi a trapéz alapjait.



19.b ábra

A mi esetünkben a trapéz egyik átlója BE, a másik AF. A szárak metszéspontja a C csúcs vetülete. A két átló metszéspontját jelöljük S-el. A CS egyenes vetülete felezi AB szakasz vetületét. Ezért CS a harmadik súlyvonal, így a súlyvonalak egy ponton mennek át, az S ponton.



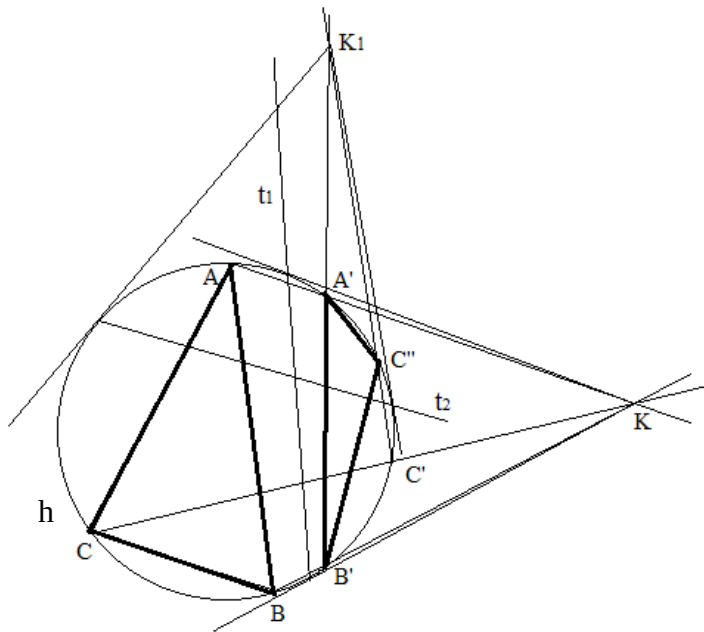
Az viszont nem igaz, hogy a súlypont harmadolja a súlyvonalakat.

Ezt egy ellenpéldán mutatom meg, felveszek egy szabályos ABC háromszöget úgy, hogy a súlypont a pólusba essen. Az SC szakaszt megfelelően megkapjuk a G pontot, ami nem esik egybe az F ponttal.

$$\text{SD} = \text{SF}, \text{CG} = \text{GS}, \text{G} \neq \text{F}, \text{CS} > 2\text{DS}.$$

19.c ábra

A határháromszögek egybevágók



20.a ábra

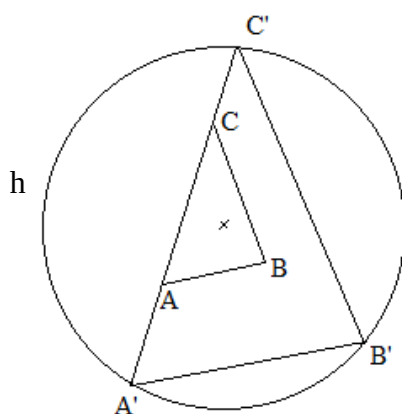
Legyen ABC és $A'B'C'$ háromszög két határháromszög. Az ABC határháromszög véges sok tükrözéssel átvihető az $A'B'C'$ határháromszögbe.

1.tükrözés: AB egyenest
tükrözzük A'B' egyenesbe.

2.tükrözés: Ha C tükörképe nem C'-vel azonos íven van, akkor tükrözzük A'B'-re, és az ábrán lévő helyzet teljesül. Ez a C'' pont.

3.tükrözés: $C'C''$ és $A'B'$ metszéspontja K_1 , ebből érintőt szerkesztve h-hoz C'' átmegy C' -be, és $A'B'$ felcserélődik.

Azaz az $ABC\Delta$ legfeljebb három tükrözéssel átvihető $A'B'C'\Delta$ -be.

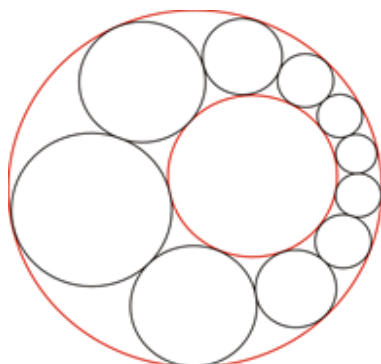


20.b ábra

Így nem érvényesül Gauss axiómája.

Az ABC háromszög csúcsait kivetítjük, úgy, hogy határháromszög legyen ($A'B'C'$). Nyilván az $ABCD$ területe kisebb, mint a határháromszög területe, ami a határháromszögek területeinek egybevágósága miatt egyenlők.

Steiner-féle körlánc

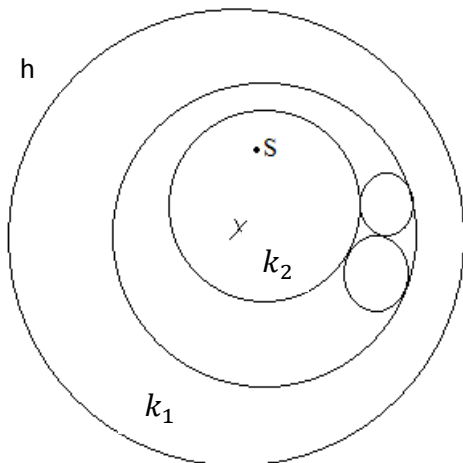


21.a ábra

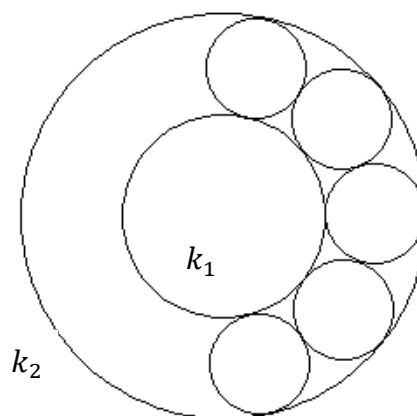
Rögzítünk két kört, úgy, hogy ne legyen közös pontjuk. Választunk olyan körök sorozatát, amelyek mindegyike a két rögzített kört is, és a körlánc megelőző elemét is érinti. Ha az első érinti az utolsót, akkor a körlánc záródó. Ha nem záródik, akkor egy esetben sem záródik, de a körök száma ugyan az.

Hasonlóan igaz a hiperbolikus síkon is.

Vegyünk két nem metsző kört, és a két körhöz tartozó érintőkúp csúcsát összekötő egyenes egy S pontban metszi a félgömb felületet. Egészítsük ki ezt a félgömböt egy egész gömbé, és vetítsük a két kört és vele együtt a belső érintő köröket sztereografikusan az S áttellessé érintő síkra. A két kör sztereografikus vetülete két koncentrikus kör lesz a síkon, erre pedig az állítás triviális.

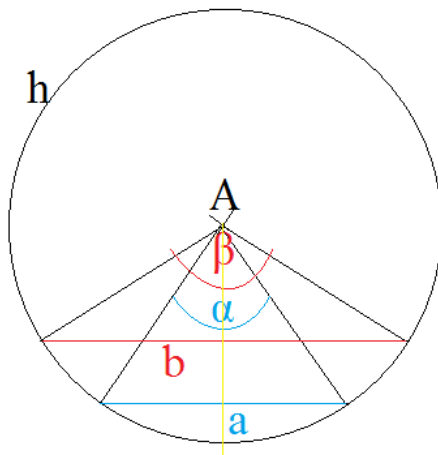


21.b ábra



21.c ábra

Összefüggés a párhuzamossági távolság és a szög között



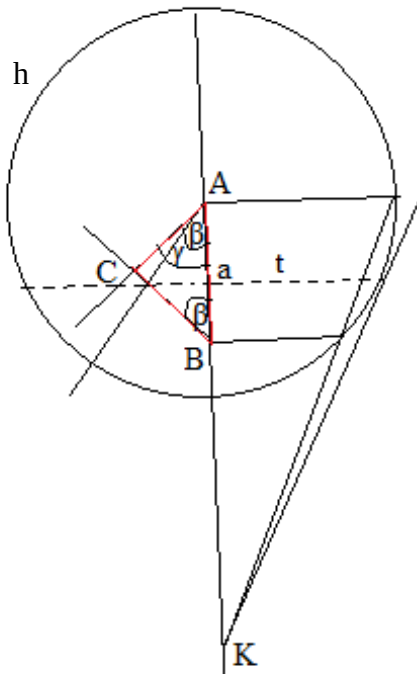
22. ábra

Vegyünk fel egy a és b egyenest, valamint A és B pontot. Rajzoljuk meg A -ból a -hoz, B -ből b -hez a párhuzamos egyeneseket, valamint A -ból a -ra, B -ből b -re a merőleges egyeneseket. Ezek szögfelezői a megfelelő párhuzamos egyenesre párhuzamos. Tükrözzük A -t és B -t a pólusba és vigyük az a és b egyenest úgy, hogy szimmetriatengelyük azonos legyen (22. ábra).

A rajzról leolvasható, hogy ha a távolság nagyobb, akkor a párhuzamossági szög kisebb.

5. SZERKESZTÉSEK

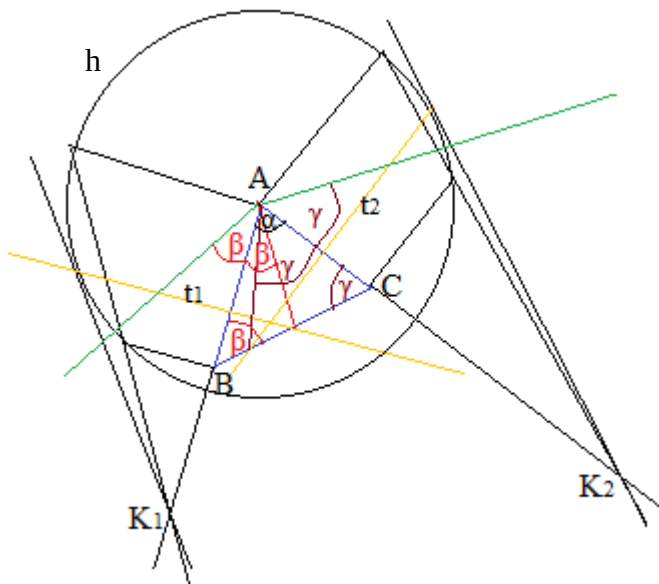
Háromszög szerkesztése egy oldalból, és a rajta fekvő két szögből



Ha a két szöget, és a szakaszt a pólusba transzformálom, akkor a szögek, és a szakasz nagyságát fel tudom mérni euklideszi szerkesztéssel. (Ha ez nem teljesül, akkor tükrözéssel elérhető) Vegyük fel az AB szakaszt, úgy, hogy az egyik vége a pólusba essen (A), majd mérjük rá a β -t. Ezután ezt tükrözzük át A-t a B-be a β szöggel együtt. A pólusba felmérem γ -t úgy, hogy az egyik szára a megadott oldal legyen. A két szögcsúcs metszéspontja kiadja a harmadik csúcsot. Ha β és δ szögek nagyok, lehet, hogy nincs a feladatnak megoldása, mert a metszés a h körön kívül van.

23. ábra

Adott háromszög szögeinek összege



A háromszög A csúcsát betranszformálom a pólusba, így α szögnek euklideszi a mértéke. A β szöget áttükrözöm az A csúcsba, majd átmérem a c oldal másik oldalára, majd ugyan ezt megismétlem a γ szöggel is. Így mindhárom szög az A csúcsban van, és mivel A a pólus, ezért mindegyik szögnek euklideszi a mértéke. Ezért $\alpha + \beta + \gamma$ leolvasható szögmérővel. Az ábrán lévő ABC háromszög belső szögeinek összege $\sim 157^\circ$.

24. ábra

Háromszög szerkesztése, ha adott a, b oldalak, és m_c

A háromszög C csúcsát a pólusba transzformálom, majd felmérem az m_c szakaszt, és megszerkesztem az m_c -re merőleges egyenest. A C pontból körívezek b és a oldalhosszal, megkapjuk az $ABC\Delta$ -et.

Diszkusszió:

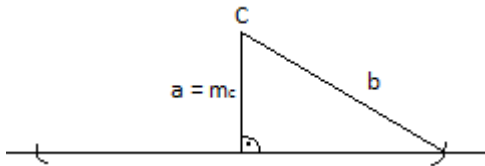
1. Ha $a, b < m_c$



Nincs megoldása.

25.a ábra

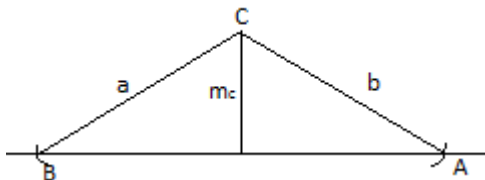
2. $a = m_c$, $b > m_c$



1 megoldás van, az ABC háromszög derékszögű.

25.b ábra

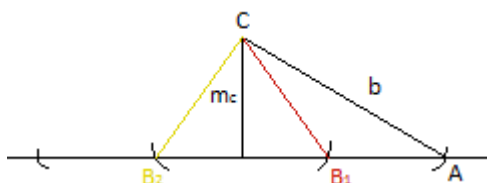
3. $a = b$, $a, b > m_c$



1 megoldás van, az ABC háromszög egyenlőszárú.

25.c ábra

4. $a \neq b$, $b > a > m_c$



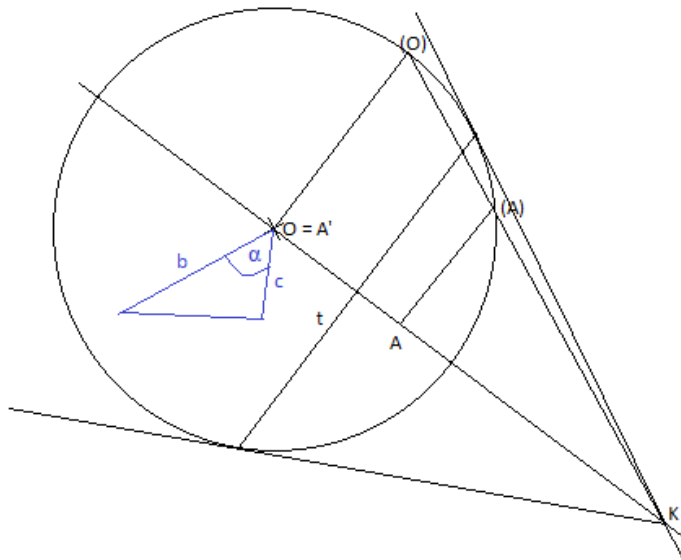
25.d ábra

Ezen feltételek mellett kétféle háromszög szerkeszthető meg.

Az AB_1C háromszög tompaszögű.

Az AB_2C háromszög hegyesszögű

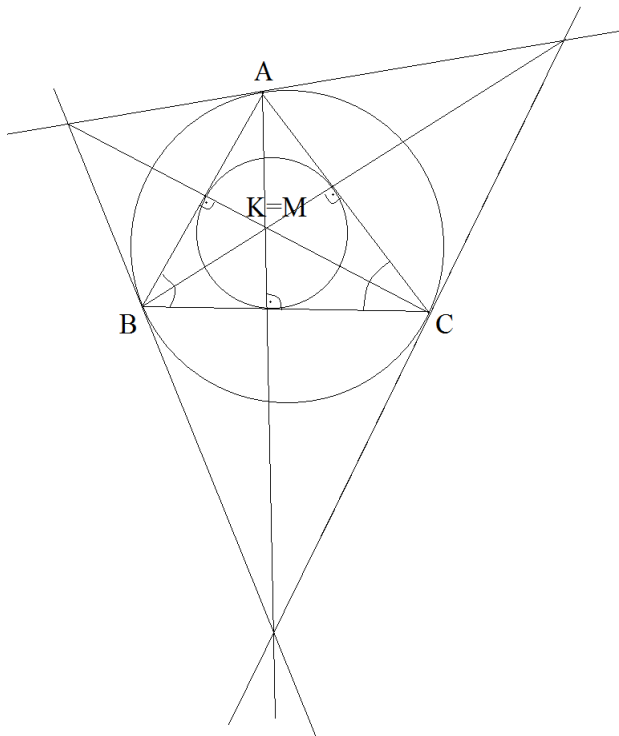
Háromszög szerkesztése, ha adott a két oldal (b, c) és a közbezárt szög (α)



Az A csúcsot a pólusba transzformálom (A') (szerkesztése az ábrán). Majd az A' -re fel tudom mérni az oldalakat, és a közbezárt szöget euklideszi szerkesztéssel, mivel A' megegyezik a pólussal. Így megkaptuk az ABC háromszöget.

26. ábra

Határháromszögnek nincs felezéspontja, súlypontja, köré írt köre. De létezik a magasságvonal, szögfelező, és szerkeszthető, és egybeesik a beírt kör középpontjával a magasságpont.



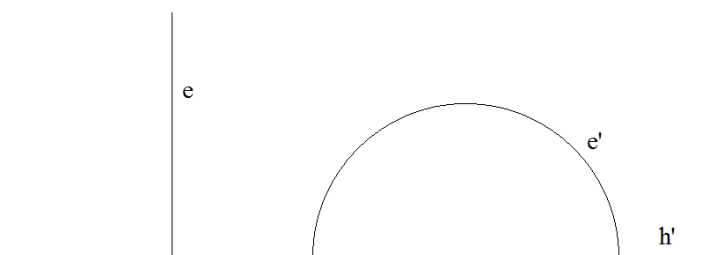
Ezek egy ponton mennek át, és a rajz alapján a két pont egybeesik. Ez valóban igaz, ha az ABC határháromszöget tükrözzük olyan háromszögbe, ami euklideszi értelemben is szabályos, ott pedig a magasságvonalak és a szögfelezők a pólusban metszik egymást.

27. ábra

6. HIPERBOLIKUS SÍK MODELLJEI

Poincare-féle félsík modell

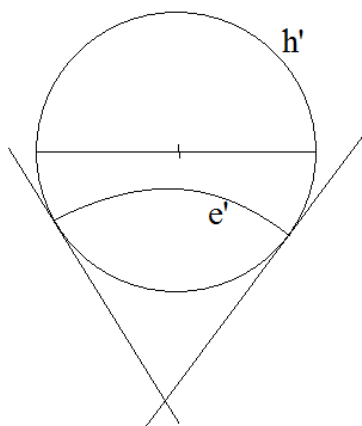
Legyen S a h határkör egy pontja, S -ből sztereografikusan vetítünk az átellenes érintősíkra. A félgömb vetülete nyílt félsík, pont képei a nyílt félsík pontja, képe vagy h' -re merőleges egyenes, vagy h' -t merőlegesen metsző félkör.



28. ábra

Poincare-féle körmodell

Pólussal átellenes pontból sztereografikusan vetítünk a h kör síkjára. Pont képe h' belső pontja, egyenes képe h' -t merőlegesen metsző körök, vagy h' középpontján átmenő egyenesek.



29. ábra

Cayley-Klein modell

A félgömböt merőlegesen vetítjük h síkjára. Pont képe h belső pontjai, egyenes képe a kör húrjai (6. ábra).

Irodalomjegyzék

- [1] Bolyai János: Appendix a tér tudománya, (Szerkesztette Kárteszi Ferenc) Akadémia Kiadó Budapest, 1973
- [2] Drozdyné Schwenner K: A nem-euklideszi geometria elemei a középiskolában (Beszámoló egy kísérletről), A Matematika Tanítása, XXXIV/1. 1987
- [3] Euklidesz: Elemek, Gondrent Kiadó Budapest. 1583
- [4] Horváth Jenő: Sztereografikus projekció és alkalmazásai (Elemi geometria a poincare-féle félgömbmodellen) ELTE Kiadvány, 1980 (100 oldal)
- [5] Horváth J. - H. Temesvári Ágota – Krisztin M. I., Az abszolút geometria elemei a főiskolai geometria oktatásában, Polygon XII/1-2 (2003)
- [6] Horváth J. - H. Temesvári Ágota – Papp György, Bolyai János 1802-1860, ISBN 978-963-9883-70-3. NyME Kiadó 2010
- [7] Kárteszi Ferenc: Ábrázoló Geometria, Tankönyvkiadó, Budapest, 1957
- [8] Lobacsevszkij: Geometriai bizonyítások a párhuzamos elméletének köréből, (A bevezés, magyarázatok, függelékeket V. Kagan írta, a magyar nyelvű kiadást kiadás alá helyezte Kárteszi Ferenc , Akadémia Kiadó, Budapest 1951
- [9] Szász Pál: Über die Hilbertsche Begründung der hyperbolischer Geometrie, Act Math. Huns. (1953) 243-250

UTÓSZÓ

A dolgozatom fő célja az volt, hogy a modell segítségével valamit bemutassak Bolyai János és Nyikolaj Lobacsevszkij geometriájából. Ez sikerült-e vagy nem, ezt az olvasó dönti el. Bevallom a kezdet nem volt könnyű. Gyorsan kivettem Bolyai János Appendix-ét és elkezdtem olvasni. Azokat nem nagyon értettem, ezért maradtam a [4] könyvecske mellett. Olvastam Drozdyné Tanárnő beszámolóját a kísérletről, majd végzés után szeretném tovább adni ezt a szemléletet tanítványaimnak is. Remélem sikerül. Addig is tovább folytatom a témakörrel: Pl. megnézem a B-L geometriát a másik modelleken is. 2015 januárjában lehetőséget kaptam a volt iskolám Petőfi Sándor Gimnázium (Sárbogárd), és Leőwey Klára Gimnázium (Pécs), hogy dolgozatom tartalmáról foglalkozásokat tartsak.