



MISKOLCI EGYETEM
Gépészmérnöki és Informatikai Kar
Műszaki Mechanikai Intézet



Áramlási jellemzők vizsgálata viszkózus közegben körhenger körül

DIPLOMATERV
Gépészmérnöki mesterszak
Alkalmazott mechanika szakirány

Készítette:

Csáti Zoltán
GJCKLH

Tervezésvezető:

Vadászné Dr. Bognár Gabriella
ME, Gép- és Terméktervezési Intézet

Miskolc-Egyetemváros

2014

Tartalomjegyzék

1. Jelölések	4
2. Bevezetés	7
3. Alapegyenletek	8
4. Határréteg-egyszerűsítések	11
5. A peremérték-feladat invariáns megoldása	17
6. A peremérték-feladat numerikus megoldása	26
6.1. Spektrál kollokáció differenciáló mátrixokkal	27
6.2. Spektrál kollokáció integráló mátrixokkal	28
6.3. A peremérték-feladat megoldása	29
6.4. Számítások kiértékelése	31
7. A hasonlósági és az ADINA-val kapott megoldás összehasonlítása	37
7.1. A hasonlósági megoldásokra alkalmazott modell	37
7.2. Az ADINA-ban alkalmazott modell	40
7.3. A megoldások összevetése	44
8. Összefoglalás	46
9. Hivatkozások	48
A. Baricentrikus Lagrange interpoláció	50
B. MATLAB programok listája	52
C. MATLAB programok	53

Ábrák jegyzéke

1.	A fizikai modell	11
2.	$R = 1, \lambda = 0.5, N = 50$	33
3.	$R = 1, \lambda = 0, N = 50$	33
4.	$R = 1, N = 50$	34
5.	$\lambda = 0, L = 70, N = 40$	34
6.	$R = 1, L = 20, N = 5$	35
7.	$R = 1, \lambda = 0.3, L = 50, N = 50$	35
8.	$R = 1, \lambda = 1, L = 15$	36
9.	Az $f''(0)$ különböző β értékekre	38
10.	A $\Theta'(0)$ különböző β értékekre	38
11.	A megoldás $f'(\eta)$ -ra, $Pr = 1$ esetén	39
12.	A megoldás $\Theta(\eta)$ -ra, $Pr = 1$ esetén	39
13.	A megoldás $\Theta(\eta)$ -ra, $\beta = 0$ esetén	40
14.	A geometria	42
15.	A háló	42
16.	Sebesség eloszlás newtoni és nem-newtoni folyadéokra	43
17.	Hőmérséklet eloszlás newtoni és nem-newtoni folyadékra	43
18.	A hálósűrítés hatása az axiális sebességre	44
19.	A hálósűrítés hatása a hőmérsékletre	44
20.	A kétféle megoldás a sebességre	45
21.	A kétféle megoldás a hőmérsékletre	45

Táblázatok jegyzéke

1.	A dolgozatban használt jelölések	6
2.	Megoldók összehasonlítása (6.6) és (6.7) második sorának megoldásakor $R = 1, L = 20$ esetén	31
3.	Az együttható mátrixok kondíciószáma a (6.8), (6.9) megoldásakor $R = 1, \lambda = 1, \alpha = 1, \nu = 1, L = 25$ esetén	32
4.	A (7.2) egyenletek megoldásából származtatott értékek $Pr = 1$ esetén	38
5.	Peremfeltételek	41
6.	Anyagjellemzők	41

1. Jelölések

A dolgozatban egységesen a következő jelöléseket használjuk. A skalárokat normál betűstílussal, a vektorokat félkövér kisbetűkkel, a mátrixokat félkövér nagybetűkkel, míg a másodrendű tenzorokat félkövér dőlt nagybetűkkel jelöljük. A tenzorokkal való műveleteket a hagyományos kontinuummechanikai jelölésekkel végezzük. Külön nem tüntetjük fel, de minden függvény – az Euler-féle leírási módnak megfelelően – a pillanatnyi konfiguráció helyvektorától függ. A ∇ operátor a vele zárójelben álló függvényekre hat. A MATLAB programok nevére írógép stílussal hivatkozunk. A dolgozatban az érdekességeket a *Megjegyzés* részben közöljük. A következő táblázat a gyakrabban előforduló mennyiségek megnevezését és mértékegységét tartalmazza.

Jelölés	Megnevezés	Mértékegység
<i>latin betűk</i>		
c_p	állandó nyomáson vett fajhő	$J/(molK)$
$\mathcal{C}$	anyagjellemzők negyedrendű tenzora	Ns/m^2
$\mathbf{D}$	alakváltozási sebesség tenzor	$1/s$
$\mathbf{D}_{II}$	$\mathbf{D}$ második skaláris invariánsa	$1/s$
$\mathbf{D}^{(k)}$	k -adik differenciáló mátrix	-
e	fajlagos belső energia	J/kg
$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$	a hengerkoordináta-rendszer bázisvektorai	-
f	hasonlósági függvény	-
f_1, f_2, f_3	invariáns függvények	-
$\mathbf{f}$	tömegegységen megosztó erőrendszer intenzitásvektora	N/kg
g	csonkított hasonlósági függvény	-
$\mathbf{g}$	nehézségi gyorsulás	m/s^2
Gr	Grashof-szám	-
$\mathbf{I}$	egységtenzor	-
$\mathbf{I}$	egységmátrix	-
$\mathbf{I}^{(k)}$	k -adik integráló mátrix	-
k	hővezetési tényező	$W/(mK)$
K	konzisztencia index	$Pa s^n$
L	a csonkított intervallum hossza	m
L_z, L_r, M, T, Θ	dinamikai mértékegységrendszer osztály	-

ℓ	a henger hossza	m
ℓ_j	j -edik Lagrange-féle interpolációs polinom	-
n	hatványtörvény-kitevő	-
p	nyomás	Pa
$\mathbb{P}_n$	legfeljebb n -edfokú polinomok tere	-
Pe	Péclet-szám	-
Pr	Prandtl-szám	-
$\mathbf{q}$	hőáram vektor	W/m^2
r	kanonikus koordináta	-
r, φ, z	hengerkoordináták	$m, -, m$
R	a henger sugara	m
Re	Reynolds-szám	-
s	kanonikus koordináta	-
t	idő	s
T	hőmérséklet	K
T_n	elsőfajú n -edfokú Chebyshev-polinom	-
T_w	a henger hőmérséklete	K
T_∞	szabadon áramló folyadék hőmérséklete	K
U_w	a henger mozgási sebessége	m/s
U_∞	zavartalan áramlás sebessége	m/s
$\mathbf{v}$	sebességvektor	m/s
v_r, v_φ, v_z	a sebességvektor koordinátái	m/s
w	tömegegységben időegység alatt keletkező hő	W/kg
X	infinitezimális generátor	-
$X^{(k)}$	X k -edik prolongációja	-
<u>görög betűk</u>		
α	hőmérséklet-vezetési tényező	m^2/s
$\bar{\beta}$	térfogati hőtágulási együttható	$1/K$
$\dot{\gamma}$	alakváltozási sebesség	$1/s$

ε	csoport paraméter	-
ζ	hasonlósági változó	-
η	hasonlósági változó	-
ϑ	csonkított hasonlósági függvény	-
Θ	hasonlósági függvény	-
λ	a zavartalan áramlás és a henger sebességének hányadosa	-
Λ_n	Lebesgue-konstans	-
μ	dinamikai viszkozitás	$Pa \cdot s$
ν	kinematikai viszkozitás	m^2/s
$\xi, \tau, \eta^u, \eta^v, \eta^\Theta$	infinitesimalisok	-
Π, Π_i	Buckingham-féle dimenziótlan csoportok	-
ρ	sűrűség	kg/m^3
ρ_∞	szabadon áramló folyadék sűrűsége	kg/m^3
σ	Cauchy-féle feszültségtenzor	N/m^2
τ	σ deviátoros része	N/m^2
Φ	dimenzió függvény	-
ψ	áramfüggvény	m^2/s

1. táblázat: A dolgozatban használt jelölések

Megjegyzés: A dolgozat digitális változatában az összes grafikonon lehetőség van arra, hogy lekérdezzük egy pont koordinátáját, illetve két megadott ponton áthaladó egyenes egyenletét. Ez utóbbi különösen hasznos, mivel a vízszintes és függőleges tengelyek eltérő skáláját is figyelembe veszi, így a valós meredekséget egyből leolvashatjuk. Ezt a `pgfplots` csomaggal értük el $\LaTeX$ -ben [12]. Használatához Javascript futtatására képes pdf olvasó szükséges (például Adobe Reader).

2. Bevezetés

A konvektív hőátadásos áramlás fontos szerepet játszik a mérnöki gyakorlatban és az elméletben is. Folyadékba merített egyszerű geometriájú testek (síklap, körhenger, elliptikus henger) vizsgálata segít az alapvető fizikai jelenségek megértésében és jó kiindulási alap a valóságosabb fizikai rendszerek modellezéséhez, továbbá tesztelhetők velük elméletek és numerikus módszerek [23].

Prandtl korszakalkotó határréteg elmélete [24] után sokan foglalkoznak egyszerű geometriájú testek körül áramló folyadék mozgásával. Mozgó vagy álló síklap feletti áramlás vizsgálata fontos papírgyártásnál, üveggyártásnál, bevonatok készítésekor. [2]. Karcsú henger körüli határréteg áramlás vizsgálata lényeges űrrakéták, nagysebességű vasutak tervezésénél és gyártási folyamatokban, például szálak, drótok húzásakor [21]. Nyugvó folyadékban mozgó síklap feletti határréteg áramlást először Sakiadis vizsgálta [25], aki a Pohlhausen-féle integrál módszert alkalmazta a közelítő megoldás meghatározására. Függőleges helyzetű, nyúlásra képes körhenger viszkózus közegben történő mozgása szintén jelentős megleghengerlésnél. Mahmood és Merkin [18] tengelyszimmetrikus határréteg kevert konvekcióját tekintette. A [11] cikkben hatványtörvény szerint viselkedő nem-newtoni folyadék szabad konvekcióját vizsgálták függőleges helyzetű síklap mentén. Stewartson [27] körhenger körüli áramlást tekintett és pseudo-hasonlósági transzformáció után a sebességre aszimptotikus megoldást adott, ha a zavartalan áramlási sebesség arányos a henger tengelye irányában mért koordináta hatványával. Mukhopadhyay [20] porózus közegben mozgó henger sebesség és hőmérséklet eloszlását vizsgálta, a peremérték-feladatot belövéses módszerrel oldotta meg. Pantokratoras [22] függőlegesen mozgó hengerre vonatkozó vegyes konvekciót véges differencia módszerrel számolta feltételezve, hogy a viszkozitás, a hővezetés és a sűrűség is hőmérsékletfüggő.

A kényszerkonvekció jelensége megfigyelhető a központi fűtésnél, légkondicionálókban, gőzturbinákban, hőcserélőkben, síklap feletti áramlásnál, csőben történő áramlásnál.

A dolgozatban függőleges helyzetű, álló vagy állandó sebességgel mozgó körhenger körüli áramlást vizsgálunk newtoni és nem-newtoni folyadéokra. A jelenséget leíró peremérték-feladatot nem-newtoni folyadéokra származtatjuk, ennek egy speciális eseteként kapjuk a newtoni folyadéokra érvényes egyenleteket. Dimenzióanalízis segítségével dimenziómentesítjük a differenciálegyenleteket, majd határréteg feltételezésekkel élve származtatjuk a határréteg-egyenleteket. Egyparaméteres Lie-szimmetriacsoporttal invariáns megoldást keresünk a peremérték-feladatra. Hasonlósági megoldást kényszerkonvekció esetére adunk. A csatolt közönséges nemlineáris differenciálegyenlet-rendszert spektrál kollokációs módszerrel oldjuk meg. Megmutatjuk, hogy a diszkretizált egyenletrendszernek hány megoldása van, vizsgáljuk a paraméterek hatását a megoldásra és becsüljük a hibát. Ezek után megoldjuk a [18]-ban származtatott modellt és összehasonlítjuk az ADINA-val készített numerikus megoldással.

3. Alapegyenletek

A legáltalánosabb egyenletekből kiindulva származtatjuk feladatra vonatkozó differenciálegyenleteket. A folyadék sebesség és hőmérséklet eloszlását a kontinuitási egyenlet, a mozgásegyenlet, az anyagegyenlet és az energiaegyenlet írja le.

Kontinuitási egyenlet:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho \mathbf{v}) \cdot \nabla = 0, \quad (3.1)$$

ahol t az idő, ρ a közeg sűrűsége, $\mathbf{v}$ a sebessége.

Mozgásegyenlet:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla + \rho \mathbf{f}, \quad (3.2)$$

ahol $\boldsymbol{\sigma}$ a Cauchy-féle feszültségtenzor (szimmetrikus), $\mathbf{f}$ a tömegegységen megoszló erőrendszer intenzitásvektora.

Anyagegyenlet:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{C} \cdot \mathbf{D}, \quad (3.3)$$

ahol $\mathcal{C}$ az anyagjellemzők negyedrendű tenzora, $\mathbf{D}$ pedig az alakváltozási sebesség tenzor, melyre fennáll, hogy $\mathbf{D} = 1/2(\mathbf{v}\nabla + \nabla\mathbf{v})$.

Energiaegyenlet:

$$\rho \frac{de}{dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \mathbf{q} \cdot \nabla + \rho w, \quad (3.4)$$

ahol e a tömegegységre eső belső energia, $\mathbf{q}$ a hőáramvektor, w a tömegegységben időegység alatt keletkező hő.

Bevezetjük a következő egyszerűsítéseket:

- stacionárius esetet vizsgálunk, így az idő szerinti teljes deriváltakból csak a konvektív tag marad meg:

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = (\mathcal{A}\nabla) \cdot \mathbf{v}, \quad (3.5)$$

ahol $\mathcal{A}$ tetszőleges rendű tenzormező.

- nincs belső hőforrás: $w = 0$
- nehézségi erőter van jelen: $\mathbf{f} = \mathbf{g}$.
- összenyomhatatlan a folyadék, de a térfogati erőrendszernél a Boussinesq-közelítést alkalmazzuk:

$$\rho_\infty - \rho = \rho \bar{\beta}(T - T_\infty), \quad (3.6)$$

ahol $\bar{\beta}$ a térfogati hőtágulási együttható, $T_\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} T(r, z)$ és $\rho_\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r, z)$. A közelítés csak kis hőmérséklet különbségek esetén érvényes és természetes vagy kevert konvekció esetén szükséges alkalmazni. Kényszerkonvekciónál a sűrűség állandónak tekinthető.

- anyagegyenletként a hatványtörvény modellt alkalmazzuk [7]. Bontsuk fel a feszültség-

tenzort gömbi és deviátoros részre:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau},$$

ahol $\boldsymbol{\tau} = \text{dev}\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D}$, $\mathbf{I}$ az egységtenzor, p a nyomás, μ a folyadék dinamikai viszkozitása, amely az anyagmodell alapján

$$\mu = K\dot{\gamma}^{n-1} \quad (3.7)$$

módon feltételezett, ahol a K állandó a konzisztencia index, n a hatványtörvény-kitevő, $\dot{\gamma}$ az alakváltozási sebesség, melyre $\dot{\gamma} = \sqrt{4\mathbf{D}_{II}}^1 = \sqrt{2\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}}$. Ezt behelyettesítve a (3.7) egyenletbe, a hatványközeg típusú nem-newtoni folyadékok anyagegyenletét kapjuk:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2K \left(\sqrt{2\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}} \right)^{n-1} \mathbf{D}. \quad (3.8)$$

Ha $n = 1$, akkor a közeg newtoni, ha $n < 1$, akkor pszeudoplasztikus, ha $n > 1$, akkor pedig dilatáló.

- a hőáram vektorra a Fourier-törvény érvényes, amely izotrop esetben:

$$\mathbf{q} = -k\nabla T, \quad (3.9)$$

ahol k a hővezetési tényező és állandónak feltételezzük.

- a (3.4) egyenletben a belső erőrendszer teljesítménye ($\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$) és dp/dt is a sebesség négyzetével arányos, ezért kis sebességű áramlásnál ezek elhanyagolhatók [28].
- az áramlás tengelyszimmetrikus, így

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_z \mathbf{e}_z. \quad (3.10)$$

A tengelyszimmetria miatt a $\mathbf{D}$ tenzor mátrixa az $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z\}$ bázisban a következő:

$$[\mathbf{D}]_{\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z\}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \\ 0 & \frac{v_r}{r} & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) & 0 & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Az elhanyagolások után az alapegyenletek invariáns alakjai a következők:

Kontinuitási egyenlet:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla = 0.$$

Mozgásegyenlet:

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{v} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla + \rho \mathbf{g}.$$

¹Összenyomhatatlan folyadékok esetén a μ csak a $\mathbf{D}_{II}$ második skaláris invariánstól függ.

Anyagegyenlet:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2K \left(\sqrt{2\mathbf{D} \cdot \cdot \mathbf{D}} \right)^{n-1} \mathbf{D}.$$

Energiaegyenlet:

$$\rho c_p (T \nabla) \cdot \mathbf{v} = k \Delta T.$$

Felírjuk a fenti egyenleteket hengerkoordináta-rendszerben. Legyenek τ mátrixának nem zérus elemei τ_{rr} , τ_{rz} , $\tau_{\varphi\varphi}$ és τ_{zz} . A (3.11)-et behelyettesítve a (3.8)-ba, a skaláris anyagegyenletek:

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= 2K \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{v_r}{r} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 \right] \right\}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial v_r}{\partial r} \\ \tau_{rz} &= 2K \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{v_r}{r} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 \right] \right\}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \\ \tau_{\varphi\varphi} &= 2K \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{v_r}{r} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 \right] \right\}^{\frac{n-1}{2}} \frac{v_r}{r} \\ \tau_{zz} &= 2K \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{v_r}{r} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 \right] \right\}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Newtoni folyadéknál a (3.12) egyenletből $n = 1$ esetén a következő anyagegyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}, \\ \tau_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \\ \tau_{\varphi\varphi} &= 2\mu \frac{v_r}{r}, \\ \tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

A kontinuitási egyenlet:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (3.14)$$

A mozgásegyenlet hengerkoordinátás alakja:

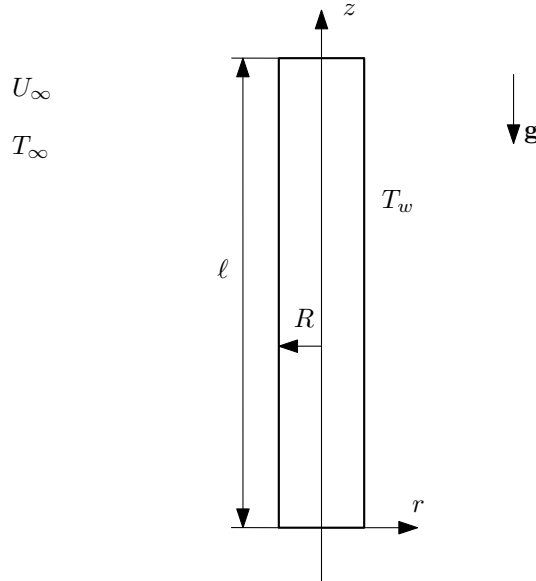
$$\begin{aligned} \rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}, \\ \rho \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} - \rho g. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Az energiaegyenlet hengerkoordinátás alakja:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial r} v_r + \frac{\partial T}{\partial z} v_z \right) = k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]. \quad (3.16)$$

4. Határréteg-egyszerűsítések

Tekintsünk egy newtoni folyadékba helyezett függőleges, ℓ hosszúságú, R sugarú körhengert (1. ábra), melyre $R \ll \ell$.



1. ábra. A fizikai modell

A (3.13) anyagegyenleteket behelyettesítve a (3.15) mozgásegyenletekbe – figyelembe véve, hogy newtoni folyadékokra $n = 1$ –, a sebességmezőre vonatkozó alapegyenleteket kapjuk:

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right), \quad (4.1)$$

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) - \rho g, \quad (4.2)$$

ahol $\mu = K$ a (3.7) alapján. A kontinuitási- és energiaegyenlet marad a (3.14), illetve a (3.16) alakban. Ahhoz, hogy később meg tudjuk állapítani, hogy mely tagok milyen körülmények között hanyagolhatók el a többi taghoz képest, dimenziómentesíteni kell az egyenleteket. Ezt dimenzióanalízissel végezzük el. A hozzá tartozó alapfogalmakat röviden ismertetjük [3].

Definíció. A vizsgált jelenség tulajdonságainak mérésére szolgáló szükséges alapmennyiségek halmazát MÉRTÉKEGYSÉGRENDSZERnek nevezzük.

Definíció. Azon mértékegységrendszereket, amelyek egymástól csak az alapmennyiségek nagyságában térnek el, MÉRTÉKEGYSÉGRENDSZER OSZTÁLYnak nevezzük.

Ha egy mértékegységrendszer osztályon belül áttérünk egy másik mértékegységrendszerre, akkor azt az alapmennyiségek skálázásával tehetjük meg; a szükséges tényezőket L , M , T , Θ betűkkel jelöljük és ebben a sorrendben a hosszúság, tömeg, idő és hőmérséklet skálázására szolgálnak.

Definíció. Azt a függvényt, amely megadja, hogy egy adott mértékegységrendszer osztályon belül az eredeti mértékegységrendszerről egy tetszőleges mértékegységrendszerre való áttérés során egy fizikai mennyiség numerikus értéke hányszorosára változik, DIMENZIÓ FÜGGVÉNYnek nevezzük.

Egy a fizikai mennyiség mértékegységét szögletes zárójellel jelöljük.

Tétel. A dimenzió függvény mindig 1 együtthatójú polinom.

Például LMT osztályban $\Phi = L^\alpha M^\beta T^\gamma$. Egy fizikai kísérletben vagy egyenletekben előforduló mennyiségek közötti kapcsolat felírható az

$$a = f(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_m) \quad (4.3)$$

alakban, ahol $a_1, \dots, a_k$ adott független paraméterek, $b_1, \dots, b_m$ adott függő paraméterek, a pedig a meghatározandó mennyiség. A függő paraméterek kifejezhetők az alábbi módon:

$$[b_i] = [a_1]^{p_i} \cdots [a_k]^{r_i}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.4)$$

A Buckingham-féle Π -elmélet a dimenzióanalízis főtétele. Képezzük a

$$\Pi = \frac{a}{a_1^p \cdots a_k^r}, \quad \Pi_i = \frac{b_i}{a_1^{p_i} \cdots a_k^{r_i}} \quad (i = 1, \dots, m) \quad (4.5)$$

dimenziótlan paramétereket.

Tétel. Bármely (4.3)-beli fizikai tartalommal bíró függvényre érvényes az általános homogenitás, azaz

$$f(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_m) = a_1^p \cdots a_k^r \Phi \left(\frac{a_1}{a_1^{p_1} \cdots a_k^{r_1}}, \dots, \frac{b_m}{a_1^{p_m} \cdots a_k^{r_m}} \right).$$

A feladatban válasszuk meg az ℓ , R , U_∞ , ρ , c_p mennyiségeket függetlennek. A korábban a -val jelölt ismeretlenek most v_z , v_r és T . Hosszúságot z és r irányban is mérünk, így az alkalmazott mértékegységrendszer osztály $L_z L_r M T \Theta$. A mennyiségek ebben az osztályban az alábbi módon írhatók:

$$\begin{aligned} [\ell] &= L_z, & [R] &= L_r, & [U_\infty] &= L_z T^{-1}, & [\rho] &= L_z^{-3} M, & [c_p] &= L_z^2 T^{-2} \Theta^{-1} \\ [z] &= L_z, & [r] &= L_r, & [p] &= L_z^{-1} M T^{-2}, & [\mu] &= L_z^{-1} M T^{-1}, \\ [k] &= L_z M T^{-3} \Theta^{-1}, & [g] &= L_z T^{-2}, \\ [v_z] &= L_z T^{-1}, & [v_r] &= L_r T^{-1}, & [T] &= \Theta. \end{aligned} \quad (4.6)$$

A μ és k mennyiségekre bemutatjuk a dimenziómentesítés menetét. A dinamikai viszkozitás

nem tartalmaz hőmérséklet mértékegységet, ezért (4.4) alapján

$$[\mu] = [\ell]^\alpha [R]^\beta [U_\infty]^\gamma [\rho]^\delta,$$

így

$$L_z : \quad -1 = \alpha + \gamma - 3\delta,$$

$$L_r : \quad 0 = \beta,$$

$$M : \quad 1 = \delta,$$

$$T : \quad -1 = -\gamma,$$

melyből $[\mu] = [\ell][U_\infty][\rho]$. Ezért (4.5) alapján

$$\Pi_1 \equiv \mu' = \frac{\mu}{\ell U_\infty \rho} := \frac{1}{\text{Re}},$$

ahol Re a Reynolds-szám. A k hővezetési tényezőt a

$$[\mu] = [\ell]^\alpha [R]^\beta [U_\infty]^\gamma [\rho]^\delta [c_p]^\varepsilon$$

alakban keresve:

$$L_z : \quad -1 = \alpha + \gamma - 3\delta + 2\varepsilon,$$

$$L_r : \quad 0 = \beta,$$

$$M : \quad 1 = \delta,$$

$$T : \quad -3 = -\gamma - 2\varepsilon,$$

$$\Theta : \quad -1 = -\varepsilon.$$

Innen

$$\Pi_2 \equiv k' = \frac{k}{\ell U_\infty \rho c_p} := \frac{1}{\text{Pe}},$$

ahol Pe a Péclet-szám, ami kifejezhető a Reynolds-számmal és a Prandtl-számmal (Pr): $\text{Pe} = \text{RePr}$. A fentebbi lineáris egyenletrendszer más-más bal oldallal megoldva a következő dimenziótlan mennyiségeket nyerjük:

$$\begin{aligned} \Pi_1 \equiv \mu' &= \frac{\mu}{\ell U_\infty \rho} := \frac{1}{\text{Re}}, & \Pi_2 \equiv k' &= \frac{k}{\ell U_\infty \rho c_p} := \frac{1}{\text{Pe}}, & \Pi_3 \equiv p' &= \frac{p}{U_\infty^2 \rho}, \\ \Pi_4 \equiv g' &= \frac{\ell g}{U_\infty^2}, & \Pi_5 \equiv r' &= \frac{r}{R}, & \Pi_6 \equiv z' &= \frac{z}{\ell} \\ \Pi_z \equiv v'_z &= \frac{v_z}{U_\infty}, & \Pi_r \equiv v'_r &= \frac{\ell v_r}{R U_\infty}, & \Pi_T \equiv \Theta &= \frac{c_p T}{U_\infty^2}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

A (4.6) és (4.7) összehasonlításából látható, hogy nem csökkent a függő paraméterek száma, ezért pusztán dimenzióanalízissel nem nyerhető invariáns megoldás a vizsgált parciális

differentiálegyenlet-rendszerre.

A (4.7) skálázásokat a (3.14), (4.1), (4.2), illetve (3.16) egyenletekbe helyettesítve a kapott egyenletrendszer:

$$\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} (r' v'_r) + \frac{\partial v'_z}{\partial z'} = 0, \quad (4.8)$$

$$\frac{R^2}{\ell^2} \left(v'_r \frac{\partial v'_r}{\partial r'} + v'_z \frac{\partial v'_r}{\partial z'} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r'} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial v'_r}{\partial r'} \right) - \frac{v'_r}{r'^2} + \frac{R^2}{\ell^2} \frac{\partial^2 v'_r}{\partial z'^2} \right], \quad (4.9)$$

$$v'_r \frac{\partial v'_z}{\partial r'} + v'_z \frac{\partial v'_z}{\partial z'} = -\frac{\partial p}{\partial z'} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\ell^2}{R^2} \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial v'_z}{\partial r'} \right) + \frac{\partial^2 v'_z}{\partial z'^2} \right] - g' \quad (4.10)$$

$$v'_r \frac{\partial \Theta}{\partial r'} + v'_z \frac{\partial \Theta}{\partial z'} = \frac{1}{\text{Pe}} \left[\frac{\ell^2}{R^2} \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial \Theta}{\partial r'} \right) + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z'^2} \right]. \quad (4.11)$$

Megjegyzés: A dimenzió analízis ebben a formában (két irányban mérünk távolságot) nem alkalmazható közvetlenül a Navier-Stokes egyenletekre, mert a Laplace-operátor két egymásra merőleges irányban vett változást mutat, és a különböző mértékegységek nem összegezhetők.

Alkalmazzuk most a Prandtl-féle határréteg elméletet, amely szerint az áramlási tér két részre osztható: a felület körüli vékony rétegre, az úgynevezett határrétegre, ahol a súrlódásnak döntő szerepe van és a test felületétől távolabb eső részre, ahol a súrlódás hatása elhanyagolható. A test felületén a sebesség zérus a tapadás törvényének értelmében, a határrétegben rohamosan növekszik, míg azon kívül a sebesség közel állandó. A határrétegben tehát viszkózus folyadékként kell kezelnünk a közeget, azon kívül pedig súrlódásmentes folyadékként [26]. Legyen mind a hidrodinamikus, mind a hőmérsékleti határréteg δ vastagsága kisebb a henger R sugaránál és jóval kisebb a henger ℓ hosszánál. Ekkor a (4.8) egyenlet változatlan marad, a (4.11) jobb oldalán a z szerinti derivált elhanyagolható az r szerinti deriválthoz képest, míg a (4.9) és a (4.10) mozgásegyenletek hasonló gondolatmenetet követve az alábbiak lesznek:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial r'} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial v'_r}{\partial r'} \right) - \frac{v'_r}{r'^2} \right], \quad (4.12)$$

$$v'_r \frac{\partial v'_z}{\partial r'} + v'_z \frac{\partial v'_z}{\partial z'} = -\frac{\partial p}{\partial z'} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\ell^2}{R^2} \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial v'_z}{\partial r'} \right) \right] - g'. \quad (4.13)$$

A (4.12) egyenlet szögletes zárójelben lévő része elhanyagolható a (4.13) egyenlet szögletes zárójelben álló tagjához képest. Így a (4.12)-ből azt kapjuk, hogy sugár irányban a nyomás nem változik (ez fennáll a dimenzióval rendelkező változókra is). Képezzük a nyomás z szerinti teljes deriváltját:

$$\frac{dp}{dz} = \frac{\partial p}{\partial z} + \underbrace{\frac{\partial p}{\partial r}}_0 \frac{dr}{dz}. \quad (4.14)$$

Mivel p állandó r -ben, ezért dp/dz -t nem csak a határrétegben, hanem azon kívül is kiszámíthatjuk. A hengertől sugár irányban megfelelően távol zavartalan U_∞ sebességű áramlás alakul ki és Prandtl elmélete nyomán a folyadék súrlódásmentesnek tekinthető. Felírható ezért az Euler-egyenlet egy z tengellyel párhuzamos áramvonal mentén. A zavartalan áramlásban a sebesség

állandó az áramvonal bármely pontjában, így a hidrosztatika alapegyenletéből:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho_\infty g, \quad (4.15)$$

melyet behelyettesítve a (4.13) egyenletbe és felhasználva a (4.7)-et, a mozgásegyenlet:

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{(\rho_\infty - \rho)g}{\rho}. \quad (4.16)$$

Felhasználva (3.7) alapján a hatványközegre feltételezett

$$\mu = K \left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|^{n-1} \quad (4.17)$$

összefüggést, valamint a (3.6) közelítést és visszatérve a dimenzióval rendelkező változókra, a megoldandó differenciálegyenletek a következők:

$$\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial}{\partial z}(rv_z) = 0, \quad (4.18)$$

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{K}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|^{n-1} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + g\bar{\beta}(T - T_\infty) \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} v_r + \frac{\partial T}{\partial z} v_z = \alpha \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (4.20)$$

ahol $\alpha = k/(\rho c_p)$ a hőmérséklet-vezetési tényező. A (4.18), (4.19) és (4.20) differenciálegyenleteket dimenziótlanítjuk, hogy a további számítások egyszerűsödjének. Innentől kezdve $(v_z, v_r) = (u, v)$. Először [23] alapján bevezetjük a kalappal, majd pedig a hullámmal jelölt dimenziótlan változókat:

$$\hat{z} = \frac{z}{\ell}, \quad \hat{r} = \frac{r}{\ell}, \quad \hat{u} = \frac{u}{U_c}, \quad \hat{v} = \frac{v}{U_c}, \quad \hat{\Theta} = \frac{T - T_\infty}{\Delta T}, \quad U_c = (g\bar{\beta}\Delta T\ell)^{\frac{1}{2}},$$

$$\tilde{z} = \hat{z}, \quad \tilde{r} = \text{Gr}^{\frac{1}{2(n+1)}} \hat{r}, \quad \tilde{u} = \hat{u}, \quad \tilde{v} = \text{Gr}^{\frac{1}{2(n+1)}} \hat{v}, \quad \tilde{\Theta} = \hat{\Theta},$$

ahol $\Delta T = T_w - T_\infty$, és Gr az általánosított Grashof-szám, Pr pedig az általánosított Prandtl-szám, melyekre

$$\text{Gr} = \frac{(g\bar{\beta}\Delta T)^{2-n}\ell^{2+n}}{\left(\frac{K}{\rho}\right)^2}, \quad \text{Pr} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{K}{\rho}\right)^{\frac{2}{n+1}} (g\bar{\beta}\Delta T)^{\frac{3(n-1)}{2(n+1)}} \ell^{\frac{n-1}{2(n+1)}}.$$

Ezzel a (4.18)–(4.20) differenciálegyenletek az alábbi dimenziótlan alakba írhatók (a hullámo-

kat elhagyjuk):

$$v + r \frac{\partial v}{\partial r} + r \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (4.21)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \Theta \quad (4.22)$$

$$u \frac{\partial \Theta}{\partial z} + v \frac{\partial \Theta}{\partial r} = \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} \right). \quad (4.23)$$

A peremfeltételek a következők:

$$\begin{aligned} r = R : \quad & u(r, z) = 0, \quad v(r, z) = 0, \quad \Theta(r, z) = 1 \\ r \rightarrow \infty : \quad & u(r, z) = U_\infty, \quad \Theta(r, z) = 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

5. A peremérték-feladat invariáns megoldása

Az előbbi fejezetben láthattuk, hogy dimenzióanalízissel a független változók száma nem csökkenthető. Ebben a részben a (4.21)–(4.24) peremérték-feladatot egy közönséges differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó peremérték-feladattá alakítjuk. A célunk tehát hasonlósági/invariáns megoldás keresése. Nemlineáris parciális differenciálegyenletek esetén a peremfeltételek jelentősen szigorúbb előírást jelentenek a invariáns megoldások számára nézve, mint lineáris parciális vagy közönséges differenciálegyenletek esetén [8].

Tekintsük az

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x}; \varepsilon) \quad (5.1)$$

egyparaméteres Lie transzformációs csoportot, ahol $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \subset \mathbb{R}^n$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}$ folytonos paraméter. Az (5.1) sorfejtése $\varepsilon = 0$ környezetében

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \varepsilon \left. \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{x}; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

mert $\varepsilon = 0$ esetén a csoport egységelemét kapjuk, melyre $\mathbf{X}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$. Legyen

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \left. \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{x}; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}.$$

Definíció. Az $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \varepsilon \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$ transzformációt (5.1) INFINITEZIMÁLIS TRANSZFORMÁCIÓJÁNAK nevezzük. A $\boldsymbol{\xi}$ komponensei (5.1) INFINITEZIMÁLISAI.

Definíció. Az (5.1) egyparaméteres Lie transzformációs csoport INFINITEZIMÁLIS GENERÁTORA

$$X(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla. \quad (5.2)$$

Tekintsünk egy $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^m)$ függő változókból és $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ független változókból álló parciális differenciálegyenlet-rendszert. A bővített pont transzformáció

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \varepsilon), \\ \mathbf{u}^* &= \mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \varepsilon) \end{aligned} \quad (5.3)$$

kölcsönösen egyértelmű az $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ valamely részhalmazán és ugyanitt k -szor differenciálható. Az (5.3) transzformáció skaláris alakban:

$$\begin{aligned} x_i^* &= x_i + \varepsilon \xi_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (i = 1, \dots, n) \\ (u^j)^* &= u^j + \varepsilon \eta^j(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (j = 1, \dots, m) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Az $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ térben ható infinitezimális generátor:

$$X = \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^j \frac{\partial}{\partial u^j}. \quad (5.5)$$

Jelölje $\partial^k \mathbf{u}$ az $\mathbf{u}$ összes $\mathbf{x}$ szerinti parciális deriváltját, azaz

$$u_{i_1 i_2 \dots i_k}^j = \frac{\partial^k u^j}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}, \quad j = 1, \dots, m, \quad i_p = 1, \dots, n, \quad p = 1, \dots, k.$$

Az $(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \partial \mathbf{u}, \dots, \partial^k \mathbf{u})$ térben ható, az (5.4) transzformáció k -adik kiterjesztettje:

$$\begin{aligned} x_i^* &= x_i + \varepsilon \xi_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ (u^j)^* &= u^j + \varepsilon \eta^j(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ &\vdots \\ (u_{i_1 i_2 \dots i_k}^j)^* &= u_{i_1 i_2 \dots i_k}^j + \varepsilon \eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)j}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \partial \mathbf{u}, \dots, \partial^k \mathbf{u}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

ahol $\eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)j}$ a bővített infinitezimálisok, amelyek rekurzióval számíthatók. Az infinitezimális generátor k -adik prolongációja:

$$X^{(k)} = \xi_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^j(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial u^j} + \dots + \eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)j}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \partial \mathbf{u}, \dots, \partial^k \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_k}^j}, \quad k \geq 1. \quad (5.6)$$

Vegyünk egy olyan parciális differenciálegyenlet-rendszert, amelynek minden egyenlete egy adott parciális deriváltra explicit módon kifejezhető:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \partial \mathbf{u}, \dots, \partial^k \mathbf{u}) = \mathbf{u}_{i_1 i_2 \dots i_c} - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \partial \mathbf{u}, \dots, \partial^k \mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (5.7)$$

és $\mathbf{f}$ nem függ $\mathbf{u}_{i_1 i_2 \dots i_c}$ -től explicit módon. Legyenek a hozzá tartozó peremfeltételek

$$B_a(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \partial \mathbf{u}, \dots, \partial^{k-1} \mathbf{u}) = 0 \quad (5.8)$$

az

$$\omega_a(\mathbf{x}) = 0, \quad a = 1, \dots, s \quad (5.9)$$

peremen előírva. Feltesszük, hogy az (5.7)–(5.9) peremérték-feladatnak egyetlen megoldása van.

Definíció. Az (5.5) infinitezimális generátor eleget tesz az (5.7)–(5.9) peremérték-feladatnak akkor és csak akkor, ha

1. $X^{(k)} F^j(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \partial \mathbf{u}, \dots, \partial^k \mathbf{u}) = 0$, ha $F^j(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \partial \mathbf{u}, \dots, \partial^k \mathbf{u}) = 0$ ($j = 1, \dots, m$);
2. $X \omega_a(\mathbf{x}) = 0$, ha $\omega_a(\mathbf{x}) = 0$ ($a = 1, \dots, s$);
3. $X^{(k-1)} B_a(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \partial \mathbf{u}, \dots, \partial^{k-1} \mathbf{u}) = 0$, ha $B_a(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \partial \mathbf{u}, \dots, \partial^{k-1} \mathbf{u}) = 0$ ($a = 1, \dots, s$).

Azaz egy peremérték-feladat akkor invariáns, ha a differenciálegyenletek, a peremfelületek és a peremfeltételek is invariánsak.

Alkalmazzuk a fentieket a (4.21)–(4.24) peremérték-feladatra. Esetünkben $\mathbf{x} = (r, z)$, $\mathbf{u} = (u, v, \Theta)$. A továbbiakban r és z alsó indexben az adott változó szerinti parciális deriválást jelöli. Feltesszük, hogy nincs visszaáramlás, azaz $v_r > 0$. Így a (4.21)–(4.23) differenciálegyenletek

a következő alakba írhatók:

$$\begin{aligned} u + ru_r + rv_z &= 0, \\ uv_r + vv_z &= \left(\frac{1}{r} v_r^n + n v_r^{n-1} v_{rr} \right) + \Theta, \\ u\Theta_r + v\Theta_z &= \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{1}{r} \Theta_r + \Theta_{rr} \right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Mivel az (5.10) mindhárom egyenlete kifejezhető explicit alakban arra a deriváltra nézve, amelyet a többi függvény nem tartalmaz, ezért az infinitezimális generátor (5.5) szerint:

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial r} + \tau \frac{\partial}{\partial z} + \eta^u \frac{\partial}{\partial u} + \eta^v \frac{\partial}{\partial v} + \eta^\Theta \frac{\partial}{\partial \Theta}, \quad (5.11)$$

ahol $\xi, \tau, \eta^u, \eta^v, \eta^\Theta$ is r, z, u, v, Θ függvénye általános esetben. A differenciálegyenlet-rendszerben előforduló legmagasabb rendű derivált 2, így a második prolongáció (5.6) alapján:

$$\begin{aligned} X^{(2)} = X &+ \eta_r^{u(1)} \frac{\partial}{\partial u_r} + \eta_z^{u(1)} \frac{\partial}{\partial u_z} + \eta_r^{v(1)} \frac{\partial}{\partial v_r} + \eta_z^{v(1)} \frac{\partial}{\partial v_z} + \eta_r^{\Theta(1)} \frac{\partial}{\partial \Theta_r} + \\ &+ \eta_z^{\Theta(1)} \frac{\partial}{\partial \Theta_z} + \dots + \eta_{zz}^{\Theta(2)} \frac{\partial}{\partial \Theta_{zz}}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Vizsgáljuk előbb az (5.10) differenciálegyenlet-rendszer invarianciáját. Hason mindhárom egyenletre az (5.12) operátor. A kapott egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} (u_r + v_z)\xi + \eta^u + r\eta_r^{u(1)} + r\eta_z^{v(1)} &= 0, \\ v_r\eta^u + v_z\eta^v + u\eta_r^{v(1)} + v\eta_z^{v(1)} &= \left(-\frac{1}{r^2} v_r^n \xi + \frac{1}{r} n v_r^{n-1} \eta_r^{v(1)} + n(n-1) v_r^{n-2} \eta_r^{v(1)} v_{rr} + \right. \\ &\quad \left. n v_r^{n-1} \eta_{rr}^{v(2)} \right) + \eta^\Theta, \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\Theta_r \eta^u + \Theta_z \eta^v + u \eta_r^{\Theta(1)} v \eta_z^{\Theta(1)} = \frac{1}{\text{Pr}} \left(-\frac{1}{r^2} \Theta_r \xi + \frac{1}{r} \eta_r^{\Theta(1)} + \eta_{rr}^{\Theta(2)} \right).$$

Az $\eta_r^{u(1)}, \eta_r^{v(1)}, \eta_z^{v(1)}, \eta_r^{\Theta(1)}, \eta_z^{\Theta(1)}$ infinitezimálisok 6, az $\eta_{rr}^{v(2)}, \eta_{rr}^{\Theta(2)}$ infinitezimálisok pedig 15 tagból állnak. Ezeket behelyettesítve az (5.13) egyenletrendszerbe, a meghatározandó $\xi, \tau, \eta^u, \eta^v, \eta^\Theta$ infinitezimálisokra egy 75 homogén lineáris parciális differenciálegyenletből álló rendszert kapunk. Néhány tag összevonható, de még így is kezelhetetlenül sok egyenlet marad, ezért ezek megoldását a Maple 16-os verziójával végeztük.

Megjegyzés: Bármely (5.7) alakú differenciálegyenlet-rendszer esetén a ξ_i és η^j infinitezimálisokra nézve homogén parciális differenciálegyenlet-rendszert kapunk, amely – a legegyszerűbb esetektől eltekintve – túlhatározott.

Általános megoldásnak a következőt kapjuk:

$$\xi = \frac{1}{3} C_1 r, \quad \tau = C_1 z + C_2, \quad \eta^u = -\frac{1}{3} C_1 u, \quad \eta^v = -\frac{1}{3} C_1 v, \quad \eta^\Theta = -\frac{1}{3} C_1 \Theta, \quad (5.14)$$

ahol C_1 és C_2 tetszőleges paraméterek. A hozzá tartozó két infinitezimális generátor úgy kapható meg, hogy az egyik paramétert 1-nek választjuk, a másikat 0-nak, és fordítva, majd felhasználjuk (5.11)-et. Ezután figyelembe vesszük a peremek és a peremfeltételek invarianciáját. Feltételi egyenletet akkor nyerünk, ha nem a végtelenre vonatkozik az előírás. Az $r = R$ perem invarianciája: $X(r - R) = \xi(r) = 0$, feltéve hogy $r = R$. Azaz $\xi(R) = 0$, melyből $C_1 = 0$. Könnyen belátható, hogy a peremfeltételek nem jelentenek újabb feltételt; például $X^{(1)}(\Theta - 1) = \eta^\Theta = 0$, ha $\Theta = 1$, azaz $-1/3C_1 = 0$. A peremérték-feladathoz tehát egyetlen infinitezimális generátor tartozik, ha azt az (5.11) alakban keressük:

$$X = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Az invariáns felületi feltételből adódó differenciálegyenlet-rendszer:

$$\begin{aligned} 0u_r + C_2u_z &= 0, \\ 0v_r + C_2v_z &= 0, \\ 0\Theta_r + C_2\Theta_z &= 0. \end{aligned} \tag{5.15}$$

A kvázilineáris differenciálegyenletek megoldásához alkalmazható karakterisztikák módszerét használjuk. Az (5.15)-höz tartozó karakterisztikus egyenlet [8]:

$$\frac{dr}{0} = \frac{dz}{C_2} = \frac{du}{0} = \frac{dv}{0} = \frac{d\Theta}{0}. \tag{5.16}$$

Ennek megoldása:

$$r = k_1, \quad u = k_2, \quad v = k_3, \quad \Theta = k_4, \tag{5.17}$$

ahol k_1, k_2, k_3, k_4 integrálási állandók. Így az (5.15) általános megoldása a $k_2 = f_1(k_1)$, $k_3 = f_2(k_1)$, $k_4 = f_3(k_1)$ alakban megkapható és legyen $k_1 = \zeta$. Visszatérve az eredeti változókra, a hasonlósági változókat kapjuk:

$$\zeta = r, \quad u = f_1(\zeta), \quad v = f_2(\zeta), \quad \Theta = f_3(\zeta). \tag{5.18}$$

Behelyettesítve (5.18)-at (4.21)–(4.24)-be, a peremérték-feladat hasonlósági megoldását nyerjük:

$$\begin{aligned} f_2 + \zeta f_2' &= 0, \\ f_2 f_1' &= \left(\frac{1}{\zeta} f_1^n + n f_1^{n-1} f_1'' \right) + f_3, \\ f_2 f_3' &= \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{1}{\zeta} f_3' + f_3'' \right). \end{aligned} \tag{5.19}$$

A peremfeltételek a következők:

$$\begin{aligned} \zeta = R : \quad & f_1(\zeta) = 0, \quad f_2(\zeta) = 0, \quad f_3(\zeta) = 1 \\ \zeta \rightarrow \infty : \quad & f_1(\zeta) = U_\infty, \quad f_3(\zeta) = 0. \end{aligned} \tag{5.20}$$

A vesszők az ζ szerinti deriválást jelölik. Az (5.19) első differenciálegyenletéből (felhasználva (5.20) megfelelő peremfeltételét) $f_2(\zeta) \equiv 0$. Az (5.19) harmadik egyenlete viszont ellentmondásra vezet az adott peremfeltételek mellett.

Megjegyzések:

1. Ha $n = 1$, akkor a (4.21)–(4.23) differenciálegyenletnek öt infinitezimális generátora van, így ötparaméteres Lie-csoportot alkot.
2. Ha az áramlási tér akár csak félig végtelen z -re nézve, akkor $C_1 = C_2 = 0$, így hasonlósági megoldás nem létezik a (4.21)–(4.24) peremérték-feladatra.
3. Ha klasszikus egyparaméteres pont transzformációt használunk, akkor csak egy szimmetria létezik a vizsgált peremérték-feladatra. Létezhetnek azonban más szimmetriák is, ha más csoportban keresünk; például kontakt, Bäcklund, Noether szimmetria [17].
4. a ψ áramfüggvény (potenciálfüggvény)

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (5.21)$$

módon történő bevezetése során eggyel több szimmetria csoportot kapunk, de a peremfeltételek miatt az a megoldás is ellentmondásra vezet.

Mivel a klasszikus Lie-csoportokkal nem jutottunk eredményre, az ζ hasonlósági változót és az $f(\zeta)$ és Θ függvényeket vegyük fel a [18]-hoz hasonló módon:

$$\begin{aligned} \zeta &= (r^2 - R^2)Bz^c, \\ \psi &= Az^a f(\zeta), \\ \Theta &= \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} z^{-b}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

ahol a, b, c, A, B egyelőre határozatlan állandók, ψ pedig az (5.21) módon definiált áramfüggvény, amely minden folytonos $\psi(r, z)$ -re teljesíti a (4.18) kontinuitási egyenletet. Nem-newtoni folyadék esetén nem kapunk hasonlósági megoldást akkor sem, ha az (5.22) alakot feltételezzük, ezért a továbbiakban csak newtoni folyadékkal foglalkozunk. A ψ függvényre vonatkozó mozgásegyenlet az

$$\frac{1}{r^3} \psi_r \psi_z + \frac{1}{r^2} (\psi_r \psi_{rz} - \psi_z \psi_{rr}) = \nu \frac{1}{r} \left(\psi_{rrr} - \frac{1}{r} \psi_{rr} + \frac{1}{r^2} \psi_r \right) + g\bar{\beta}(T - T_\infty) \quad (5.23)$$

módon, az energiaegyenlet az

$$\frac{1}{r} (\psi_r T_z - \psi_z T_r) = \alpha \left(\frac{1}{r} T_r + T_{rr} \right) \quad (5.24)$$

módon írható, ahol $\nu = K/\rho$. A (4.24) peremfeltételeket módosítsuk úgy, hogy a henger

mozgási sebessége és a zavartalan áramlás sebessége is a z változó lineáris függvénye legyen:

$$\begin{aligned} r = R : \quad & u(r,z) = U_w z, \quad v(r,z) = 0, \quad T(r,z) = T_w \\ r \rightarrow \infty : \quad & u(r,z) = U_\infty z, \quad T(r,z) = T_\infty. \end{aligned}$$

Az áramfüggvényre és a hőmérsékletre felírva a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} r = R : \quad & \psi_r(r,z) = U_w z, \quad \psi_z(r,z) = 0, \quad T(r,z) = T_w \\ r \rightarrow \infty : \quad & \frac{1}{r} \psi_r(r,z) = U_\infty z, \quad T(r,z) = T_\infty. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Behelyettesítve (5.22)-t az (5.23), (5.24) differenciálegyenletekbe, rendezés után a következő differenciálegyenlet-rendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} Az^{2a+2c-1} [(a+c)f'^2 - af f''] &= 2\nu z^{a+2c} [f'' + (\zeta + R^2)f'''] + \frac{g\bar{\beta}(T_w - T_\infty)}{4A} z^b \Theta, \\ Az^{a+b+c-1} (bf'\Theta - af\Theta') &= 2\alpha z^{b+c} [\Theta' + (\zeta + R^2)\Theta'']. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Az invariancia feltétele:

$$\begin{aligned} 2a + 2c - 1 &= a + 2c = b \\ a + b + c - 1 &= b + c, \end{aligned} \quad (5.27)$$

melyből $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$. Csak akkor kapunk hasonlósági megoldást, ha a Boussinesq-tagot ((5.26) első egyenletének utolsó tagja) elhagyjuk, és legyen $b = 0$. Kényszerkonvekció esetén ez megtehető. Helyettesítsük most (5.22)-t az (5.25) peremfeltételekbe, felhasználva a kiszámított paraméter értékeket:

$$2ABf'(0) = U_w, \quad Af(0) = 0, \quad \lim_{\zeta \rightarrow \infty} 2ABf'(\zeta) = U_\infty, \quad \Theta(0) = 1, \quad \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \Theta(\zeta) = 1. \quad (5.28)$$

Két fő esetet tekintünk.

1. Legyen $f'(0) = 1$. Ekkor $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} f'(\zeta) = \lambda$, ahol $\lambda = U_\infty/U_w$. Az (5.26) első egyenletében legyen $A = 2\nu$
2. Legyen $f'(0) = 0$ és $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} f'(\zeta) = 1$, valamint az (5.26) első egyenletében legyen $A = 2\nu$. Így $B = U_\infty/4\nu$ és $U_w = 0$.

Az első esetben ha $\lambda = 0$, akkor csak a henger mozog, ha $\lambda > 0$, akkor a henger és a zavartalan áramlási sebesség előjele megegyezik, ha $\lambda < 0$, akkor az áramlás ellentétes a test mozgási sebességével. A második esetben a henger áll.

Most már felírható a megoldandó peremérték-feladat:

$$(\zeta + R^2)f''' + (1 + f)f'' - f'^2 = 0, \quad (5.29)$$

$$\frac{\alpha}{\nu} [(\zeta + R^2)\Theta'' + \Theta'] + f\Theta' = 0, \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad \lim_{\zeta \rightarrow \infty} f'(\zeta) = \lambda, \quad \Theta(0) = 1, \quad \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \Theta(\zeta) = 0, \quad \text{vagy} \\ f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad \lim_{\zeta \rightarrow \infty} f'(\zeta) = 1, \quad \Theta(0) = 1, \quad \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \Theta(\zeta) = 0. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Az (5.29) harmadrendű differenciálegyenletet egy másodrendű differenciálegyenletre és egy integrálásra vezetjük vissza. Tekintsük az

$$y^{(n)} = g((x, y, y', \dots, y^{(n-1)})) \quad (5.32)$$

n -edrendű differenciálegyenletet, vagy az ennek megfelelő

$$y_n = g(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}) \quad (5.33)$$

felületet az $(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})$ térben (n -csóva tér). Az (5.33)-hoz tartozó egyparaméteres Lie ponttranszformációs csoport:

$$\begin{aligned} x^* &= X(x, y; \varepsilon) = x + \varepsilon \xi(x, y) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ y^* &= Y(x, y; \varepsilon) = y + \varepsilon \eta(x, y) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (5.34)$$

és infinitezimális generátor:

$$X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y}. \quad (5.35)$$

Ha egy n -edrendű közönséges differenciálegyenlet eleget tesz az (5.34) egyparaméteres Lie transzformációs csoportnak, akkor az n -edrendű differenciálegyenlet visszavezethető egy $n-1$ -edrendű differenciálegyenletre és egy kvadraturára [8]. Ez megtehető differenciál invariánsok vagy kanonikus koordináták segítségével. Kanonikus koordinátákkal az általános (5.34) csoport translációs csoporttá transzformálható. Érvényes a következő tétel.

Tétel. *Tegyük fel, hogy az (5.34) nem triviális egyparaméteres Lie transzformációs csoport az (5.35) infinitezimális generátorral eleget tesz az (5.33) differenciálegyenletnek. Legyenek $r(x, y)$ és $s(x, y)$ a megfelelő kanonikus koordináták, melyek kielégítik az $Xr = 0$, $Xs = 1$ egyenleteket. Ekkor az (5.33) a*

$$\frac{d^{n-1}z}{dr^{n-1}} = G\left(r, z, \frac{dz}{dr}, \dots, \frac{d^{n-2}z}{dr^{n-2}}\right)$$

$n-1$ -edrendű differenciálegyenletre redukálható, ahol

$$\frac{ds}{dr} = z.$$

Vegyük előbb az (5.29) egyenletet. Bevezetve f', f'', f''' helyett az f_1, f_2, f_3 változókat, az (5.29) differenciálegyenlet az

$$F(\zeta, f, f_1, f_2, f_3) = f_3 + \frac{1}{\zeta + R^2} (1 + f f_2 - f_1^2) = 0$$

módon írható és a $(\zeta, f, f_1, f_2, f_3)$ változók 3-csója teret alkotnak. Közönséges differenciálegyenletek peremérték-feladatának invarianciájához – hasonlóan a parciális differenciálegyenletekre vonatkozó peremérték-feladathoz – az szükséges, hogy a differenciálegyenlet, a peremek és a peremfeltételek is invariánsak legyenek. Tekintsük először az (5.29) invarianciáját, melynek szükséges és elégséges feltétele, hogy

$$X^{(3)}F = 0, \quad \text{ha} \quad F = 0 \quad (5.36)$$

teljesüljön, ahol

$$\begin{aligned} X^{(3)} = & \xi(\zeta, f) \frac{\partial}{\partial \zeta} + \eta(\zeta, f) \frac{\partial}{\partial f} + \eta^{(1)}(\zeta, f, f_1) \frac{\partial}{\partial f_1} + \\ & + \eta^{(2)}(\zeta, f, f_1, f_2) \frac{\partial}{\partial f_2} + \eta^{(3)}(\zeta, f, f_1, f_2, f_3) \frac{\partial}{\partial f_3} \end{aligned}$$

az (5.35) infinitezimális generátor harmadik prolongációja. Most

$$X^{(3)}F = \eta^{(3)} - \xi \frac{1}{(\zeta + R^2)^2} (1 + f f_2 - f_1^2) + \eta \frac{1}{\zeta + R^2} f_2 - \eta^{(1)} \frac{1}{\zeta + R^2} 2f_1 + \eta^{(2)} \frac{1}{\zeta + R^2} f = 0. \quad (5.37)$$

Tehát (5.36) alapján megoldandó az (5.37), (5.29) parciális differenciálegyenlet-rendszer a ξ és η függvényekre. Az $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \eta^{(3)}$ infinitezimálisok 3, 6, illetve 11 tagból állnak. Megoldásnak a

$$\xi(\zeta, f) = \zeta + R^2, \quad \eta(\zeta, f) = 0 \quad (5.38)$$

eredményt kapjuk és így (5.29) visszavezethető egy másodrendű differenciálegyenletre és egy integrálásra. A kanonikus koordináták az

$$Xr = 0, \quad (5.39)$$

$$Xs = 1 \quad (5.40)$$

egyenletrendszerből határozhatók meg. Az (5.39)-ből $r(\zeta, f) = f(\zeta)$ -t, (5.40)-ből $s(\zeta, f) = \ln(\zeta + R^2)$ -et kapjuk. Így

$$z = \frac{ds}{dr} = \frac{1}{\zeta + R^2} \frac{d\zeta}{df} = \frac{1}{(\zeta + R^2)f_1}.$$

A szükséges

$$\begin{aligned} f_1 &= (\zeta + R^2)^{-1} z^{-1}, \\ f_2 &= -(\zeta + R^2)^{-2} z^{-1} (1 + z^{-2} z'), \\ f_3 &= (\zeta + R^2)^{-3} (-z^{-4} z'' + 3z^{-5} z'^2 + 3z^{-3} z' + 2z^{-1}) \end{aligned}$$

deriváltakat előállítva és behelyettesítve (5.29)-be, a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$z'' - \frac{3}{z} z'^2 + (r-2)zz' + z^2 + (r-1)z^3 = 0. \quad (5.41)$$

Feltesszük, hogy nincs visszaáramlás, így $f'(\zeta) > 0$, $\forall \zeta \in [0, \infty)$. Ezért $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} f(\zeta) = \infty$, így a $z(r)$ függvényre vonatkozó peremfeltételek (5.31) alapján:

$$\begin{aligned} z(0) &= \frac{1}{R^2}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} z(r) = 0, \quad \text{vagy} \\ z(0) &\rightarrow \infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} z(r) = 0. \end{aligned}$$

Megjegyzés: Az (5.41) differenciálegyenlet rendszáma tovább nem csökkenthető.

Az (5.30) egy homogén lineáris másodrendű differenciálegyenlet, ami a jól ismert

$$\Omega(\zeta) = \frac{\Theta'(\zeta)}{\Theta(\zeta)}$$

helyettesítéssel Ω -ban elsőrendű Riccati-féle differenciálegyenletre redukálható. A következő fejezetben az (5.29) differenciálegyenletet oldjuk meg a végtelenben (illetve mindkét végpontban) szinguláris (5.41) helyett.

6. A peremérték-feladat numerikus megoldása

Mivel az (5.29), (5.30) csatolt egyenletrendszerben az (5.29) nem tartalmazza a Θ változót, ezért számítási szempontból kedvezőbb, ha előbb (5.29)-re keressük meg a megoldást, majd f ismeretében (5.30)-ra. Az (5.29)–(5.31) peremérték-feladatot spektrál kollokációs módszerrel oldjuk meg. Az f és Θ függvények a $[0, \infty)$ intervallumon vannak értelmezve, így a megoldás előállítására két eset lehetséges. Vagy csonkítjuk a $[0, \infty)$ -t $[0, L]$ -re, vagy pedig közvetlenül kezeljük a félig végtelen intervallumot. Ha az utóbbit alkalmazzuk, akkor bázisfüggvényekként a Laguerre-polinomokat vagy más leképezéseket használhatunk (pl. logaritmikus, exponenciális leképezés, algebrai leképezés) [9].

A leképezések során a jobb oldali végpontban szinguláris differenciálegyenletet kapunk. Intervallum csonkítás esetén arra kell figyelni, hogy az approximációs polinom N fokszámát az L nagyságával egyenletesen kell növelni, mert ha N kicsi és L nagy, akkor a közelítés pontatlan, ha pedig L kicsi és N nagy, akkor nagy lesz a csonkítási hiba. A $\{T_i\}_{i=1}^N$ elsőfajú Chebyshev-polinomok a

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n > 1 \quad (6.1)$$

rekurzióval vannak értelmezve, a közelítéseket a (6.1) polinomok

$$x_k = \cos \frac{k\pi}{N} \quad (6.2)$$

szélsőérték helyein végezzük. Bizonyítható (lásd pl. [9]) a következő tétel.

Tétel. Egy $y(x)$ függvényt a Chebyshev-sor N -edik szeletével közelítve, az E_T diszkretizációs hiba az

$$E_T(N) = \left| \sum_{n=0}^N a_n T_n(x) - y(x) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|$$

összefüggéssel adott bármely $x \in [-1, 1]$ esetén.

A számítás során azonban éppen a sorból elhagyott $a_{N+1}, a_{N+2}, \dots$ együtthatók nem ismertek, ezért gyakorlati célra a fenti tétel nem alkalmazható. Tetszőleges differenciálegyenlet esetén nehéz hibabecslést végezni, de van néhány szabály, ami segít annak eldöntésében, hogy a kapott eredmény megfelelő közelítést ad-e:

- A csonkítási hiba nagyságrendje megegyezik az utolsó megtartott együttható nagyságrendjével:

$$E_T(N) \approx \mathcal{O}(|a_N|).$$

- Ha az a_N -hez közel lévő, de a_N -nél kisebb együtthatók abszolút értékben monoton csökkenő módon tartanak a_N -hez, akkor az eredmény numerikus tapasztalatok alapján valószínűleg helyes.
- További ellenőrzési módszer, hogy a számítást különböző N felosztásra végezzük el.

- Ha kis lépésközű véges differencia módszert alkalmazunk a kiszámított függvényértékre, akkor rálátásunk lesz a hibára. Hátránya ennek, hogy magasabb rendű differenciálegyenleteknél túl durva hibát ad.

A spektrál módszerekre jellemző az exponenciális konvergencia, melynek típusait az alábbi definíció adja meg [9]:

Definíció. Egy adott sor szupergeometriai, geometriai vagy szubgeometriai konvergenciájú, ha az a_n együtthatókra fennáll, hogy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg |a_n|}{n} = \begin{cases} \infty, & \text{SZUPERGEOMETRIAI} \\ \text{állandó}, & \text{GEOMETRIAI} \\ 0, & \text{SZUBGEOMETRIAI.} \end{cases}$$

A spektrál kollokációs módszer alkalmazásával egy adott differenciálegyenletben előforduló deriváltak közelítése a kollokációs pontokban kétféleképpen történhet; differenciáló mátrixokkal, vagy integráló mátrixokkal.

6.1. Spektrál kollokáció differenciáló mátrixokkal

Az ismeretlen $y(x)$ függvényre vonatkozó interpolációs feladatot a

$$\sum_{n=0}^N a_n T_n(x_k) = y(x_k), \quad (k = 0, \dots, N) \quad (6.3)$$

alakban írjuk fel, ahol x_k a (6.2) szerint értelmezett. Az x_k kollokációs pontokban $y'(x)$ az

$$y'(x_k) = \sum_{m=0}^N D_{km} x_m$$

szorzatösszeggel közelíthető, ahol D_{km} a $\mathbf{D}$ a differenciáló mátrix elemei. Hasonlóan

$$\frac{d^\ell y}{dx^\ell}(x_k) = \sum_{m=0}^N D_{km}^{(\ell)} x_m,$$

ahol $\mathbf{D}^{(\ell)}$ az ℓ -edik differenciáló mátrix és Chebyshev-polinomok esetén $\mathbf{D}^{(\ell)} = \mathbf{D}^\ell$. Ebben az esetben a megoldást $y(x_k)$ -ra kapjuk, nem pedig az a_n együtthatókra. Ha szükséges, akkor (6.3)-ból a_n meghatározható. Másodrendű differenciálegyenleteknél a peremfeltételeket a differenciáló mátrixok első és utolsó sorának módosításával írhatjuk elő. Magasabb rendű differenciálegyenletek esetén ez a módszer túlhatározott egyenletrendszert eredményez. Különböző módszerek léteznek ilyenkor a peremfeltételek megadására ([14], [19]). Az alábbiakban négy módszert ismertetünk:

1. Az $y(x)$ függvényre vonatkozó p -edrendű differenciálegyenlet helyett az $\hat{y}(x) = q(x)y(x)$ függvényre vonatkozó differenciálegyenletet oldjuk meg, ahol $q(x)$ $p - 2$ peremfeltételt

kielégít. A további két peremfeltétel a hagyományos módon (első és utolsó sor módosítása) előírható. Ilyen módon oldottuk meg az általánosított Sakiadis-feladatot [10]. Hátránya a módszernek, hogy általános peremfeltételek mellett nem algoritmizálható.

2. Bevezetünk $p - 2$ fiktív csomópontot tetszőleges, de x_k -vel nem egybeeső pontokban [14]. Ekkor már nem az $\{x_k\}_{k=0}^N$ Chebyshev-rácson dolgozunk. A [13] cikk egy algoritmust ad meg tetszőleges csomópontokra támaszkodó véges differencia közelítésekre. A módszer előnye, hogy – mivel a fiktív csomópontok helyzete tetszőleges – többpontos peremérték-feladatok megoldására is alkalmas és teljesen automatizálható. Hátránya, hogy az így képzett deriváló mátrixok generálása lassabb, mint a hagyományos módon történő létrehozásuk.
3. Kevesebb Chebyshev-pontot használunk fel a differenciálegyenlet közelítésére, a felszabaduló helyeket a peremfeltételek megadására használjuk fel. Hátránya az, hogy a kapott megoldás függ attól, hogy mely csomópontokat hagytuk el.
4. Mai-Duy bevezette az integráló mátrixos formalizmust, amelynek számos előnye van a differenciáló mátrixokkal szemben [19]. Ezt a 6.2. részben mutatjuk be.

6.2. Spektrál kollokáció integráló mátrixokkal

Most nem a nulladrendű, hanem a legmagasabb rendű deriváltat közelítjük az alábbi módon Chebyshev-polinomokkal:

$$\begin{aligned}
 y^{(p)}(x) &= \sum_{n=0}^N a_n T_n(x) = \sum_{n=0}^N I_n^{(p)}(x), \\
 y^{(p-1)}(x) &= \sum_{n=0}^N a_n \int T_n(x) dx + c_1 = \sum_{n=0}^N I_n^{(p-1)}(x) + c_1, \\
 &\vdots \\
 y(x) &= \sum_{n=0}^N I_n^{(0)}(x) + c_1 \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} + \dots + c_p.
 \end{aligned}$$

Legyen az ismeretlenek oszlop mátrixa $\mathbf{s} = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_N \ c_1 \ \dots \ c_p]^T$ és így a (6.2) pontokbeli a közelítések:

$$y^{(p)}(\mathbf{s}) = \mathbf{I}^{(p)} \mathbf{s}, \dots, y(\mathbf{s}) = \mathbf{I}^{(0)} \mathbf{s}.$$

Látható, hogy ezzel a módszerrel p db új változót kapunk ($c_1, \dots, c_p$), ezért a p db peremfeltétel egyszerűen megadható és programozható (a (6.4) mátrix bővítése p sorral). Például a $(p - k)$ -

adik integráló mátrix (ami a k -adik deriváltat közelíti) szerkezete a peremfeltételek nélkül:

$$\mathbf{I}^{(p-k)} = \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} [I_{ik}]_{i,k=1}^{N+1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} \frac{1^{k-1}}{(k-1)!} & \cdots & \frac{1^{k-k}}{(k-k)!} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} & \cdots & \frac{(-1)^{k-k}}{(k-k)!} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} [0_{ij}]_{i=1, j=N+k+2}^{N+1, N+p+1} \end{array} \right] \end{array} \right]. \quad (6.4)$$

A differenciáló mátrixos elvvel ellentétben itt közvetlenül megkapjuk az a_n együtthatókat. További előnye az integráló mátrixos módszernek, hogy a legtöbb esetben jelentősen kisebb az együttható mátrixok kondíciószáma.

6.3. A peremérték-feladat megoldása

Az intervallum csonkításhoz vezessük be a

$$\zeta \in [0, \infty) \longrightarrow \bar{\zeta} \in [0, L] \xrightarrow{x = \frac{2}{L}\bar{\zeta} - 1} x \in [-1, 1] \quad (6.5)$$

leképezést. Így a deriváltakra fennáll:

$$\frac{df}{d\zeta} = \frac{2}{L}g'(x), \quad \frac{d^2f}{d\zeta^2} = \frac{4}{L^2}g''(x), \quad \frac{d^3f}{d\zeta^3} = \frac{8}{L^3}g'''(x)$$

és mostantól a vessző az x változó szerinti deriválást jelöli. A helyettesítéseket elvégezve (5.29)-ben és peremfeltételekben, a következő peremérték-feladatot kapjuk:

$$\frac{2}{L} \left[\frac{L}{2}(x+1) + R^2 \right] g''' + (1+g)g'' - g'^2 = 0, \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} g(-1) = 0, \quad g'(-1) = \frac{L}{2}, \quad g'(1) = \frac{L}{2}\lambda \quad \text{vagy} \\ g(-1) = 0, \quad g'(-1) = 0, \quad g'(1) = \frac{L}{2}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Az (5.30) differenciálegyenletet szintén intervallum csonkítással oldjuk meg. Itt is a (6.5) leképezést alkalmazzuk, így Θ deriváltjai:

$$\frac{d\Theta}{d\zeta} = \frac{2}{L}\vartheta'(x), \quad \frac{d^2\Theta}{d\zeta^2} = \frac{4}{L^2}\vartheta''(x),$$

mellyel az

$$\frac{\alpha}{\nu} \left\{ \left[\frac{L}{2}(x+1) + R^2 \right] \frac{4}{L^2}\vartheta'' + \frac{2}{L}\vartheta' \right\} + \frac{2}{L}g\vartheta' = 0, \quad (6.8)$$

$$\vartheta(-1) = 1, \quad \vartheta(1) = 0 \quad (6.9)$$

peremérték-feladatot kapjuk.

Az összes számítást a MATLAB R2011a verziójával végeztük. Az (5.29)–(5.31) feladatot megpróbáltuk megoldani a Maple 16-os verziójával is, de nagyobb L intervallumokra nem tudta megoldani. Kisebb L értékekre négy tizedesjegyre megegyezett a Maple és az általunk írt spektrál kollokációs módszerrel kapott megoldás.

A (6.6), (6.7) megoldása a következő folyamat szerint történik. A sorszámozás során (a)-val a differenciáló mátrixos, (b)-vel az integráló mátrixos megközelítést mutatjuk.

1. Input: $N, L, R, \lambda, \alpha, \nu$
2. Differenciáloperátorok diszkretizálása

(a) $\mathbf{D}^{(1)}, \mathbf{D}^{(2)}, \mathbf{D}^{(3)}$ létrehozása

A $\mathbf{D}^{(1)}$ mátrix létrehozására a [13] cikkben közölt módszert alkalmaztuk. Az algoritmus három egymásba ágyazott `for`-ciklust tartalmaz, ami a MATLAB-ben előnytelen a futásidőre nézve, de az utóbbi évek MATLAB verziói a JIT (just-in-time) fordítónak köszönhetően sokat gyorsultak. Sok száz kollokációs pont esetén is gyorsan történik a mátrixok létrehozása.

(b) $\mathbf{I}^{(3)}, \mathbf{I}^{(2)}, \mathbf{I}^{(1)}, \mathbf{I}^{(0)}$ létrehozása

Az $\mathbf{I}^{(k)}$ integráló mátrix generálása történhet rekurzív módon vagy pedig közvetlenül, explicit alakban.

3. Differenciálegyenlet diszkretizálása

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & [\mathbf{I} + \text{diag}(\mathbf{g})]\mathbf{D}^{(2)}\mathbf{g} + \text{diag}\left(\frac{2}{L}\left[\frac{L}{2}(\mathbf{x} + 1) + R^2\right]\right)\mathbf{D}^{(3)}\mathbf{g} - (\mathbf{D}^{(1)}\mathbf{g})^2 = \mathbf{0} \\ \text{(b)} \quad & [\mathbf{I} + \text{diag}(\mathbf{I}^{(3)}\mathbf{g})]\mathbf{I}^{(1)}\mathbf{g} + \text{diag}\left(\frac{2}{L}\left[\frac{L}{2}(\mathbf{s} + 1) + R^2\right]\right)\mathbf{I}^{(0)}\mathbf{g} - (\mathbf{I}^{(2)}\mathbf{g})^2 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

4. Peremfeltételek előírása

- (a) A fiktív csomópontos módszerrel készített differenciáló mátrixos megadást alkalmazzuk.
- (b) Az integráló mátrixokat bővítjük $p = 3$ sorral, így $N + p + 1$ számú ismeretlenhez $N + p + 1$ számú egyenlet lesz.

5. Nemlineáris egyenletrendszer megoldása

A diszkretizáció során kapott nemlineáris egyenletrendszert kétféleképpen oldottuk meg. Első megközelítésben a MATLAB Optimization Toolbox Levenberg-Marquardt megoldójával dolgoztunk minden beállítást alapértelmezetten hagyva. A megoldó képes több szálon dolgozni. Az iterációhoz szükséges kezdővektornak a következőt választottuk:

- (a) $\mathbf{x}_0 = \Re((L(\mathbf{x} + 1)^{3/2})/3)$, mert a fiktív csomópontot $-1,1$ -ben vettük fel.
- (b) $\mathbf{s}_0 = [\mathbf{x} \ 1 \ 1 \ 1]^T$

Mivel az anyagegyenlet lineáris (vagy ha hatványtörvény modellel számolunk, akkor hatványfüggvény), ezért a sebesség-és hőmérsékletmezőre vonatkozó alapegyenletek diszkretizációjakor polinom egyenletrendszert kapunk. Az összes gyök meghatározására képes szoftver a PHCpack (Polynomial Homotopy Continuation). Van hozzá egy MATLAB interfész is, a PHClab [15]. Az egyenletrendszer ismeretlenjeit a `sym` MATLAB

függvénnyel szimbolikus vektorként adtuk meg, sztringekből álló cella tömbbé konvertáltuk, majd átalakításokat végeztünk rajta, hogy a PHClab elfogadja bemenő paraméterként (lásd **C** függelék). A PHCpack Windowson csak egy szálon tud dolgozni.

6. Hibabecslés

Korábban írtunk a hiba nagyságrendjének becsléséről; azokat az elveket figyelembe véve a készített MATLAB függvények felhasználói kérésre elvégzik a hibaszámításokat.

7. Közelítő megoldás előállítása tetszőleges $x \neq x_k$ pontokban

(a) Baricentrikus Lagrange-interpoláció alkalmazása [5], vagy az a_n együtthatók meghatározása (6.3)-ból.

(b) A (6.3)-beli a_n együtthatók ismeretében a közelítő megoldás kiértékelése bármely $x \in [-1, 1]$ pontban.

A (6.8), (6.9) megoldásának menete ugyanaz, mint ahogyan (6.6)–(6.7)-et oldottuk meg. A (6.8) differenciálegyenlet diszkrétizált alakja differenciáló mátrixokkal

$$\frac{\alpha}{\nu} \left\{ \text{diag} \left(\frac{4}{L^2} \left[\frac{L}{2}(\mathbf{x} + 1) + R^2 \right] \right) \mathbf{D}^{(2)} \boldsymbol{\vartheta} + \frac{2}{L} \mathbf{D}^{(1)} \boldsymbol{\vartheta} \right\} + \frac{2}{L} \text{diag}(\mathbf{g}) \mathbf{D}^{(1)} \boldsymbol{\vartheta} = \mathbf{0}, \quad (6.10)$$

integráló mátrixokkal pedig

$$\frac{\alpha}{\nu} \left\{ \text{diag} \left(\frac{4}{L^2} \left[\frac{L}{2}(\mathbf{s} + 1) + R^2 \right] \right) \mathbf{I}^{(0)} \boldsymbol{\vartheta} + \frac{2}{L} \mathbf{I}^{(1)} \boldsymbol{\vartheta} \right\} + \frac{2}{L} \text{diag}(\mathbf{g}) \mathbf{I}^{(1)} \boldsymbol{\vartheta} = \mathbf{0}. \quad (6.11)$$

6.4. Számítások kiértékelése

Minden számítást a MATLAB-en keresztül végeztünk dupla pontosság mellett, Intel Core i5-2500K² processzoron. A 2. táblázatban összefoglaltuk a (6.6), (6.7) peremérték-feladat integráló mátrixokkal történő diszkrétizált alakjának megoldását az Optimization Toolbox-szal, illetve a PHClab megoldóval.

2. táblázat. Megoldók összehasonlítása (6.6) és (6.7) második sorának megoldásakor $R = 1$, $L = 20$ esetén

N	számítási idő (s)*		megoldások száma	
	PHClab	Optimization Toolbox	PHClab	Optimization Toolbox
5	3,1734	0,0152	32	1
7	29,9788	0,0165	89	1
10	699,6541	0,0191	132	1
20	-	0,0218	-	1
50	-	0,0959	-	1

* Öt futás átlaga, PHClab esetén a megfelelő bemenet előállítását is figyelembe véve.

²Magórajel: 4500 MHz

A PHCpack előnye, hogy az összes megoldást megtalálja, míg a Levenberg-Marquardt megoldót hiába indítottuk különböző kezdővektorokból, mindig ugyanazt a megoldást találta meg. Nagyobb N értékek esetén a PHCpack nagyon lassúvá válik. A megoldások közül mindig kettő valós, a többi komplex (a fenti paraméterértékek esetén).

Megjegyzés: Ha egy séma konzisztens és stabil (nem feltétlenül ekvidisztáns rácson), még akkor sem biztos, hogy a diszkrét és a folytonos probléma megoldásainak száma megegyezik, hiába csökkentjük a lépésközt minden határon túl [6]. Viszont ha a folytonos feladat megoldásai izoláltak, akkor a fenti feltétel elegendő a megoldások számosságának egyezéséhez.

Ahogy azt a 6.2. részben írtuk, az integráló mátrixos diszkretizálásnál jobban kondicionált egyenletrendszert kapunk a (6.8), (6.9) energiaegyenlet megoldása során (lásd 3. táblázat).

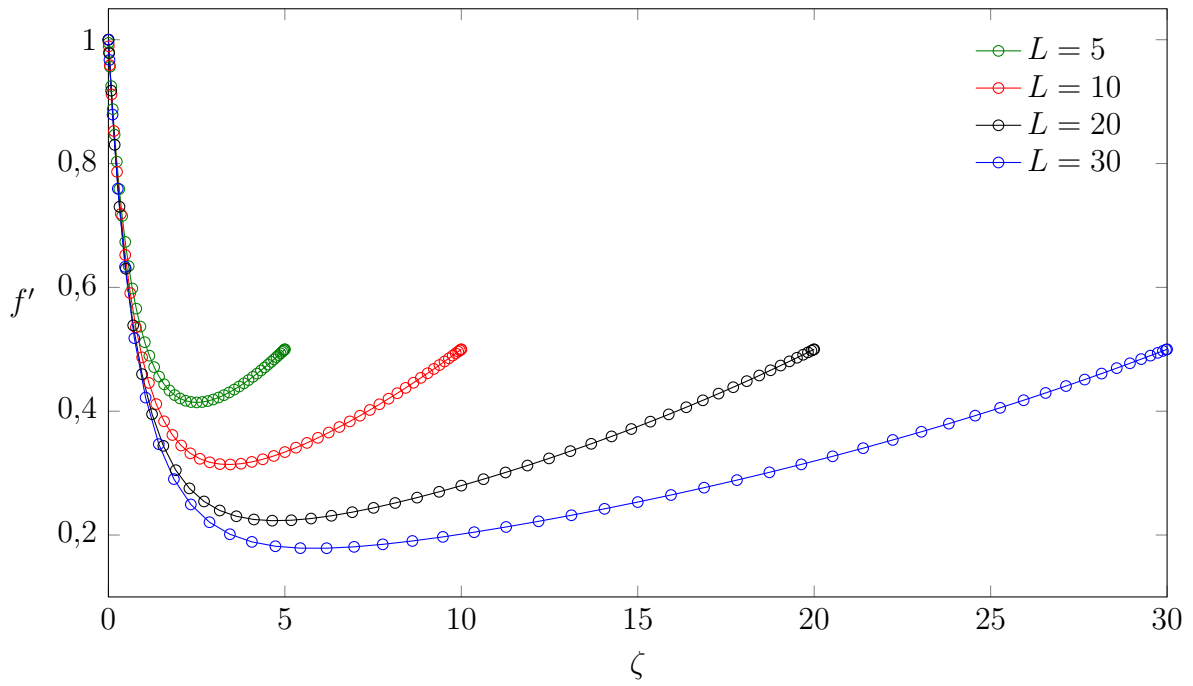
N	együttható mátrix kondíciószáma	
	differenciáló mátrix	integráló mátrix
5	6,8687e01	1,6274e02
10	4,2219e02	1,9254e02
15	2,2073e02	1,9304e02
20	7,3855e03	1,8851e02
25	1,9141e04	1,8459e02
30	4,2020e04	1,8106e02
50	3,9186e05	2,1011e03

3. táblázat. Az együttható mátrixok kondíciószáma a (6.8), (6.9) megoldásakor $R = 1$, $\lambda = 1$, $\alpha = 1$, $\nu = 1$, $L = 25$ esetén

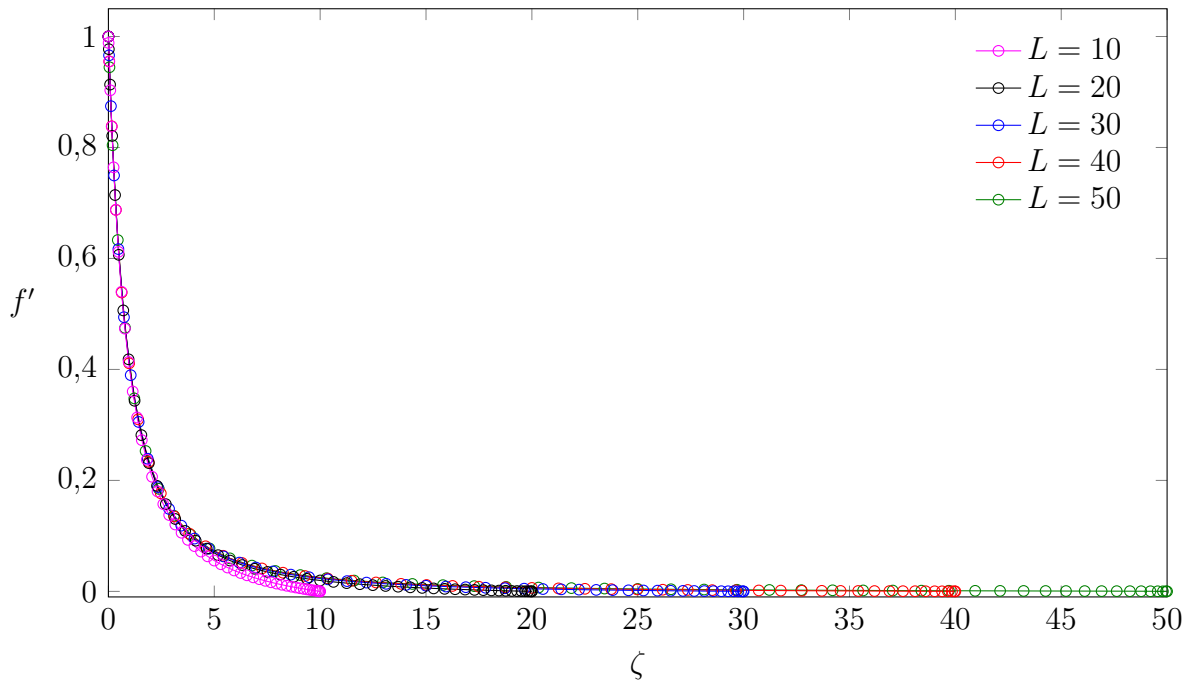
Mivel a célunk a sebesség és hőmérséklet eloszlás meghatározása, azért az (5.22) és (6.5) transzformációknak megfelelően az ábrákon az f' és Θ értékeket tüntettük fel. A numerikus megoldást a karikával jelölt pontokban kaptuk meg, viszont a sorfejtés miatt tetszőleges közbenső pontban meghatározható a megoldás.

Megjegyzés: Ahogy azt korábban írtuk, a differenciáló mátrixos megközelítésben a csonkított Chebyshev-sor a_n együtthatói kiszámíthatók (6.3)-ból. A telt mátrixú egyenletrendszer miatt érdemes Gauss-eliminációt használni, ami $N^3/3 + \mathcal{O}(N^2)$ régi flop műveletigényű. Az A függelékben ismertetett interpoláció viszont $\mathcal{O}(N)$ számításigényű, így ezt a módszert használjuk a közbenső pontok meghatározására.

A következő ábrákon a képaláírások a peremérték-feladatok megoldásához szükséges paraméterek értékeit jelzik. A 2–4. ábrák különböző λ értékekre mutatják a $[0, \infty)$ intervallum $[0, L]$ hossza csonkításának hatását a dimenziótlan f' sebességre.



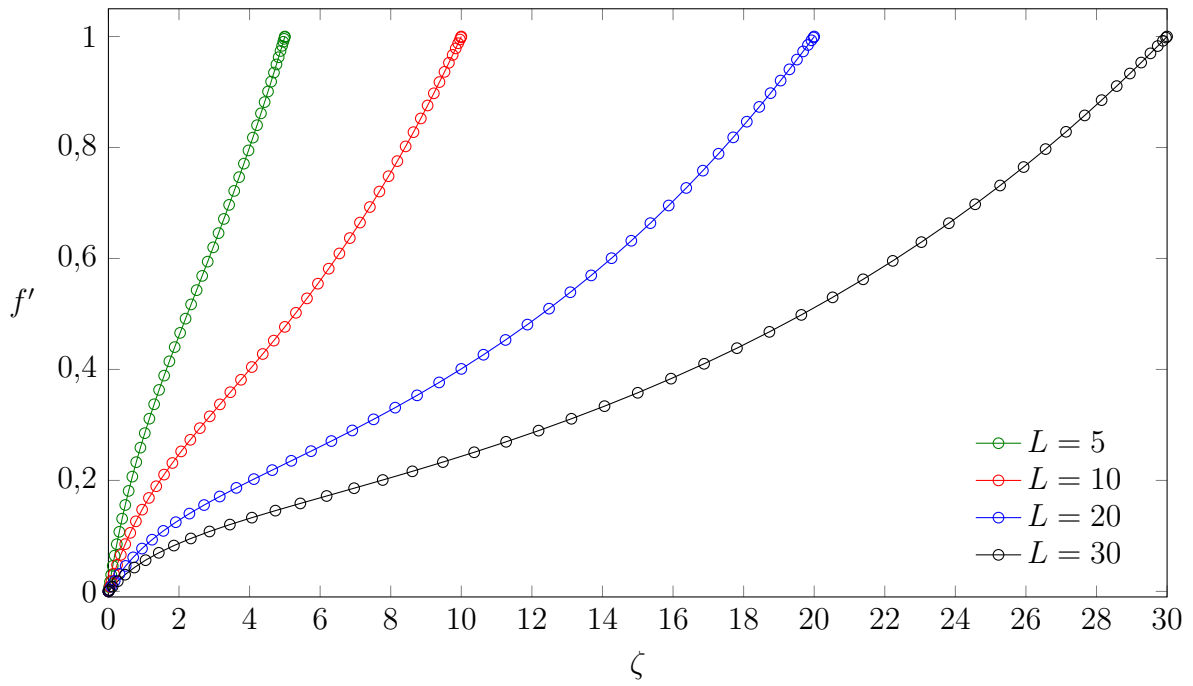
2. ábra. $R = 1$, $\lambda = 0.5$, $N = 50$



3. ábra. $R = 1$, $\lambda = 0$, $N = 50$

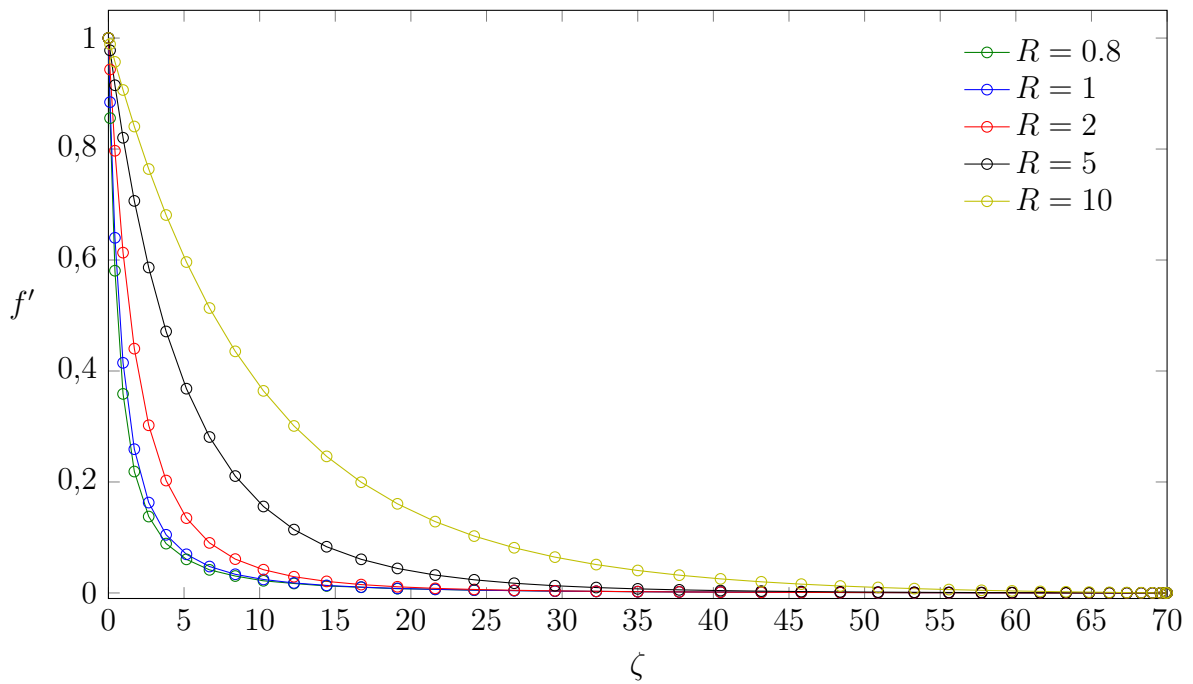
A 2. és 4. ábrákról az olvasható le, hogy a sebességeloszlás jelentősen függ az L paramétertől és a határréteg feltételezés itt nem teljesül. Ha $\lambda = 0$, akkor a 3. ábrán látható módon a megoldások eleget tesznek feltételezésnek és a hidrodinamikusan határréteg vastagsága meghatározható.³ Az is észrevehető, hogy nem elegendő az $L = 10$ intervallum hossz a számításhoz.

³A határréteg vastagság a fal és a határréteg azon pontja közötti távolság, ahol sebesség eléri az állandósult sebesség nagyságának 99%-át.



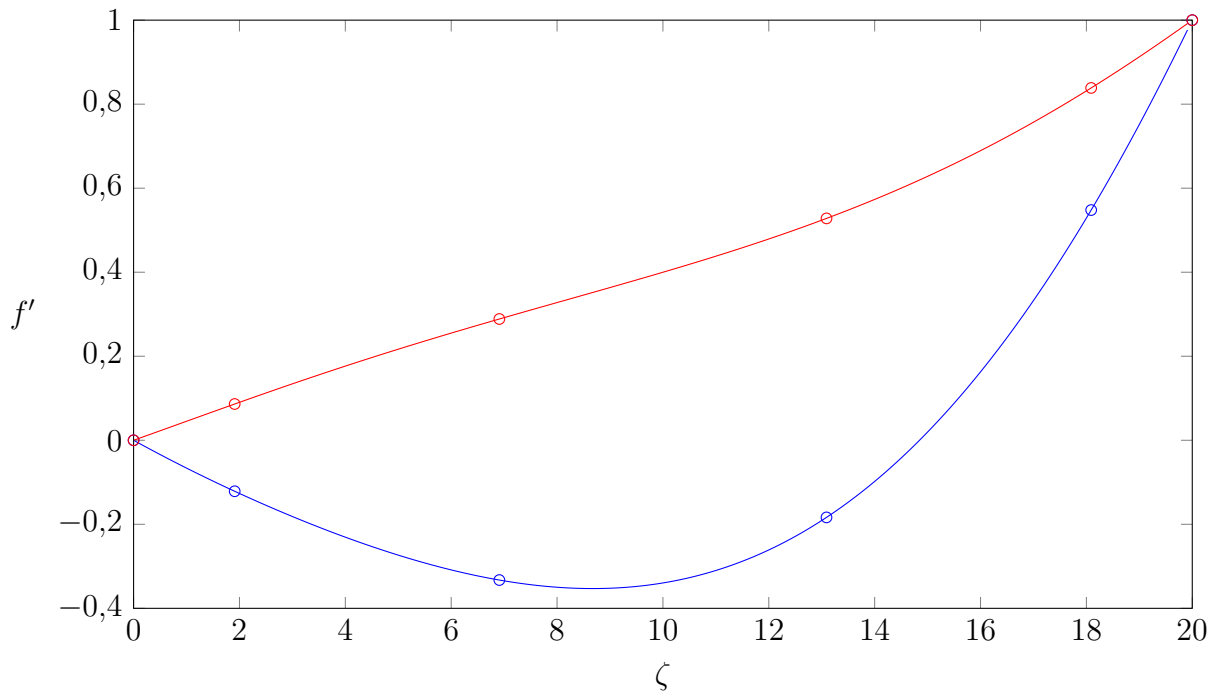
4. ábra. $R = 1$, $N = 50$

Az 5. ábrán a henger sugarát változtattuk a többi paraméter rögzítése mellett. Levonható a következtetés, hogy ahogy nő a henger sugara, úgy nő a határréteg vastagsága is.



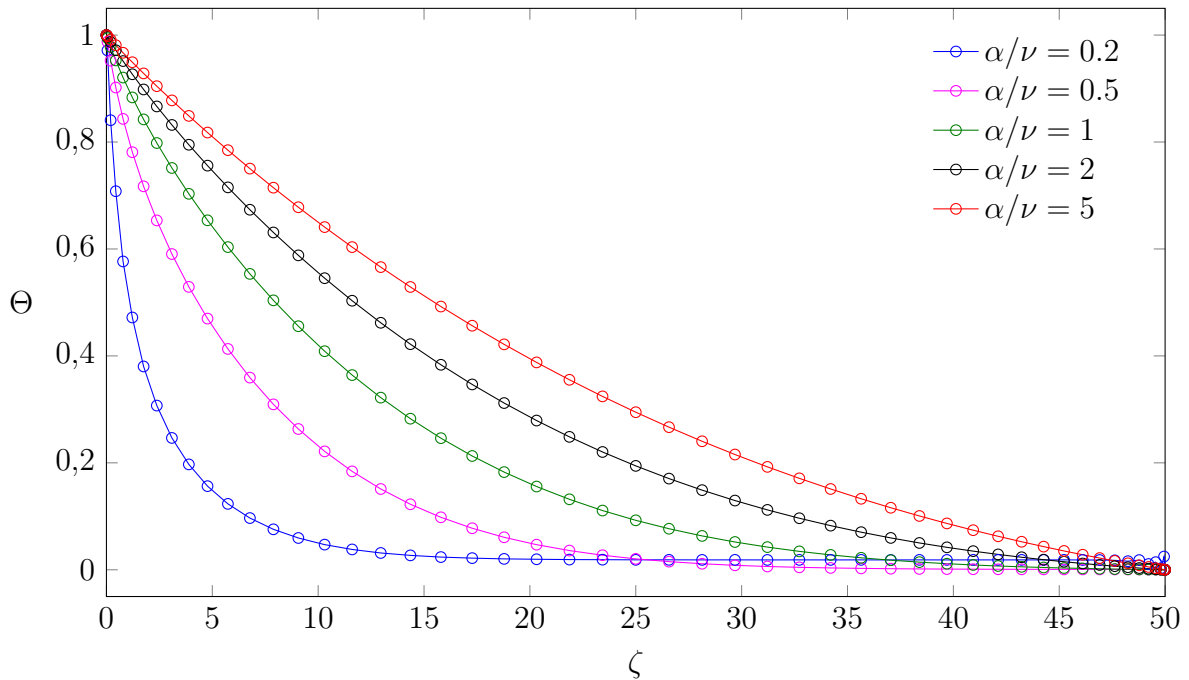
5. ábra. $\lambda = 0$, $L = 70$, $N = 40$

A 6. ábra az $f(\zeta)$ -ra vonatkozó diszkretizált feladat két valós megoldását mutatja. A késsel jelzett alsó megoldásra csak a PHClab segítségével találtunk rá.



6. ábra. $R = 1, L = 20, N = 5$

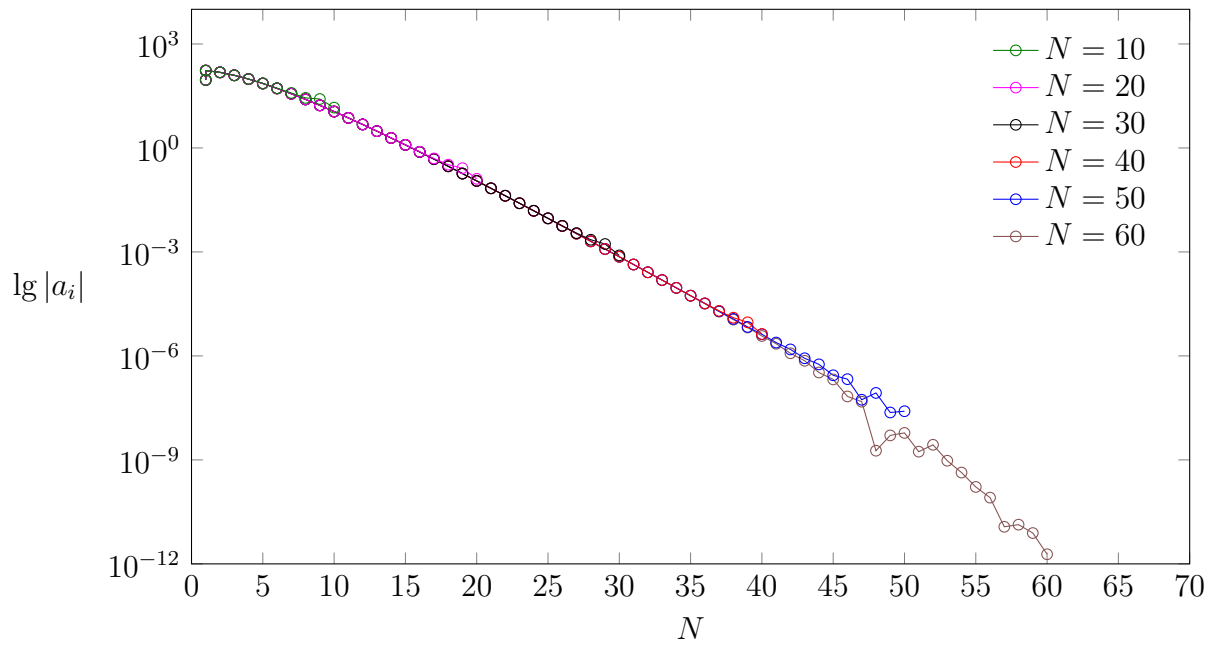
A 7. ábra az $f(\zeta)$ -ből számított dimenzióatlanított hőmérsékletet mutatja az α/ν különböző értékeire. A termikus határreteg vastagsága annál nagyobb, minél nagyobb az α/ν hányados. Az $\alpha/\nu \leq 0,2$ alatt megoldásbeli gondok jelentkeztek, amint ezt a kék görbe $\zeta = 50$ körüli felfelé kunkorodása mutatja.



7. ábra. $R = 1, \lambda = 0.3, L = 50, N = 50$

A 6. fejezetben írtuk, hogy a sorfejtés együtthatóinak monoton módon kell csökkenniük és ilyenkor a diszkretizációs hiba az utolsó megtartott tag együtthatójának nagyságrendjével egye-

zik meg. A 8. ábrából látszik, hogy az együtthatók abszolút értéke fél-logaritmikus skálán ábrázolva közelítőleg egy egyenesre illeszkedik, azaz a konvergencia geometriai konvergencia [9].



8. ábra. $R = 1, \lambda = 1, L = 15$

7. A hasonlósági és az ADINA-val kapott megoldás összehasonlítása

Ebben a fejezetben egy, az előző részekhez képest más fizikai jelenséget vizsgálunk. A hasonlósági transzformációval nyert modellhez a spektrál módszerrel kapott megoldást összevetjük az ADINA-ban kapott megoldásokkal, továbbá az irodalombeli eredményekkel. Az itt vizsgált feladat lényegesen eltér az 5. fejezetbeli jelenségtől, mivel itt sem a közeg áramlási sebessége nem állandó, sem a közeg hőmérséklet eloszlása. A 7. fejezetben a [18] cikkben megadott differenciálegyenlet-rendszert oldjuk meg a korábban ismertetett spektrál módszerrel és összehasonlítjuk az ADINA programmal nyert megoldással.

7.1. A hasonlósági megoldásokra alkalmazott modell

Mahmood és Merkin a [18] cikkben a következő határréteg egyenletekből indulnak ki:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(rv) + \frac{\partial}{\partial z}(ru), \\ u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} = U \frac{dU}{dz} + g\bar{\beta}(T - T_\infty) + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \\ u \frac{\partial T}{\partial z} + v \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\nu}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (7.1)$$

ahol U a zavartalan áramlás sebessége. A differenciálegyenletekhez tartozó peremfeltételek:

$$\begin{aligned} r = R : \quad u = v = 0, \quad T = T_\infty + \frac{\Delta T}{\ell} z, \\ r \rightarrow \infty : \quad u \rightarrow \frac{U_\infty z}{\ell}, \quad T \rightarrow T_\infty. \end{aligned}$$

A cikkben az áramfüggvényt ugyanúgy veszik fel, mint ami az (5.21)-ben szerepel. Az eredeti ismeretlen kétváltozós u , v és T függvények és a bevezetett hasonlósági változók közötti összefüggés:

$$\begin{aligned} \eta = \frac{r^2 - R^2}{2\nu\ell}\beta, \quad \psi = \frac{\nu}{\beta}zf(\eta), \quad T = T_\infty + \frac{\Delta T}{\ell}z\Theta(\eta), \\ u(r,z) = \frac{1}{\ell}zf'(\eta(r)), \quad v(r,z) = -\frac{\nu}{\beta}\frac{1}{r}f(\eta(r)). \end{aligned}$$

Ezen új változókkal az alábbi közönséges differenciálegyenlet-rendszer adódik [18]:

$$\begin{aligned} (1 + 2\beta\eta)f''' + 2\beta f'' + f f'' + 1 - f'^2 + \alpha\Theta = 0, \\ (1 + 2\beta\eta)\Theta'' + 2\beta\Theta' + \text{Pr}(f\Theta' - f'\Theta) = 0, \end{aligned} \quad (7.2)$$

ahol

$$\alpha = \frac{g\bar{\beta}\ell\Delta T}{U_\infty^2}, \quad \beta = \left(\frac{\nu\ell}{U_\infty R^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Az új peremfeltételek:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 1,$$

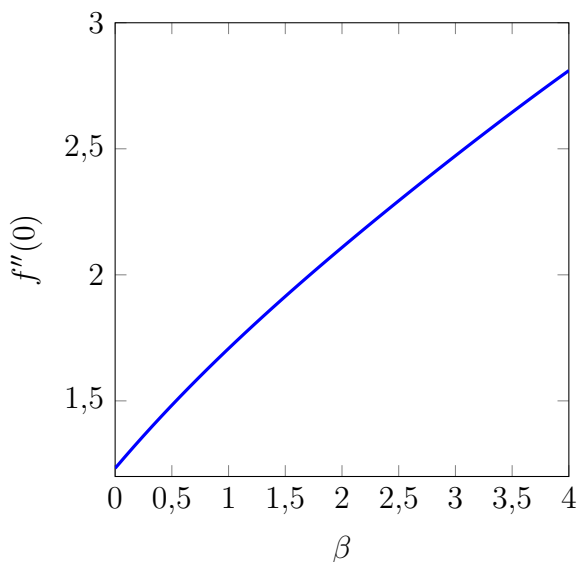
$$\Theta(0) = 1, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \Theta(\eta) = 0.$$

Mivel a gravitáció hatását itt is elhagyjuk ($\alpha = 0$), ezért a (7.2) egyenletek a 6. részben látottakhoz hasonlóan külön megoldhatók. Az így megmaradt β és Pr paraméterek hatását vizsgáljuk. A 4. táblázat a felületi súrlódási tényezővel arányos $f''(0)$ és a hőátadással arányos $\Theta'(0)$ értékeit tartalmazza $\alpha = 0$, $Pr = 1$ esetén különböző β paraméter értékekre.

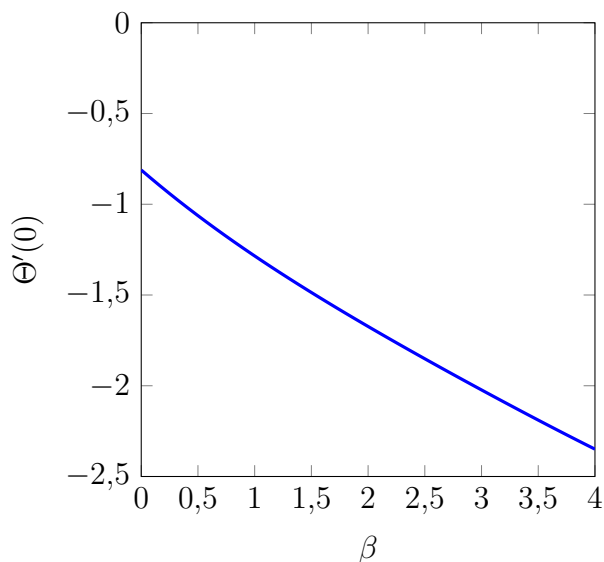
β	$f''(0)$	$\Theta'(0)$
0	1.232535	-0.811301
1	1.707625	-1.284918
2	2.108509	-1.673401
3	2.472360	-2.023066
4	2.810328	-2.349305

4. táblázat. A (7.2) egyenletek megoldásából származtatott értékek $Pr = 1$ esetén

A táblázat alapján interpolált függvényértékeket a 9. és 10. ábra mutatja, amelyek jó egyezést mutatnak a [18]-beli aszimptotikus sorfejtéssel nyert megoldással.

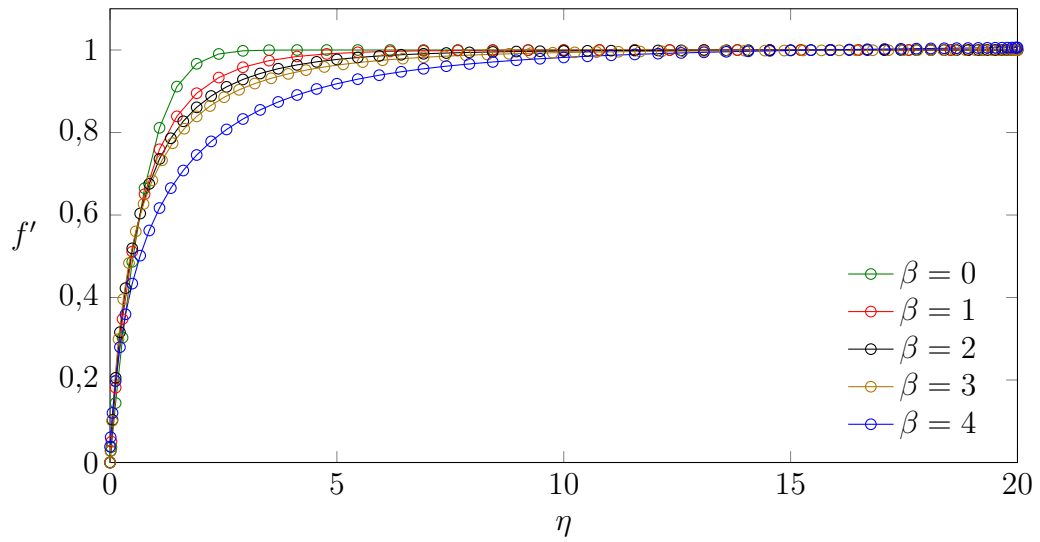


9. ábra. Az $f''(0)$ különböző β értékekre



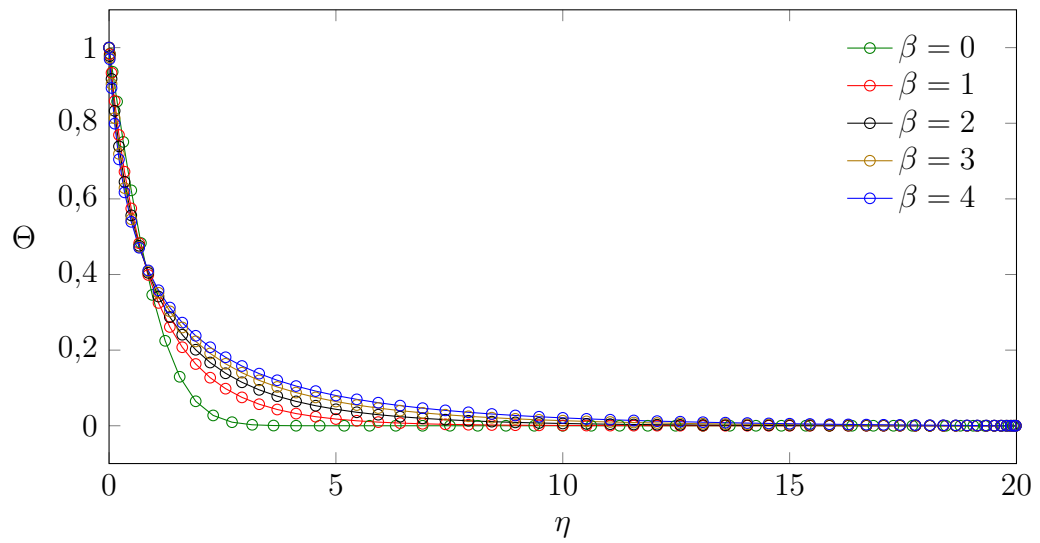
10. ábra. A $\Theta'(0)$ különböző β értékekre

Végül pedig a 11–13. ábrákon a megoldást mutatjuk be különböző β és Pr értékekre.



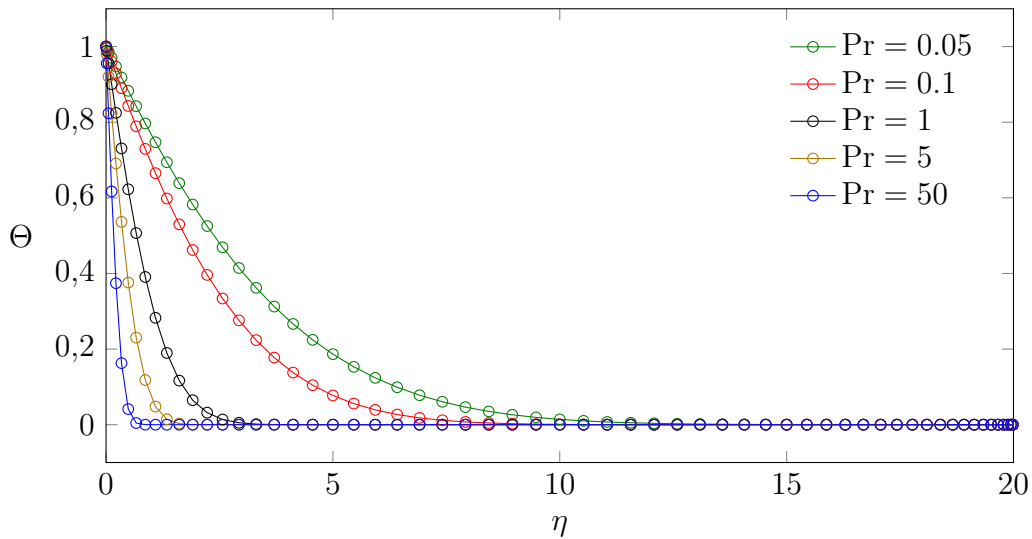
11. ábra. A megoldás $f'(\eta)$ -ra, $Pr = 1$ esetén

A 11. ábrán látható, hogy β növekedtével nő a határréteg vastagság.



12. ábra. A megoldás $\Theta(\eta)$ -ra, $Pr = 1$ esetén

A 12. ábra azt mutatja, hogy β növekedtével nő a termikus határréteg vastagság.



13. ábra. A megoldás $\Theta(\eta)$ -ra, $\beta = 0$ esetén

A 13. ábra a Prandtl-szám hatását mutatja, melyből észrevehető, hogy ahogyan növekszik Pr , úgy csökken a termikus határréteg vastagsága.

7.2. Az ADINA-ban alkalmazott modell

A feladatot határréteg egyszerűsítések nélkül az ADINA 9.0.0 verziójával vizsgáljuk. A hengerszimmetrikus elrendezés miatt elegendő a meridián metszetet vizsgálni, amit úgy kapunk, hogy a vizsgált térrészt elmetsszük a henger meridián síkjával.

Először az áramlási jellemzőket állítjuk be a programban. Mivel a geometria, a terhelés, a peremfeltételek és az anyagjellemzők is tengelyszimmetrikusnak tekinthetők, ezért 2D-s, tengelyszimmetrikus feltételezéssel élünk. Az áramlás kiegészül hőátadással is, de a gravitációval nem számolunk. A hengert rögzített merev testként kezeljük, tehát nincs FSI (fluid-structure interaction), továbbá mágneses és porózus hatásokkal sem foglalkozunk. A folyadékot összenyomhatatlannak tekintjük.

Ezután elkészítjük a 14. ábrán látható geometriát, amelyen bejelöltük a hosszakat és a pontok és szakaszok elnevezéseit is, hogy később hivatkozhatunk rá. A henger falát az L7 szakasz jelzi. A henger előtt és után is elég helyet hagyunk a zavartalan áramlás kialakulásához. A folyadék az L1 szakaszon ömlik be a henger tengelyével párhuzamosan és L9-nél távozik. Az 5. táblázat az egyes szakaszokon előírt peremfeltételeket adja meg.

Megjegyzés: Mivel állandósult állapotot vizsgálunk, kezdeti feltételeket nem kell megadnunk.

szakasz	előírt peremfeltétel	előírás
L1	velocity, temperature	$\mathbf{v} = (0,1), \quad T = 300$
L7	wall, temperature	$\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad T = 400$
L9	normal traction, temperature	$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad T = 300$
L2,L4		
L5,L8	uniform flow, temperature	$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n} = \mathbf{0}, \quad T = 300$
L10		

5. táblázat. Peremfeltételek

Ezután a folyadék tulajdonságait adjuk meg. Kétféle anyagmodell is kipróbálunk. Az egyik newtoni, a másik pedig hatványközeg. A megadott anyagjellemzőket newtoni folyadékokra a 6. táblázat tartalmazza. A mérőszámok SI mértékegységben adottak.

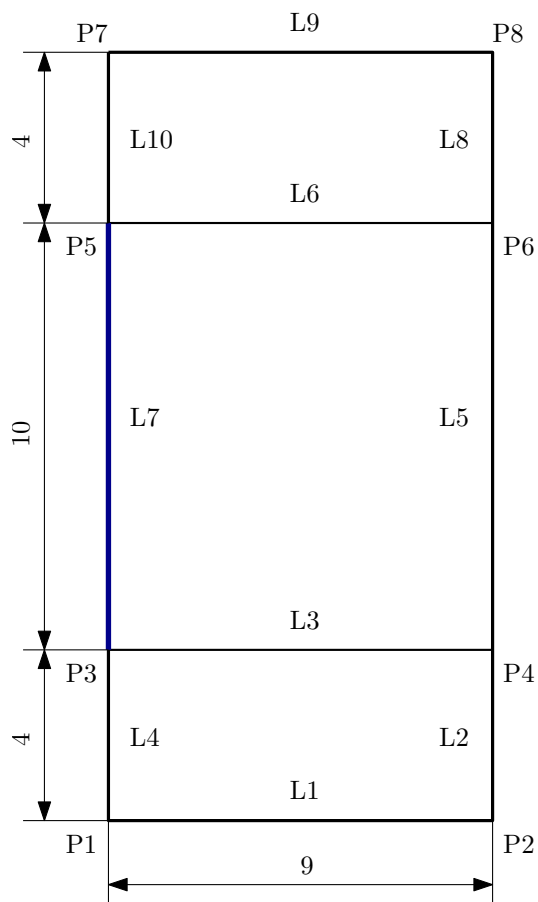
megnevezés		
angolul (ADINA)	magyarul	érték
Viscosity	dinamikai viszkozitás	0.0029
Specific Heat	fajhő	4181
Density	sűrűség	1
Thermal Conductivity	hővezetési tényező	0.058
Coefficient of Volume Expansion	térfogati hőtágulási együttható	0.000214
Reference Temperature	referencia hőmérséklet	300
Rate of Heat Generated/Unit Volume	egységnyi térfogatban keletkező hő	0
Coefficient of Surface Tension	felületi feszültség	0.0728
Fluid Bulk Modulus	térfogati rugalmassági modulus	2.2e9
Specific Heat at Constant Volume	állandó térfogaton vett fajhő	75

6. táblázat. Anyagjellemzők

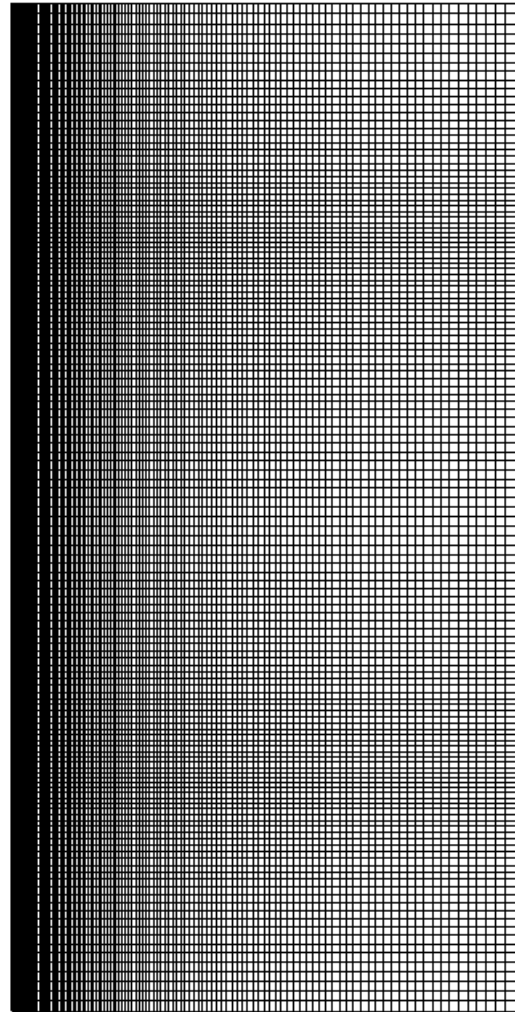
Nem-newtoni hatványközegnél a fenti paramétereken kívül meg kell adni a hatványtörvény-kitevőt és egy alsó, illetve felső korlátot a viszkozításra, attól függően, hogy a hatványtörvény-kitevő milyen intervallumban van.

Megjegyzés: Az ADINA a hatványtörvény-kitevőt másként értelmezi. Ami a legtöbb irodalomban (így nálunk is) n , az az ADINA-ban $n - 1$ -nek felel meg [1].

Végül a hálót kell elkészíteni, ami a téglalap tartomány miatt egyszerű; tengelyszimmetrikus, kétdimenziós, négycsomópontú FCBI (Flow-Condition-Based Interpolation) négyszögelemet állítunk be. A Petrov-Galerkin módszerre épülő FCBI elemek jellegzetessége, hogy a véges térfogatok módszerét és a nemfolytonos végelem módszer tulajdonságait ötvözi [4]. Az oldalélek felosztását úgy végezzük el, hogy a határrétegben elegendően sok elem legyen, és az egymás melletti elemek oldalainak aránya ne változzon hirtelen. Három különböző sűrűségű hálón végeztük el a számításokat, egy 1020, egy 4200 és egy 16800 elemből állón. Az utóbbi esetben radiális irányban 121 csomópont van. A legsűrűbb felosztású háló a 15. ábrán látható.



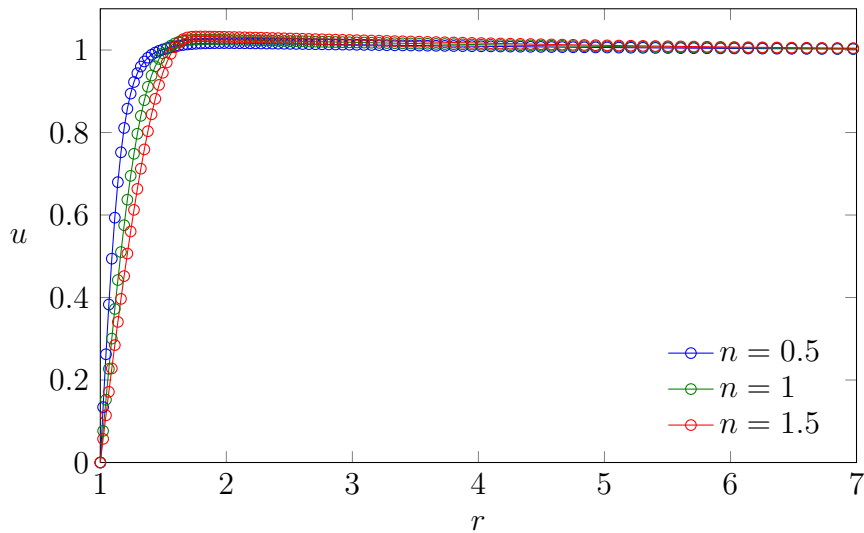
14. ábra. A geometria



15. ábra. A háló

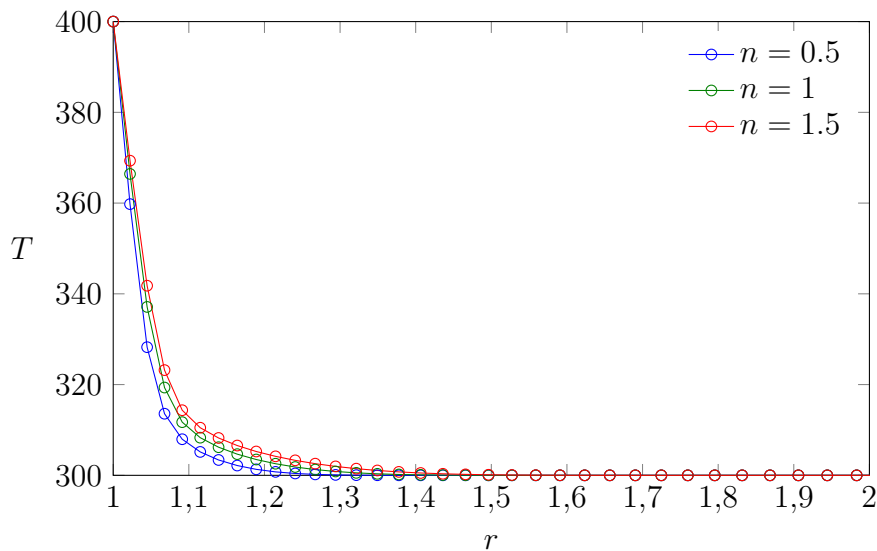
A nemlineáris algebrai egyenletrendszerek egyensúlyi iterációját Newton-típusú, míg a lineáris egyenletrendszereket megoldását párhuzamosított ritka mátrixú megoldó végzi. A többi beállítást alapértelmezetten hagyjuk.

Néhány ADINA-val számított megoldást mutatunk be nem-newtoni folyadékra a 16. és a 17. ábrákon. Az ábrák úgy készültek, hogy a henger hosszának feléről vettünk értékeket.



16. ábra. Sebesség eloszlás newtoni és nem-newtoni folyadékra

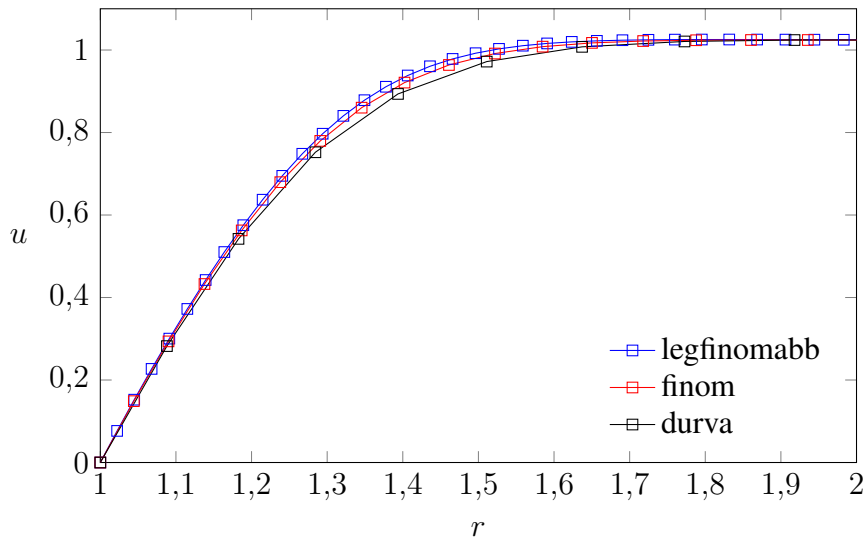
Látható, hogy az ADINA által számolt megoldás nem monoton növekvő, hanem a megadott sebességnél kicsivel magasabb értékre növekszik és onnan csökken vissza a beömlési sebességre. *Megjegyzés:* Ha nem hagyunk megfelelő nagyságú térrészt a henger előtt és után, akkor a kidudorodás még nagyobb.



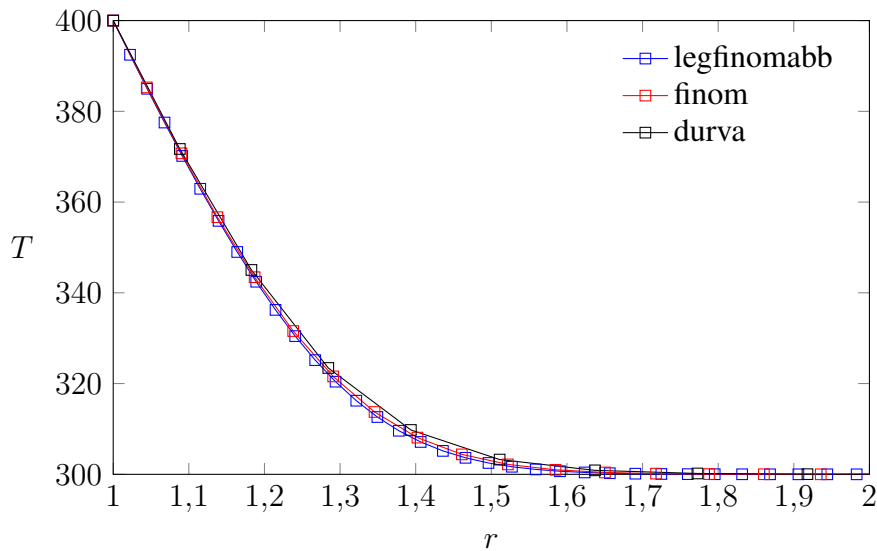
17. ábra. Hőmérséklet eloszlás newtoni és nem-newtoni folyadékra

Megfigyelhető, hogy n növelésével nő a hidrodinamikai és a termikus határréteg vastagsága is.

A 18. és 19. ábra a végelelem hálózás megoldásra gyakorolt szerepét illusztrálja newtoni folyadékra. Kinagyítottuk a határréteg részt.



18. ábra. A hálósűrítés hatása az axiális sebességre

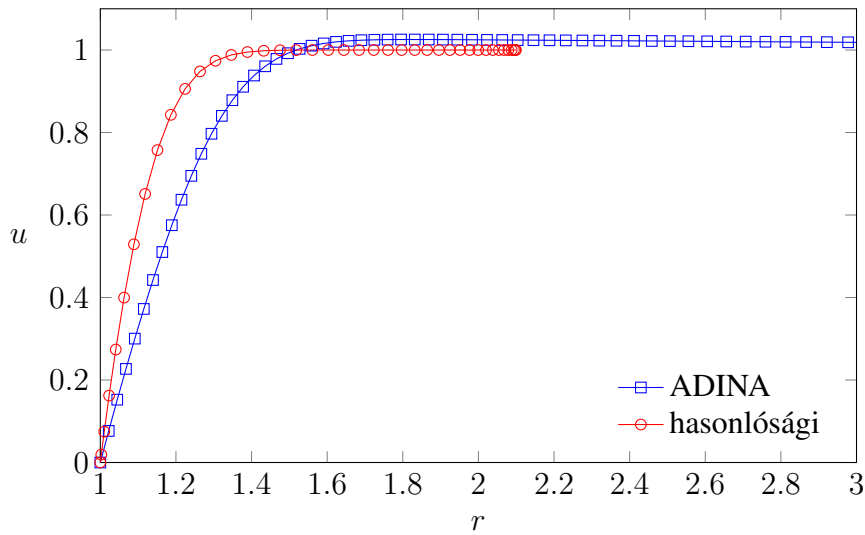


19. ábra. A hálósűrítés hatása a hőmérsékletre

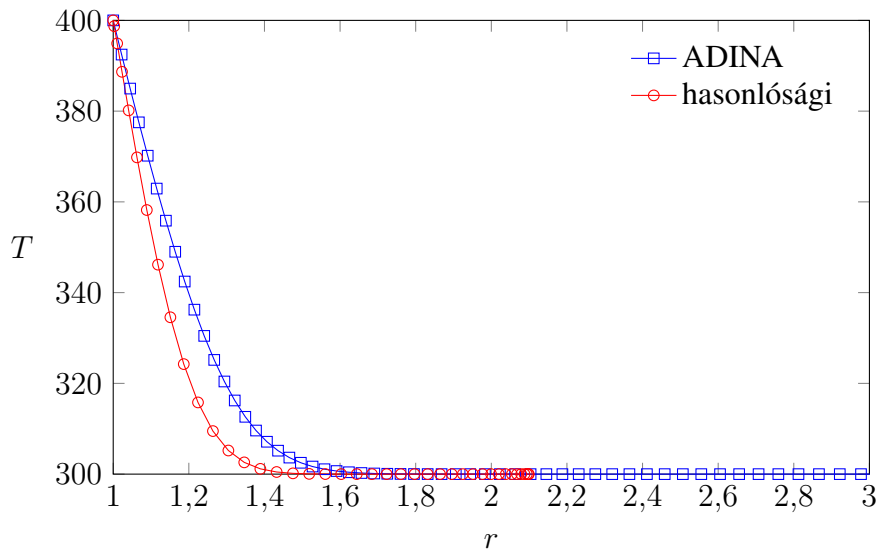
Látható, hogy a legdurvább háló is meglehetősen pontos megoldást adott, főleg a hőmérséklet eloszlásra. Azt tapasztaltuk, hogy további sűrítés a megoldást nem befolyásolja jelentősen.

7.3. A megoldások összevetése

Ebben a részben összehasonlítjuk a hasonlósági transzformációval nyert megoldást a végelem programmal kapott megoldással. A 6. táblázatban a fajhőt módosítjuk 20 J/(kgK)-re, a többi adatot nem változtatjuk. Így $\beta = 0,029$ és $Pr = 1$. Ezen anyagjellemzőkkel a futtatási eredményt az u és T változókra a 20. és 21. ábra mutatja.



20. ábra. A kétféle megoldás a sebességre



21. ábra. A kétféle megoldás a hőmérsékletre

Láttuk, hogy a hasonlósági megoldások hibabecslése történhet a Chebyshev-együtthatók-ból, valamint az ADINA-ban a hálósűrítés is jelzi a konvergenciát. Tehát az eltérést a különböző modell okozza. A Mahmood és Merkin által tekintett (7.1) differenciálegyenlet-rendszer egyrészt tartalmazza a határréteg hipotézist, másrészt pedig részben eltérő peremfeltételeket ad meg.

Ahhoz, hogy hasonlósági megoldás létezzen, sokszor úgy kell megválasztani a peremfeltételeket, hogy a feladat fizikai tartalmát kissé módosítjuk. Ezzel szemben a parciális differenciálegyenletek megoldásánál (pl. ADINA-val) ezek a feltételek nem szükségesek. Ez, illetve a további egyszerűsítések hozzájárulnak ahhoz, hogy jellegre hasonló, de eltérő megoldást kapunk a kétféle módszernél.

8. Összefoglalás

A dolgozatban származtattuk áramló közegben mozgó körhenger körüli áramlást leíró peremérték-feladatot hatványközeg típusú anyagegyenletre. Az egyenleteket határréteg feltételezésekkel egyszerűsítettük. Klasszikus Lie-szimmetria segítségével nem kaptunk hasonlósági megoldást. Hasonlósági megoldást kényszerkonvekció esetén, newtoni folyadéokra sikerült adnunk. A csatolt peremérték-feladatot spektrál kollokációs módszerrel oldottunk meg az intervallum csonkításával. Ismertettük a fiktív csomópontokon alapuló differenciáló mátrixos megközelítést és az integráló mátrixos módszer előnyeit és hátrányait. Becsültük a diszkretizációs hibát, megmutattuk, hogy a diszkretizált egyenletrendszernek $U_w = 0$ esetén két valós megoldása van és vizsgáltuk a paraméterek hatását a megoldásra. A grafikonokból kiderült, hogy a paraméterek változtatása hogyan befolyásolja a határrétegek vastagságát és a megoldás menetét. A rendelkezésre álló pontokra baricentrikus Lagrange-interpolációt alkalmaztunk, amelyhez egy vektorizált MATLAB kódot írtunk. A mellékelt MATLAB programok teljesen általános többpontos peremérték-feladatok megoldására is alkalmazhatók. A hasonlósági megoldás és az ADINA-val előállított numerikus megoldás összehasonlítására egy, az irodalomban közölt modellt használtunk fel, amely kissé más fizikai jelenséget ír le. Megállapítottunk, hogy jellegre azonos, de részben eltérő eredményt kaptunk, ami a különböző modellnek köszönhető. Az ADINA segítségével lehetőségünk volt nem-newtoni folyadékot is szimulálni.

Köszönetnyilvánítás: A kutatás a TÁMOP 4.2.4.A/2-11-1-2012-0001 azonosító számú Nemzeti Kiválóság Program – Hazai hallgatói, illetve kutatói személyi támogatást biztosító rendszer kidolgozása és működtetése országos program című kiemelt projekt keretében zajlott. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

Summary

The purpose of my Master's Thesis is to investigate a classical fluid mechanics problem from a computational point of view. A forced-convection laminar boundary-layer flow around a cylinder is analysed. The thesis is composed of eight main chapters and three appendices.

Chapter One contains the nomenclature. Chapter Two deals with the introduction to the problem and the applicability of the model. In Chapter Three I derived the governing differential equations and the boundary conditions for the physical problem. Both Newtonian and non-Newtonian power-law constitutive equations are described in cylindrical coordinate system. In Chapter Four – with the use of dimensional analysis – I managed to create the boundary-layer equations for the Navier-Stokes equations along with the energy equation. The next chapter focuses on the invariant solution of this boundary value problem (BVP). With the introduction of one-parameter Lie group of transformations, it turned out that although the differential equations could be made invariant, the invariant surface condition cannot be fulfilled for the boundary conditions. Therefore I used another transformation which enabled the partial differential equations to be scaling invariant. In this way, the partial differential equations were reduced to a nonlinear third order momentum and a linear second order energy equation. Then the third order ordinary differential equation was further reduced to a second order one plus a quadrature. The sixth chapter is subdivided into four parts and concentrates on the numerical solution of the BVPs. First, a brief description reviews the fundamental properties of the Chebyshev polynomials and in the next two sections two kinds of solution methods are constructed. The first one uses a fictitious point method suitable for multipoint BVPs while the second one relies on the integrated Chebyshev polynomials. After an interval truncation approach, the discretized equations are solved by the Levenberg-Marquardt algorithm and the Polynomial Homotopy Continuation. With the latter one, I proved that exactly two solutions exist for the discrete BVP. All the programs are written in MATLAB and the profiling revealed that the integration-based approach resulted in coefficient matrices with lower condition numbers. I justified the convergence of my algorithms numerically with the monotonous decay of the Chebyshev coefficients and the grid refinement strategy. For some parameters our model did not provide the expected boundary-layer behaviour. In Chapter Seven I regarded a slightly different model and applied my codes on it to reproduce the results of the original authors. Moreover, I carried out a simulation with ADINA using similar boundary value prescription and compared the two results. Conclusions are drawn in the last chapter. After the bibliography, Appendix A provides deeper insight to the barycentric Lagrange-interpolation as well as the vectorized code while appendices B and C contain the prepared MATLAB functions. The main aim of the thesis is to develop efficient codes for the solution of nonlinear BVPs has been reached.

9. Hivatkozások

- [1] *ADINA Theory and Modeling Guide Volume III: ADINA CFD & FSI*. Adina R & D Inc, 71 Elton Avenue, Watertown, MA 02472, 9.0 edition, December 2013.
- [2] Bachok, N. and Ishak, A. Flow and heat transfer over a stretching cylinder with prescribed surface heat flux. *MJMS*, 4(2):159–169, 2010.
- [3] Barenblatt, G. I. *Scaling*, volume 34 of *Cambridge Texts in Applied Mathematics*. Cambridge University Press, 2003.
- [4] Bathe, K.-J. and Zhang, H. A flow-condition-based interpolation finite element procedure for incompressible fluid flows. *Computers & Structures*, 80(14–15):1267–1277, 2002. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7949\(02\)00077-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7949(02)00077-9).
- [5] Berrut, J.-P. and Trefethen, L. N. Barycentric Lagrange Interpolation. *SIAM Rev.*, 46(3): 501–517, 2004.
- [6] Beyn, W. and Doedel, E. Stability and Multiplicity of Solutions to Discretizations of Nonlinear Ordinary Differential Equations. *SISC*, 2(1):107–120, 1981.
- [7] Bird, R. B. and Hassager, O. *Dynamics of Polymeric Liquids*, volume 1. Wiley-Interscience, Second edition, 1987.
- [8] Bluman, G. W. and Anco, S. C. *Symmetry and Integration Methods for Differential Equations*, volume 154 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, Second edition, 2002.
- [9] Boyd, J. P. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2000.
- [10] Csáti, Z. Megoldási módszerek az általánosított Sakiadis-feladatra, 2013. TDK dolgozat.
- [11] Ece, M. C. and Erbas, S. Free convection to power-law fluids from a vertical plate of variable surface heat flux. *CAMQ*, 7(4):363–380, 1999.
- [12] Feuersänger, C. Manual for package PGFPLOTS, August 2014. URL <http://sourceforge.net/projects/pgfplots>. Version 1.11.
- [13] Fornberg, B. Generation of Finite Difference Formulas on Arbitrary Spaced Grids. *Math. Comp.*, 51(184):699–706, 1988.
- [14] Fornberg, B. A Pseudospectral Fictitious Point Method for High Order Initial-Boundary Value Problems. *SIAM J. Sci. Comput.*, 28(5):1716–1729, 2006.
- [15] Guan, Y. and Verschelde, J. PHClab: A MATLAB/Octave Interface to PHCpack. In *Software for Algebraic Geometry*, volume 148 of *The IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, pages 15–32. Springer New York, 2008. doi: 10.1007/978-0-387-78133-4_2.

- [16] Higham, N. J. The numerical stability of barycentric Lagrange interpolation. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 24(4):547–556, 2004.
- [17] Hydon, P. E. *Symmetry Methods for Differential Equations: A Beginner's Guide*, volume 22 of *Cambridge Texts in Applied Mathematics*. Cambridge University Press, 2000.
- [18] Mahmood, T. and Merkin, J. H. Similarity solutions in axisymmetric mixed-convection boundary-layer flow. *Journal of Engineering Mathematics*, 22:73–92, 1988.
- [19] Mai-Duy, N. An effective spectral collocation method for the direct solution of high-order ODEs. *Commun. Numer. Meth. Engng.*, 22(6):627–642, 2005.
- [20] Mukhopadhyay, S. Analysis of Boundary Layer Flow and Heat Transfer along a Stretching Cylinder in a Porous Medium. *ISRN Thermodynamics*, 2012:7, 2012.
- [21] Munawar, S., Mehmood, A., and Ali, A. Unsteady local non-similar boundary-layer flow over a long slim cylinder. *Int. J. Phys. Sci.*, 6(34):7709–7716, 2011.
- [22] Pantokratoras, A. Laminar assisting mixed convection heat transfer from a vertical isothermal cylinder moving in water at low temperatures. *Heat and Mass Transfer*, 39(8–9): 737–743, 2003.
- [23] Pop, I. and Ingham, D. B. *Convective Heat Transfer: Mathematical and Computational Modelling of Viscous Fluids and Porous Media*. Elsevier Science & Technology Books, 2001.
- [24] Prandtl, L. Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. *Intern. Math. Kongr.*, 3: 484–491, 1904.
- [25] Sakiadis, B. C. Boundary-layer behavior on continuous solid surfaces: III. The boundary layer on a continuous cylindrical surface. *AIChE Journal*, 7(3):467–472, 1961.
- [26] Schlichting, H. *Boundary-Layer Theory*. McGraw-Hill, Seventh edition, 1979.
- [27] Stewartson, K. The asymptotic boundary layer on a circular cylinder in axial incompressible flow. *Q. Appl. Math.*, 13(2):113–122, 1955.
- [28] White, F. M. *Viscous Fluid Flow*. McGraw-Hill, Second edition, 1991.

A. Baricentrikus Lagrange interpoláció

Jelölje a $\mathbb{P}_n$ a legfeljebb n -edfokú polinomok terét. Az interpolációs feladat megtalálni azt a $p \in \mathbb{P}_n$ polinomot, amely az f függvényt interpolálja az x_j interpolációs pontokban:

$$p(x_j) = f_j, \quad j = 0, \dots, n.$$

A megoldás Lagrange-féle alakban:

$$p(x) = \sum_{j=0}^n f_j \ell_j(x),$$

ahol az ℓ_j Lagrange-polinom:

$$\ell_j(x) = \frac{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (x - x_k)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (x_j - x_k)}, \quad \ell_j(x_k) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases} \quad j, k = 0, \dots, n. \quad (\text{A.1})$$

A baricentrikus Lagrange-interpoláció gyorsaságáról és numerikus stabilitásáról ismert [5] és a

$$p(x) = \frac{\sum_{j=0}^n \frac{w_j}{x - x_j} f_j}{\sum_{j=0}^n \frac{w_j}{x - x_j}} \quad (\text{A.2})$$

alakban áll elő, ahol f_j ($j = 0, \dots, n$) az x_j pontokban ismert függvényértékek és w_j az x_j pontokhoz tartozó súlyok a

$$w_j = \frac{1}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (x_j - x_k)}, \quad j = 0, \dots, n \quad (\text{A.3})$$

módon számítva. Válasszunk (A.2)-ben x -nek diszkrét értékeket: $x^0, x^1, \dots, x^m$ és $x^s \neq x_j \forall j, s$ esetén. A következőkben egy teljesen vektorizálható módszert mutatunk be a $p(x^0), p(x^1), \dots, p(x^m)$ interpolált függvényértékek kiszámítására. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{w_0}{x^0 - x_0} & \frac{w_0}{x^1 - x_0} & \dots & \frac{w_0}{x^m - x_0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{w_n}{x^0 - x_n} & \frac{w_n}{x^1 - x_n} & \dots & \frac{w_n}{x^m - x_n} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Az (A.2) számlálója az $[f_0 \cdots f_n]\mathbf{A}$ vektor-mátrix szorzással számolható, míg a nevező az $\mathbf{A}$ oszlopösszegeiből tevődik össze. Végül elvégezzük a számláló és nevező vektorának elemenkénti osztását. Egyes speciális $x_0, x_1, \dots, x_n$ pontoknál az (A.3) súlyokra egyszerű formula származtatható. Például a (6.2)-ben is használt

$$x_j = \cos \frac{j\pi}{n} \quad (\text{A.5})$$

Chebyshev-rács esetén a súlyok:

$$w_j = (-1)^j \delta_j, \quad \delta_j = \begin{cases} 1/2 & j = 0 \text{ vagy } j = n \\ 1 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Általános esetben az (A.3)-beli súlyok a következőképpen vektorizálhatók. Vezessük be az

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_0 & x_0 & \cdots & x_0 \\ x_1 & x_1 & \cdots & x_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_n & \cdots & x_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

mátrixot, és annak transzponáltját: $\mathbf{Y} = \mathbf{X}^T$. A két mátrix különbsége, miután a főátlóbeli 0 elemeket 1-re változtattuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 - x_1 & \cdots & x_0 - x_n \\ x_1 - x_0 & 1 & \cdots & x_1 - x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_0 & x_n - x_1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

A j -edik ($0 \leq j \leq n$) sorban az elemek szorzata éppen az (A.3)-beli w_j súly reciprokát adja meg. A fenti megközelítéssel és a beépített `bsxfun` segítségével a ciklus nélküli kód létrehozható (lásd C függelék). Az interpoláció viselkedését jelzi a Lebesgue-konstans, ami értelmezés szerint

$$\Lambda_n := \sup_{f \in C[a,b]} \frac{\|\mathcal{P}f\|}{\|f\|},$$

ahol $\|f\| = \max_{x \in [a,b]} |f|$ és a $\mathcal{P}$ operátor az f függvényt a p interpolációs polinomba lépezi le. A Lebesgue-konstans a Lagrange-polinommal kifejezve:

$$\Lambda_n = \max_{x \in [a,b]} \sum_{j=0}^n |\ell_j(x)| \quad (\text{A.8})$$

és $\ell_j(x)$ baricentrikus alakban:

$$\ell_j(x) = \frac{\frac{w_j}{x - x_j}}{\sum_{k=0}^n \frac{w_k}{x - x_k}}. \quad (\text{A.9})$$

Az (A.9) képletben a számláló diszkrét $\mathbf{x} = [x^0 \ x^1 \ \dots \ x^m]$ értékekre az (A.4)-beli $\mathbf{A}$ mátrix elemeivel, nevezője pedig annak oszlopösszegeivel adható meg. Ha tehát a nevező sormátrixát n -szer egymás alá írjuk és $\mathbf{A}$ -t elemenként osztjuk az így kapott mátrixszal, akkor $\ell_j(x_k) = B_{jk}$, $j = 0, \dots, n$, $k = 0, \dots, m$ vektorizálva előállítható. Majd $\mathbf{B}$ oszlopösszegeinek abszolút értékének maximuma adja Λ_n -et. Ekkor azonban nem az $x \in [a, b]$ -re nézzük (A.8)-at, hanem csak x_j -re. Kisebb a számításigény, ha a Lebesgue-konstanst becsüljük. Bármely x_j ($j = 0, \dots, n$) interpolációs alappontok esetén adható alsó korlát [5]:

$$\Lambda_n \geq \frac{1}{2n^2} \frac{\max_{0 \leq j \leq n} |w_j|}{\min_{0 \leq j \leq n} |w_j|}.$$

Néhány speciális interpolációs ponthalmazra létezik felső korlát. A (6.2) Chebyshev-pontok használata előnyös, mert Λ_n csak logaritmikusan nő az interpolációs pontok számának növelésével [16]:

$$\Lambda_n \leq \frac{2}{\pi} \lg(n+1) + 1. \quad (\text{A.10})$$

A fentebb ismertetett hatékony programozási módszert és a Lebesgue-konstansra vonatkozó számításokat megvalósító MATLAB program a C függelékben található `barint` néven.

B. MATLAB programok listája

`barint` - n alappontra épülő baricentrikus Lagrange interpolációt végez $\mathcal{O}(n^2)$ műveletigénnyel.

`chebpoly` - megadja az elsőfajú Chebyshev-polinomokat.

`chebintegral` - kiszámítja a Chebyshev-polinomok integráljait.

`chebintmatrix` - meghatározza a Chebyshev integráló mátrixokat.

`FDweights` - tetszőleges rácson kiszámítja a véges differencia súlyokat.

`intmatgen` - a `chebintmatrix`-szel létrehozott integráló mátrixokat kiegészíti az integrálási állandókat tartalmazó blokkal.

`matlab2PHClab` - a bemenetet PHClab-bel kompatibilis formátummá alakítja.

C. MATLAB programok

barint.m

```
1 function [p x LebesgueConst] = barint2(xj,fj,varargin)
2 %BARINT Perform barycentric Lagrange-interpolation.
3 % [P X] = BARINT(XJ,FJ) returns the interpolated function values at the
4 % default points determined by vector X based on the known points (XJ,FJ).
5 % [P X] = BARINT(XJ,FJ,X) returns the interpolated function values at X
6 % based on the known points (XJ,FJ).
7 % [P X] = BARINT(XJ,FJ,X,...) returns the interpolated function values at
8 % X based on the known points (XJ,FJ) and using properties given below.
9 %
10 % The XJ,FJ pairs, or XJ,FJ,X triples, can be followed by parameter/value
11 % pairs to specify additional properties.
12 % Valid property/value pairs include
13 %
14 % Property Value/{Default} Description
15 % -----
16 % isCheb logical scalar {false} XJ forms a Chebyshev-grid
17 % Lebesgue none | est {est} Estimation of the Lebesgue-constant
18 %
19 % If isCheb is true, an explicit algorithm is used to compute the weights.
20 % If Lebesgue is 'none', the Lebesgue-constant is not estimated. When set
21 % to 'est', a lower bound is provided and if isCheb is true, then an
22 % upper bound is also given.
23 %
24 % See also POLYFIT, POLYVAL
25 %
26 % The algorithm is based on the article
27 % Berrut, J.-P. and Trefethen, L. N.: Barycentric Lagrange Interpolation,
28 % SIAM Rev., vol. 46, no. 3, pp. 501-517, 2004
29 %
30 % Zoltán Csáti
31 % 2014/04/12
32 %
33 % Handle inputs
34 validateclass = @(y)validateattributes(y, {'logical'}, {'scalar'});
35 equiGrid = @(y)linspace(min(y),max(y),2*numel(y));
36 pars = inputParser;
37 pars.addRequired('xj', @isvector);
38 pars.addRequired('fj', @isvector);
39 pars.addOptional('x', equiGrid(xj), @isvector);
40 pars.addParamValue('isCheb', false, validateclass);
41 pars.addParamValue('Lebesgue', 'est', @(y)any(strcmpi(y,{'none','est'})));
42 pars.parse(xj,fj,varargin{:});
43 % Extract the required components from the Results structure
44 x = pars.Results.x;
45 isCheb = pars.Results.isCheb;
46 Lebesgue = pars.Results.Lebesgue;
47 % Transpose vectors xj,fj,x if necessary
48 if size(x,2) == 1 % x is a column vector
49 x = x.'; % x must be a row vector
50 end
51 if size(fj,2) == 1 % fj is a column vector
52 fj = fj.'; % fj must be a row vector
53 end
54 xj = xj(:); % force xj to be a column vector
55 % Calculate the weights
```

```

56 if logical(isCheb) % use the Chebyshev-grid
57     n = numel(fj)-1;
58     j = (0:n)';
59     wj = (-1).^j; wj(1) = 1/2*wj(1); wj(n+1) = 1/2*wj(n+1);
60 else
61     n = numel(fj);
62     X = xj(:,ones(1,n)); % same as X = repmat(xj,1,n), but faster
63     sub = X-X.';
64     sub(logical(eye(n))) = 1; % change the diagonal entries from 0 to 1
65     wj = prod(sub,2); % take the product along the rows
66     wj = 1./wj;
67 end
68 % Perform barycentric interpolation
69 A = x(ones(length(xj),1),:); % equivalently, A = repmat(x,length(xj),1);
70 A = bsxfun(@minus,A,xj);
71 A = bsxfun(@times,1./A,wj);
72 counter = fj*A;
73 denominator = sum(A);
74 p = counter./denominator;
75 % If xj and x overlap each other for some data points, the formula divides
76 % by zero and the solution in NaN. It does not affect visualization since
77 % MATLAB ignores NaN values.
78 NaNoccurred = isnan(p);
79 if any(NaNoccurred)
80     warning('MATLAB:divisionByZero', ...
81         'There is(are) %d overlapping data point(s).', sum(NaNoccurred));
82 end
83 % Return the Lebesgue constant
84 n = length(xj);
85 switch Lebesgue
86     case 'none'
87         LebesgueConst = [];
88     case 'est'
89         lowerBound = 1/(2*n^2)*max(abs(wj))/min(abs(wj));
90         upperBound = [];
91         if isCheb
92             upperBound = 2/pi*log(n+1)+1;
93         end
94         LebesgueConst = [lowerBound upperBound];
95     end
96 end

```

chebpoly

```

1 function C = chebpoly(n)
2 %CHEBPOLY Chebyshev polynomials of the first kind.
3 % C = CHEBPOLY(N) returns the Chebyshev polynomials of the first kind
4 % from degree 0 to N
5 %
6 % See also CHEBDERIVATIVE, CHEBINTEGRAL
7
8 % Zoltán Csáti
9 % 2014/03/03
10
11 C = cell(n+1,1); % use cell array because of the different matrix sizes
12 C{1} = 1; % T_0 = 1
13 C{2} = [1 0]; % T_1 = x
14 for k = 3:n+1 % T_n = 2xT_{n-1} - T_{n-2}

```

```

15     C{k} = [2*C{k-1} 0] - [0 0 C{k-2}];
16 end

```

chebintegral

```

1 function I = chebintegral(n,p)
2 %CHEBINTEGRAL Integrals of the Chebyshev polynomials of the first kind.
3 %   I = CHEBINTEGRAL(N,P) returns the first P integrals of the Chebyshev
4 %   polynomials of the first kind from degree 0 to N. The k-th row stores
5 %   the polynomials of degree k-1, the m-th column stores the m-th integral
6 %   of the polynomials.
7 %
8 %   See also   CHEBPOLY, CHEBDERIVATIVE, POLYINT
9
10 %   Zoltán Csáti
11 %   2014/03/28
12
13 I = cell(n+1,p+1);
14 % Calculate the Chebyshev polynomials
15 C = chebpoly(n);
16 I(:,1) = C;
17 % Calculate the integrals of the Chebyshev polynomials
18 for mColumn = 1:p+1
19     if mColumn == 1 % integrate the Chebyshev polynomials
20         I(:,2) = integrate_polynomials(C,n);
21     else % integrate the previous column
22         I(:,mColumn) = integrate_polynomials(I(:,mColumn-1),n);
23     end
24 end
25 end
26
27 function I = integrate_polynomials(polynomial,n)
28 % Integrates polynomials of degree n given as a cell array.
29 I = cell(n+1,1);
30 for nRow = 1:n+1
31     I{nRow} = polyint(polynomial{nRow});
32 end
33 end

```

chebintmatrix

```

1 function I = chebintmatrix(n,p)
2 %CHEBINTMATRIX creates the Chebyshev integration matrices.
3 %   I = CHEBINTMATRIX(N,P) creates the integration matrices of order 0 to P
4 %   relying on the Chebyshev-grid with N degrees. The k-th column in a fixed
5 %   third dimension stores the k-1-th Chebyshev polynomial evaluated at the
6 %   Chebyshev points. The order-th element along the third dimension
7 %   represents the polynomial integrated order-1-th.
8 %
9 %   See also   CHEBPOLY, CHEBINTEGRAL
10
11 %   Zoltán Csáti
12 %   2014/03/28

```

```

13
14 x = cos(pi*(0:n)/n); % zeros of the Chebyshev polynomials
15 % Calculate integrals
16 integral = chebintegral(n,p);
17 % Evaluate them at the Chebyshev points
18 I = zeros(n+1,n+1,p+1);
19 for order = 0:p
20     for k = 1:n+1
21         I(:,k,order+1) = polyval(integral{k,order+1},x);
22     end
23 end

```

FDweights

```

1 function weights = FDweights(maxder,grid,x0)
2 %FDWEIGHTS Calculates the finite difference weights on arbitrary grids.
3 % WEIGHTS = FDDERIVATIVES(MAXDER,GRID,X0) computes the weights in compact
4 % finite difference formulas for the derivatives from the 0-th to the
5 % MAXDER-th order at X0 on one-dimensional GRID with arbitrary spacing.
6 % WEIGHTS(K,M,N) returns the N-th weight for the K-th derivative at
7 % X0 based on a subset of GRID.
8 % WEIGHTS(K,end,N) returns the N-th weight for the K-th derivative at
9 % X0 based on all points of GRID (recommended).
10 %
11 % The minimum accuracy is of order numel(GRID)-K if one uses the
12 % recommended case.
13 % The algorithm is based on the article
14 %     Fornberg, B.: Generation of Finite Difference Formulas on Arbitrary
15 %     Spaced Grids, Mathematics of Computation, vol. 51, no. 184, 1988
16
17 % Zoltán Csáti
18 % 2014/03/30
19
20 % grid = sym(grid);
21 N = numel(grid)-1;
22 c1 = 1;
23 weights = zeros(maxder+1,N+1,N+1);
24 weights(1,1,1) = 1;
25 % weights = sym(weights);
26 for n = 1:N
27     c2 = 1;
28     for nu = 0:n-1
29         c3 = grid(n+1) - grid(nu+1);
30         c2 = c2*c3;
31         if n <= maxder
32             weights(n+1,n+1,nu+1) = 0;
33         end
34         for m = 0:min(n,maxder)
35             if m==0
36                 weights(m+1,n+1,nu+1) = (grid(n+1)-x0)*weights(m+1,n,nu+1)/c3;
37             else
38                 weights(m+1,n+1,nu+1) = ((grid(n+1)-x0)*weights(m+1,n,nu+1) - ...
39                     m*weights(m,n,nu+1))/c3;
40             end
41         end
42     end
43     for m = 0:min(n,maxder)
44         if m==0

```

```

45         weights(m+1,n+1,n+1) = c1/c2*(-(grid(n)-x0)*weights(m+1,n,n));
46     else
47         weights(m+1,n+1,n+1) = c1/c2*(m*weights(m,n,n) - ...
48             (grid(n)-x0)*weights(m+1,n,n));
49     end
50 end
51 c1 = c2;
52 end

```

intmatgen

```

1 function intmatrices = intmatgen(n,maxder,derivatives)
2 %INTMATGEN extends the integration matrices with the integration constants.
3 % INTMATRICES = INTMATGEN(N) amends the integration matrices from order 0
4 % to 2 with the submatrices of the integration constants using N+1
5 % Chebyshev points where maximum order of the derivative occurring in the
6 % differential equation is 2.
7 % INTMATRICES = INTMATGEN(N,MAXDER) amends the integration matrices from
8 % order 0 to MAXDER with the submatrices of the integration constants
9 % using N+1 Chebyshev points where maximum order of the derivative
10 % occurring in the differential equation is MAXDER.
11 % INTMATRICES = INTMATGEN(N,MAXDER,DERIVATIVES) amends the required
12 % integration matrices given by the vector DERIVATIVES with the
13 % submatrices of the integration constants using N+1 Chebyshev points
14 % where maximum order of the derivative occurring in the differential
15 % equation is MAXDER.
16 %
17 % See also CHEBPOLY, CHEBINTEGRAL, CHEBINTMATRIX
18
19 % Zoltán Csáti
20 % 2014/03/28
21
22 % Handle input
23 if nargin < 2
24     maxder = 2;
25     derivatives = [0 1 2];
26 elseif nargin < 3
27     derivatives = 0:maxder;
28 end
29 % Generate Chebyshev points and the integration matrices
30 I = chebintmatrix(n,maxder);
31 x = cos(pi*(0:n)/n)';
32 intmatrices = zeros(n+1,n+1,numel(derivatives));
33 for idx = 1:numel(derivatives)
34     k = derivatives(idx);
35     ind = 1:k;
36     temp1 = bsxfun(@power,x,k-ind);
37     temp2 = bsxfun(@times,temp1,1./(factorial(k-ind)));
38     numberOfColumns = size(temp2,2);
39     if numberOfColumns ~= 0
40         intmatrices(1:n+1,n+2:n+1+numberOfColumns,idx) = temp2;
41         intmatrices(1:n+1,1:n+1,idx) = I(:, :, derivatives(idx)+1);
42     else
43         intmatrices(1:n+1,1:n+1,idx) = I(:, :, 1);
44     end
45 end

```

matlab2PHClab

```
1 function T = matlab2PHClab(F)
2 %MATLAB2PHC converts a system of equations to a PHClab-compatible format.
3 %   T = MATLAB2PHC(F) converts a system of equations given by a symbolic
4 %   vector F to a cell array of strings T that can be processed by PHClab.
5 %
6 %   Example:
7 %       A = rand(3,3);
8 %       x = sym('x', [3,1]);
9 %       equation = A*x - x.^2 - ones(3,1); % nonlinear system of equations
10 %       s = solve_system(T);           % solve_system is a function of PHClab
11 %
12 %   See also   VPA
13
14 %   Description: PHClab is a collection of scripts which call PHCpack from
15 %   within a MATLAB or Octave session. PHCpack is a software package for
16 %   Polynomial Homotopy Continuation, to numerically solve systems of
17 %   polynomial equations.
18 %   Algorithm: PHClab does not allow divisions and parentheses. They can be
19 %   removed by evaluating the expression using variable precision arithmetic.
20
21 %   Reference:
22 %       Guan,Y. and Verschelde,J.:
23 %           PHClab: A MATLAB/Octave Interface to PHCpack, 2007
24 %
25 %       Zoltán Csáti
26 %       2014/03/16
27
28 % Expand the expression
29 F = expand(F);
30 T = cell(size(F));
31 % Evaluate the expression using variable precision arithmetic and replace
32 % the possible "*10^(...)" syntax with the scientific notation
33 for k = 1:numel(F)
34     T{k} = vpa(F(k),12); % use 12 significant digits
35     T{k} = char(T{k});
36     T{k} = strrep(T{k}, '^', '**');
37     T{k} = strrep(T{k}, '*10**(', '*10**('E');
38     T{k} = strrep(T{k}, ')', ');');
39 end
```