



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Villamosmérnöki és Informatikai Kar

Irányítástechnika és Informatika Tanszék

Szenzorfúzió alkalmazása bakdaru állapotbecslének megvalósítására súrlódásos környezetben

TUDOMÁNYOS DIÁKKÖRI KONFERENCIA DOLGOZAT

Szerző: Patartics Bálint

Témavezető: Kiss Bálint

2015. január 7.

Kivonat

Napjaink ipari gyakorlatában széles körben alkalmaznak darukat nagy tömegű terhek mozgására. Építkezéseken, kikötőkben és raktárakban egyaránt előfordulnak bakdaruk, amelyek a munkatér felett felépített síneken mozognak, és drótkötél sodronyok segítségével emelik fel rakományukat. Daruk használata során általában cél a teher lengésének minimalizálása. Jelenleg ezt leggyakrabban tapasztalt kezelőszemélyzet biztosítja kézi beavatkozással.

Számos, a kézi irányításnál nagyobb pontosságot és kisebb ciklusidőt eredményező irányítási algoritmus létezik a lengéscsökkentő szabályozás megvalósítására. Ezek az algoritmusok azonban rendszerint állapot-visszacsatoláson alapulnak, tehát igénylik a teher pozíciójának ismeretét, vagy ezzel ekvivalensen a lengés szögének értékét. Ennek gyakorlati mérési lehetőségei korlátozottak, a szöget közvetlenül mérő szenzor általában nem áll rendelkezésre.

A mérés egy lehetséges alternatívája az állapotbecslés. Állapotbecslésen azt az eljárást értjük amely során egy dinamikus rendszer belső állapotait határozzuk meg a rendszer mért kimenetei és a beavatkozó jelek alapján. Bizonyos zavarások azonban szükségessé tehetik, hogy a bemeneteket ismeretlennek tételezzük fel. Ilyen zavarás lehet a beavatkozó szerv meghibásodása, vagy a súrlódás. Utóbbi mechanikai rendszerek esetén igen gyakori, a bakdaru állapotbecslését is nehezíti.

A daru elmozdulása és kötelének hossza inkrementális adókkal mérhető. A kísérleti tapasztalatok alapján a súrlódás zavaró hatása mellett ezek ismerete nem elegendő a lengés szögének konvergencia becsléséhez. Ezért alkalmazunk két lézeres hézag szenzort is, melyek jelzik, ha a terhet tartó kötélen áthalad elöttük. Ezek a szenzorok tehát nem állandó mintavételi idővel szolgáltatnak mérési adatokat, hanem aszinkron események hatására.

E dolgozatban módszert adunk ilyen aszinkron szenzorok fúziójára és egyben a súrlódás zavaró hatásának csökkentésére az állapotbecslés során. Két eltérő megvalósítást is bemutatunk, az egyik egy ismeretlen bemenetű rendszerekhez tervezett Kálmán-szűrőn, a másik pedig egy *unscented* Kálmán-szűrőn alapul. Az algoritmusok alkalmazhatóságát kísérleti eredményekkel támasztjuk alá, darumodellen végzett mérések segítségével.

Abstract

Cranes are widely applied for short-distance handling of heavy loads in the industry. Overhead cranes often appear on construction sites and in harbors and in other storage facilities. They move on rails built above the workspace and use cable wires to lift the cargo. For safety and economic reasons crane based weight handling usually requires minimize the sway of the load which is usually done by experienced operators and manual control.

Numerous sway-reducing control algorithms can be found in the literature providing increased accuracy over a shorter period of time, compared to manual control. The computations of these algorithms are mostly based on full state feedback, therefore they require the knowledge of the load position or the swinging angle equivalently. The measurement options for these quantities are limited, there are generally no sensors available for the direct measurement of the angle.

State estimation provides a possible alternative. These estimation techniques determine the states of a dynamical system based on the measured output and on the knowledge of the actuating signals. In some cases certain disturbances make it necessary to consider the inputs as unknown. The cause can be the fault of the actuators or friction. The latter often appears in case of mechanical systems, it makes the state estimation of the overhead crane difficult as well.

In our setup, the horizontal displacement of the crane and the length of its rope can be measured using incremental encoders. Based on experimental results, due to the disturbing effect of the friction, these measurements are not sufficient for the convergent estimation of the swinging angle. For this reason two additional laser slot sensors are applied which are capable of pinpointing two specific angle values in time. These sensors do not provide measurements in every sampling period but only when asynchronous events occur.

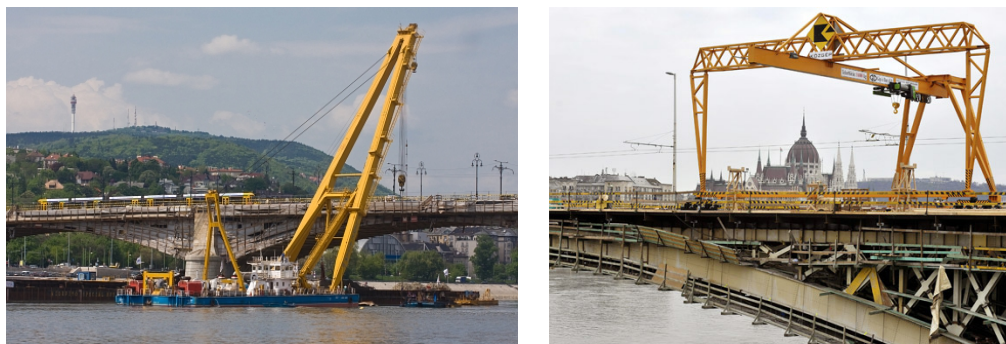
This study introduces a method for both the fusion of asynchronous sensors and the reduction of the disturbing effect of the friction in the state estimation. Two different implementations are presented, one is based on an unknown input Kalman filter and the other on the unscented Kalman filter. Experimental results are provided to prove the applicability of the concepts.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. A bakdaru dinamikus modellje és analízise	3
2.1. A fizikai modell levezetése	3
2.2. Folytonos idejű állapotteres modellek és tulajdonságaik	7
2.3. Diszkrét idejű állapotteres modellek és tulajdonságaik	11
3. Szenzorfúzió és állapotbecslés	15
3.1. Kálmán-szűrők a súrlódás zavaró hatásának eliminálására	15
3.1.1. Ismeretlen bemenetű Kálmán-szűrő (UIKF)	16
3.1.2. Unscented Kálmán-szűrő (UKF)	18
3.2. Szenzorfúzió Kálmán-szűréssel	22
3.3. A bakdarun alkalmazott szenzorok	25
4. Kísérleti eredmények	34
5. Összefoglalás	45
Köszönetnyilvánítás	47
Irodalomjegyzék	48

Bevezetés

Nagy tömegű terhek rövid távú mozgatására jelenleg több típusú darut is használnak az iparban. Kikötőkben és tengeri építkezéseken gyakran láthatók úgynevezett úszódaruk, melyeket vízen közlekedő hajótesten alakítanak ki. A bakdaruk a munkatér felett felépített síneken mozognak, elsősorban raktárakban építkezéseken alkalmazzák őket. Úszódaru és bakdaru látható az 1. ábrán.



1. ábra. A Margithíd felújításán dolgozó Clark Ádámról elnevezett úszódaru, és egy bakdaru.

Daruk alkalmazása során felmerülő egyik probléma a teher lengése, melynek során a rakomány a daru többi részétől függetlenül mozog. A lengő terhet nehéz a kívánt pozícióba elhelyezni, ezért a mozgatáshoz szükséges idő jelentősen megnőhet. E lengés közvetlen eliminációjára nem áll rendelkezésre beavatkozó szerv, így annak csökkentésére tapasztalt kezelőszemélyzetet alkalmaznak. A darukezelők a teher mozgását figyelve kézi beavatkozó szerveken keresztül képesek a rakomány pozicionálására. Kim és Singhose (2010) [KS10] azonban kísérletileg igazolja, hogy valamilyen irányító rendszer alkalmazása az emberi beavatkozás kiegészítésére nagyobb pontosságot eredményez.

Az irodalomban számos lengésminimalizáló irányítási algoritmus lelhető fel. Hyla (2012) [Hy12] bemutat lágy számítási módszereket, amelyek *fuzzy* technikával, neurális hálóval, genetikusan algoritmusokkal és ezek hibridjeivel közelítik meg a probléma megoldását. Találhatunk továbbá példákat ezek kombinációjára hagyományos módszerekkel is. Ezek az irányító rendszerek állapot-visszacsatoláson alapulnak, tehát szükségük van a teher pozíciójának vagy a lengés szögének értékére. Ezek mérésére gyakran gépi látásra épülő munkatér-vizualizációt használnak. Kemény számítási módszerek közül Schindele, Menn és Aschemann

(2009) [SMA09] szintén gépi látáson alapuló szögmérést javasol H_2 optimális irányító rendszeréhez, Kim, Hong és Sul (2004) [KHS04] dőlésmutató érzékelőt használ e célra.

Kiss, Lévine és Müllhaupt (1999) [KLM99] bebizonyítja hogy a bakdaru rendelkezik az úgynevezett differenciális simaság tulajdonsággal, ami azt jelenti, hogy megfelelő visszacsatolással egzaktul linearizálható. Ezt használja ki pályatervező irányítás konstruálására Neupert, Hildebrandt, Sawodny és Schneider (2006) [NHSS06]. Szintén differenciális simaságon alapuló szabályozót mutat be Boustany és Novel (1992) [BN92], amely a daru ismeretlen paramétereinek meghatározására becslőt alkalmaz. E módszerek is igénylik az állapotváltozók értékének ismeretét, mivel az szükséges a linearizáló visszacsatolás előállításához.

Smoczek (2014) [Smo14] legújabb eredménye alapján előállítható olyan *fuzzy* szabályozó is, amely szögmérés nélkül képes lengésminimalizáló szabályozás megvalósítására. Rózsa és Kiss (2011) irányítórendszere szintén nem igényli a szög mérését, egyszerű lineáris állapotmegfigyelőt használ a nem mért állapotok kiszámítására. Ez a törekvés azzal magyarázható hogy ipari körülmények között a szög mérése egyáltalán nem, vagy csak körülményesen megoldható, így a teljes állapot-visszacsatolás-alapú megoldások nehezen alkalmazhatók.

A teher pozíciójának vagy a lengés szögének mérésére helyett alternatív megoldás az állapotbecslés. E dolgozat célja két olyan állapotbecslési eljárás bemutatása, amely képes az állapotváltozók értékének hosszú távon is konvergens számítására. E módszerek tehát alkalmazhatók bármely állapot-visszacsatolást igénylő szabályozóban, illetve felválthatják Rózsa és Kiss (2011) [RK11] lineáris megfigyelőjét.

Az állapotbecslés megvalósításához felhasználunk két lézeres hégag szenzort, amelyek a szög egy-egy rögzített értékét képesek jelezni. A szenzorok működése aszinkron, nem állandó mintavételi időközönként szolgáltatnak mérési adatot, hanem külső esemény hatására. Módszert adunk ilyen aszinkron szenzorok fúziójára szinkron szenzorokkal, valamint a súrlódás zavaró hatásának kiküszöbölésére. A rendszerben jelen lévő súrlódások ugyanis megnehezítik az állapotbecslést, mivel jelentősen eltorzítják a rendszer viselkedését a rendszerről alkotott modellhez képest. A becslők működést mért adatok feldolgozásán keresztül demonstráljuk.

A dolgozat hátralévő része a következők szerint épül fel. A 2. fejezetben bemutatjuk a bakdaru modelljeit és megvizsgáljuk annak tulajdonságait. A 3. fejezetben ismertetjük a szenzorfúzió és állapotbecslés két algoritmusát valamint a bakdarun alkalmazott szenzorokat. A 4. fejezetben tárgyaljuk a módszereink mérési eredményeken történő futtatásával kapott eredményét. Végül az 5. fejezetben összefoglaljuk eredményeinket és munkánk folytatási lehetőségeivel is foglalkozunk.

A bakdaru dinamikus modellje és analízise

Egy digitális számítógépen futtatható állapotbecslő tervezéséhez szükségünk van a rendszer modelljére differenciaegyenlet-rendszer formájában. Ennek előállításához először levezetjük a rendszer fizikai modelljét, amelyet átalakítva megkapjuk a folytonos idejű állapotváltozós leírását. Eközben rámutatunk a rendszer néhány, az állapotbecslés megvalósítása szempontjából fontos tulajdonságára, többek között arra, hogy a súrlódás hatása bemeneti zavarásnak tekinthető. Végül megmutatjuk, hogy hogyan térhetünk át a folytonos idejű állapotteres modellekről diszkrét idejűre.

2.1. A fizikai modell levezetése

A bakdaru dinamikai modelljének megalkotásához Lagrange-formalizmust használunk. Bármely Lagrange-féle mechanikai rendszer esetén ehhez meg kell választanunk a rendszer általánosított koordinátáit, és meg kell keresnünk Lagrange-függvényét, amely a kinetikus és potenciális energiájának különbsége. Legyen az általánosított koordináták vektora q , a Lagrange-függvény L . A mozgásegyenletek az Euler-Lagrange-egyenletek segítségével adódnak, amelyek

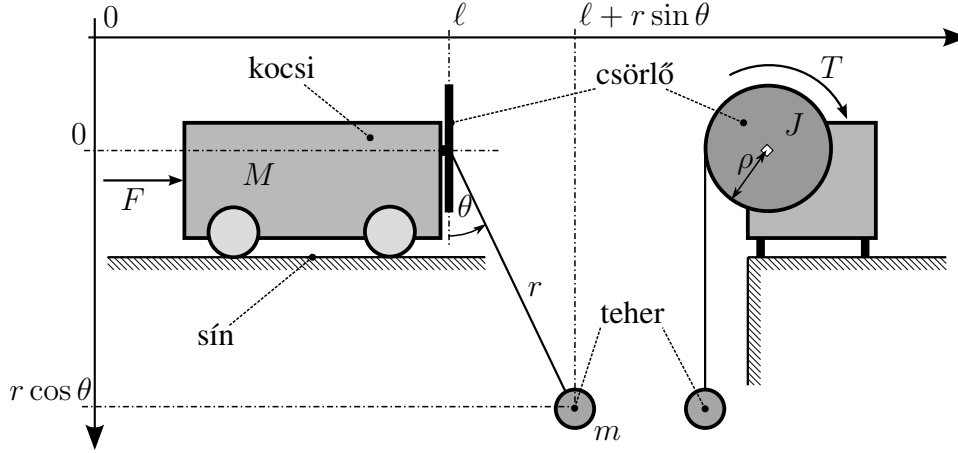
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \quad (2.1)$$

alakúak, ahol τ_i az általánosított nyomaték, $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$ az általánosított sebesség, $i = 1, \dots, n_q$, $n_q = \dim q$ az általánosított koordináták száma, amelyet a rendszer szabadsági foksámának is nevezünk. Az így felírt modell átírható

$$H(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) = \tau \quad (2.2)$$

alakba. Az egyenletben $H(q)$ a rendszer inerciamátrixa, $h(q, \dot{q})$ a gravitációs, centripetális és Coriolis hatást magába foglaló tag, τ az általánosított nyomatékok vektora.

A bakdaru mozgását két dimenzióban vizsgáljuk a 2. ábra szerint. A terhet pontszerűnek tekintjük, a kötelet pedig a mozgás során merevnek tételezzük fel, a közegellenállás hatását



2. ábra. A bakdaru kétdimenziós sémája.

elhanyagoljuk. A rendszerben fellép súrlódás is, amelynek hatása nem hanyagolható el. A modellt először a súrlódás nélkül írjuk fel, csak ezután egészítjük ki azzal.

Általánosított koordinátáknak válasszuk a kocsi vízszintes elmozdulását (ℓ), a kötélt hosszát (r) és a kötélt lengési szögét (θ), így $q = (\ell \ r \ \theta)^T$. Legyen a kocsi tömege M , a teher tömege m , a csörlő sugara ρ , a csörlő forgástengelyére vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka J , a gravitációs gyorsulás g . A rendszer potenciális energiája $-mgr \cos \theta$ ha a nullszintet a kötélt rögzített végénél választjuk meg. A daru kinetikus energiája áll egyrészt a kocsi mozgási energiájából ami $\frac{1}{2}M\dot{\ell}^2$, a csörlő forgási energiájából ami $\frac{1}{2}J(\frac{\dot{r}}{\rho})^2$ valamint a teher mozgási energiájából. Utóbbi kiszámításához használjuk a 2. ábrán jelölt koordináta-rendszert, amelyben a teher pozíciója $(\ell + r \sin \theta \ r \cos \theta)$, így teljes mozgási energiája

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m \left(\left[\frac{d}{dt} (\ell + r \sin \theta) \right]^2 + \left[\frac{d}{dt} (r \cos \theta) \right]^2 \right) \\ = \frac{1}{2}m\dot{\ell}^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + m\dot{\ell}\dot{r} \sin \theta + \dot{\ell}r\dot{\theta} \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ezeket egybevetve a bakdaru Lagrange-függvénye

$$L = \frac{1}{2}(M + m)\dot{\ell}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{J}{\rho^2} + m\right)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + m\dot{\ell}\dot{r} \sin \theta + \dot{\ell}r\dot{\theta} \cos \theta + mgr \cos \theta. \quad (2.4)$$

A (2.1) egyenlet által előírt deriválásokat elvégezve

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\ell}} &= (M + m)\ddot{\ell} + m\ddot{r} \sin \theta + m\dot{r}\ddot{\theta} \cos \theta + 2m\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta - m\dot{r}\dot{\theta}^2 \sin \theta, \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\ddot{\ell} \sin \theta + \left(\frac{J}{\rho^2} + m \right) \ddot{r} + m\dot{\ell}\dot{\theta} \cos \theta, \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= m\dot{\ell} \cos \theta + m\dot{r}^2 \ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} + m\dot{\ell}\dot{r} \cos \theta - m\dot{\ell}\dot{r}\dot{\theta} \sin \theta, \\
 \frac{\partial L}{\partial \ell} &= 0, \\
 \frac{\partial L}{\partial r} &= m\dot{\theta}^2 + m\dot{\ell}\dot{\theta} \cos \theta + mg \cos \theta, \\
 \frac{\partial L}{\partial \theta} &= m\dot{\ell}\dot{r} \cos \theta - m\dot{\ell}\dot{r}\dot{\theta} \sin \theta - mgr \sin \theta
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

eredményekre jutunk. A (2.1) törvénybe helyettesítve az ℓ -re vonatkozó mozgásegyenlet

$$(M + m)\ddot{\ell} + m\ddot{r} \sin \theta + m\dot{r}\ddot{\theta} \cos \theta + 2m\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta - m\dot{r}\dot{\theta}^2 \sin \theta = F, \tag{2.6}$$

ahol F a kocsit a sín mentén mozgó erő a 2. ábra szerint. A kötélnhosszra vonatkozó tagokat felhasználva és m -mel osztva

$$\ddot{\ell} \sin \theta + \left(\frac{J}{m\rho^2} + 1 \right) \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - g \cos \theta = -\frac{T}{\rho m}, \tag{2.7}$$

differenciálegyenletet kapjuk, ahol T a csörlőt mozgó forgatónyomaték (lásd a 2. ábrát). A θ egyenletében nincs nyomaték, alakja mr -rel osztva

$$\ddot{\ell} \cos \theta + r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + g \sin \theta = 0. \tag{2.8}$$

A (2.8) egyenletből $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$ kifejezést a (2.6) egyenletbe helyettesítve és m -mel osztva kapjuk (2.6) tömörebb alakját

$$\left(\frac{M}{m} + \sin^2 \theta \right) \ddot{\ell} + \ddot{r} \sin \theta - \left(r\dot{\theta}^2 + g \cos \theta \right) \sin \theta = \frac{F}{m}. \tag{2.9}$$

A (2.8) a teher lengését leíró differenciálegyenlet. Látható, hogy a nyomatékok nem hatnak közvetlenül e lengésre, csupán a kocsí vízszintes gyorsulása jelenik meg az egyenletben. A lengés tehát a dinamika elszigetelt részét képezi, ezért nehéz például a nyomatékok segítségével csökkenteni azt. A rendszer inerciaparaméterei sem jelennek meg a (2.8) egyenletben. Belátható, hogy alulirányított mechanikai rendszerek esetén mindig találhatók ilyen inerciafüggetlen dinamikai egyenletek [BN92].

1. Megjegyzés. Az általánosított koordináták megválasztása nem egyértelmű. q helyett bármely $\tilde{q} = \mathcal{T}(q)$ koordinátavektor alkalmas lehet, ha $\mathcal{T}$ invertálható transzformáció. A bakdaru esetében például megfelelő a kocsi vízszintes elmozdulása (ℓ) és a teher 2. ábráról leolvasható koordinátái. Ekkor a transzformáció

$$\mathcal{T}(\ell, r, \theta) = \begin{pmatrix} \ell \\ \ell + r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

$\mathcal{T}$ invertálható, ha a kötéll hossza nem nulla, és a teher nem leng ki a daru kocsijának szintjéig. Ez a daru normál működési tartományánál bővebb halmaz, tehát a $\mathcal{T}$ által leképzett koordináták is általánosított koordináták, amelyek fizikai jelentéssel is bírnak.

A (2.7)-(2.9) egyenletek segítségével a modell felírható (2.2) alakban. Az inerciamátrix

$$H(q) = \begin{pmatrix} \frac{M}{m} + \sin^2 \theta & \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \frac{J}{m\rho^2} + 1 & 0 \\ \cos \theta & 0 & r \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

alakú, a gravitációs, centripetális és Coriolis hatás modellje

$$h(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} -\left(r\dot{\theta}^2 + g \cos \theta\right) \sin \theta \\ -r\dot{\theta}^2 - g \cos \theta \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + g \sin \theta \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

az általánosított nyomatékok vektora pedig

$$\tau = \begin{pmatrix} \frac{F}{m} \\ -\frac{T}{\rho m} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Newtoni elvek alapján könnyen belátható, hogy Lagrange-féle mechanikai rendszerekben a súrlódás hatása (2.2) egyenletben egy additív taggal modellezhető. A (2.2) alakja ekkor

$$H(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) + h_s(s) = \tau, \quad (2.14)$$

ahol h_s a súrlódás hatását leíró additív tag, s pedig a súrlódási erők vektora. A bakdaru esetén a súrlódási erők additívan illeszthetők a (2.7)-(2.9) egyenletekbe, ezért

$$h_s(s) = \begin{pmatrix} -\frac{s_F}{m} \\ -\frac{s_T}{m} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

ahol s_F és s_T rendre a sín és a kocsi között, illetve a csörlő tengelyén fellépő súrlódási erő.

A súrlódási erők

$$s = \eta(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau) \quad (2.16)$$

karakterisztikáját kifejezni bármely mechanikai rendszer esetén nehéz feladat. Különböző összetettségű modellek állnak rendelkezésre e célra az irodalomban [AHDDW94]. Az adott problémában azonban legtöbbször azok a modellek, amelyek már megfelelő pontossággal írják le a jelenséget bonyolultak, nemlineárisak, és számos nehezen vagy egyáltalán nem mérhető paramétert tartalmaznak. Ezért irányító rendszer tervezéséhez nem célszerű (és nem is szokásos) ilyen modellek alkalmazása. Explicit súrlódásmodellek alkalmazása helyett a probléma másképp is megközelíthető. A (2.14) egyenletben vigyük át h_s -t a jobb oldalra, így $H(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) = \tau - h_s(s)$ alakot kapjuk. Bevezetjük

$$\tilde{\tau} = \tau - h_s(s) \quad (2.17)$$

mennyiséget, amely a súrlódással terhelt nyomatékok vektoraként értelmezhető. Az egyenlet új alakja

$$H(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) = \tilde{\tau}, \quad (2.18)$$

amely hasonlít a (2.2) egyenletre. Ebből az alakból látható, hogy a súrlódás úgy kezelhető, mint ha az csak a nyomatékokra lenne hatással. Mivel mechanikai rendszerek esetén e nyomatékok legtöbbször bemenetek, az állapotbecsléshez célszerű ismeretlen bemenetű rendszerekhez tervezett becslési technikákat, például a 3.1. szakaszban ismertetett Kálmán-szűrőket.

2.2. Folytonos idejű állapotteres modellek és tulajdonságaik

Az irányításelméletben sok esetben a rendszerek folytonos idejű

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.19)$$

$$y = g(x, u) \quad (2.20)$$

alakú, úgynevezett állapotteres modelljét használjuk, ahol f és g nemlineáris vektormezők. A (2.19) egyenletet állapotegyenletnek nevezzük, a benne szereplő x a rendszer állapotvektora, u a bemenete. A (2.20) az úgynevezett kimeneti egyenlet, y a rendszer kimenete. A kimenet mechanikai rendszerek esetén általában nem függ közvetlenül a bemenettől, ekkor $y = g(x)$ jelölést alkalmazzuk. A kimeneti egyenlet a rendszerben használt szenzorok alapján írható fel, ennek megalkotását a 3.2. szakaszban tárgyaljuk. Ebben a szakaszban csak az állapotegyenlettel foglalkozunk.

A (2.2) alakú mechanikai rendszer esetén állapotváltozónak választhatjuk q -t, ekkor azonban $\ddot{q}$ jelenléte miatt $\dot{q}$ -t is annak kell választanunk, így

$$x = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Vezessük be $x_q = q$, $x_{\dot{q}} = \dot{q}$ jelölést annak hangsúlyozására, hogy ezek a mennyiségek állapotváltozók. Ezekkel a jelölésekkel (2.2)

$$H(x_q)\dot{x}_{\dot{q}} + h(x) = \tau \quad (2.22)$$

alakot ölti. Az állapotteretes modellt az 1. állítás alapján tudjuk megalkotni.

1. Állítás. A (2.22) mechanikai rendszerben ha

$$x = \begin{pmatrix} x_q \\ x_{\dot{q}} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

választás mellett a nyomatékok kifejezhetők az állapotváltozók és a bemenetek függvényében, azaz

$$\tau = \mathcal{U}(x, u), \quad (2.24)$$

akkor a rendszer állapotteretes modelljének alakja

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_{\dot{q}} \\ -H^{-1}(x_q)h(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ H^{-1}(x_q) \end{pmatrix} \mathcal{U}(x, u) \quad (2.25)$$

Bizonyítás. A (2.23) választással élve az állapotegyenletek első csoportja abból származik, hogy az állapotváltozók egyik fele a többi deriváltja, mivel $\dot{x}_q = x_{\dot{q}}$. A maradék állapotegyenletek (2.22) összefüggésből adódnak, ahonnan $\dot{x}_{\dot{q}}$ -t kifejezve

$$\dot{x}_{\dot{q}} = H^{-1}(x_q) (\tau - h(x_q, x_{\dot{q}})) \quad (2.26)$$

egyenletet kapjuk. Az állapotvektor deriváltja ezek szerint

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_q \\ \dot{x}_{\dot{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\dot{q}} \\ H^{-1}(x_q) (\tau - h(x)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\dot{q}} \\ -H^{-1}(x_q)h(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ H^{-1}(x_q) \end{pmatrix} \tau. \quad (2.27)$$

A (2.24) feltételt is helyettesítve (2.25) összefüggés adódik. $\square$

Mielőtt felírnánk a daru állapotteretes modelljét, tisztázzunk egy irányítási szempontból fontos fogalmat.

Név	Fizikai mennyiség	Állapotteres változó
Állapotváltozók		
A koci elmozdulása	ℓ	x_ℓ
A kötéel hossza	r	x_r
A teher lengésének szöge	θ	x_θ
A koci sebessége	$\dot{\ell}$	$x_{\dot{\ell}}$
A kötéel hosszváltozásának sebessége	$\dot{r}$	$x_{\dot{r}}$
A teher lengésének szögsebessége	$\dot{\theta}$	$x_{\dot{\theta}}$
Bemenetek		
A kocsi mozgató erő	F	u_F
A csörlőt mozgató fogatónyomaték	T	u_T

1. táblázat. A bakdaru állapotteres modelljében használt változók és jelöléseik.

1. Definíció. *Input affin rendszer*

Egy folytonos idejű dinamikus rendszert input affinnak nevezünk ha állapotegyenlete a bemenetekben lineáris, azaz felírható

$$\dot{x} = f_x(x) + f_u(x)u \quad (2.28)$$

alakban, ahol f_x és f_u csak az állapotváltozóktól függő vektormezők.

Következmény. Az 1. állításból és az 1. definícióból következik, hogy minden olyan Lagrange-féle mechanikai rendszer input affin, amelynek nyomatékai a bemenetektől lineárisan függenek, azaz $\tau = \mathcal{U}_x(x)u$ alakba írhatók. A vektormezők a (2.25) egyenletből leolvashatóan

$$f_x(x) = \begin{pmatrix} x_{\dot{q}} \\ -H^{-1}(x_q)h(x) \end{pmatrix}, \quad f_u(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ H^{-1}(x_q)\mathcal{U}_x(x) \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

A bakdaru állapotteres modelljében válasszuk meg az állapotváltozókat (2.23) szerint. A bemenet legyen F és T , mivel ezeket tudjuk beavatkozó szervek segítségével előírni. A korábbihoz hasonlóan használjuk az 1. táblázatban olvasható új jelöléseket, amelyek kifejezik a változók állapotteres modellben betöltött szerepét.

A daru esetén a nyomatékok a (4.3) összefüggés alapján

$$\tau = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_F \\ u_T \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho m} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_F \\ u_T \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

alakba írhatók. Innen látható, hogy a nyomatékok lineárisan függenek a bemenetektől (és $\mathcal{U}_x$ nem függ az állapottól, csupán a paraméterektől). Ebből következik, hogy az állapotteres modell input affin, és felírható (2.29) összefüggések segítségével. A nemlineáris állapotegyenletek

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_\ell &= x_{\dot{\ell}}, \\
 \dot{x}_r &= x_{\dot{r}}, \\
 \dot{x}_\theta &= x_{\dot{\theta}}, \\
 \dot{x}_{\dot{\ell}} &= \frac{Jm x_r x_{\dot{\theta}}^2 \sin x_\theta + \frac{1}{2} Jmg \sin(2x_\theta) + (J + m\rho^2) u_F + m\rho u_C \sin x_\theta}{J(M + m \sin^2(x_\theta)) + Mm\rho^2}, \\
 \dot{x}_{\dot{r}} &= \frac{Mm\rho^2 (x_r x_{\dot{\theta}}^2 + g \cos x_\theta) - m\rho^2 u_F \sin x_\theta + (M + m \sin^2 x_\theta) \rho u_T}{J(M + m \sin^2(x_\theta)) + Mm\rho^2}, \\
 \dot{x}_{\dot{\theta}} &= \frac{g \sin x_\theta + 2x_{\dot{\ell}} x_{\dot{\theta}}}{x_r} - \frac{Jm x_r x_{\dot{\theta}} \sin(2x_\theta) + 2(J + m\rho^2) u_F \cos x_\theta + m\rho u_T \sin(2x_\theta)}{2J(M + m \sin^2(x_\theta)) x_r + 2Mm\rho^2 x_r}
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

alakúak.

Lineáris becslő alkalmazásához szükségünk van a rendszer lineáris modelljére. Ezt (2.31) egyenletek Taylor-sorának elsőrendű közelítésével nyerjük egyensúlyi trajektória körül. Legyen a trajektória egy konstans munkapont, melyben az állapotvektor $x(t) \equiv x_0$, a bemenet $u(t) \equiv u_0$. Az így nyert modell lineáris a centrált változóknál, amelyek a munkaponttól vett távolságot fejezik ki, ezek $\delta x = x - x_0$ és $\delta u = u - u_0$. A lineáris egyenletek alakja

$$\delta \dot{x} = A\delta x + B\delta u. \tag{2.32}$$

Munkapontnak olyan állandósult állapotot választhatunk, amelyben a sebességek nullák, tehát $x_{\dot{\ell},0} = x_{\dot{r},0} = 0$ m/s, $x_{\dot{\theta},0} = 0$ rad/s. A (2.31) egyenletekből látható, hogy a modell x_ℓ értékétől független, tehát élhetünk például $x_{\ell,0} = 0$ m választással. A munkapont csak akkor lehet egyensúlyi, ha $x_{\theta,0} = 0$ rad, mivel ettől különböző esetben a teher a gravitáció hatására elmozdulna. x_r értéke tetszőleges pozitív $x_{r,0}$ lehet. Tehát a munkapontban az állapotvektor $x_0 = \begin{pmatrix} 0 & x_{r,0} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$, $x_{r,0} > 0$ m. A konstans bemenetet, amely a rendszert képes e pontban tartani $h(x_0) = \mathcal{U}_x(x_0)u_0$ egyenlet megoldásaként $u_0 = \begin{pmatrix} 0 & m\rho g \end{pmatrix}^T$ -nak adódik. Így a lineáris modell mátrixai

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{m}{M}g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{M+m}{Mx_{r,0}}g & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{M} & 0 \\ 0 & -\frac{\rho}{m\rho^2+J} \\ -\frac{1}{Mx_{r,0}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.33}$$

A lineáris rendszer sajátértékei $0, 0, 0, 0, j\sqrt{\frac{(M+m)g}{Mx_{r,0}}}, -j\sqrt{\frac{(M+m)g}{Mx_{r,0}}}$. Mivel az összes sajátérték valós része nulla, a rendszer aszimptotikusan nem stabilis, a stabilitás határhelyzetében van. Ennek egyik oka a lengést leíró lineáris differenciálegyenletben keresendő, amely

$$\delta\ddot{x}_\theta = -\frac{(M+m)g}{Mx_{r,0}}\delta x_\theta - \frac{1}{Mx_{r,0}}\delta u_F. \quad (2.34)$$

Erőhatás nélkül, tehát ha $\delta u_F = 0$ N, a (2.34) egy

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{(M+m)g}{Mx_{r,0}}} \quad (2.35)$$

körfrekvenciájú rezgés egyenlete. A magára hagyott rendszer tehát képes csillapítatlan rezgésekre, ekkor állapotváltozói nem tartanak nullához, de nem is divergálnak. Ezzel magyarázható, hogy a rendszer a stabilitás határán van.

2.3. Diszkrét idejű állapotteres modellek és tulajdonságai

A szabályozók és becslők megvalósítása jellemzően beágyazott számítógépeken történik. E rendszerek az analóg szabályozókkal szemben állandó mintavételi időközönként olvassák be a rendelkezésre álló jeleket és számítják ki a szükséges beavatkozást. Az irányító rendszerek digitális megvalósítása számos előnyt kínál az analóggal szemben. Digitális állapotbecslő (szabályozó) konstruálására több módszer is ismert, mi a vizsgált rendszer modelljének diszkrétizálásával, és az így kapott modellhez történő diszkrét idejű becslő tervezésével foglalkozunk [RCM96].

A (2.19)-(2.20) rendszer diszkrét idejű modelljét azzal a feltételezéssel kapjuk meg, hogy a kimenetet állandó T_s mintavételi időközönként mérjük, a bemenet pedig a mintavételi időpontok között konstans. A mintavételezett jelekre használjuk $x[k] = x(kT_s)$ jelölést, ekkor a diszkrét idejű kimeneti egyenlet $y[k] = g(x[k], u[k])$. Az állapotátmeneti egyenlet

$$\int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \dot{x} dt = x[k+1] - x[k] \quad (2.36)$$

és (2.19) összefüggés felhasználásával kapható meg

$$x[k+1] = x[k] + \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} f(x, u[k]) dt \quad (2.37)$$

formában. Az így nyert nemlineáris differenciaegyenlet-rendszer alakja

$$x[k+1] = \phi(x[k], u[k]), \quad (2.38)$$

$$y[k] = g(x[k], u[k]). \quad (2.39)$$

Összetett nemlineáris modellek esetén

$$\int_{kT_s}^{(k+1)T_s} f(x, u[k]) dt \quad (2.40)$$

nem mindig ismert. Ekkor diszkrétizálásra használhatjuk az Euler-módszert, amely (2.36) összefüggés helyett

$$T_s \dot{x} \approx x[k+1] - x[k] \quad (2.41)$$

közelítést alkalmazza. Ezzel az állapotegyenlet alakja

$$x[k+1] = x[k] + T_s f(x[k], u[k]). \quad (2.42)$$

A bakdaru diszkrét idejű modellje esetén is ezt a közelítést alkalmazzuk. A konkrét állapotátmeneti egyenletek (2.31) egyenletekből adódnak $x[k]$ hozzáadásával és T_s -sel szorzással.

2. Megjegyzés. Folytonos időben input affin rendszer diszkrét idejű modellje is input affin, azaz átírható

$$x[k+1] = \phi_x(x[k]) + \phi_u(x[k])u[k] \quad (2.43)$$

alakba. Ez belátható (2.28) alapján, mivel (2.37) egyenletet felhasználva a diszkrét idejű állapotátmeneti egyenlet

$$x[k+1] = x[k] + \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} f_x(x) dt + \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} f_u(x) dt u[k]. \quad (2.44)$$

A megfelelő vektormezők ezek szerint

$$\phi_x(x[k]) = x[k] + \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} f_x(x) dt, \quad \phi_u(x[k]) = \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} f_u(x) dt. \quad (2.45)$$

Az integrál bármilyen f_u -ra nézve homogén $\mathcal{I}$ operátorral történő közelítésével is input affin modellt kapunk, mivel $\mathcal{I}\{f_u(x)u[k]\} = \mathcal{I}\{f_u(x)\}u[k] = \phi_u(x[k])u[k]$, tehát $u[k]$ kiemelhető. Ez az Euler-módszerben használt (2.41) közelítésre teljesül, ekkor a vektormezők

$$\phi_x(x[k]) = T_s f_x(x[k]), \quad \phi_u(x[k]) = T_s f_u(x[k]) \quad (2.46)$$

alakot öltik.

Diszkrét időben is bevezetjük a rendszer lineáris modelljét amely

$$\delta x[k+1] = \Phi \delta x[k] + \Gamma \delta u[k], \quad (2.47)$$

ahol Φ az állapotátmeneti mátrix, Γ a bemeneti mátrix, a δ prefixum pedig most is centrált változókat jelöl, mint (2.32) esetén. A 2. állításban gyakorlati számítási módszert adunk a diszkrét idejű modell mátrixainak meghatározására a folytonos idejű (2.32) modell mátrixai alapján.

2. Állítás. *Definiáljuk a Laplace-transzformációt egy $x(t)$ időfüggő vektor esetén*

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-0}^{\infty} x(t) e^{-pt} dt \quad (2.48)$$

összefüggéssel, ahol p a komplex frekvencia. Ekkor a (2.32) folytonos idejű lineáris időinvariáns rendszer (2.47) alakú diszkrét idejű modelljének mátrixait

$$\Phi = \mathcal{L}^{-1}\{(pI - A)^{-1}\}|_{t=T_s}, \quad \Gamma = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}(pI - A)^{-1}\right\} B \Big|_{t=T_s} \quad (2.49)$$

formulák segítségével kapjuk.

Bizonyítás. A (2.32) egyenlet megoldása $\delta x(t_0)$ kezdeti feltétel ismeretében [Lan01, 44. o.]

$$\delta x(t) = e^{A(t-t_0)} \delta x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-t')} B \delta u(t') dt'. \quad (2.50)$$

A $t_0 = kT_s$, $t = (k+1)T_s$ választással, a bemenetet $(t_0, t]$ intervallumon konstans $\delta u[k]$ -nak feltételezve valamint figyelembe véve, hogy a rendszer időinvariáns, a megoldás

$$\delta x[k+1] = e^{AT_s} \delta x[k] + \int_0^{T_s} e^{At} dt B \delta u[k] \quad (2.51)$$

alakra hozható. Ezt összevetve (2.47) egyenlettel látható, hogy

$$\Phi = e^{AT_s}, \quad \Gamma = \int_0^{T_s} e^{At} dt B. \quad (2.52)$$

Laplace transzformáljuk e^{At} kifejezést, ekkor

$$\mathcal{L}\{e^{At}\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} A^i \frac{t^i}{i!}\right\} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{p^{i+1}} = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{A}{p}\right)^i = (pI - A)^{-1} \quad (2.53)$$

Leírás	Jel	Számérték	Mértékegység
A kocs tömege	M	4.532	kg
A teher tömege	m	48	g
A csörlő tehetetlenségi nyomatéka	J	$3.802 \cdot 10^{-4}$	$\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
A csörlő sugara	ρ	18	mm
Nehézségi gyorsulás	g	9.81	m/sec^2
Munkaponti kötéltávolság	$x_{r,0}$	0.565	m
A gerjesztetlen lengés körfrekvenciája	ω_0	4.19	rad/sec
Mintavételi idő	T_s	1	msec

2. táblázat. A darumodell paramétereinek numerikus értéke.

összefüggést kapjuk. Felhasználtuk, hogy A indukált normája (legnagyobb sajátértéke) korlátos, ezért a komplex számsík egy véges sugarú körén kívül teljesül $\|\frac{A}{s}\| < 1$, tehát a Neumann-sor konvergens. Ezzel az állítás Φ -re vonatkozó részét be is láttuk. Γ esetén tekintsük

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{At'} dt' B\right\} = \frac{1}{p} \mathcal{L}\{e^{At}\} B = \frac{1}{p} (pI - A)^{-1} B, \quad (2.54)$$

Laplace-transzformáltat amelyből az állítás második része is látható. $\square$

A diszkrét idejű, lineáris darumodell állapotátmeneti mátrixa

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2mg}{M\omega_0^2} \sin^2\left(\frac{\omega_0 T_s}{2}\right) & T_s & 0 & -\frac{mg(\sin(\omega_0 T_s) - \omega_0 T_s)}{M\omega_0^3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & T_s & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\omega_0 T_s) & 0 & 0 & \frac{\sin(\omega_0 T_s)}{\omega_0} \\ 0 & 0 & \frac{mg \sin(\omega_0 T_s)}{M\omega_0} & 1 & 0 & \frac{2mg}{M\omega_0^2} \sin^2\left(\frac{\omega_0 T_s}{2}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_0 \sin(\omega_0 T_s) & 0 & 0 & \cos(\omega_0 T_s) \end{pmatrix}, \quad (2.55)$$

ahol ω_0 a (2.35) összefüggéssel definiált körfrekvencia, a bemeneti mátrix pedig

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{T_s^2}{2M} + \frac{2mg}{M^2\omega_0^4 x_{r,0}} \left(\sin^2\left(\frac{\omega_0 T_s}{2}\right) - \left(\frac{\omega_0 T_s}{2}\right)^2 \right) & 0 \\ 0 & -\frac{\rho T_s^2}{2(m\rho^2 + J)} \\ \frac{\cos(\omega_0 T_s) - 1}{M\omega_0^2 x_{r,0}} & 0 \\ \frac{T_s}{M} + \frac{mg(\sin(\omega_0 T_s) - \omega_0 T_s)}{M^2\omega_0^3 x_{r,0}} & 0 \\ 0 & -\frac{\rho T_s}{m\rho^2 + J} \\ -\frac{\sin(\omega_0 T_s)}{M\omega_0 x_{r,0}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

A modell paramétereinek számszerű értékei a 2. táblázatban találhatók.

Szenzorfüzió és állapotbecslés

Súrlódással terhelt mechanikai rendszerek esetén az állapotbecslés általában nehéz feladat, mivel a súrlódás a rendszer viselkedését jelentősen eltorzítja. A súrlódásról modellt alkotni, és ezt felhasználni a becsléshez problémás lehet a modellben felmerülő ismeretlen paraméterek miatt. Ebben a fejezetben módszert adunk az állapotbecslés megvalósítására a súrlódás zavaró hatásának kiküszöbölésével, explicit súrlódási modellek használata nélkül, Kálmán-szűrők alkalmazásával.

A 2.1. szakaszban láttuk, hogy a súrlódás bemeneti zavarásként modellezhető. A (2.18) összefüggés alapján két választásunk is van. A bemenetet tekinthetjük teljesen ismeretlennek, ekkor az állapotbecslés megvalósítására az ismeretlen bemenetű Kálmán-szűrő (*unknown input Kalman filter* - UIKF) alkalmazható. A súrlódást kezelhetjük additív zavarásként is, ekkor a terhelésbecslővel kiegészített *unscented* Kálmán-szűrő (*unscented Kalman filter* - UKF) használható állapotbecslésre.

Az állapotbecsléshez a vizsgált rendszerről méréseket kell készítenünk. A mérésekhez gyakran eltérő, esetleg nem is állandó mintavételi idejű szenzorokat van lehetőségünk alkalmazni. Megmutatjuk, hogy az állapotbecsléshez használt Kálmán-szűrőkre alapozva konstruálható olyan eljárás, amellyel lehetséges ilyen szenzorok fúziója. Végül bemutatjuk a bakdarun alkalmazott szenzorokat és megvizsgáljuk alkalmazhatóságukat a fenti célokra.

3.1. Kálmán-szűrők a súrlódás zavaró hatásának eliminálására

Napjainkban a Kálmán-szűrő algoritmusok igen sok változata lelhető fel a szakirodalomban [Hay+01]. Általánosan elmondható, hogy ezek az állapotbecslők

$$x[k+1] = \phi(x[k], u[k], d[k], w[k]), \quad (3.1)$$

$$z[k] = g(x[k], v[k]) \quad (3.2)$$

rendszerek valamilyen speciális alakjának megfigyelésére képesek, ahol d a rendszer ismeretlen bemenete, z az $y = g(x, 0)$ kimenetről rendelkezésre álló zajjal terhelt mérés. A rendszer modelljét kiegészítettük zajváltozókkal. A w modellzaj a modell valóságtól való eltérését, míg

v mérési zaj a szenzorok pontatlanságát fejezi ki. Mindkettő eleget tesz a sztochasztikus hipotézisnek, azaz várható értékük nulla, Gauss-eloszlást követnek, és fehér zajnak tekinthetők. A modellzaj kovariancia mátrixa $\text{cov}\{w\} = P_w$, amelyet

$$\mathbb{E}\{w[k]w^T[i]\} = \begin{cases} P_w[k], & \text{ha } k = i \\ 0, & \text{ha } k \neq i \end{cases} \quad (3.3)$$

összefüggés definiál, $\text{cov}\{v\} = P_v$ esetén hasonlóan.

A Kálmán-szűrők kétlépcsős rekurzív algoritmusok. Az első, úgynevezett predikciós lépésben csak a $k-1$. mintavételig rendelkezésre álló adatokat és a rendszer modelljét használják fel. Legyen $\hat{x}[k|i]$ az állapotvektor becsült értéke a k . mintavételkor, az i . mintavételig rendelkezésre álló adatok alapján. A predikció során tehát előáll $\hat{x}[k|k-1]$, erre alkalmas Kálmán-szűrő esetén $\hat{d}[k|k-1]$ is. A frissítés lépésben ezután z és (3.2) felhasználásával számítjuk $\hat{x}[k|k]$ -t és $\hat{d}[k|k]$ -t.

Az így nyert becslések optimálisak abban az értelemben, hogy a Kálmán szűrők a becslések $P_x[k|k] = \text{cov}\{x[k] - \hat{x}[k|k]\}$, $P_d[k|k] = \text{cov}\{d[k] - \hat{d}[k|k]\}$ kovarianciájának infimumára törekednek.

3. Megjegyzés. Az 1960-ban publikált klasszikus Kálmán-szűrő (classical Kalman filter - CKF) volt a legelső Kálmán-szűrő. Ezt az algoritmust lineáris rendszerek állapotbecslésére tervezték, tehát (3.1)-(3.2) esetén ϕ és g lineáris továbbá a rendszernek nincs ismeretlen bemenete [Kal+60].

3.1.1. Ismeretlen bemenetű Kálmán-szűrő (UIKF)

Tekintsük a (3.1)-(3.2) rendszert abban az esetben, ha ϕ és g lineáris. Ekkor a modell alakja

$$x[k+1] = \Phi x[k] + \Gamma_u u[k] + \Gamma_d d[k] + w[k], \quad (3.4)$$

$$z[k] = Cx[k] + v[k], \quad (3.5)$$

ahol Γ_u az ismert, Γ_d az ismeretlen bemenetekre vonatkozó bemeneti mátrix. Ilyen rendszerek esetén x és d becslésére alkalmas az UIKF, amennyiben a rendszer kielégíti

$$\dim d \leq \dim y, \quad (3.6)$$

$$\text{rank}\{C\} = \dim y, \quad (3.7)$$

$$\text{rank}\{\Gamma_d\} = \dim d, \quad (3.8)$$

$$\text{rank}\{C\Gamma_d\} = \dim d. \quad (3.9)$$

feltételeket [DZON95].

Az UIKF-ben a predikció két lépésben történik. Először az ismeretlen bemeneteket nullának feltételezve számítjuk az állapotot

$$\bar{x}[k-1|k-1] = \Phi \hat{x}[k-1|k-1] + \Gamma_u u[k-1] \quad (3.10)$$

egyenlet segítségével, ahol $\bar{x}$ az állapot előzetes predikcióját jelöli. A CKF-hez hasonlóan számítunk mérési reziduált amely ebben a fázisban

$$\bar{\nu}[k] = z[k] - C\bar{x}[k-1|k-1]. \quad (3.11)$$

További műveletekkel kiszámítható az ismeretlen bemenetekre vonatkozó Kálmán-erősítés K_d , amellyel az ismeretlen bemenetek becsült értéke

$$\hat{d}[k-1|k] = K_d[k]\bar{\nu}[k]. \quad (3.12)$$

Ennek ismeretében meghatározható az állapotváltozók predikciója, amely

$$\hat{x}[k|k-1] = \bar{x}[k-1|k-1] + \Gamma_d \hat{d}[k-1|k]. \quad (3.13)$$

A frissítés fázisban a (3.11) mérési reziduált újra kiszámítjuk

$$\nu[k] = z[k] - C\hat{x}[k|k-1] \quad (3.14)$$

alakban, amely segítségével egy új, az állapotokra vonatkozó Kálmán-erősítést számolunk, ezt jelölje K_x . A (3.12) analógiájára a becsült állapot

$$\hat{x}[k|k] = \hat{x}[k|k-1] + K_x[k]\nu[k]. \quad (3.15)$$

Az UIKF teljes algoritmus a 3. ábrán látható.

A (2.18) összefüggésből látható hogy a súrlódás hatása modellezhető úgy, mint bemeneti zavarás. Tekintsük a (2.47) lineáris darumodell minden bemenetét ismeretlennek. Ekkor (3.5) rendszer Φ mátrixa a daru (2.55) állapotátmeneti mátrixa, $\Gamma_u = 0$ (nincs ismert bemenet), Γ_d a daru (2.56) bemeneti mátrixa.

Az modellzaj kovarianciamátrixát kísérleti tapasztalatok alapján időben állandó

$$P_w = \begin{pmatrix} 10^{-8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-8} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

értékűre választjuk. A mérési zaj kovarianciamátrixát a 3.3. szakaszban ismertetjük. A 3.3. szakaszban továbbá megmutatjuk azt is, hogy a fentiekben megalkotott modell az alkalmazott szenzorokkal kielégíti a (3.6)-(3.9) feltételeket.

Feltesszük, hogy a rendszer állapotának és ismeretlen bemenetének munkaponti értékét valamilyen pontossággal ismerjük, ezek rendre a 2.2. szakaszban ismertetett x_0 és u_0 . A becslések kezdeti értéke az UIKF esetén a centrált változók kezdeti értékét jelenti, tehát $\hat{x}[0|0] = 0$, $\hat{d}[-1|0] = 0$. Ebből az is következik, hogy a valódi rendszer állapotának és ismeretlen bemenetének becsült értéke rendre $\hat{x}[k|k] + x_0$ és $\hat{d}[k|k] + u_0$.

Ha $P_x[0|0]$ sajátértékei nagyok, akkor a becslési hiba gyorsan konvergál a nullához a kezdeti állapot hibás becslése esetén is [LSRJ11]. Ennek megfelelően $P_x[0|0] = 100P_w$ inicializálást alkalmazunk. $P_d[-1|0]$ -ra ez az állítás nem vonatkozik, ezért $P_d[-1|0] = 0$ választással élünk.

3.1.2. Unscented Kálmán-szűrő (UKF)

Tekintsük a (3.1)-(3.2) rendszert abban az esetben, ha a rendszernek nincs ismeretlen bemenete, tehát állapotegyenlete $x[k+1] = \phi(x[k], u[k], w[k])$ alakú. Ilyen rendszer állapotbecslésére alkalmas az UKF [Hay+01]. Az UKF számos variánsa közül mi egy olyat választottunk, amikor a modell és a mérési zaj is additív, tehát a rendszer egyenletei

$$x[k+1] = \phi(x[k], u[k]) + w[k], \quad (3.17)$$

$$z[k] = g(x[k]) + v[k] \quad (3.18)$$

alakúak [Hay+01, 233. o.].

Az UKF a rendszer nemlineáris modellje alapján végzi az állapotbecslést, lokálisan linearizált modellek helyett határozott mintavételezést (*deterministic sampling*) alkalmaz. Ehhez az előző ciklusban becsült állapot körül az állapottér minden dimenziója mentén mindkét irányban felvesz két szigma pontot. Legyen $n_x = \dim x$, α a szűrő szigma pontok kiterjedését meghatározó paramétere, amelynek értékére $10^{-4} \leq \alpha \leq 1$ teljesül, $\lambda = n_x(\alpha^2 - 1)$ kompozit skála tényező. A szigma pontok helyét az előző becslés bizonytalansága és $\gamma = \sqrt{n_x + \lambda}$ paraméter alapján határozzuk meg

$$\bar{\mathcal{X}}[k-1|k-1] = \begin{pmatrix} \hat{x}^T[k-1|k-1] \\ \left(\hat{x}[k-1|k-1] + \gamma \sqrt{P_x[k-1|k-1]} \right)^T \\ \left(\hat{x}[k-1|k-1] - \gamma \sqrt{P_x[k-1|k-1]} \right)^T \end{pmatrix}^T, \quad (3.19)$$

összefüggéssel, ahol vektor és mátrix összeadása azt jelenti, hogy a vektort a mátrix minden oszlopához hozzáadjuk.

Paraméterek:

- $P_w = \text{cov}\{w[k]\}$
- $P_v = \text{cov}\{v[k]\}$

Inicializálás:

$$\begin{aligned}\hat{x}[0|0] &= \mathbb{E}\{x[0]\} \\ \hat{d}[-1|0] &= \mathbb{E}\{d[0]\} \\ P_x[0|0] &= \text{cov}\{x[0] - \hat{x}[0|0]\} \\ P_d[-1|0] &= \text{cov}\{d[0] - \hat{d}[-1|0]\}\end{aligned}$$

Ismétlés $k = 1, 2, \dots \infty$ -re:**Predikció az ismert bemenetek alapján:**

$$\begin{aligned}\bar{x}[k-1|k-1] &= \Phi \hat{x}[k-1|k-1] + \Gamma_u u[k-1] \\ \bar{P}_x[k-1|k-1] &= \Phi P_x[k-1|k-1] \Phi^T + P_w\end{aligned}$$

Az ismeretlen bemenetek számítása:

$$\begin{aligned}\bar{\nu}[k] &= z[k] - C \bar{x}[k-1|k-1] \\ P_{\bar{\nu}}[k] &= C \bar{P}_x[k-1|k-1] C^T + P_v \\ P_d[k-1|k] &= (\Gamma_d^T C^T P_{\bar{\nu}}^{-1}[k] C \Gamma_d)^{-1} \\ P_{dx}[k|k] &= P_d[k-1|k] \Gamma_d^T \bar{P}_x^{-1}[k-1|k-1] (\bar{P}_x^{-1}[k-1|k-1] + C P_v C^T)^{-1} \\ K_d[k] &= P_{dx}[k|k] C^T P_v^{-1} \\ \hat{d}[k-1|k] &= K_d[k] \bar{\nu}[k]\end{aligned}$$

Predikció korrekciója:

$$\hat{x}[k|k-1] = \bar{x}[k-1|k-1] + \Gamma_d \hat{d}[k-1|k]$$

Frissítés:

$$\begin{aligned}\nu[k] &= z[k] - C \hat{x}[k|k-1] \\ K_x[k] &= (\bar{P}_x^{-1}[k-1|k-1] + C^T P_v C)^{-1} C^T P_v^{-1} \\ \hat{x}[k|k] &= \hat{x}[k|k-1] + K_x[k] \nu[k] \\ P_x[k|k] &= (\bar{P}_x^{-1}[k-1|k-1] + C^T P_v C - \\ &\quad \bar{P}_x^{-1}[k-1|k-1] \Gamma_d (\Gamma_d^T \bar{P}_x^{-1}[k-1|k-1] \Gamma_d)^{-1} \Gamma_d^T \bar{P}_x^{-1}[k-1|k-1])^{-1}\end{aligned}$$

3. ábra. Az ismeretlen bemenetű Kálmán-szűrő algoritmus.

A predikció során a szigma pontokat transzformáljuk a rendszer modellje szerint, így $\bar{\mathcal{X}}[k|k-1] = \phi(\bar{\mathcal{X}}[k-1|k-1], u[k-1])$. Az hogy ϕ argumentumában vektor helyett mátrix szerepel azt jelenti, hogy $\bar{\mathcal{X}}[k-1|k-1]$ minden $\bar{\mathcal{X}}_i[k-1|k-1]$ oszlopára kiértékeljük a függvényt és az eredményeket rendre $\bar{\mathcal{X}}[k|k-1]$ oszlopaiban tároljuk. A predikció a transzformált szigma pontok súlyozott összegeként áll elő azaz

$$\hat{x}[k|k-1] = \sum_{i=0}^{2n_x} W_m(i) \bar{\mathcal{X}}_i[k|k-1], \quad (3.20)$$

ahol

$$W_m(i) = \begin{cases} \frac{\lambda}{n_x + \lambda}, & \text{ha } i = 0 \\ \frac{1}{2(n_x + \lambda)}, & \text{ha } i = 1, \dots, 2n_x \end{cases}. \quad (3.21)$$

A predikció eredményeül kapott szigma pontokat kiterjesztjük a modell bizonytalansága szerint

$$\mathcal{X}[k|k-1] = \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{X}}[k|k-1] & \bar{\mathcal{X}}[k|k-1] + \gamma\sqrt{P_\omega} & \bar{\mathcal{X}}[k|k-1] - \gamma\sqrt{P_\omega} \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

összefüggéssel.

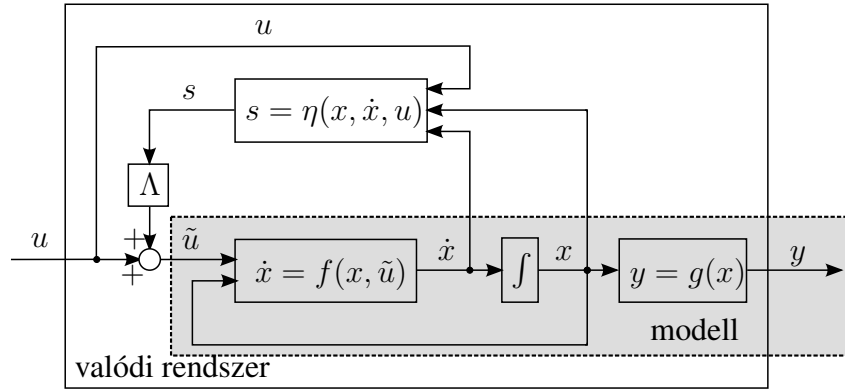
A lineáris modelleken alapuló Kálmán-szűrőkhöz hasonlóan a mérési reziduál számítása a modell alapján történik, az UKF esetén azonban itt több lépésre is szükség van. Először a kiterjesztett szigma pontokat transzformáljuk (3.18) egyenletnek megfelelően $v[k] = 0$ mellett, így a kimeneti szigma pontok értéke $\mathcal{Y}[k] = g(\mathcal{X}[k|k-1])$. A (3.20) összefüggéshez hasonlóan a modell alapján jósolt kimenet is

$$\hat{y}[k] = \sum_{i=0}^{2n_x} W_m(i) \mathcal{Y}_i[k]. \quad (3.23)$$

alakú súlyozott összeg. Ezekkel a mennyiségekkel kiszámítható az UKF Kálmán-erősítése K , amellyel a becsült állapot $\hat{x}[k|k] = \hat{x}[k|k-1] + K[k](z[k] - \hat{y}[k])$. Az UKF teljes algoritmus az 5-6. ábrán látható.

A bakdaru állapotbecsléséhez a modell azon tulajdonságát használjuk ki, hogy a súrlódás hatása kezelhető a nyomatékokra ható additív zavarásként (2.17) egyenlet alapján. A nyomatékokat a (2.30) összefüggés szerint transzformáljuk bemenetekké. Ezt és a (2.15) összefüggést felhasználva $\tilde{\tau}$ kifejezése

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho m} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_F \\ u_T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho m} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_F \\ -\rho s_T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho m} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} u_F \\ u_T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_F \\ s_T \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \quad (3.24)$$



4. ábra. A súrlódással terhelt bakdaru belső szerkezete. Állapotbecslő tervezéséhez csak a szaggatott vonallal bekeretezett blokkról tudunk modellt alkotni.

alakra hozható. Ez alapján látható hogy a súrlódás a bemenetekre nézve is tekinthető additív zavarásnak. A beavatkozó jelek helyett tehát a rendszer

$$\tilde{u} = u + \Lambda s \quad (3.25)$$

bemeneteket érzékeli, ahol

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\rho \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Ezt figyelembe véve a daru belső szerkezetét a 4. ábra szemlélteti. Az ábrán bejelöltük a rendszer azon részét, amelyet megbízhatóan tudunk modellezni.

Az s -re nem használunk súrlódási modellt, helyette terhelésbecslőt alkalmazunk a bemeneten. Ehhez vegyük fel s -et az állapotváltozók közé $x_d[k] = s[k]$ alakban, és éljünk a leg-egyszerűbb feltételezéssel, ami szerint x_d konstans. Ekkor a modell az $x_d[k+1] = x_d[k]$ állapotegyenlettel egészítendő ki. Ezzel a (3.17)-(3.18) rendszer

$$\begin{aligned} \tilde{x}[k+1] &= \tilde{\phi}(\tilde{x}[k], u[k]) + w[k], \\ z[k] &= \tilde{g}(\tilde{x}[k]) + v[k] \end{aligned} \quad (3.27)$$

alakot ölti, ahol

$$\tilde{x}[k] = \begin{pmatrix} x[k] \\ x_d[k] \end{pmatrix}, \quad \tilde{\phi}(\tilde{x}[k], u[k]) = \begin{pmatrix} \phi(x[k], u[k] + \Lambda x_d[k]) \\ x_d[k] \end{pmatrix}, \quad \tilde{g}(\tilde{x}[k]) = g(x[k]). \quad (3.28)$$

A (3.27) rendszerhez tervezett UKF tehát a beavatkozó jelek értékét használja fel és az bakdaru állapotváltozóin kívül becsli a súrlódási erők nagyságát is.

A nemlineáris állapotegyenleteket az Euler-közelítés ellenére meglehetősen megbízhatónak ítéljük. Ezzel szemben x_d állapotegyenlete jelentősen eltér a valóságtól, ezért ehhez nagyobb

bizonytalanságot kell rendelnünk. Ezekből kiindulva tapasztalati úton a modellzaj kovarianciamátrixát konstans

$$P_w = \begin{pmatrix} 10^{-10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

értékűre választjuk. A szűrő α és β paramétere rendre 0.5 és 2.

A kezdeti becsült állapot értéke

$$\hat{x}[0|0] = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

tehát az ismeretlen bemeneteket kezdetben nullának feltételezzük, a többi állapotváltozót a 2.2. szakaszban tárgyalt munkaponti értékre állítjuk. Ez a kezdeti érték lehet bizonytalan, különösen x_d esetén, ezért és a gyors konvergencia érdekében $P[0|0] = 100P_w$ választással élünk, mint a 3.1.1. szakaszban bemutatott UIKF esetén.

3.2. Szenzorfüzió Kálmán-szűréssel

Az állapotbecslés megvalósítása során a rendelkezésre álló szenzorok méréseire támaszkodunk. A szenzorok fúziója könnyen megvalósítható Kálmán-szűrővel abban az esetben ha mindegyik mintavételi ideje azonos. A gyakorlatban előfordul azonban, hogy ez nem teljesül, sőt vannak aszinkron szenzorok is, amelyek mintavételi ideje nem állandó. A következőkben bemutatjuk, hogy a fúzió ilyen esetben is megvalósítható Kálmán-szűréssel.

Legyen a rendelkezésre álló szenzorok halmaza Ψ , számuk $n_\Psi = |\Psi|$. Tegyük fel hogy a szenzoroknak van sorszáma, azaz definiálható kölcsönösen egyértelmű $\Psi \mapsto \mathbb{N}$ leképezés. Tegyük fel továbbá, hogy minden szenzornak van egy állapotjele, amely minden mintavételkor jelzi, hogy a szenzor kimenetén rendelkezésre áll-e mért adat. Formálisan egy $\psi_j \in \Psi$ szenzor esetén az állapotjel $\mu_j : \mathbb{N} \mapsto \{0, 1\}$ leképezés, melynek definíciója

$$\mu_j(k) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \psi_j\text{-nek van mérési eredménye a } [(k-1)T_s, kT_s) \text{ intervallumon} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}, \quad (3.31)$$

Paraméterek:

- $n_x = \dim x$
- $P_w = \text{cov}\{w[k]\}$
- $P_v = \text{cov}\{v[k]\}$
- α : a szigma pontok kiterjedése ($10^{-4} \leq \alpha \leq 1$)
- β : eloszlási állandó (Gauss-eloszlás esetén $\beta = 2$ optimális)
- $\lambda = n_x(\alpha^2 - 1)$ kompozit skálázó tényező
- $\gamma = \sqrt{n_x + \lambda}$ skálázó változó
- $W_c(i), i = 0, \dots, 2n_x$: a kovarianciamátrixok súlyozó tényezői,
 $W_c(0) = \frac{\lambda}{n_x + \lambda} + 1 - \alpha^2 + \beta, \quad W_c(i) = \frac{1}{2(n_x + \lambda)}, \quad i = 1, \dots, 2n_x$
- $W_m(i), i = 0, \dots, 2n_x$: a mérések súlyozó tényezői,
 $W_m(0) = \frac{\lambda}{n_x + \lambda}, \quad W_m(i) = W_c(i), \quad i = 1, \dots, 2n_x$

Inicializálás:

$$\hat{x}[0|0] = \mathbb{E}\{x[0]\}$$

$$P_x[0|0] = \text{cov}\{x[0] - \hat{x}[0]\}$$

Ismétlés $k = 1, 2, \dots, \infty$ -re:**A szigma pontok számítása:**

$$\bar{\mathcal{X}}[k-1|k-1] = \hat{x}[k-1|k-1] + \begin{pmatrix} 0 & \gamma\sqrt{P_x[k-1|k-1]} & -\gamma\sqrt{P_x[k-1|k-1]} \end{pmatrix}$$

Predikció:

$$\bar{\mathcal{X}}[k|k-1] = \phi(\bar{\mathcal{X}}[k-1|k-1], u[k-1])$$

$$\hat{x}[k|k-1] = \sum_{i=0}^{2n_x} W_m(i) \bar{\mathcal{X}}_i[k|k-1]$$

$$P_x[k|k-1] = \sum_{i=0}^{2n_x} W_c(i) (\bar{\mathcal{X}}_i[k|k-1] - \hat{x}[k|k-1]) (\bar{\mathcal{X}}_i[k|k-1] - \hat{x}[k|k-1])^T + P_w$$

A szigma pontok kiterjesztése:

$$\mathcal{X}[k|k-1] = \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{X}}[k|k-1] & \bar{\mathcal{X}}[k|k-1] + \gamma\sqrt{P_w} & \bar{\mathcal{X}}[k|k-1] - \gamma\sqrt{P_w} \end{pmatrix}$$

5. ábra. Az *unscented* Kálmán-szűrő algoritmus a szigma pontok kiterjesztéséig.

Kimenet predikciója:

$$\mathcal{Y}[k] = g(\mathcal{X}[k|k-1])$$

$$\hat{y}[k] = \sum_{i=0}^{2n_x} W_m(i) \mathcal{Y}_i[k]$$

$$P_y[k] = \sum_{i=0}^{2n_x} W_c(i) (\mathcal{Y}_i[k|k-1] - \hat{y}[k])(\mathcal{Y}_i[k|k-1] - \hat{y}[k])^T + P_v$$

$$P_{xy}[k] = \sum_{i=0}^{2n_x} W_c(i) (\mathcal{X}_i[k|k-1] - \hat{x}[k|k-1])(\mathcal{Y}_i[k|k-1] - \hat{y}[k])^T$$

Frissítés:

$$K[k] = P_{xy}[k] P_y^{-1}[k]$$

$$\hat{x}[k|k] = \hat{x}[k|k-1] + K[k](z[k] - \hat{y}[k])$$

$$P_x[k|k] = P_x[k|k-1] - K[k] P_y[k] K^T[k]$$

6. ábra. Az *unscented* Kálmán-szűrő algoritmusának utolsó két lépése: a kimenet predikciója és a frissítés.

$j = 1, 2, \dots, n_\Psi$. Az egyes állapotjeleket rendezzük egy $\mu = (\mu_1 \ \mu_2, \dots, \mu_{n_\Psi})^T$ vektorba. Ekkor $\mu : \Psi^{n_\Psi} \times \mathbb{N} \mapsto \{0, 1\}^{n_\Psi}$ olyan leképezés amely egy mintavételi időpontban megmutatja hogy az összes szenzor közül melyekből tudunk mérési eredményt kiolvasni.

Az állapotjelek 2^{n_Ψ} lehetséges variációjából nem feltétlenül fordul elő az összes fizikailag. Legyen a megvalósuló variációk halmaza $\Xi \subseteq \{0, 1\}^{n_\Psi}$. Számozzuk meg e variációkat, tehát definiáljuk egy további $\zeta : \Xi \mapsto \mathbb{N}$ leképezést. Amennyiben $0 \in \Xi$, legyen $\zeta(0) = 0$, tehát a nulla sorszámot tartjuk fenn annak az állapotnak, amikor egyik szenzor sem produkál mérést, ha ilyen előfordulhat. Ezen felül ζ tetszőlegesen megválasztható. Jelölje a megvalósuló konfigurációk számát $n_\Xi = |\Xi|$.

Az állapotbecslés úgy valósítható meg ilyen körülmények között, hogy minden

$$\begin{aligned} x[k+1] &= \phi(x[k], u[k], d[k], w[k]), \\ z[k] &= g_i(x[k], v_i[k]) \end{aligned} \tag{3.32}$$

rendszerhez konstruálunk egy Kálmán-szűrőt, $i \in \zeta(\Xi)$. A Kálmán-szűrők közül mindig kiválasztjuk az állapotjelek által kijelöltet és inicializáljuk az előző szűrő becslésének eredményével. Ezután az aktuális Kálmán-szűrő elvégzi a számításokat, így kapjuk meg a becsült értékeket. Az algoritmus részletesebb leírása látható a 7. ábrán.

A 8. ábra algoritmus egyetlen Kálmán-szűrőt használ, amelyet olyan rendszerhez tervezünk,

amelynek több lehetséges kimeneti egyenlete van, amelyek közül az állapotjelek alapján választunk. A rendszer alakja e szerint

$$x[k+1] = \phi(x[k], u[k], d[k], w[k]), \quad (3.33)$$

$$z[k] = \begin{cases} \emptyset, & \text{ha } \zeta(\mu(k)) = 0 \\ g_1(x[k], v_1[k]), & \text{ha } \zeta(\mu(k)) = 1 \\ \vdots \\ g_{n_{\Xi}-1}(x[k], v_{n_{\Xi}-1}[k]), & \text{ha } \zeta(\mu(k)) = n_{\Xi} - 1 \end{cases}. \quad (3.34)$$

A Kálmán-szűrőt nem ilyen rendszer állapotbecslésére tervezték. Ennek ellenére, mivel az állapotátmenti egyenlet nem változik, a rendszer állapotvektorának fizikai értelme sem változik az állapotjelek hatására. Ez azt eredményezi, hogy a 7. ábra algoritmusában a Kálmán-szűrők állapotváltozói is megegyeznek. Ennek értelmében az n_{Ξ} Kálmán-szűrő összevonható egygyé, tehát a 7. és a 8. ábrán látható algoritmus ekvivalens.

Az eredményül kapott módszerrel tehát megvalósítható olyan rendszer állapotbecslése, amelynek szenzorai különböző mintavételi idővel vagy aszinkron módon mintavételeznek, ha rendelkezésünkre áll olyan fizikai jel, amely alapján tudjuk, hogy egy mintavételkor mely szenzorok mérése áll rendelkezésre.

4. Megjegyzés. A módszer alkalmazható olyan esetekben is, amikor a mintavételi idők nem egymás egész számú többszörösei. Ebben az esetben az algoritmus ciklusidejét a mintavételi idők legkisebb közös osztójára állítva minden szenzor adata feldolgozható. Azokban a ciklusokban, amikor egyik szenzor sem ad mérési adatot, a Kálmán-szűrő predikciója szolgáltatja a becslést a 8. ábrának megfelelően.

3.3. A bakdarun alkalmazott szenzorok

A kísérletek során használt bakdaru modellen többféle szenzor is rendelkezésre áll. Használunk inkrementális adókat a kocsi elmozdulásának és a kötéll hosszának mérésére is. Az adók 500 inkremenssel rendelkeznek, amelyek a négyszeres kiéréskelésnek köszönhetően $\frac{2\pi}{2000}$ -es szögfelbontást eredményeznek. A bakdarun alkalmazott inkrementális adók közül kettő a 9. ábrán látható.

Egy kis tömegű fémszerkezet (a közvetítőelem) egyik végét rögzítjük a kocsin, amely a rögzítési pont körül szabadon elfordulhat, a másik vége követi a kötéll mozgását. A konstrukció kivitelezését a 10. ábra mutatja. A kocsihoz rögzített végének elfordulását inkrementális adóval mérjük, így a kötéll lengési szögének mérésére alkalmas érzékelőt nyerünk. Ugyan a

Paraméterek:

- n_{Ξ} : a megvalósuló szenzorvariációk száma
- $\hat{x}[0|0]$: kezdeti állapot becsült értéke
- $\hat{d}[-1|0]$: kezdeti ismeretlen bemenetek becsült értéke
- $P_x[0|0]$: kezdeti állapot becslési hibájának kovarianciája
- $P_d[-1|0]$: kezdeti ismeretlen bemenetek becslési hibájának kovarianciája

Ismétlés $k = 1, 2, \dots \infty$ -re:

1. $\mu(k)$ állapotjelek beolvasása
2. $i = \zeta(\mu(k))$
3. Állapotbecslés az i . Kálmán-szűrővel
 - (a) Inicializálás $\hat{x}[k-1|k-1]$, $\hat{d}[k-2|k-1]$,
 $P_x[k-1|k-1]$, $P_d[k-2|k-1]$ értékkel
 - (b) Predikció: $\hat{x}[k|k-1]$, $\hat{d}[k-1|k-1]$, $P_x[k|k-1]$,
 $P_d[k-1|k-1]$ számítása $x[k+1] = \phi(x[k], u[k], d[k], 0)$ alapján
 - (c) Frissítés:
 - ha $i \neq 0$:
 - i. z_j beolvasása $\forall \psi_j \in \Psi$ esetén, amelyre
 $\mu_j(k) = 1$
 - ii. $\hat{x}[k|k]$, $\hat{d}[k-1|k]$, $P_x[k|k]$, $P_d[k-1|k]$ számítása
 $y[k] = g_i(x[k], 0)$ alapján
 - ha $i = 0$:

$$\hat{x}[k|k] = \hat{x}[k|k-1]$$

$$\hat{d}[k-1|k] = \hat{d}[k-1|k-1]$$

$$P_x[k|k] = P_x[k|k-1]$$

$$P_d[k-1|k] = P_d[k-1|k-1]$$

7. ábra. Szenzorfüzió algoritmus n_{Ξ} különböző Kálmán-szűrő használatával.

Paraméterek:

- n_{Ξ} : a megvalósuló szenzorvariációk száma

Inicializálás:

$$\hat{x}[0|0] = \mathbb{E}\{x[0]\}$$

$$\hat{d}[-1|0] = \mathbb{E}\{d[0]\}$$

$$P_x[0|0] = \text{cov}\{x[0] - \hat{x}[0|0]\}$$

$$P_d[-1|0] = \text{cov}\{d[0] - \hat{d}[-1|0]\}$$

Ismétlés $k = 1, 2, \dots \infty$ -re:

1. Predikció: $\hat{x}[k|k-1]$, $\hat{d}[k-1|k-1]$, $P_x[k|k-1]$, $P_d[k-1|k-1]$ számítása $x[k+1] = \phi(x[k], u[k], d[k], 0)$ alapján
2. $\mu(k)$ állapotjelek beolvasása
3. $i = \zeta(\mu(k))$
4. $z_i[k]$ beolvasása a rendelkezésre álló szenzorokból
5. Frissítés:

- ha $i \neq 0$:

(a) z_j beolvasása $\forall \psi_j \in \Psi$ esetén, amelyre $\mu_j(k) = 1$

(b) $\hat{x}[k|k]$, $\hat{d}[k-1|k]$, $P_x[k|k]$, $P_d[k-1|k]$ számítása $y[k] = g_i(x[k], 0)$ alapján

- ha $i = 0$:

$$\hat{x}[k|k] = \hat{x}[k|k-1]$$

$$\hat{d}[k-1|k] = \hat{d}[k-1|k-1]$$

$$P_x[k|k] = P_x[k|k-1]$$

$$P_d[k-1|k] = P_d[k-1|k-1]$$

8. ábra. Szenzorfüzió egyetlen több kimeneti modellel rendelkező rendszerhez tervezett Kálmán-szűrő segítségével.



9. ábra. A bakdarun x_r és x_θ mérésre alkalmazott inkrementális adók.



10. ábra. A bakdarun alkalmazott inkrementális adóra épülő szögmérő szenzor.

szenzor mozgórészének tehetetlensége igen kicsi, a lengést mégis befolyásolja, a mért jelben felharmonikust okoz.

Ezekben felül alkalmazunk két úgynevezett hézag szenzort is, amelyek a 11. ábrán láthatók. Ezekben a szenzorokban egy-egy lézer működik, amely sugarát megszakítja a szenzor érzékelési területén áthatoló tárgy. A sugár megszakításának hatására a szenzor kimenete logikai nullából egybe vált. A kiolvasó elektronika segítségével a kimenetet a kiolvasás után visszaállítjuk logikai nullába, így a szenzor egy impulzussal jelzi ha a sugár megszakított állapotba került. Előfordul, hogy az érzékelt tárgy lassan halad át a szenzoron, ekkor az több impulzust is leadhat. A pontosság növelése érdekében az ismételt impulzusokat nem vesszük figyelembe, ha azok 0.1 sec időtartamon belül követik egymást.

Az inkrementális adón alapuló szögmérőt csak validációra alkalmazzuk, annak jelét nem használjuk fel az állapotbecsléshez. Az eddig ismertetett fizikai érzékelők alapján a továbbiakban bemutatjuk az állapotbecsléshez használt fizikai és virtuális szenzorokat, tehát Ψ halmaz elemeit és a 3.2. szakaszban tárgyalt jellemzőiket.



11. ábra. A bakdarun alkalmazott hézag szenzorok.

1. Az egyik inkrementális adót x_ℓ mérésre használjuk fel. Az adó szögfelbontása $\frac{\pi}{1000}$, sugara pedig hozzávetőlegesen 1.5 cm, tehát bizonytalansága 10^{-5} m nagyságrendű. A jelfeldolgozó elektronika pontatlansága és a jelterjedés közben megjelenő zajok miatt a szenzor bizonytalanságát inkább $\sigma_\ell = 10^{-3}$ m-re becsüljük. Ennél nagyobb pontosságra az elmozdulás méréséhez nincs szükség. A szenzorról feltesszük, hogy minden mintavételkor szolgáltat mérési adatot, ezért állapotjele $\mu_1(k) \equiv 1$.
2. Egy további inkrementális adót x_r mérésre használunk. Ez a szenzor azonos az előzővel, tehát bizonytalansága $\sigma_r = \sigma_\ell = 10^{-3}$ m, állapotjele $\mu_2(k) \equiv 1$.
3. A 11. ábrán látható két hézag szenzor közül a pozitív szög irányába elhelyezkedőt virtuális szenzorként alkalmazzuk. A hézag szenzor kimenetét ψ_3 állapotjelének tekintjük, a mért jele pedig az a θ_+ érték, amelynél a szenzor jelt ad. Úgy tekintünk tehát e szenzorra, mintha θ -t mérné, de nem minden mintavételi időben szolgáltatna adatot. Az érzékelővel végzett mérések alapján $\theta_+ = 0.05$ rad, bizonytalansága $\sigma_{\theta_+} = 0.0025$ rad.
4. A negatív szögek irányába elhelyezett hézag szenzort ψ_3 -mal azonosan használjuk fel. A virtuális érzékelő adatai $\theta_- \approx -\theta_+ = -0.05$ rad, $\sigma_{\theta_-} \approx \sigma_{\theta_+} = 0.0025$ rad.
5. Ha a daru kötele a két szenzor között elég rövid idő alatt halad át, akkor a kettő között eltelt idő mérésével szögsebességet is számítunk. Definiáljuk az $E_{3,4}$ eseményt

$$E_{3,4} = \{\mu_3(k - \Delta k) = 1 \text{ és } \mu_4(k) = 1 \text{ és} \quad (3.35)$$

$$\mu_3(k') = \mu_4(k') = 0, \text{ ha } k - \Delta k < k' < k \text{ és } \Delta k T_s < T_\Delta\}$$

egyenlőséggel. $E_{3,4}$ azt jelenti, hogy a kötelet először a pozitív, majd a negatív irányban elhelyezkedő hézag szenzor érzékeli rendre a $k - \Delta k$. és k . mintavételkor. A kettő között a kötel nem halad át egyik szenzoron sem, és mindez T_Δ időn belül lezajlik. Kísérleti

μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	ζ
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	2
1	1	0	1	0	3
1	1	1	0	1	4
1	1	0	1	1	5

3. táblázat. ζ hozzárendelés definíciója a bakdarun alkalmazott szenzorok esetén. A táblázatban nem szereplő variációk nem fordulhatnak elő, ha mégis, akkor azokat hibának kell tekinteni.

tapasztalatok alapján $T_\Delta = 0.5$ sec értéket állapítottunk meg. Az $E_{4,3}$ esemény legyen az $E_{3,4}$ -hez hasonló, de fordított szenzorsorrenddel, tehát

$$E_{4,3} = \{\mu_4(k - \Delta k) = 1 \text{ és } \mu_3(k) = 1 \text{ és } \mu_3(k') = \mu_4(k') = 0, \text{ ha } k - \Delta k < k' < k \text{ és } \Delta k T_s \leq T_\Delta\}. \quad (3.36)$$

A szögsebesség értékét, vagyis a virtuális ψ_5 kimenetét

$$\dot{\theta}[k] = \begin{cases} \frac{\theta_- - \theta_+}{\Delta k T_s}, & \text{ha } E_{3,4} \text{ következik be a } k - 1. \text{ és } k. \text{ mintavétel között} \\ \frac{\theta_+ - \theta_-}{\Delta k T_s}, & \text{ha } E_{4,3} \text{ következik be a } k - 1. \text{ és } k. \text{ mintavétel között} \\ \emptyset, & \text{egyébként} \end{cases} \quad (3.37)$$

szabály alapján számítjuk. A virtuális szenzor állapotjele ezek szerint

$$\mu_5(k) = \begin{cases} 1, & \text{ha } E_{3,4} \text{ vagy } E_{4,3} \text{ következik be a } k - 1. \text{ és } k. \text{ mintavétel között} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases} \quad (3.38)$$

A mérés bizonytalansága $\sigma_{\dot{\theta}} = \sigma_{\theta_+} + \sigma_{\theta_-} + T_s = 6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$, ahol T_s a deriválás közelítésére használt Euler-módszer hibája.

A megvalósuló állapotjel variációk és a hozzájuk rendelt sorszám a 3. táblázatban olvasható. Ezek alapján a daru UKF által használt (3.34) mérési modellje

$$z[k] = \begin{cases} g_1(x[k]) + v_1[k], & \text{ha } \zeta(\mu(k)) = 1 \\ g_2(x[k]) + v_2[k], & \text{ha } \zeta(\mu(k)) = 2 \\ g_3(x[k]) + v_3[k], & \text{ha } \zeta(\mu(k)) = 3 \\ g_4(x[k]) + v_4[k], & \text{ha } \zeta(\mu(k)) = 4 \\ g_5(x[k]) + v_5[k], & \text{ha } \zeta(\mu(k)) = 5 \end{cases}, \quad (3.39)$$

ahol $g_1(x[k]) = (\ell \ r)^T$, $g_2(x[k]) = g_3(x[k]) = (\ell \ r \ \theta)^T$, $g_4(x[k]) = g_5(x[k]) = (\ell \ r \ \theta \ \dot{\theta})^T$. A szenzorok jeleit $\zeta \neq 1$ esetén kiegészítjük a virtuális mérésekkel, tehát az UKF bemenetére ráadjuk a megfelelő számított szög és szögsebesség értéket.

Az UIKF esetén is használjuk ezeket a virtuális méréseket, azonban itt a mérési eredmények helyett $z[k] - Cx_0$ értéket dolgozzuk fel, mivel az UIKF által használt modellt linearizálással kaptuk. A g_i függvények ugyanezen okból $C_i \delta x$ alakúak, $i = 1, 2, \dots, 5$. A kimeneti mátrixok értéke

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_4 = C_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

Mindkét szűrő azonos mérési zaj kovarianciákat használ, amelyek értéke a szenzorok bizonytalanságából következik. Az érzékelőket függetlennek feltételezve

$$P_{v,1} = \begin{pmatrix} \sigma_\ell^2 & 0 \\ 0 & \sigma_r^2 \end{pmatrix}, \quad P_{v,2} = \begin{pmatrix} \sigma_\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_r^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta+}^2 \end{pmatrix}, \quad P_{v,3} = \begin{pmatrix} \sigma_\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_r^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta-}^2 \end{pmatrix},$$

$$P_{v,4} = \begin{pmatrix} \sigma_\ell^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta+}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_\theta^2 \end{pmatrix}, \quad P_{v,5} = \begin{pmatrix} \sigma_\ell^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta-}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_\theta^2 \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

A rendszer kimeneti modelljének ismeretében a diszkrét idejű lineáris modell állapotbecslés szempontjából fontos két tulajdonságát tudjuk megállapítani.

3. Állítás. *A diszkrét idejű lineáris időinvariáns darumodell a $C_1, C_2, \dots, C_5$ kimeneti mátrixok mindegyike esetén teljesen megfigyelhető.*

Bizonyítás. Diszkrét idejű lineáris és időinvariáns rendszerek esetén a megfigyelhetőségi mátrix definíciója

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ C\Phi \\ \vdots \\ C\Phi^{n_x-1} \end{pmatrix}, \quad (3.42)$$

a teljes megfigyelhetőség szükséges és elégséges feltétele, hogy $\text{rank}\{\mathcal{O}\} = n_x$ teljesüljön [Lan01, 283. o.].

A megfigyelhetőségi mátrix $\zeta = 1$ esetben

$$\mathcal{O}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2mg}{M\omega_0^2} \sin^2\left(\frac{\omega_0 T_s}{2}\right) & T_s & 0 & -\frac{mg(\sin(\omega_0 T_s) - \omega_0 T_s)}{M\omega_0^3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & T_s & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2mg \sin^2(\omega_0 T_s)}{M\omega_0^2} & 2T_s & 0 & -\frac{mg(\sin(2\omega_0 T_s) - 2\omega_0 T_s)}{M\omega_0^3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2T_s & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{mg(\cos(3\omega_0 T_s) - 1)}{M\omega_0^2} & 3T_s & 0 & -\frac{mg(\sin(3\omega_0 T_s) - 3\omega_0 T_s)}{M\omega_0^3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3T_s & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2mg \sin^2(2\omega_0 T_s)}{M\omega_0^2} & 4T_s & 0 & -\frac{mg(\sin(4\omega_0 T_s) - 4\omega_0 T_s)}{M\omega_0^3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4T_s & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{mg(\cos(5\omega_0 T_s) - 1)}{M\omega_0^2} & 5T_s & 0 & -\frac{mg(\sin(5\omega_0 T_s) - 5\omega_0 T_s)}{M\omega_0^3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5T_s & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Válasszuk ki $\mathcal{O}_1$ első öt sorát és a hetediket is. Az így képzett mátrix determinánsa

$$-\frac{4m^2 g^2 T_s^2 \sin(\omega_0 T_s)}{M^2 \omega_0^5} \left(\sin^2(\omega_0 T_s) - 4 \sin^2\left(\frac{\omega_0 T_s}{2}\right) \right). \quad (3.44)$$

A kifejezésben megjelenő paraméterek közül M , m , J , ρ inerciaparaméterek, tehát értékük csak pozitív lehet, g pozitív fizikai állandó, T_s pedig mintavételi idő, amely szintén nullánál nagyobb. A (2.35) összefüggés és a benne megjelenő mennyiségekre tett megkötés értelmében ω_0 is pozitív szám. Ezek szerint (3.44) determináns értéke akkor és csak akkor lehet nulla ha

$$\sin^2(\omega_0 T_s) = 4 \sin^2\left(\frac{\omega_0 T_s}{2}\right) \quad (3.45)$$

A bal oldalt átalakítva $\sin(\omega_0 T_s) = 2 \sin\left(\frac{\omega_0 T_s}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_0 T_s}{2}\right)$ trigonometrikus azonosság segítségével

$$\cos^2\left(\frac{\omega_0 T_s}{2}\right) = 1 \quad (3.46)$$

feltételt kapjuk. A paraméterek pozitív értéke miatt ez sosem teljesül, ezért (3.44) determináns a paraméterek semmilyen előforduló értéke mellett nem nulla.

Ez azt is jelenti hogy az $\mathcal{O}_1$ mátrixból kiválasztott részmátrix teljes rangú, azaz rangja hat, ami ekvivalens azzal hogy oszlopai lineárisan függetlenek. Egy lineárisan független vektorrendszer elemeit akármilyen újabb komponensekkel bővítve a rendszer lineárisan független marad, ezért $\mathcal{O}_1$ oszlopai is lineárisan függetlenek. Eszerint $\text{rank}\{\mathcal{O}_1\} = 6 = n_x$, vagyis a rendszer a C_1 kimeneti mátrixszal teljesen megfigyelhető.

A $C_2 = C_3$, $C_4 = C_5$ kimeneti mátrixokat úgy kapjuk hogy C_1 -et sorokkal bővítjük, ezért $\mathcal{O}_i$ mátrixok is sorok hozzátételével állnak elő $\mathcal{O}_1$ -ből $i = 2, 3, 4, 5$. A korábbi okfejtés alapján tehát elmondható hogy az összes megfigyelhetőségi mátrix oszlopai lineárisan függetlenek, így a lineáris modell minden C_i kimenetei mátrix esetén teljesen megfigyelhető $i = 1, 2, \dots, 5$. $\square$

4. Állítás. *A diszkrét idejű lineáris időinvariáns darumodell állapotmegfigyelésére a bemeneteket ismeretlennek feltételezve a $C_1, C_2, \dots, C_5$ kimeneti mátrixok mindegyike esetén konstruálható UIKF.*

Bizonyítás. Az UIKF konstruálhatóságának szükséges és elégséges feltétele, hogy a bakdaru lineáris modellje a (3.6)-(3.9) kritériumokat kielégítse.

Az ismeretlen bemenetek száma a kimeneti modelltől függetlenül kettő. A kimenetek száma kettő, három vagy négy, tehát (3.6) minden esetben teljesül. A kimeneti mátrixok rangja $\text{rank}\{C_1\} = 2$, $\text{rank}\{C_2\} = \text{rank}\{C_3\} = 3$, $\text{rank}\{C_4\} = \text{rank}\{C_5\} = 4$, amit összevetve a kimenetek számával látható, hogy (3.7) feltétel is teljesül.

A (3.9) kielégülésének vizsgálatához tekintsük

$$C_1\Gamma_d = \begin{pmatrix} \frac{T_s^2}{2M} + \frac{2mg}{M^2\omega_0^4 x_{r,0}} \left(\sin^2\left(\frac{\omega_0 T_s}{2}\right) - \left(\frac{\omega_0 T_s}{2}\right)^2 \right) & 0 \\ 0 & -\frac{\rho T_s^2}{2(m\rho^2 + J)} \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

mátrixot. A rendszer paramétereinek fizikai jelentése miatt $M, m, J, \rho, T_s > 0$, és ebből következően $\omega_0 > 0$. $C_1\Gamma_d$ rangja akkor akkor és csak akkor nem kettő, ha

$$\frac{T_s^2}{2M} + \frac{2mg}{M^2\omega_0^4 x_{r,0}} \left(\sin^2\left(\frac{\omega_0 T_s}{2}\right) - \left(\frac{\omega_0 T_s}{2}\right)^2 \right) = 0. \quad (3.48)$$

Átrendezve

$$\sin^2\left(\frac{\omega_0 T_s}{2}\right) - \left(\frac{\omega_0 T_s}{2}\right)^2 = -\frac{T_s^2 M \omega_0^4 x_{r,0}}{4mg} = -\left(\frac{\omega_0 T_s}{2}\right)^2 \frac{M \omega_0^2 x_{r,0}}{mg} \quad (3.49)$$

egyenletet kapjuk. A jobb oldalon ω_0^2 helyére (2.34) szerinti kifejezést írva (3.49) átrendezhető

$$\sin^2\left(\frac{\omega_0 T_s}{2}\right) + \frac{M}{m} \left(\frac{\omega_0 T_s}{2}\right)^2 = 0 \quad (3.50)$$

alakra. Mivel a paraméterek pozitívak, (3.50) sosem teljesül. Ezek szerint a rendszer paramétereinek minden előforduló értéke esetén $\text{rank}\{C_1\Gamma_d\} = 2$. Mivel $C_1\Gamma_d$ a $C_i\Gamma_d$ mátrixok felső blokkja $i = 2, 3, 4, 5$ esetén, ezért $2 \leq \text{rank}\{C_i\Gamma_d\}$. E mátrixok oszlopainak száma kettő, ezért $\text{rank}\{C_i\Gamma_d\} \leq 2$ is igaz, így $\text{rank}\{C_i\Gamma_d\} = 2$, $i = 1, 2, \dots, 5$. Ebből következik, hogy (3.9) feltétel is teljesül minden kimeneti modell esetén.

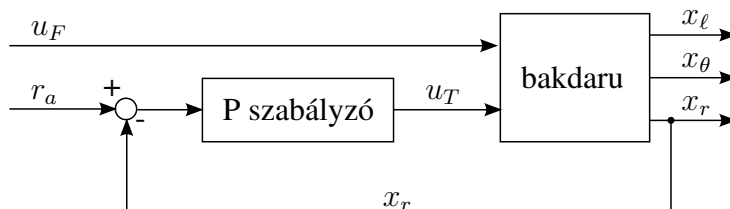
Mivel $C_1\Gamma_d$ felső blokkja Γ_d mátrixnak is, ezért az előbbi okfejtéshez hasonlóan látható hogy $\text{rank}\{\Gamma_d\} = 2$. E szerint a (3.8) feltétellel együtt valamennyi tervezési kritérium kielégül.

$\square$

Kísérleti eredmények

A 3. fejezetben bemutatott módszereket laboratóriumi körülmények között egy darumodel- len végzett mérések feldolgozásával végezzük. A daru mozgásáról rögzített jelek a 13. ábrán láthatók. A beavatkozó jelek és x_ℓ , x_r , x_θ értékek közvetlenül rendelkezésünkre állnak. Utóbbiak a 3.3. szakaszban ismertetett inkrementális adók és a 10. ábra mechanikus szögmérője segítségével mérhetők. A sebességeket a mérések numerikus deriválásából kaptuk Euler-módszerrel, és lokálisan súlyozott regresszió alapú simítással (*locally weighted scatterplot smoothing* - LO- WESS) [Cle79]. A simítás az állapotbecslésben nem játszik szerepet, csak az összehasonlíthatóságot segíti.

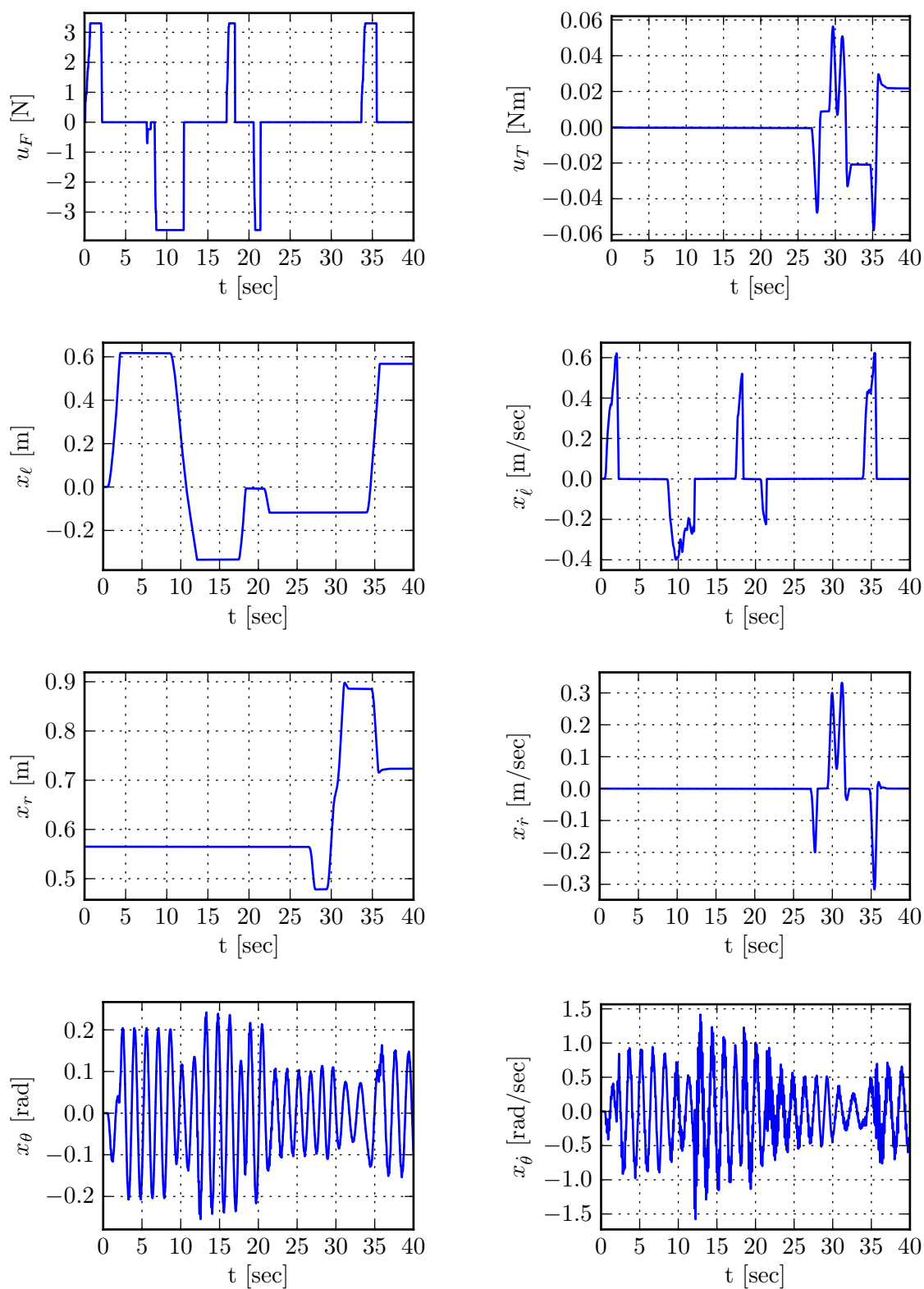
A teher a gravitáció hatására zuhanni kezdene, ezért a kötélhossz előírt értéken tartására P szabályozót használunk. Ettől eltekintve a jeleket felnyitott körben rögzítettük, amelyben a tolóerőt és a kötélhossz r_a alapjelenek értéket kézi beavatkozással állítottuk elő. Az így kapott rendszer blokkvázlata látható a 12. ábrán.



12. ábra. A méréshez használt felnyitott kör blokkvázlata a kötélhosszt szabályozó P szabályozóval.

A beavatkozó jeleken jól megfigyelhető a súrlódás hatása. Látható hogy az erő egy rövid ideig úgy növekszik, hogy a kocsi nem mozdul meg, mivel u_F addig nem lépi át a tapadás határát. A hetedik másodperc környékén van egy rövid negatív erőimpulzus, amelyre a rendszer szintén a tapadás miatt nem reagál. A P szabályozó a kötéel hosszát jó pontossággal az előírt értéken tartja, csupán kis mértékű túllövés észlelhető x_r jelben. Itt is megfigyelhető, hogy $\dot{x}_r$ csak akkor kezd növekedni, amikor u_T már meghaladta a tapadási határt.

A kocsit rövid erőimpulzusok segítségével elmozgatjuk a sín mentén néhány pozícióba. Eközben a teher az ipari viszonyokhoz képest nagy lengéseket produkál, előfordul, hogy x_θ meghaladja a 12° -ot is. A lengés csökkentésére egy kezdetleges módszer a kocsit a lengés szélső helyzetében a lengés irányába mozdítani. Ezt a technikát azonban nehéz alkalmazni, a beavatkozás kezdete és a kocsi tényleges megmozdulása közti késleltetés miatt (ami a



13. ábra. A bakdaru mozgásáról rögzített jelek. Az $x_{\dot{\ell}}$, $x_{\dot{r}}$ és $x_{\dot{\theta}}$ értékek numerikus deriválás és simítás eredményei.

súrlódás következménye). A 13. ábrán látható, hogy az amplitúdót csak kis mértékben sikerült így csökkenteni. Ez is jól szemlélteti a kézi irányítás nehézségét daruk esetén.

A laboratóriumi darumodellen csak kis kötélhosszok valósíthatók meg, ez okozza a teher lengésének nagy frekvenciáját. Az 25. és 30. másodperc között a kocsi áll, és ekkor hozzávetőlegesen három periódus zajlik le. Ez alapján a lengés körfrekvenciája 3.8 rad/sec . Mivel a kocsi áll, a lineáris modell a (2.34) összefüggése $M \rightarrow \infty$ határértékben érvényes, ami alapján

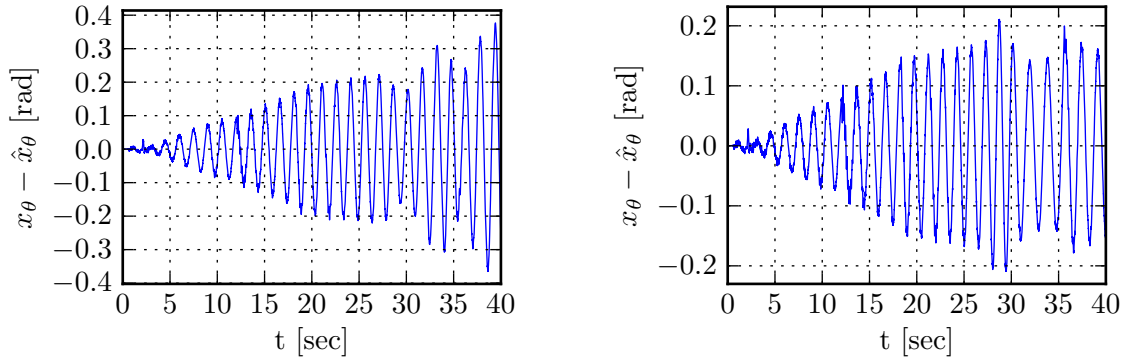
$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{(M+m)g}{Mx_{r,0}}} = \sqrt{\frac{g}{x_{r,0}}} = 4.2 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad (4.1)$$

értéket kapjuk. A mért és számított érték közel esik egymáshoz, figyelembe véve azt is hogy a különbségüket a grafikon pontatlan leolvasása is okozza.

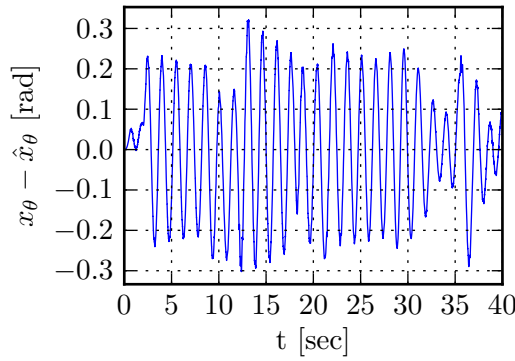
A bakdaru lineáris modellje a 3. állítás értelmében megfigyelhető csak x_ℓ és x_r mérésével is ha nincs jelen súrlódás. Ebben az esetben az állapotbecslés megvalósítható a hézag szenzor jelét nem felhasználva, tehát egyszerűen a 3.1. szakaszban bemutatott Kálmán-szűrőkkel is. Az így végzett szögbecslés hibáját mutatja 14. ábra. Látható hogy a hiba kezdetben kicsi, azonban az idő múlásával egyre növekszik.

Ennek fő oka a súrlódás jelenléte. Amikor a kocsi a tapadás következtében megáll, x_ℓ és x_r változatlan, csak u_T ingadozhat a kötélhossz változásának kompenzálásra. A beavatkozó jelek értéke azonban megbízhatatlan a súrlódás miatt a 2. fejezetben tárgyaltak alapján. Ezek szerint a kocsi álló helyzetében az ismert jelek értéke nem hordoz információt a teher pozíciójáról. A Kálmán-szűrők becslései tehát inkább szimulációk, amelyek a modell pontatlanságaira érzékenyek. Ennek hatására maradó amplitúdó és fázishiba keletkezik a becslésben, ezért periodikusak a hibák a 14. ábrán. A súrlódást is figyelembe véve tehát a hosszmerések elégtelenek, a hézag szenzorok alkalmazása indokolt a becslők konvergenciájának javítására.

5. Megjegyzés. A 15. ábra szemlélteti azt az esetet, amikor szintén pusztán inkrementális adók jelének felhasználásával az állapotbecslést a lineáris diszkrét idejű darumodellhez tervezett CKF-fel végezzük. Első ránézésre a hiba ekkor nem tűnik jelentősen különbözőnek a 14. ábrán láthatótól. Vegyük figyelembe azonban, hogy a becslés ez esetben kezdettől fogva pontatlan, a fázis és amplitúdó az első másodperctől eltér a valótól. Ezek után a hiba amplitúdója esetleg lehet kisebb, mint az UIKF-nél tapasztalt, az UIKF azonban a CKF-rel szemben kezdetben valóban pontos becsléseket produkált. Ez arra utal, hogy ha bizonyos időközönként a szög értékéről rendelkezésre áll pontos információ, akkor a CKF-rel ellentétbe a zavart bemenetű rendszerekhez tervezett becslők hosszú távon is képesek pontos becsléseket produkálni. Kísérleti eredmények alapján is láthatjuk tehát, hogy az ismeretlen bemenetű becslők alkalmazása indokolt.



14. ábra. A lengési szög becslésének hibái csak x_ℓ és x_r mérésével rendre UIKF-rel és UKF-rel.

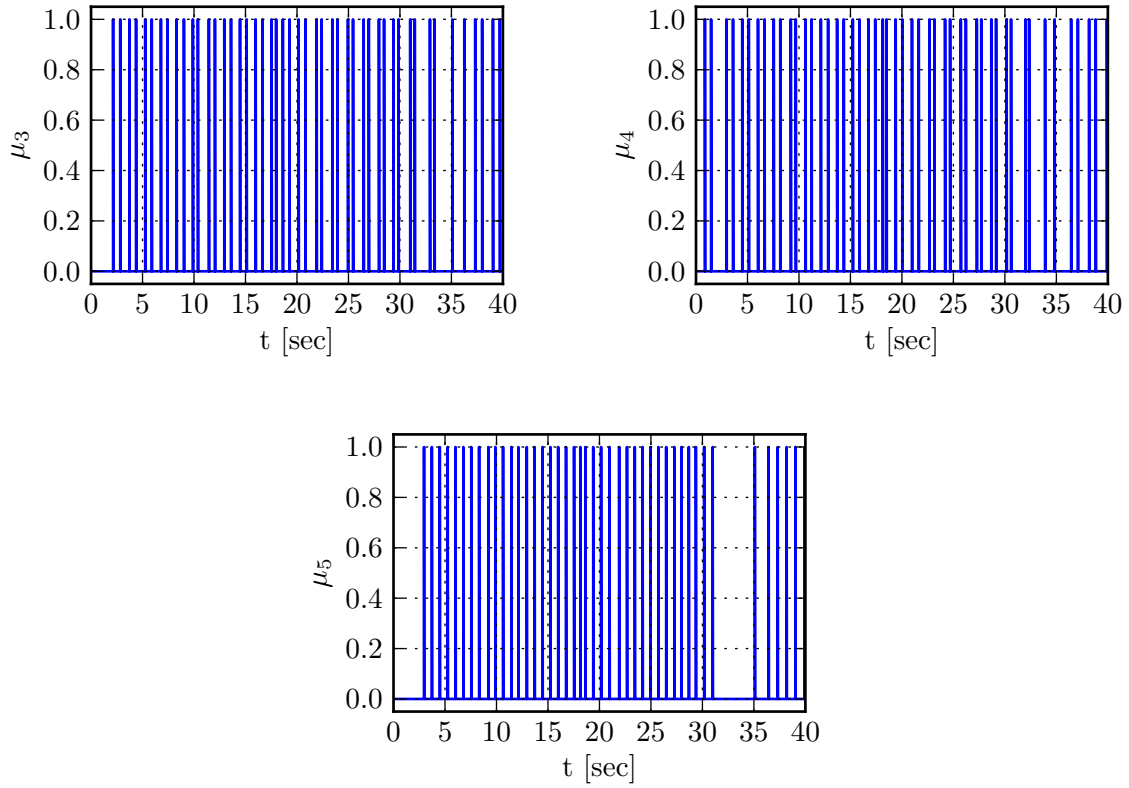


15. ábra. A lengési szög becslésének hibája csak x_ℓ és x_r mérésével CKF alkalmazása esetén.

A továbbiakban a bakdaru állapotbecslésére a 3. fejezetben ismertetett algoritmust alkalmazzuk. A 16. ábrán látható a virtuális ψ_3, ψ_4, ψ_5 szenzor állapotjele. A 3.3. szakaszban feltettük, hogy az inkrementális adók minden időpontban rendelkezésre állnak, tehát azok állapotjele $\mu_1(k) = \mu_2(k) \equiv 1$. Mivel a teher lengése viszonylag nagy frekvenciájú, a szög mért értéke is gyakran rendelkezésre áll, viszont mindig csak egy mintavételi periódusra, ezért a jelek rövid idejű impulzusok. Látható, hogy ha a teher elég gyorsan lendül át a két hézag szenzor között, akkor a szögsebesség mért értéke is rendelkezésre áll.

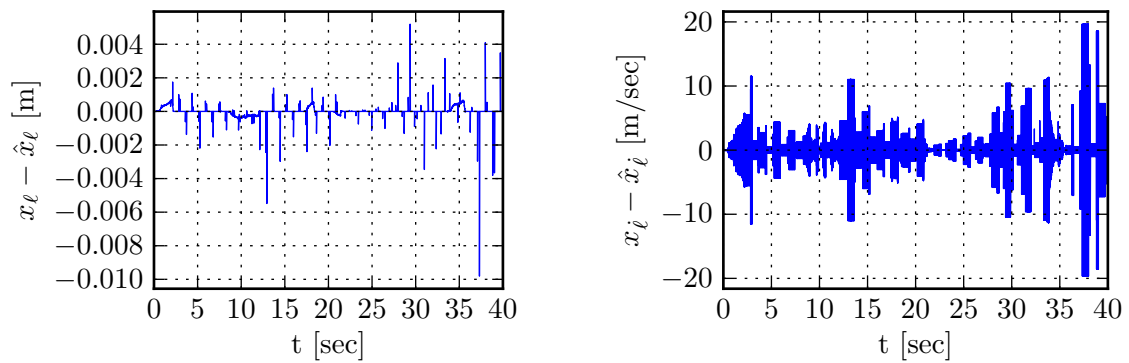
Az UIKF becslési hibája x_ℓ és x_ℓ esetén 17. ábrán látható. A hiba számításakor a mért és becslt jelet hasonlítjuk össze, ezért azt nem csak a becslés, hanem a mérés pontatlansága is okozhatja. Az összehasonlítás a sebesség esetén egy simított jellel történik, így ott a hiba értelmezése még bizonytalanabb. A bemutatott grafikonok viszont a pontosság nagyságrendjének megállapítására alkalmasak.

Az UIKF a pozíciót néhány milliméter hibával képes becsülni. A becslő zajszűrő képessége



16. ábra. A virtuális szög- és szögsebességérzékelők állaptjelei.

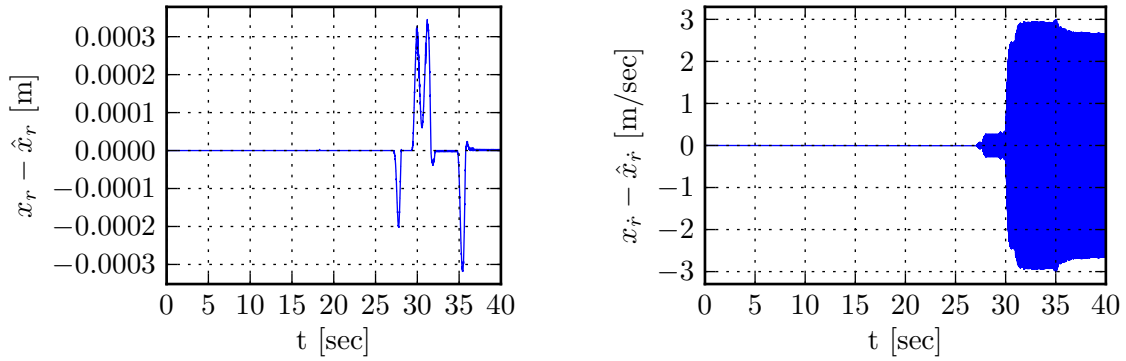
viszont korlátozottnak bizonyul, a derivált jelben a mérési zaj megjelenik. Megfigyelhető azonban, hogy a hézag szenzorok hatására a hiba ugrásszerűen változik, sokszor lecsökken.



17. ábra. A kocsí pozíciójának és sebességének becslési hibája UIKF alkalmazása esetén.

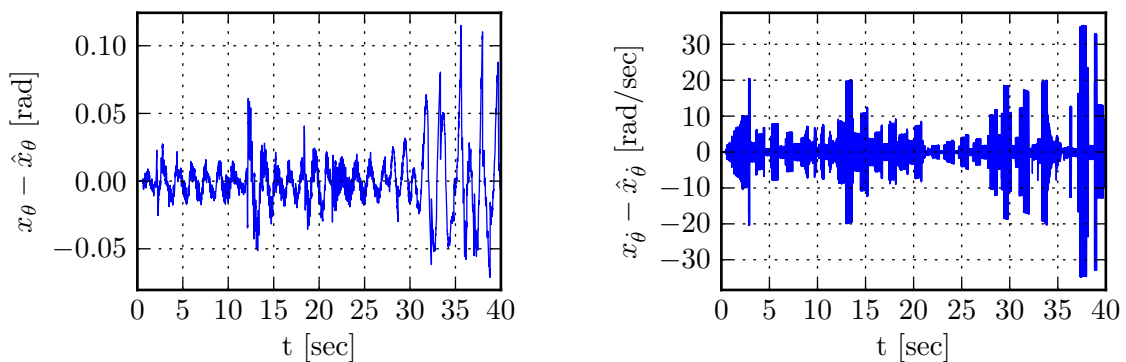
A kötélhossz becslési hibáját a 18. ábra illusztrálja. A becslés ez esetben is nagyon pontos,

csak tranziens állapotban mutatkozik eltérés a nullától. Miután azonban az x_r -t megváltoztatjuk a P szabályozó segítségével, $\dot{x}_r$ becslése nagy hibával terhelt $\dot{x}_\ell$ -hoz hasonlóan.

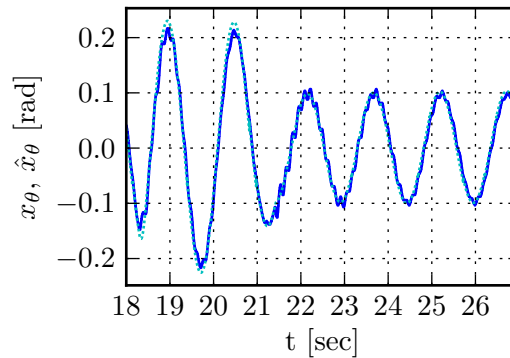


18. ábra. A kötel hosszának és változási sebességének becslési hibája UIKF alkalmazása esetén.

Az UIKF által becsült szögsebesség sem pontos, ahogy azt a 19. ábra mutatja. A szögbecslés hibája viszont kisebb, mint a hézag szenzor alkalmazása nélküli esetben a 14. ábrán. A hiba itt is periodikus jelleget mutat, de itt ez a mechanikus szögmérő okozta felharmonikus következménye. A 20. ábrán látható a mért és becsült jelek összehasonlítása. Az ábra alapján az UIKF becslése amplitúdóhibás, de a mért jelben látható ingadozás a becslésben nem jelenik meg. Mivel egy valós darun ez a jelenség nem tapasztalható, a felharmonikus jelenléte okozta eltérés nem tekinthető hibának. A kötelhossz változtatása azonban további hibát eredményez, mivel e miatt a rendszer eltávolodik a munkaponttól, amely környékén a linearizált modell pontos.

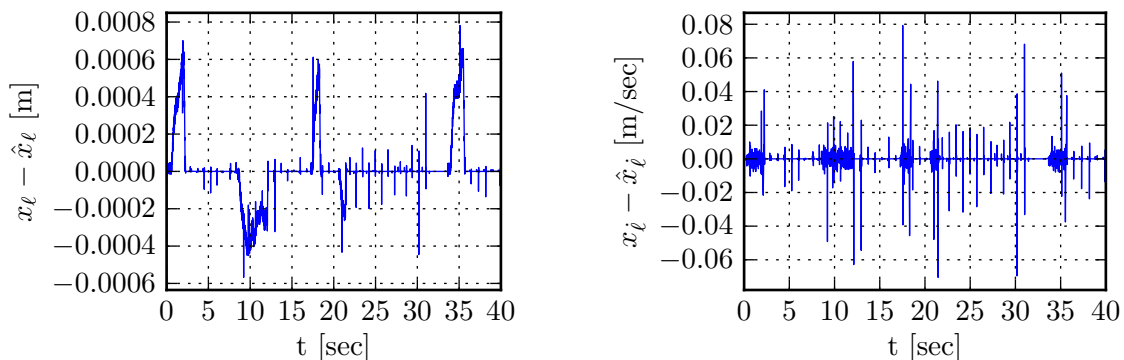


19. ábra. A lengés szögének és szögsebességének becslési hibája UIKF alkalmazása esetén.



20. ábra. Mért és becsült szög összehasonlítása UIKF esetén (folytonos - mért, szaggatott - becsült).

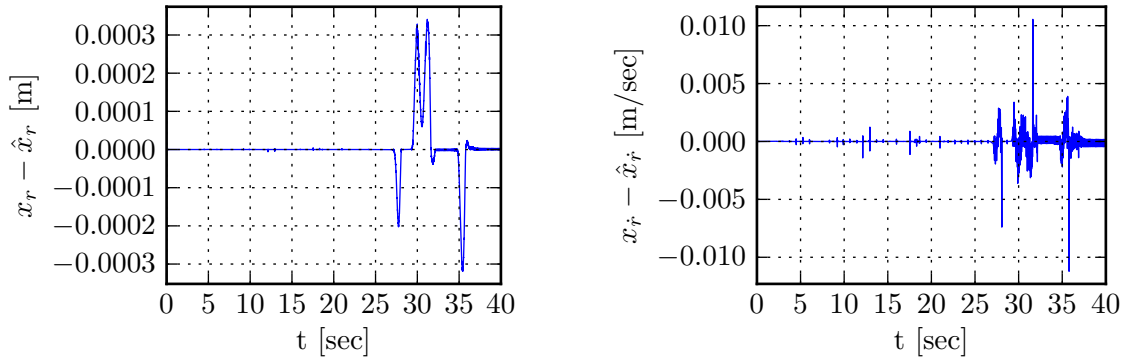
Az UKF nemlineáris modellt használ a becsléshez, így annak pontossága nem függ a munkaponttól való eltávolodástól. A 21. ábra alapján a kocsi pozícióját és sebességét is pontosan becsli. A hézag szenzorok kis bizonytalanságú jelének pillanatszerű rendelkezésre állásakor a becslő állapotai ugrásszerűen változnak, ez okozza a hibajelekben megjelenő tüskéket. Az UIKF-nél pontosabbak a becslések, különösen a sebesség esetén.



21. ábra. A kocsi pozíciójának és sebességének becslési hibája UKF alkalmazása esetén.

A kötélszög hibája a 22. ábrán látható módon hasonlóan alacsony az UIKF-hez, $\hat{x}_{\dot{\theta}}$ viszont nagyságrendekkel pontosabb. Itt is megjelennek a tüskék, amelyek az becsült jelek ugrásszerű változásának következményei. Az alapjelváltás okozta tranzienstben a hiba csak rövid időre nő meg, és értéke ekkor is viszonylag alacsony marad.

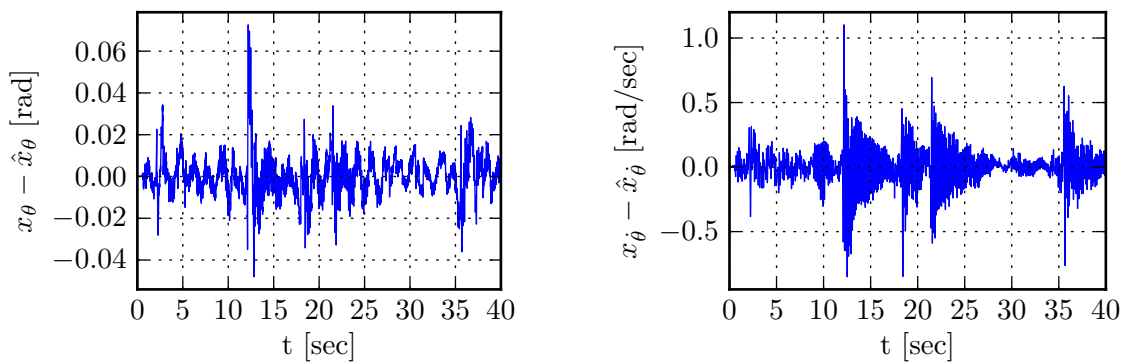
A szögbecslés pontossága majdnem két nagyságrenddel jobb a 14. ábrához képest, és hozzávetőlegesen egy nagyságrenddel jobb az UIKF eredményével összehasonlítva. Fontos kiemelni hogy a 13. másodperc közelében megnövekedő hiba a későbbiekben lecsökken. A becslési hiba



22. ábra. A kötel hosszának és változási sebességének becslési hibája UKF alkalmazása esetén.

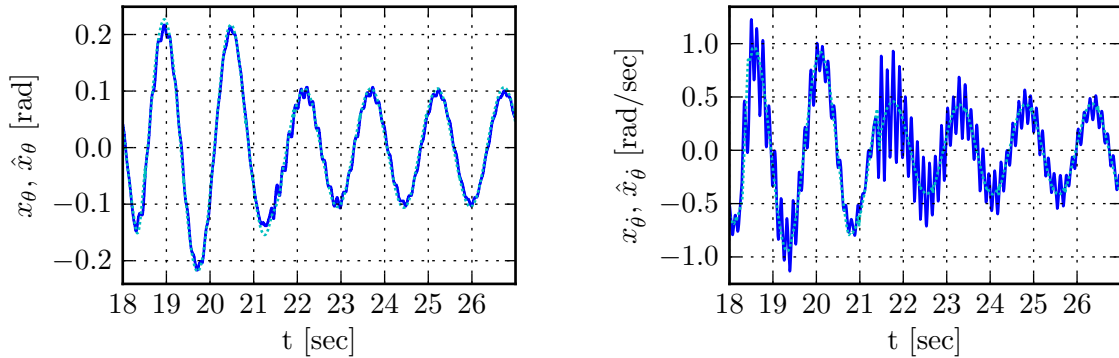
tehát ezzel az algoritmussal jobban konvergál nullához, mint a hézag szenzort nem használók a 14. ábrán látható hibagrafikonok alapján.

A $\hat{x}_{\dot{\theta}}$ hibagrafikonjáról is látható, hogy az UKF jobb szűrési tulajdonságokkal rendelkezik, mint lineáris párja. A 24. ábra összeveti a mért és számított jeleket. Megfigyelhető, hogy az UKF kiszűri a mechanikus szögmérő okozta torzulást is, így a legtöbb szakaszon $\hat{x}_{\theta}$ és $\hat{x}_{\dot{\theta}}$ jellegre a szenzor jelénél pontosabbnak tekinthető. Ez abból ered, hogy a (2.31) modell nem tartalmazza a követőelemet, így a becslő nem tud e viselkedésről.



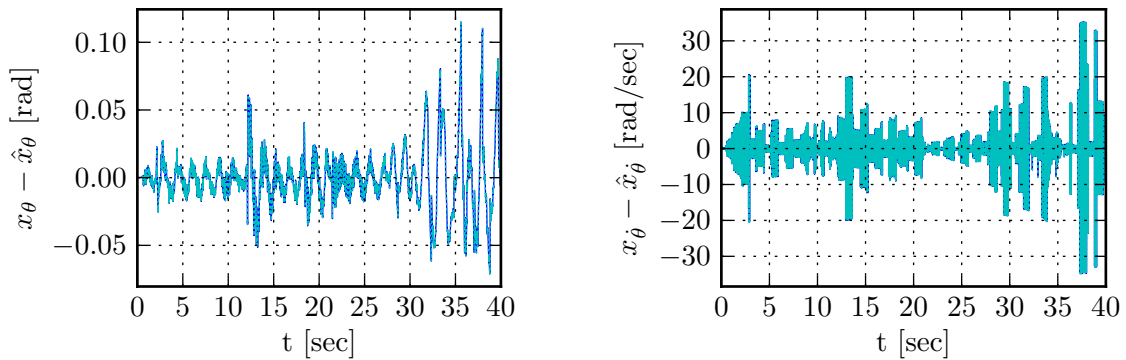
23. ábra. A lengés szögének és szögsebességének becslési hibája UKF alkalmazása esetén.

Vizsgáljuk meg a bemutatott algoritmusokat robusztusság szempontjából is. Ehhez a becslők által felhasznált M , m , J , ρ inerciaparaméterek 2. táblázatbeli értéke helyett εM , εm , εJ , $\varepsilon \rho$ paramétereket használjuk, $\varepsilon > 0$. Minkét becslővel elvégezzük a becslést $\varepsilon = 1.5$, 0.5 esetre is, tehát az inerciaparamétereket eltoljuk 50%-al mindkét irányba. A becslési hibákat most csak x_{θ}



24. ábra. A mért és számított jelek összevetése UKF-nél. (folytonos - mért, szaggatott - becsült)

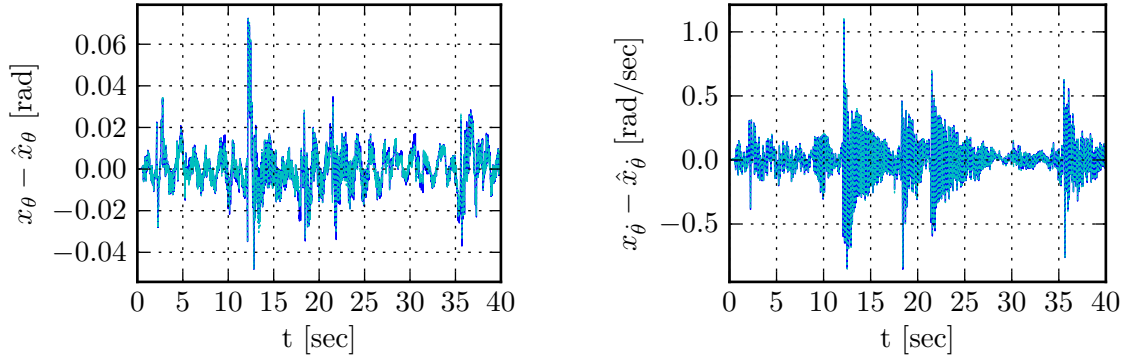
és $x_{\dot{\theta}}$ esetében közöljük, mivel ezeket az állapotváltozókat a legnehezebb becsülni, tehát ezek eredményeiből lehet következtetni a többi pontosságára is.



25. ábra. Becslési hibák ε -szoros inerciaparaméter értékeket használva UIKF esetén. (folytonos: $\varepsilon = 1.5$, szaggatott: $\varepsilon = 0.5$)

A 25. ábra az UIKF hibáját mutatja mindkét irányú eltolás esetén. Megállapíthatjuk, hogy a grafikonok nagymértékben egyeznek a 19. ábrán láthatóval. Az UKF esetén szintén nem mutatkozik jelentős eltérés a pontatlan paraméterek következtében a 26. ábra tanúsága szerint. Az $\varepsilon = 1.5$ és az $\varepsilon = 0.5$ értékhez tartozó görbék is szinte teljesen fedik egymást mindkét Kálmán-szűrő esetén.

Az eredmények magyarázata részben a modell tulajdonságaiban részben pedig abban keresendő, hogy a becslők zavart bemenetekre vannak felkészítve. Tekintsük ugyanis a bakdaru (2.11) inerciamátrixát. Látható hogy ennek csupán két eleme függ az inerciaparaméterektől,



26. ábra. Becslési hibák ε -szoros inerciaparaméter értékeket használva UKF esetén. (folytonos: $\varepsilon = 1.5$, szaggatott: $\varepsilon = 0.5$)

melyek közül az egyik a paraméterváltozásra érzéketlen, mivel

$$H_{11} = \frac{\varepsilon M}{\varepsilon m} + \sin(x_\theta^2) = \frac{M}{m} + \sin^2(x_\theta). \quad (4.2)$$

A h vektormező nem függ az inerciaparaméterektől, így ez változatlan. A modell eddigi tagjai közül tehát csak H_{22} függ ε -tól. Az x_θ becslésének pontosságát tovább növeli, hogy a lengést leíró (2.8) differenciálegyenlet független az inerciaparaméterektől. A nyomatékokat kifejező τ elemeit viszont befolyásolják a változások, ennek új alakja

$$\tau = \begin{pmatrix} \frac{F}{\varepsilon m} \\ -\frac{T}{\varepsilon \rho \varepsilon m} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \frac{F}{m} \\ -\frac{1}{\varepsilon} \frac{T}{\rho m} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Ez a torzulás a becslést azonban csak kevésbé befolyásolja, mivel mindkét becslő zavarással terheltnek tekinti a nyomatékokat.

Beláttuk tehát hogy a becslésre az inerciaparaméterek eltolása nincs jelentős hatással, ha ε minden paraméter esetén azonos. Ha ez nem áll fenn, de $\frac{m}{M}$ arányt viszonylag pontosan ismerjük, akkor a fent elmondottak érvényben maradnak. A folytonos idejű lineáris modell állapotmátrixa például csak $\frac{m}{M}$ értékétől függ.

Az eredmények kiértékelését összefoglalva megállapíthatjuk hogy a 3.1. szakaszban leírt Kálmán-szűrők a 3.2. szakasz algoritmusával nagyságrendekkel pontosabbá és konvergensebbé válnak. A két becslési módszer közül az UKF-re épülő bizonyul pontosabbnak az UIKF-rel szemben, különösen a mért jelek deriváltjainak becslésében. Az UIKF szűrési tulajdonságainak javítása további kutatást igényel. A szűrő előnye azonban, hogy lineáris, ezért zárt körű szabályozásban történő alkalmazás során nem szükséges a szeparációs elv teljesülésének vizsgálata.

A számítási igénye is az UIKF-nek kisebb. Létezik azonban olyan UKF implementáció, az úgynevezett négyzetgyök *unscented* Kálmán-szűrő (*square-root* UKF - SR-UKF), amelynek számítási igénye a kiterjesztett Kálmán-szűrőjéhez közeli [Hay+01, 273. o.]. Mindkét szűrő robusztusnak bizonyul az inerciaparaméterek pontatlanságával szemben.

6. Megjegyzés. Láthattuk, hogy a becslők konvergenciája javul, amennyiben a hégag szenzor jele rendelkezésre áll a futás során. Azonban a hégag szenzor alkalmazása során is lehetséges két szituáció, melyekben x_θ hosszú ideig nem veszi fel a θ_+ vagy θ_- értéket.

A nemlineáris rendszer (2.31) egyenletrendszerének megoldása az a trajektória, amely mentén $\dot{x}_\ell(t) = \ddot{x}_\ell(t) \equiv a_0$, $x_r(t) \equiv r_0$, $x_\theta(t) \equiv \theta_0$. Ez azt jelenti, hogy megadhatók olyan bemenetek, amelyek mellett a kocsi állandó gyorsulással mozog, és a teher állandó θ_0 szöggel lemaradva követi. Ebben az esetben a hégag szenzorok nem detektálnak áthaladást. Ez a lehetőség csak elméleti jelentőségű, mivel a daru mozgástere korlátos, tehát nem tud tetszőlegesen hosszú ideig állandó gyorsulással mozogni.

A másik szituációban a lengések amplitúdója olyan kicsi, hogy a x_θ végig θ_+ és θ_- között marad. Ez különösen olyankor fordulhat elő, amikor zárt körben működik a daru és a szabályozó a kijelölt pozíció közelébe vitte már a rendszert. A konvergencia tehát éppen olyan helyzetben válik kérdésessé, amikor a szabályozónak pontos becslésre van szüksége az előírt pozíció eléréséhez. E lehetőség tehát a jövőbeli kutatásban további elemzést kíván. Annyit azonban elmondhatunk, hogy ekkor a becslési hiba biztosan korlátos, hiszen $\theta_- < x_\theta < \theta_+$.

Összefoglalás

A dolgozatban bakdaru állapotmegfigyelését vizsgáltuk abban az esetben, ha rendelkezésre áll inkrementális adó a kocsi elmozdulásának és kötélhosszának mérésére, továbbá két hézag szenzort is alkalmazunk a teher lengési szögének két rögzített értékének detektálására. Módszertadtunk e szenzorok fúziója mellett olyan becslőalgoritmusok konstrukciójára, amelyek a súrlódás ellenére képesek a lengés szögét pontosan becsülni. Rámutattunk arra is, hogy csak az inkrementális adók alapján miért nem megoldható a szög becslése, és a hézag szenzorok használata miért javít a pontosságon és a konvergencián.

Mérési eredmények segítségével mutattuk be a módszerek eredményességét. Ezek alapján arra a következtetésre jutottunk hogy a súrlódást bemeneti zavarásnak tekintve annak zavaró hatása az állapotbecslésre csökkenthető. Megmutattuk, hogy az UKF alapú algoritmus nagyobb számítási igény ellenében eredményesebben szűri a mérési zajt, mint az UIKF. Láttuk továbbá, hogy mindkét becslő robusztus az inerciaparaméterek pontatlan ismeretével szemben.

Az állapotbecslők tervezése során a daru által szállított teher tömegét ismertnek tételeztük fel, azonban valós alkalmazásban ez nem áll fenn. Erre a problémára megoldást jelenthet az állapotbecslés kombinálása paraméterbecsléssel. A szakirodalomban található speciálisan a bakdaruhoz tervezett paraméterbecslő eljárás, amely megfelelhet e célnak [BN92]. A kutatás folytatásában ebből kiindulva keresünk egy alkalmas paraméterbecslési algoritmust, valamint megvizsgáljuk ennek segítségével önhangoló adaptív irányítás konstrukciójának lehetőségét.

Az állapotbecslők működését felnyitott körben mutattuk be, ez után a becslőkre alapozott zárt körű szabályozás működését tervezzük tesztelni. Ennek kapcsán az egyik felmerülő probléma a becsült állapotokban tapasztalt ugrásszerű változás amely a hézag szenzorok jeladásakor következik be. Ilyen hirtelen változó visszacsatolásra beavatkozást nem lehet alapozni, így ezeket a helyzeteket valamilyen módszerrel át kell hidalni. Egy lehetséges megoldás a rendszer felnyitott körben történő működtetése néhány mintavételi periódusig a hézag szenzor jeladását követően. A jövőben módszert szeretnénk biztosítani e probléma megoldására. A rendelkezésre álló szabályozók közül a linearizáló visszacsatoláson alapuló pályatervező irányítást tervezzük elsősorban alkalmazni, mivel ez az algoritmus használ állapotmegfigyelőt, amelyet kiválthatnak a dolgozatban leírt becslők [RK11].

A szabályozás eredményeként, különösen az kijelölt végállapot közelében kialakulhatnak olyan kis szögű lengések is, amelyeket a hézag szenzor nem detektál. Ilyen helyzetekben

szükséges megvizsgálni a becslők pontosságát és konvergenciáját, mivel ettől függ hogy a szabályozott bakdaru milyen pontossággal képes követni az előírt pályát.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőmnek, Dr. Kiss Bálintnak a módszerek kidolgozása során adott hasznos iránymutatását és a mérések elkészítésében nyújtott segítségét. Köszönöm továbbá a bakdaru mérőrendszerének hardverén és szoftverén dolgozó tanszéki hallgatóknak, köztük Lakatos Ádámnak és Herbay Máténak a kísérletek elvégzéséhez nélkülözhetetlen hozzájárulásukat.

Irodalomjegyzék

- [AHDDW94] Brian Armstrong-Hélouvry, Pierre Dupont, and Carlos Canudas De Wit. “A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction”. In: *Automatica* vol. 30.7 (1994), pp. 1083–1138.
- [BN92] F Boustany and Brigitte d’Andrea Novel. “Adaptive control of an overhead crane using dynamic feedback linearization and estimation design”. In: *Proceedings of the 1992 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Vol. vol. 3. 1992, pp. 1963–1968.
- [Cle79] William S Cleveland. “Robust locally weighted regression and smoothing scatterplots”. In: *Journal of the American statistical association* vol. 74.368 (1979), pp. 829–836.
- [DZON95] Mohamed Darouach, Michel Zasadzinski, A Bassong Onana, and Samuel Nowakowski. “Kalman filtering with unknown inputs via optimal state estimation of singular systems”. In: *International journal of systems science* vol. 26.10 (1995), pp. 2015–2028.
- [Hay+01] Simon S. Haykin et al. *Kalman filtering and neural networks*. 1st. pp. 284. New York, John Wiley and Sons, Inc., 2001. ISBN: 0-471-22154-6.
- [Hyl12] Paweł Hyla. “The crane control systems: A survey”. In: *Proceedings of the 2012 17th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*. 2012, pp. 505–509.
- [Kal+60] Rudolph E. Kalman et al. “A new approach to linear filtering and prediction problems”. In: *Journal of basic Engineering* vol. 82.1 (1960), pp. 35–45.
- [KHS04] Yong-Seok Kim, Keum-Shik Hong, and Seung-Ki Sul. “Anti-sway control of container cranes: inclinometer, observer, and state feedback”. In: *International Journal of Control, Automation, and Systems* vol. 2.4 (2004), pp. 435–449.
- [KLM99] Bálint Kiss, Jean Lévine, and Philippe Müllhaupt. “Modelling, flatness and simulation of a class of cranes”. In: *Electrical Engineering* vol. 43 (1999), pp. 215–225.

- [KS10] Dooroo Kim and William Singhose. “Performance studies of human operators driving double-pendulum bridge cranes”. In: *Control Engineering Practice* vol. 18.6 (2010), pp. 567–576.
- [Lan01] Béla Lantos. *Egyváltozós szabályozások*. 1st. Irányítási rendszerek elmélete és tervezése I. pp. 491. Budapest, Akadémia Kiadó, 2001. ISBN: 963-05-7787-9.
- [LSRJ11] Magnus Linderöth, Kristian Soltesz, Anders Robertsson, and Rolf Johansson. “Initialization of the Kalman filter without assumptions on the initial state”. In: *2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. IEEE. 2011, pp. 4992–4997.
- [NHSS06] Jörg Neupert, Achim Hildebrandt, Oliver Sawodny, and Klaus Schneider. “Trajectory tracking for boom cranes using a flatness based approach”. In: *Proceedings of the International Joint Conference, SICE-ICASE 2006*. 2006, pp. 1812–1816.
- [RCM96] Nadra Rafee, Tongwen Chen, and Om P Malik. “A technique for optimal digital redesign of analog controllers”. In: *Control Systems Technology, IEEE Transactions on* vol. 5.1 (1996), pp. 89–99.
- [RK11] Tamás Rózsa and Bálint Kiss. “Tracking control for tow-dimensional overhead crane”. In: *Proceedings of the 8th International Conference on Informatics in Control, Automation, and Robotics, ICINCO 2011*. Vol. 1. 2011, pp. 427–432.
- [SMA09] Dominik Schindele, Ingolf Menn, and Harald Aschemann. “Nonlinear optimal control of an overhead travelling crane”. In: *Proceedings of the 2009 18th IEEE International Conference on Control Applications*. 2009, pp. 1045–1050.
- [Smo14] Jaroslaw Smoczek. “Fuzzy crane control with sensorless payload deflection feedback for vibration reduction”. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* vol. 46.1 (2014), pp. 70–81.