



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Villamosmérnöki és Informatikai Kar

Irányítástechnika és Informatika Tanszék

Diszkrét idejű nemlineáris dinamikus rendszerek ismeretlen bemeneteinek becslési módszerei

TUDOMÁNYOS DIÁKKÖRI KONFERENCIA DOLGOZAT

Szerző: Patartics Bálint - UY2WHW

Beágyazott és irányítórendszerek szakirány

Konzulens: Dr. Kiss Bálint

2013. október 25.

Kivonat

Az állapotmegfigyelési probléma az irányításelmélet napjainkban is aktívan kutatott területe, annak ellenére, hogy számos hatékony megoldása ismert. Az állapotmegfigyelés során egy dinamikus rendszer belső állapotait kívánjuk meghatározni a rendszerről gyűjtött információk alapján. Klasszikus esetben ezek az információk a kimenetek és a bemenetek mért értékei. Előfordulhat azonban, hogy a rendszer egyes bemeneteit is a megfigyeléssel meghatározandó, ismeretlen pillanatnyi értékű változók közé kell sorolnunk. Ennek oka lehet, hogy a megfigyelés célja egy beavatkozó szerv meghibásodásának detektálása, de lehetséges, hogy a feladat egy ismeretlen zavaró jellemző értékének meghatározása. A mechanikai rendszerek esetén fellépő, a beavatkozó szervek által kifejtett erőit megváltoztató zavarás lehet tipikusan a súrlódás.

A dolgozat célja válogatott ismeretlen bemenetű megfigyelők (unknown input observer - UIO) vizsgálata. Áttekintek bizonyos, lineáris, illetve nemlineáris rendszerek esetén alkalmazható UIO-kat, továbbá megvizsgálom alkalmazhatóságukat a valósághoz közeli mechatronikai modellek (tehát legtöbbször nemlineáris, súrlódással terhelt bemenetű rendszerek) esetén.

A beágyazott számítógépeken megvalósított szabályzók mintavételezett jelek alapján működnek, tehát az állapotmegfigyelő implementálása is diszkrét időben történik. Különös figyelmet fordítok ezért a diszkrét idejű UIO-kra, ezen belül is az úgynevezett algebrai megfigyelőkre. Ezek a struktúrák, a klasszikus megfigyelőkkel szemben nem rendelkeznek saját állapottal, működésük egy lineáris vagy nemlineáris egyenletrendszer minden mintavételkor történő megoldásán alapszik. Esetükben tehát a szeparációs elv teljesülését nem kell vizsgálni a visszacsatolt struktúra stabilitásának bizonyításához.

Az egyes megfigyelők működését példarendszerek segítségével mutatom be, amelyek közül a legösszetettebb egy sínen mozgó bakdaru. A rendszer modelljének eltérő bonyolultságú változatait használok fel, így a bakdarunak alkalmazom összetett (változó kötélfhosszú) és egyszerűsített (rögzített kötélfhosszú) modelljét is. Mindkét modellnek használok továbbá linearizált, és súrlódással kiegészített változatát is.

Az egyes módszerek tesztelését Matlab-Simulink környezetben megvalósított szimulációval végeztem.

Abstract

The problem of state observation is an active researched field in control theory, although many effective solutions are readily available. The observation consists of the determination of the states of a dynamical system, based on the information collected. In general, this information is obtained through measurement of the inputs and outputs. In some cases though, the inputs of the system are considered unknown, and hence they must also be estimated. The reason behind may be the desired fault detection of the actuator, but another similar task could be the determination of an unknown disturbance. In case of mechanical systems, the disturbance is typically the friction changing the force produced by the actuator.

The goal of this study is the analysis of some unknown input observers (UIO-s). Selected UIO-s are reviewed, which can be applied both for linear or nonlinear models. Furthermore, their applicability to realistic mechatronic system models (that means mostly nonlinear dynamics with nonlinear friction phenomena on their inputs) is considered.

The calculations implemented in embedded controllers operate on sampled signals, hence the realization of the observer is also done in discrete-time. Therefore specific attention is given to discrete-time UIO-s and in particular to the so called algebraic observers. Observers with such structure, as opposed to the classical ones, do not have states and they solve a linear or nonlinear set of equations during each sampling period. This implies that algebraic observers can be used without checking the separation principle to prove the stability of the closed loop system.

The behavior of the observers is demonstrated with the help of benchmark systems, the most complex one being an overhead crane with vertical workspace. Models of this crane system are used in different complexity (with nonlinear or linearized dynamics; with varying or fixed rope length).

The testing of the methods was done by simulation, implemented in Matlab-Simulink environment.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Jelölések és terminológia	6
3. Dinamikus megfigyelők ismeretlen bemenetekhez	10
3.1 Teljesrendű állapotmegfigyelő	10
3.2 Kálmán-szűrő	15
3.3 Két dinamikus UIO: redukált rendű ismeretlen bemenetű, és csúszó módusú megfigyelő	20
4. Algebrai megfigyelők ismeretlen bemenetekhez	22
4.1 Algebrai megfigyelők ismeretlen bemenetű lineáris rendszerekhez	22
4.1.1 A rendszer bizonyos állapotai közvetlenül mérhetők	22
4.1.2 Általános felépítésű lineáris rendszer	26
4.2 Algebrai megfigyelők ismeretlen bemenetű nemlineáris rendszerekhez	31
5. Összefoglalás	38
Köszönetnyilvánítás	40
A. Bakdaru modellje	41
A.1 Darumodell	41
A.2 Ingamodell	46
B. Súrlódás modellje	47

C. A súrlódási modell integrációja a darumodellbe	52
Irodalomjegyzék	56

1. fejezet

Bevezetés

Jelen dolgozat ismeretlen bemenetű dinamikus rendszerek belső állapotainak megfigyelésével foglalkozik. Az állapotmegfigyelési problémára már 1960-as évektől létezik megoldás lineáris rendszerek esetében. A teljesrendű lineáris állapotmegfigyelő képes lineáris, időinvariáns rendszerek megfigyelésére. Ezzel a megfigyelővel az állapottér bővítése nyomán lehetséges a bemenetre ható, ritkán változó zavar kompenzálása is, úgynevezett terhelésbecslés segítségével [7].

Egy alternatív struktúra a Kálmán-szűrő, amely elsősorban diszkrét idejű rendszerek megfigyelésére készült [6], de később megjelent folytonos idejű változata is [5]. Ez a megfigyelő nemcsak a vizsgált rendszer állapotát képes meghatározni, de az állapotbecslés bizonytalanságáról is információt ad. A Kálmán-szűrő zajos mérések esetén is torzítatlan és konzisztens becslést ad, amennyiben a zaj bizonyos feltételeket teljesít, továbbá tolerálja a rendszer modelljének bizonyos mértékű pontatlanságát [10].

Számos alkalmazás esetén a rendszer bemenetei nem, vagy csak nagy hibával ismertek, mechatronikai rendszerek esetén például jellemzően súrlódási hatásokkal terheltek. A súrlódás a bemenetekre nézve ugyan sok esetben additív zavarás, de nem illeszthető rá egyszerű zajmodell, mivel középvértéke nem zérus, teljesítményeloszlása nem egyenletes, továbbá értéke függ a rendszer belső állapotaitól, vagyis a bemenettel korrelált. E mellett a súrlódási erők jelentős (a beavatkozó jelekkel összemérhető) értékűek lehetnek. A fentiek indokolják a súrlódással terhelt bemenetű rendszerek esetén az UIO-k alkalmazását.

Ismeretlen bemenetű, folytonos idejű megfigyelő tervezésére ad módszereket [4]. A szerzők tervezési algoritmust adnak a hiba exponenciális lecsengését biztosító redukált rendű és ismeretlen bemenetű (*reduced-order unknown input observer*), valamint a csúszó módusú (*sliding mode observer*) megfigyelőhöz. E megfigyelők konstruálhatóságához azonban a megfigyelt rendszereknek bizonyos strukturális feltételeknek eleget kell tenniük, ez szűkíti e módszerek

alkalmazhatóságát.

Diszkrét idejű rendszerekhez [13], [12] javasol redukált rendű lineáris megfigyelőket ismeretlen bemenetek mellett. Ez a struktúra több egymást követő mintavételi periódus adatait használhatja fel a becsült állapot előállítására, így alkalmazása késleltetéssel járhat, és a bemenetekre közvetlenül nem ad becslést. A szerző eljárást ad késleltetett megfigyelő tervezéséhez, valamint az erős megfigyelhetőségre alapuló kritériumot ad a megfigyelő tervezhetőségére.

A fenti megfigyelők közös tulajdonsága, hogy lineáris rendszerek állapotainak megfigyelésére alkották meg őket, így nemlineáris rendszerekhez csak korlátozásokkal alkalmazhatók. Számos rendszer azonban csak nemlineáris modellel írható le, ahol más struktúrájú megfigyelő alkalmazására van szükség.

Egy ilyen megfigyelő a bővített Kálmán-szűrő (*extended Kálmán filter*, EKF), amely a lineáris Kálmán-szűrő olyan változata, melyben a predikció a modell nemlineáris egyenletei alapján adódik. Az *update* fázis ezek után a rendszer aktuális munkapontjában linearizált modellel folytatódik [14]. Az illatosítatlan Kálmán-szűrő¹ (*unscented Kálmán filter*, UKF), a Kálmán-szűrő egy további kiegészítése, működése az *unscented transform* nevű matematikai transzformáción alapszik [3].

Az eddig felsorolt minden megfigyelő (lineáris, folytonos vagy diszkrét idejű, EKF, UKF, stb.) dinamikus, azaz becsült állapotuk minden időpontban függ a korábbi becslések eredményétől, és a megfigyelt rendszer előéletétől. Ezek a szűrők belső szerkezetükben nemlineárisak, ezért konvergenciájuk az egyes konkrét alkalmazásokban külön vizsgálendő. Járulékos nehézség, hogy a szeparációs elv nem érvényesül nemlineáris rendszerek esetén, azaz a zárt szabályozási kör konvergenciája nem következik a rendszer és a megfigyelő individuális konvergenciájából.

A dinamikus megfigyelők mellett léteznek úgynevezett algebrai megfigyelők is. Ezek a struktúrák nem tartalmaznak belső dinamikát, azaz az általuk becsült mennyiségek minden időpontban függetlenek a korábbi becslések eredményétől. Az ilyen típusú megfigyelők becslései ezért nem divergálnak. Algebrai megfigyelő konstrukciójakor a lineáris megfigyelőknél megszokott módszerek helyett a megfigyelési probléma megoldását nemlineáris egyenletek egyidejű megoldására vezetjük vissza.

Ilyen megfigyelő konstrukcióját mutatja be [11]. A módszer diszkrétidejű, nemlineáris rendszerek esetében használható (természetesen lineáris rendszer esetén is).

E dolgozat témája ismeretlen bemenetű rendszerekhez tervezett megfigyelők vizsgálata, különös tekintettel az algebrai típusú UIO-kra. A bemutatott vizsgálatok tárgyát képezi több lineáris rendszerhez tervezett megfigyelő és egy nemlineáris, egyenletek szimultán numerikus megoldására.

¹A szűrő különös elnevezése a matematikai háttérét adó transzformáció kitalálójától, Jeffrey Uhlmanntól származik.

dásán alapuló struktúra.

A 2. fejezetben tisztázzuk a dolgozatban használt fogalmakat, jelöléseket és legfontosabb összefüggéseket. A 3. fejezetben tárgyaljuk az ismeretlen bemenetű rendszerekhez használt dinamikus megfigyelőket. A 4. fejezetben algebrai UIO-kkal foglalkozunk. Egy speciális lineáris struktúrából kiindulva, fokozatosan általánosítva jutunk el az általános nemlineáris megfigyelőhöz. Végül az 5. fejezetben összefoglaljuk a dolgozatban található eredményeket.

A függelékben ismertetjük a megfigyelők analíziséhez szükséges példarendszert. Az A függelékben a példarendszer modelljének ismertetését és egyenleteinek levezetését adjuk meg. A B függelékben részletezzük a súrlódási jelenségek általunk használt modelljét. A C függelékben megmutatjuk, hogy a súrlódást milyen módon illesztjük a példarendszerbe.

2. fejezet

Jelölések és terminológia

Egy folytonos idejű nemlineáris rendszert modellez az

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ y &= g(x, u)\end{aligned}\tag{2.1}$$

egyenletrendszer, ahol x a rendszer állapotvektora, u a bemenete, y a kimenete, és $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. A mért jelek mintavételezésén alapuló digitális szabályozások tervezéséhez szükségünk van a rendszermodell diszkrét idejű változatára is. Feltételezzük, hogy a kimeneteket ekvidisztáns T_s lépésközzel (mintavételi periódusidővel) mintavételeztük, a bemeneteket pedig állandó értéken tartjuk két mintavételi időpont között. A diszkrét idejű nemlineáris rendszer állapotegyenlete

$$\begin{aligned}x[k+1] &= \phi(x[k], u[k]) \\ y[k] &= g(x[k], u[k]),\end{aligned}\tag{2.2}$$

ahol $x[k] = x(kT_s)$ (a többi mennyiség esetén hasonlóan). Az irányítandó folyamatoknak (ahogyan a A függelékben részletezett darunak is,) általában folytonos idejű modellje adott. Ebből a diszkrét idejű modell megkapható a következő módszerrel. Integráljuk (2.1) állapotegyenletének mindkét oldalát egy mintavételi időn keresztül:

$$\int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \dot{x} dt = \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} f(x, u(kT_s)) dt.\tag{2.3}$$

A bal oldal ekkor

$$\int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \dot{x} dt = x((k+1)T_s) - x(kT_s) = x[k+1] - x[k].\tag{2.4}$$

Ennek segítségével (2.3) átírható olyan alakba, amelyből f és ϕ közti kapcsolat látható:

$$x[k+1] = x[k] + \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} f(x, u(kT_s)) dt. \quad (2.5)$$

Ezt összevetve (2.2) állapotátmeneti egyenletével, megállapíthatjuk a keresett kapcsolatot:

$$\phi(x[k], u[k]) = x[k] + \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} f(x, u(kT_s)) dt. \quad (2.6)$$

Ha f és g lineáris, akkor (2.1) az

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du. \end{aligned} \quad (2.7)$$

alakban adódik, melynek diszkrét idejű megfelelője is lineáris alakú

$$\begin{aligned} x[k+1] &= \Phi x[k] + \Gamma u[k] \\ y[k] &= Cx[k] + Du[k]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

A (2.7) és (2.8) mátrixai között a kapcsolat a következő:

$$\Phi = e^{AT}, \quad \Gamma = \int_0^T e^{At} B dt, \quad (2.9)$$

C és D mátrixok pedig megegyeznek. A (2.7) és (2.8) megkapható például (2.1) valamely egyensúlyi pontja vagy pályája körüli linearizálással is, utóbbi esetben (2.8) mátrixai a mintavétel függvényei, ilyenkor a $\Phi[k]$, $\Gamma[k]$, $C[k]$, $D[k]$ jelölést alkalmazzuk.

A továbbiakban olyan rendszerekkel foglalkozunk, amelyek kimenetére a bemenet nem hat közvetlenül, tehát $D = 0$. (Ilyen az A függelékben tárgyalt bakdaru is.) Az egyenletek alakja ekkor

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (2.10)$$

illetve diszkrét időben

$$\begin{aligned}x[k+1] &= \Phi x[k] + \Gamma u[k] \\y[k] &= Cx[k].\end{aligned}\tag{2.11}$$

A vizsgálatok során feltesszük továbbá, hogy az (A, C) illetve a (Φ, C) pár megfigyelhető.

A továbbiakban a bemenetek közül az ismerteket u -val, az ismeretleneket pedig d -vel jelöljük. Hasonlóképpen particionáljuk a bemeneti mátrixokat, így a folytonos idejű rendszer bemeneti mátrixa $B = \begin{pmatrix} B_u & B_d \end{pmatrix}$, a diszkrét idejűé $\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_u & \Gamma_d \end{pmatrix}$. Ezeket alkalmazva a lineáris állapotegyenlet alakja

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_u u + B_d d \\y &= Cx,\end{aligned}\tag{2.12}$$

illetve diszkrét idejű rendszer esetén

$$\begin{aligned}x[k+1] &= \Phi x[k] + \Gamma_u u[k] + \Gamma_d d[k] \\y[k] &= Cx[k].\end{aligned}\tag{2.13}$$

A (2.2) rendszer ismert és ismeretlen bemeneteit szétválasztva

$$\begin{aligned}x[k+1] &= \phi(x[k], u[k], d[k]) \\y[k] &= g(x[k])\end{aligned}\tag{2.14}$$

alakú. A $k+1$. mintavételkor a kimenet értéke

$$y[k+1] = g(x[k+1]) = g(\phi(x[k], u[k], d[k])).\tag{2.15}$$

Használjuk a függvénykompozícióra egyváltozós esetben

$$g(\phi(x[k], u[k], d[k])) = g \circ \phi(x[k], u[k], d[k])\tag{2.16}$$

jelölést. Többváltozós esetre példaként tekintsük a $k+2$. mintavételkor az állapotvektor értékét:

$$\begin{aligned}x[k+2] &= \phi(x[k+1], u[k+1], d[k+1]) \\&= \phi(\phi(x[k], u[k], d[k]), u[k+1], d[k+1]).\end{aligned}\tag{2.17}$$

Ilyenkor ([11] jelöléséhez hasonlóan) a kompozícióban nem érintett változókat felsoroljuk alsó indexben, tehát

$$\phi(\phi(x[k], u[k], d[k]), u[k+1], d[k+1]) = \phi_{u[k+1], d[k+1]} \circ \phi(x[k], u[k], d[k]) \quad (2.18)$$

jelölést használjuk annak érdekében, hogy a többszörös kompozíciók írásmódja áttekinthető maradjon.

3. fejezet

Dinamikus megfigyelők ismeretlen bemenetekhez

Ebben a fejezetben megvizsgálunk egyes dinamikus megfigyelőket. Tanulmányozzuk a teljesrendű állapotmegfigyelőt, a Kalman-szűrőt, a redukált rendű ismeretlen bemenetű és a csúszó módusú megfigyelőt. Bemutatjuk működésüket, tervezési kérdéseiket, valamint szimuláció segítségével eredményességüket egy mechanikai példarendszeren súrlódásmentes és súrlódással terhelt bemenetű esetben.

3.1. Teljesrendű állapotmegfigyelő

A teljesrendű aktuális állapotmegfigyelő diszkrét idejű állapotegyenlete (2.11) rendszer esetén

$$\hat{x}[k+1] = F\hat{x}[k] + Gy[k+1] + Hu[k], \quad (3.1)$$

ahol $\hat{x}$ a rendszer becsült állapotvektora. A megfigyelés hibájának exponenciális lecsengését F karakterisztikus egyenletének megfelelő megválasztásával írhatjuk elő. A megfigyelő sajátértékeit G értékének megválasztásával tudjuk elhelyezni a komplex számsíkon, és G ismeretében a következő választásokkal a megfigyelő stabil és gyors működése érhető el [7]. Ehhez

$$\begin{aligned} F &= \Phi - GC\Phi, \\ H &= \Gamma - GCT. \end{aligned} \quad (3.2)$$

G számítását a Matlab `place` utasítása támogatja.

A megfigyelő állapotegyenletét átalakítjuk (2.14) rendszerhez. Az ismert és ismeretlen bemenetek szétválasztásával (3.1)

$$\hat{x}[k+1] = F\hat{x}[k] + Gy[k+1] + H_u u[k] + H_d d[k] \quad (3.3)$$

alakú. Mivel $d[k]$ -t nem tudjuk mérni, e hiányzó információt egy d -ről alkotott modellel kell pótolnunk. A legegyszerűbb feltevés szerint az ismeretlen bemenet konstans, azaz

$$d[k+1] = d[k]. \quad (3.4)$$

A (3.4) egyenlettel kiegészítve (2.13) rendszer átírható az

$$\begin{aligned} \tilde{x}[k+1] &= \tilde{\Phi}\tilde{x}[k] + \tilde{\Gamma}u[k] \\ \tilde{y}[k] &= \tilde{C}\tilde{x}[k] \end{aligned} \quad (3.5)$$

alakba, ahol

$$\tilde{x}[k] = \begin{pmatrix} x[k] \\ d[k] \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi & \Gamma_d \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma_u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Ezáltal az ismeretlen bemeneteket felvettük a bővített rendszer állapotai közé. A (3.3) megfigyelő alakja (3.5) rendszerhez tervezve

$$\hat{x}[k+1] = \tilde{F}\hat{x}[k] + \tilde{G}\tilde{y}[k+1] + \tilde{H}_u u[k]. \quad (3.7)$$

Itt $\hat{x}[k]$ alatt $\tilde{x}[k]$ becslőjét értjük, ezért $\hat{x}$ az ismeretlen bemenetek becsült értékét is tartalmazza. Feltéve, hogy a $(\tilde{\Phi}, \tilde{C})$ pár megfigyelhető, (3.7) mátrixait

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= \tilde{\Phi} - \tilde{G}\tilde{C}\tilde{\Phi}, \\ \tilde{H}_u &= \tilde{\Gamma} - \tilde{G}\tilde{C}\tilde{\Gamma}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

értékűre választjuk.

A (3.3) megfigyelő tervezhető az A függelékben ismerttetett súrlódásmentes, lineáris darumodellhez is. Mivel e rendszer minden bemenetét ismeretlennek tételezzük fel, $H_u = 0$. A megfigyelő sajátértékeit válasszuk meg a következő értékekre:

$$0,8607 \quad 0,7408 \quad 0,6376 \quad 0,5488 \quad 0,4724 \quad 0,4066 \quad 0,3499 \quad 0,3012.$$

Az irányító rendszer mintavételi ideje 10 ms, ezért ezt használtuk a megfigyelő implementációja során is. Szimulációval megvizsgáltuk, hogy egy kis erőimpulzus hatására hogy viselkedik a megfigyelő. A szimuláció eredményei a 3.1. ábrán láthatók.

A kismértékű gerjesztés hatására a terhet tartó kötélen nem leng ki nagy mértékben, és a sebességek is kicsik, ezért a daru jó közelítéssel lineáris tartományban marad a szimulált idő alatt. A megfigyelő a mért állapotokat pontosan képes becsülni, azonban az ismeretlen bemeneteket kevésbé. A forgatónyomaték becsült értéke jellegre hasonlít a valódihoz, de jelentős hiba látható az amplitúdójában. A kocsit mozgató erő becslése során, az erő ugrásszerű változásakor a megfigyelő pontatlan értékeket szolgáltat, de állandósult állapotban a valódi bemenethez konvergál. A konvergencia gyorsaságán a megfigyelő pólusainak más megválasztása esetleg javíthat.

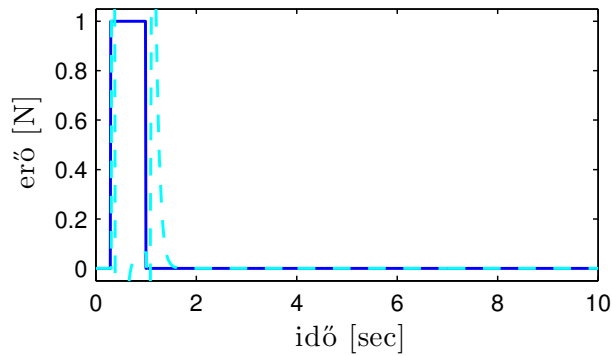
A bemenetek pontatlansága önmagában nem okoz gondot, ha számunkra a rendszer állapotainak értéke a lényeges. A valódi erő éles váltásainál azonban a szög és a szögsebesség becsült értékében jelentős hiba keletkezik. A tolóerő állandósulása után a becsült értékek már a valódihoz tartanak.

A súrlódással kiegészített modell szimulációs eredményei láthatók a 3.2. ábrán. A kocsira ható erő a súrlódásmentes esethez hasonló, de 5 N nagyságú impulzus. E helyett valódi bemenetként az ábrán a C függelékben értelmezett súrlódásos bemeneteket tüntettük fel.

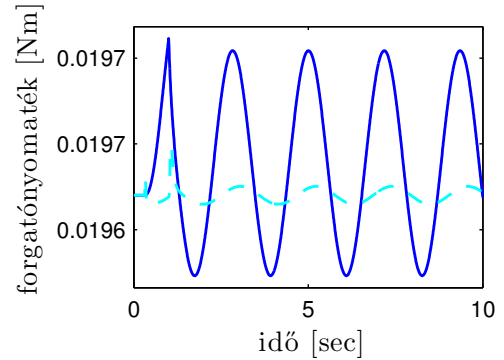
A bemenetekre kapott becslésekből az látható, hogy a megfigyelő nem tudja teljesen megkülönböztetni a két bemenet hatását, mivel a forgatónyomaték változására a tolóerőben is változást jelez. A forgatónyomaték becslésében jelentős nagyságbeli hiba adódott, a tolóerő esetén pedig a nagyságbeli különbség mellett a görbék jellege sem egyezik.

A súrlódási jelenségek okozta zavarás a szög és szögsebesség becslését oly mértékben megzavarja, hogy a becsült és a valódi görbék jellegre sem egyeznek meg. Látható, hogy a Striebeck-súrlódás jelenléte a kötéln hossz állandóságát biztosító szabályozó beavatkozását igényeli, a Coulombsúrlódás pedig statikus hibát okoz a szabályozásban. A bemenetek értéke is ekkor bizonytalanodik el, a szög és szögsebesség becslésében pedig oszcilláció keletkezik, amely után a megfigyelő már nem konvergál a valódi értékekhez.

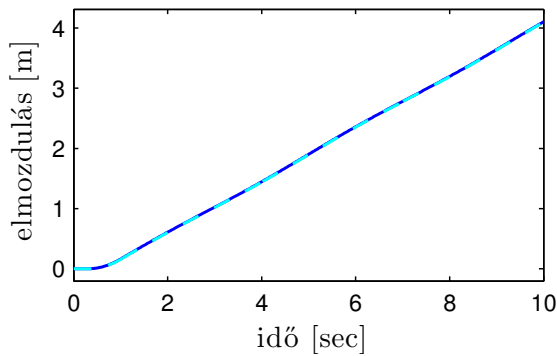
A kocsiira ható erő az időfüggvényében.



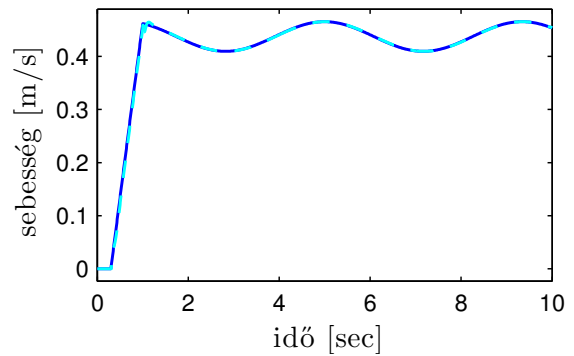
A csörlőre ható forgatónyomaték.



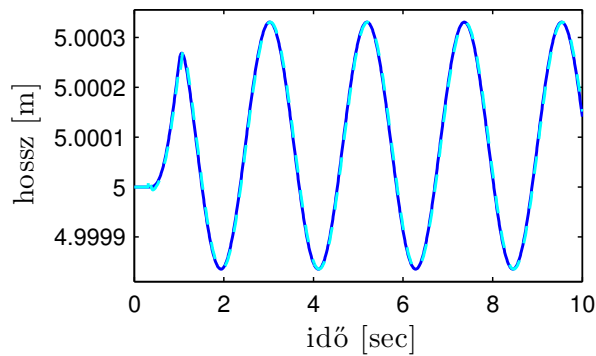
A kocsi elmozdulása az idő függvényében.



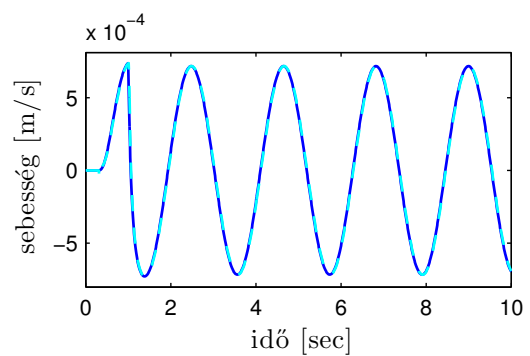
A kocsi sebessége az idő függvényében.



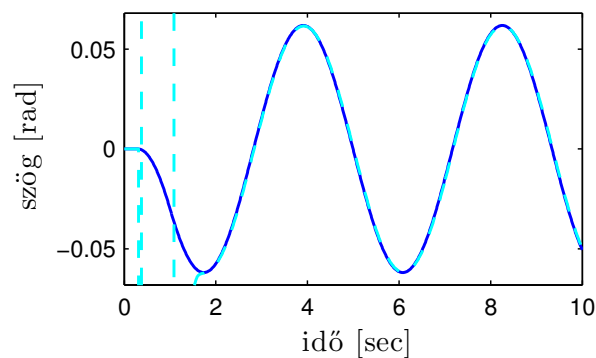
A kötel hossza az idő függvényében.



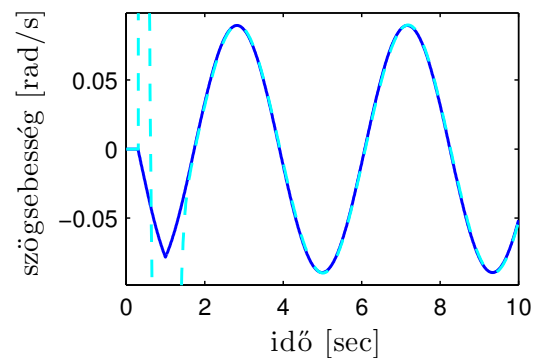
A kötel hossz-változása az idő függvényében.



A kötel kitérés szöge az idő függvényében.

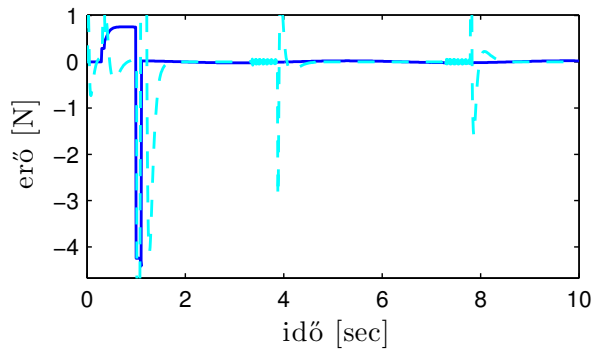


A kötel szögsebessége az idő függvényében.

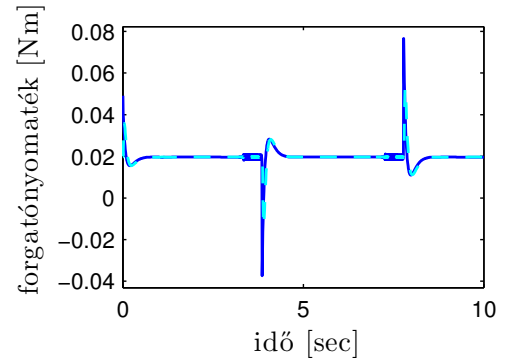


3.1. ábra. A megfigyelés eredménye a nemlineáris súrlódásmentes modellel, teljesrendű állapotmegfigyelőt alkalmazva. (folytonos - valódi, szaggatott - becsült)

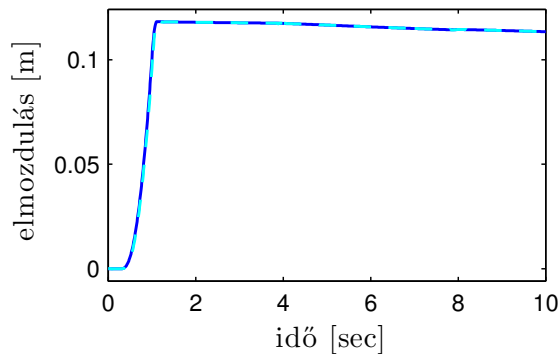
A kocsira ható erő az időfüggvényében.



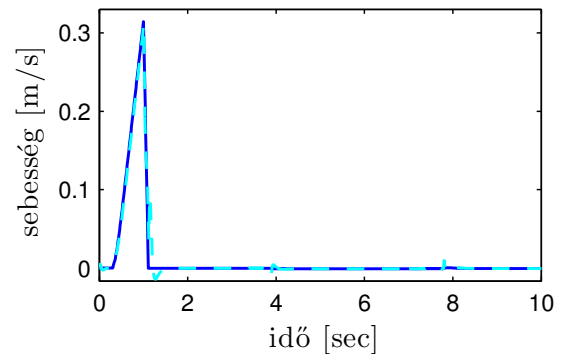
A csörlőre ható forgatónyomaték.



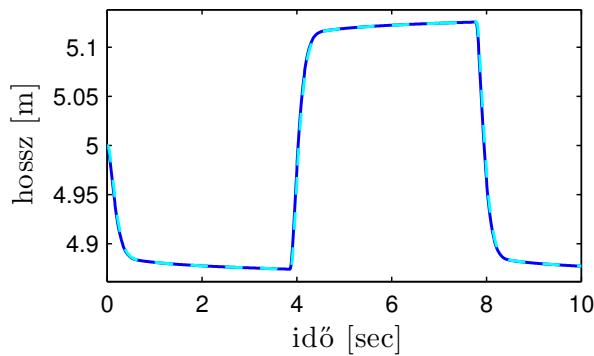
A kocsi elmozdulása az idő függvényében.



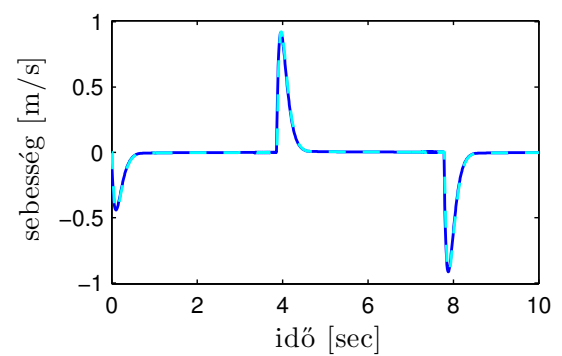
A kocsi sebessége az idő függvényében.



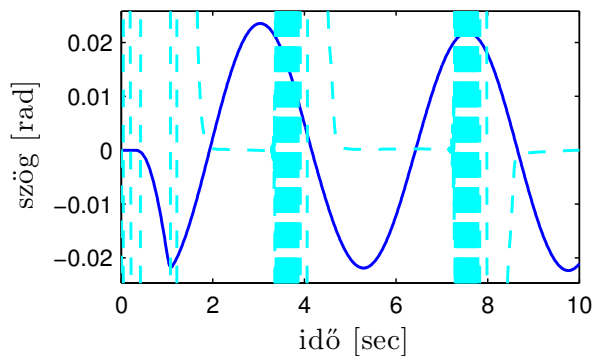
A kötel hossza az idő függvényében.



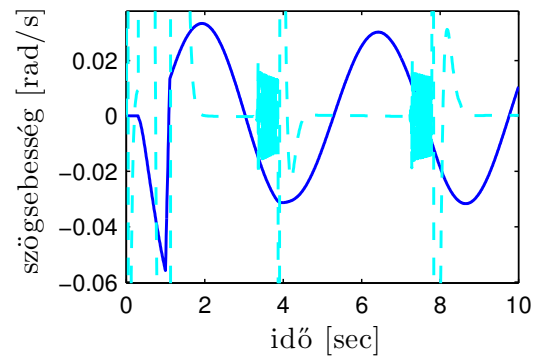
A kötel hossz-változása az idő függvényében.



A kötel kitérési szöge az idő függvényében.



A kötel szögsebessége az idő függvényében.



3.2. ábra. A megfigyelés eredménye a nemlineáris súrlódást tartalmazó modellel, teljesrendű állapotmegfigyelőt alkalmazva. (folytonos - valódi, szaggatott - becslt)

3.2. Kálmán-szűrő

A Kálmán-szűrő sztochasztikus szűrőstruktúra, a megfigyelt rendszer állapotvektorán kívül becsüli annak bizonytalanságát (kovarianciáját) is.

A szűrő működésének első fázisában, az úgynevezett predikciós fázisban, a megfigyelt rendszer modellje alapján meghatározásra kerül az állapotvektor előzetes becslése. Jelölje $\hat{x}[k|\ell]$ a szűrő által becsült állapotvektort a k . mintavételkor, amelyet az ℓ . mintavételig rendelkezésre álló információk alapján állt elő. Időinvariáns esetben (2.11) rendszerre a predikció

$$\hat{x}[k|k-1] = \Phi \hat{x}[k-1|k-1] + \Gamma u[k-1] \quad (3.9)$$

alapján számítható.

Jelöljük a kovariancia mátrixokat P -vel, és indexeljük a becsült állapotvektorral azonosan. A prediktált állapot kovarianciája

$$P[k|k-1] = \Phi P[k-1|k-1] \Phi^T + Q, \quad (3.10)$$

ahol Q a modellbizonytalanságot kifejező kovarianciamátrix.

Ezek után a szűrő a beérkezett mérési eredmények alapján korrigálja a prediktált értékeket, az úgynevezett *update* fázis végrehajtásával. Legyen a rendszer kimenetének mért értéke a k . mintavételkor $z[k]$, a mérés kovarianciája pedig R . A mérések alapján meghatározható a mért és prediktált kimenetek különbsége ($\nu[k]$) és a különbség kovarianciája ($S[k]$):

$$\begin{aligned} \nu[k] &= z[k] - C \hat{x}[k|k-1], \\ S[k] &= C P[k|k-1] C^T + R. \end{aligned} \quad (3.11)$$

A szűrő a mért értékeket egy súlyozó tényező segítségével veszi figyelembe. Ez a tényező a *Kálmán-erősítés*, amelyet

$$K[k] = P[k|k-1] C^T S[k]^{-1} \quad (3.12)$$

egyenlet alapján lehet kiszámítani [10]. Ennek ismeretében (3.9) és (3.10) egyenlettel meghatározott értékek korrekciója:

$$\begin{aligned} \hat{x}[k|k] &= \hat{x}[k|k-1] + K[k] \nu[k], \\ P[k|k] &= P[k|k-1] - K[k] S[k] K^T[k]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

A Kálmán-szűrő, a teljesrendű állapotmegfigyelőhöz hasonlóan, nem ismeretlen bemenetek megfigyelésére tervezett szűrő. Az a tulajdonsága azonban, hogy képes a mért értékek és a modell bizonytalanságát figyelembe venni, meggyőző érv lehet alkalmazása mellett. Az (A.7) darumodell bemeneteit például ismerjük, hiszen azokat a beavatkozó szervek állítják elő, de a sűrűlódási jelenségek miatt a gyorsító erők ettől eltérhetnek. Azt reméljük, hogy a Kálmán-szűrő ezt az eltérést képes áthidalni.

A szűrőnek négy paramétere van, amelyek számszerű értéket a tervezés során, a rendszer tulajdonságait figyelembe véve kell meghatározni: a becsült állapotvektor és kovarianciamátrix kezdőértéke ($\hat{x}[0|0]$ és $P[0|0]$), a mérési zaj kovarianciamátrixa (R), és a modellbizonytalanság kovarianciamátrixa (Q). A mintavételi időt ez esetben is 10 ms-ra választottuk.

A szimuláció során a kezdeti állapotvektort ismerjük, ezért ezzel inicializáljuk a szűrőt:

$$\hat{x}[0|0] = x[0]. \quad (3.14)$$

Számos alkalmazásban ez a feltételezés nem tehető meg, ezért más módon kell megállapítani az állapotvektor kezdőértéket, [9] például módszert ad a Kálmán-szűrő inicializálására ilyen esetben is.

Mivel azt feltételezzük, hogy a kezdőállapotot teljesen pontosan ismerjük, állíthatjuk, hogy

$$P[0|0] = 0. \quad (3.15)$$

A valós mérések esetében milliméter pontossággal tudunk hosszt mérni, ezért a sebesség-méréseket is közel $\frac{\text{mm}}{\text{s}}$ pontosságúnak tekintjük. A daru kimeneteit mérő szenzorok működése továbbá egymástól függetlennek tetelezhető fel. A szimulációban is a valódi esetet leíró értékeket használjuk, így az előzőek alapján a mérési zaj kovarianciája

$$R = 10^{-6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

A modellzaj meghatározása általában nehéz feladat. A szimuláció során használt értékeket bizonyos feltételezések, és hangolás eredményeként kaptuk, de nem zárható ki, hogy jobb eredményre vezető hangolás is elképzelhető, például [2] felhasználásával. Az (A.7) első három egyenlete pontosnak mondható. A szimulációs tapasztalatok azonban azt mutatták, hogy a második egyenlet bizonytalanságát növelni kell, mert így a szűrő pontosabb eredményekkel szolgál. A három egyenlet bizonytalansága rendre

$$\sigma_x = 10^{-7} \text{ m}, \quad \sigma_R = 10^{-3} \text{ m}, \quad \sigma_\theta = 10^{-7} \text{ rad}. \quad (3.17)$$

A másik három egyenlet linearizálás eredménye, ezért bizonytalanságuk nagyságrendekkel nagyobb az előzőeknél. Rendre a következő becsléseket adtuk a bizonytalanságukra:

$$\sigma_{\dot{x}} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \sigma_{\dot{R}} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \sigma_{\dot{\theta}} = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \quad (3.18)$$

Élünk továbbá azzal a feltételezéssel is, hogy e bizonytalanságok függetlenek egymástól, ezért a modellbizonytalanság kovarianciamátrixa

$$Q = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_R^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\theta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\dot{x}}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\dot{R}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\dot{\theta}}^2 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

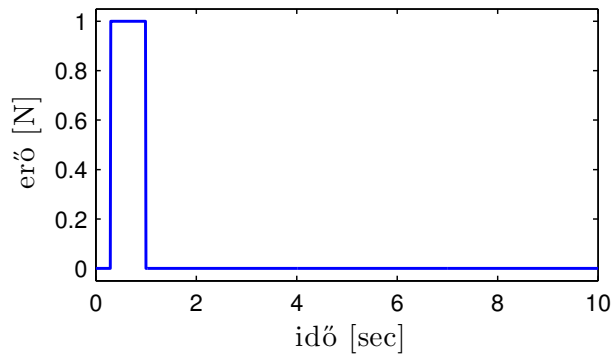
A Kálmán-szűrő súrlódásmentes esetben kis hibával képes az állapotokat megfigyelni, ahogy az a 3.3. ábrán is látható. Ez a megfigyelő felhasználja a bemeneteket is a becslés előállításához, és a daru lineáris tartományában a szöget és szögsebességet is elhanyagolható hibával képes meghatározni.

A súrlódást is tartalmazó modellel végzett szimuláció eredményei láthatók a 3.4. ábrán. Az ábrán ebben az esetben is a C függelékben ismertetett súrlódásos bemenetek láthatók, a szűrő azonban a valódi beavatkozó jelek alapján végzi a becslést.

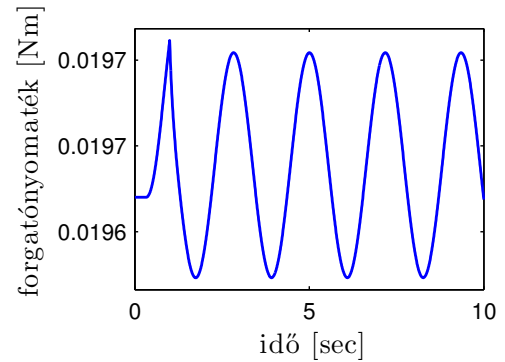
A mért állapotokat elhanyagolható hibával dolgozza fel a szűrő. A szög és a szögsebesség becslése jellegre hasonlít a valódihoz, de az amplitúdók nagysága eltérést mutat. A súrlódás a tolóerő értékét csökkenti, ezért az erőimpulzus kevesebb energiát képes közölni a rendszerrel, mint a súrlódásmentes esetben. A szűrő azonban a megfigyelt rendszer lineáris, súrlódásmentes modelljét használja fel, amely nem írja le ezt a jelenséget. Így a Coulomb súrlódás bemenetet torzító hatását nem veszi figyelembe a szűrő, ami az amplitúdóhibához vezet.

A Kálmán-szűrő becslései a súrlódásmentes esetben pontosabbak a teljesrendű állapotmegfigyelő eredményeinél. A súrlódás fellépésekor a szűrő hibás becsléseket szolgáltat, de ezek jellegre továbbra is jobban közelítik a valóságot, mint a teljesrendű állapotmegfigyelő esetében.

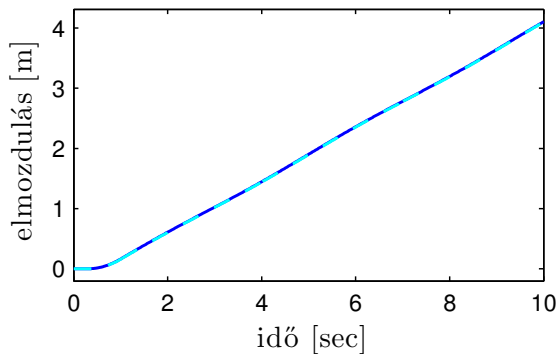
A kocsira ható erő az időfüggvényében.



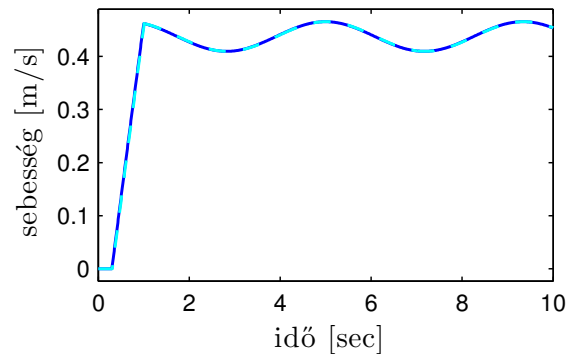
A csörlőre ható forgatónyomaték.



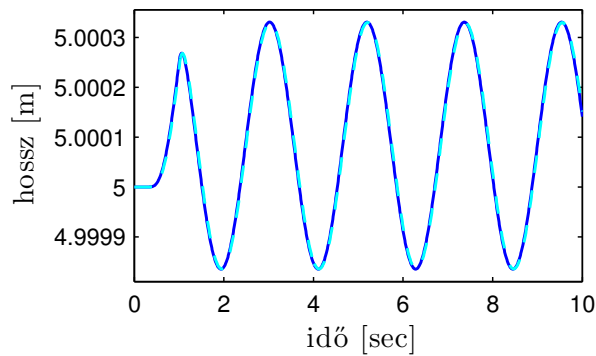
A kocsí elmozdulása az idő függvényében.



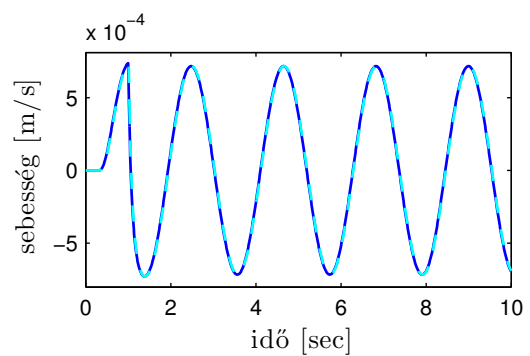
A kocsí sebessége az idő függvényében.



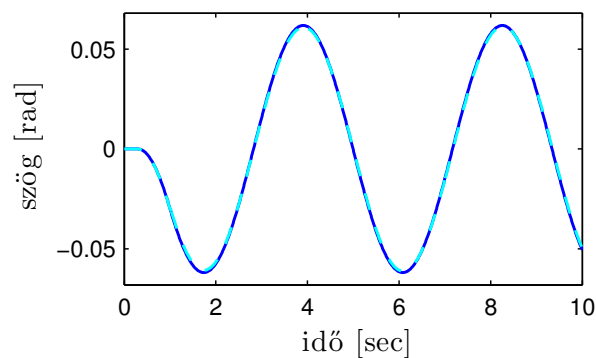
A kötéł hossza az idő függvényében.



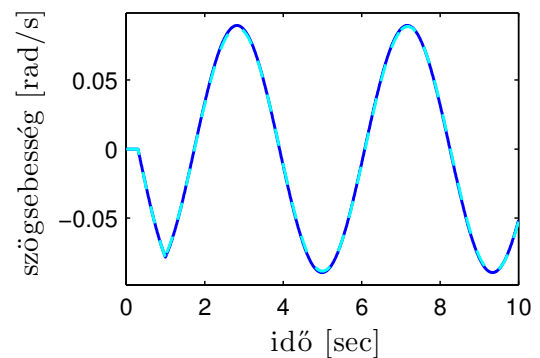
A kötéł hossz-változása az idő függvényében.



A kötéł kitérési szöge az idő függvényében.

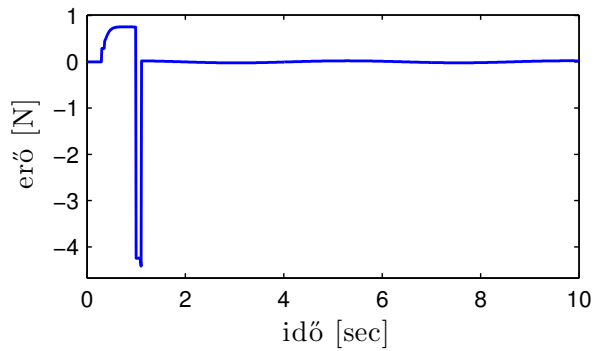


A kötéł szögsebessége az idő függvényében.

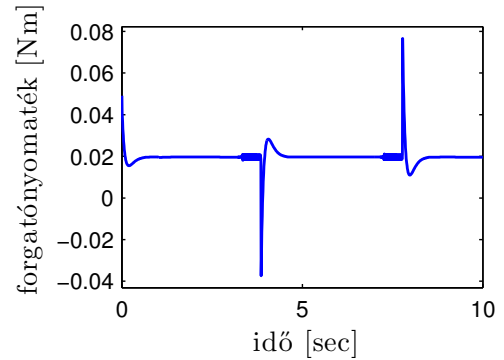


3.3. ábra. A megfigyelés eredménye a nemlineáris súrlódásmentes modellel, Kalman szűrőt alkalmazva. (folytonos - valódi, szaggatott - becstlt)

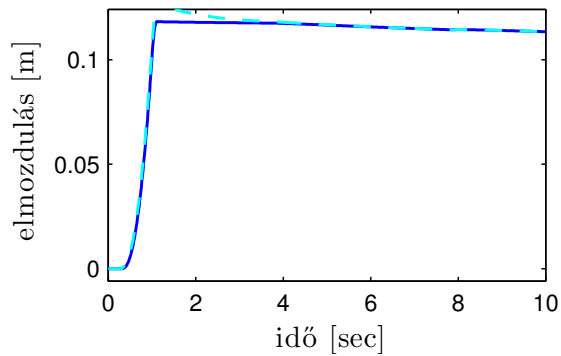
A kocsiira ható erő az időfüggvényében.



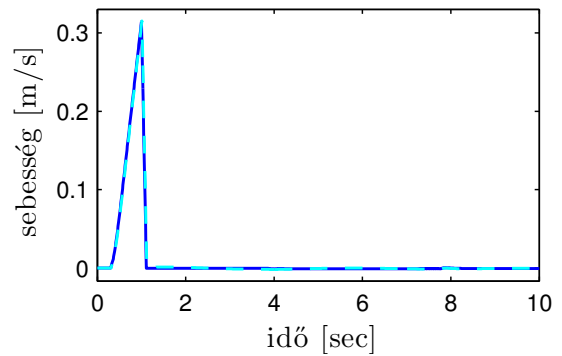
A csörlőre ható forgatónyomaték.



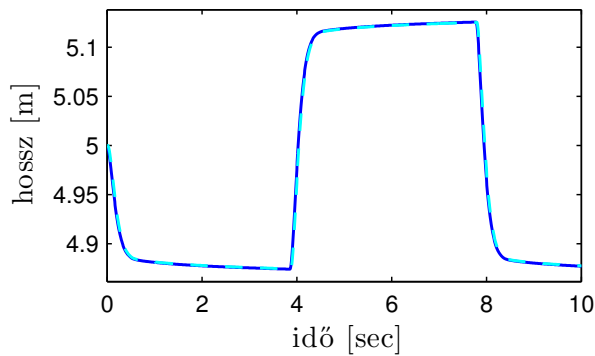
A kocsi elmozdulása az idő függvényében.



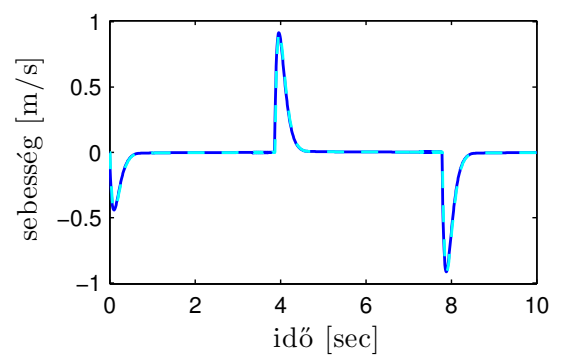
A kocsi sebessége az idő függvényében.



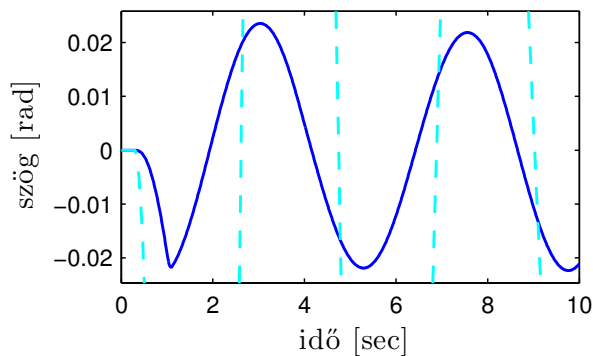
A kötel hossza az idő függvényében.



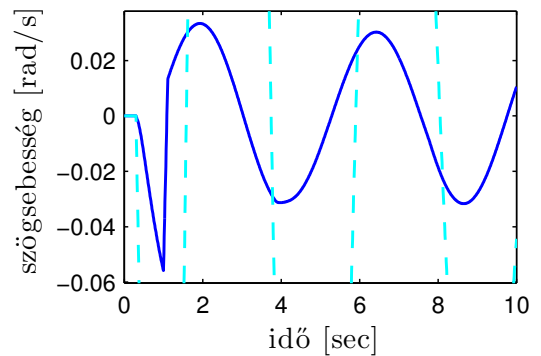
A kötel hossz-változása az idő függvényében.



A kötel kitérési szöge az idő függvényében.



A kötel szögsebessége az idő függvényében.



3.4. ábra. A megfigyelés eredménye a nemlineáris súrlódással kiegészített modellel, Kalman szűrőt alkalmazva. (folytonos - valódi, szaggatott - becült)

3.3. Két dinamikus UIO: redukált rendű ismeretlen bemenetű, és csúszó módusú megfigyelő

A címben szereplő két megfigyelő (2.12) alakú rendszerek állapotainak becslésére alkalmas. Részletesen [4] mutatja be e megfigyelők tervezési eljárását, valamint közli hibakarakterisztikájukat.

A redukált rendű ismeretlen bemenetű megfigyelő megfigyelési hibájának dinamikáját bizonyos feltételek mellett az

$$\dot{\tilde{e}}_1 = (\tilde{A}_{11} - \tilde{L}_1 \tilde{C}_1) \tilde{e}_1 \quad (3.20)$$

egyenlet adja meg, ahol $\tilde{A}_{11}$ és $\tilde{C}_1$ a megfigyelt rendszerből nyerhető, továbbá $\tilde{L}_1$ sajátértékeinek elhelyezésével biztosítható a hiba megfelelő lecsengése, amennyiben az $(\tilde{A}_{11}, \tilde{C}_1)$ pár megfigyelhető. E mátrixok a súrlódásmentes, lineáris darumodell esetén

$$\tilde{A}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1,962 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Mivel $(\tilde{A}_{11}, \tilde{C}_1)$ pár a darumodell esetén nem megfigyelhető, a linearizált modellhez redukált rendű ismeretlen bemenetű megfigyelő nem konstruálható.

A csúszó módusú megfigyelő létezésének egyik feltétele (2.12) rendszerhez, hogy (A, B_d, C) hármas által meghatározott zérusok a komplex számsík bal félsíkján helyezkedjenek el az imaginárius tengelyt nem beleértve, azaz

$$\text{rank} \begin{pmatrix} pI - A & B_d \\ C & 0 \end{pmatrix} = n + r, \quad (3.22)$$

ahol $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\text{rank } B_d = r$ és $\text{Re}\{p\} \geq 0$. [4] szerint ezzel ekvivalens feltétel, ha $\exists L_{22}$, hogy $A_{22} - L_{22}C_{22}$ sajátértékeinek valós része negatív. A_{22} és C_{22} a megfigyelendő rendszerből nyerhető, a súrlódásmentes, lineáris darumodell esetén

$$A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0 & 1 \\ -0,3773 & 0,0000 & 0 & -0,0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,8865 & -0,0000 & 0 & 0,0000 \end{pmatrix}, \quad C_{22} = \begin{pmatrix} 0 & -0,9806 & 0 & 0,1961 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Mivel (A_{22}, C_{22}) pár ez esetben nem megfigyelhető, a fenti feltétel nem elégíthető ki, ezért a linearizált darumodellhez csúszó módusú megfigyelő sem konstruálható.

4. fejezet

Algebrai megfigyelők ismeretlen bemenetekhez

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk, hogy miként konstruálható ismeretlen bemenetű rendszerekhez diszkrét idejű algebrai megfigyelő, amely az ismeretlen bemenetek mellett az állapotokat is képes meghatározni. Algebrai megfigyelő tervezésénél a megfigyelési problémát (2.14) egyenletekből összeállított egyenletrendszer algebrai megoldására vezetjük vissza.

A feladat elemzését olyan speciális lineáris rendszerrel kezdjük, amelynek bizonyos állapotai közvetlenül mérhetők. Ezután megvizsgáljuk az eljárás alkalmazhatóságát általános ((2.13) alakú) rendszer esetére is. Végül megmutatjuk, hogy milyen módon terjeszthető ki a megfigyelő konstrukciója a nemlineáris (2.14) rendszerekre.

A módszerek hatékonyságát szimulációs eredmények segítségével mutatjuk be, amelyeket a lineáris megfigyelők esetében az (A.7) darumodell és az (A.12) ingamodell súrlódásmentes és súrlódással kiegészített változatán végeztünk.

4.1. Algebrai megfigyelők ismeretlen bemenetű lineáris rendszerekhez

4.1.1. A rendszer bizonyos állapotai közvetlenül mérhetők

Tegyük fel, hogy a megfigyelt rendszernek bizonyos állapotait tudjuk mérni. Osszuk fel (2.13) állapotait mért és nem mért állapotokra, és jelöljük ezeket rendre z -vel és $\bar{x}$ -sal, hogy

$$x = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ z \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Ekkor (2.13) állapotátmeneti egyenlete

$$I_{\bar{x}}\bar{x}[k+1] + I_z z[k+1] = \Phi_{\bar{x}}\bar{x}[k] + \Phi_z z[k] + \Gamma_u u[k] + \Gamma_d d[k] \quad (4.2)$$

alakra hozható. Itt $I_{\bar{x}}$ és I_z az egységmátrix felosztása, hogy

$$I \begin{pmatrix} \bar{x}[k+1] \\ z[k+1] \end{pmatrix} = I_{\bar{x}}\bar{x}[k+1] + I_z z[k+1], \quad (4.3)$$

és $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_{\bar{x}} & \Phi_z \end{pmatrix}$. A (4.2) átrendezésével kapjuk

$$I_{\bar{x}}\bar{x}[k+1] - \Phi_{\bar{x}}\bar{x}[k] - \Gamma_d d[k] = -I_z z[k+1] + \Phi_z z[k] + \Gamma_u u[k] \quad (4.4)$$

egyenletet. Vezessük be a következő jelöléseket

$$L = \begin{pmatrix} I_{\bar{x}} & -\Phi_{\bar{x}} & -\Gamma_d \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -I_z & \Phi_z & \Gamma_u \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Ezekkel (4.4)

$$L \begin{pmatrix} \bar{x}[k+1] \\ \bar{x}[k] \\ d[k] \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} z[k+1] \\ z[k] \\ u[k] \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

alakba írható. Tegyük fel hogy L invertálható, ekkor a nem mért állapotok és az ismeretlen bemenetek kifejezhetők (4.6) egyenletrendszer megoldásaként:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}[k+1] \\ \bar{x}[k] \\ d[k] \end{pmatrix} = L^{-1}M \begin{pmatrix} z[k+1] \\ z[k] \\ u[k] \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Ezzel a módszerrel tehát algebrai megfigyelőt hoztunk létre. A következőkben megvizsgáljuk az algebrai megfigyelő konstruálhatóságának szükséges feltételét (4.2) rendszerhez. Legyen

$$n_{\bar{x}} = \dim\{\bar{x}\}, \quad n_z = \dim\{z\}, \quad n_d = \dim\{d\}. \quad (4.8)$$

A (4.6) egyenletrendszerben annyi egyenlet van, ahány állapotváltozós a rendszer, azaz $n_x + n_z$, az ismeretlenek száma pedig $2n_x + n_d$. A (4.6) egyenletrendszer megoldhatóságának szükséges feltétele, hogy megfelelő számú egyenlet álljon rendelkezésre, azaz

$$\begin{aligned} n_{\bar{x}} + n_z &\geq 2n_{\bar{x}} + n_d, \\ n_z - n_d &\geq n_{\bar{x}}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Ha a megoldás létezik, akkor egyenlőség esetén mátrixinvertálással, egyébként Gauss-eliminációval adódik.

Tegyük fel, hogy (4.6) összefüggést tekintve több ismeretlen van, mint ahány egyenlet, vagyis

$$n_z - n_d < n_{\bar{x}}. \tag{4.10}$$

Ekkor, ha további mintavételek egyenleteivel bővítjük (4.2) rendszert, akkor az egyenletek száma gyorsabban nőhet, mint az ismeretlenek száma. Vegyük figyelembe (2.11) állapotátmeneti egyenletét a $k + \ell$. mintavételig:

$$\begin{aligned} x[k+1] &= \Phi x[k] + \Gamma_u u[k] + \Gamma_d d[k], \\ &\vdots \\ x[k+\ell+1] &= \Phi x[k+\ell] + \Gamma_u u[k+\ell] + \Gamma_d d[k+\ell], \\ x[k+\ell] &= \Phi x[k+\ell-1] + \Gamma_u u[k+\ell-1] + \Gamma_d d[k+\ell-1] \end{aligned} \tag{4.11}$$

Ekkor az egyenletek száma $\ell n_{\bar{x}} + \ell n_z$, ℓ -szeresére növekszik. Mivel az ismeretlenek közt késleltetett értékek szerepelnek, az ismeretlenek száma csak $(\ell+1)n_{\bar{x}} + \ell n_d$. A kibővített egyenletrendszer megoldhatóságához szükséges, hogy létezzen olyan véges ℓ , amelyre

$$\begin{aligned} \ell n_{\bar{x}} + \ell n_z &\geq (\ell+1)n_{\bar{x}} + \ell n_d, \\ \ell(n_z - n_d) &\geq n_{\bar{x}}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

1. Megjegyzés. A (4.12) egyenlőtlenséget összevetve (4.10) feltétellel azt kapjuk, hogy ℓ -től függetlenül (4.11) rendszer megoldhatóságának szükséges feltétele

$$n_z > n_d, \tag{4.13}$$

azaz a további egyenleteknek köszönhetően a szükséges feltétel már teljesül.

2. Megjegyzés. A (4.12) azt jelenti, hogy a megfigyelés nem oldható meg egy mintavételenyi egyenlettel. A (4.13) tehát annak a szükséges feltétele, hogy a további mintavételek felhasználása ennek ellenére eredményes lehessen. Ezek szerint akkor és csak akkor létezik véges ℓ , ha (2.13) rendszernek több állapotát tudjuk mérni, mint ahány ismeretlen bemenete van.

A (4.12) alapján az is megállapítható, hogy a megoldás előállításához hány mintavételenyi egyenletre van szükség:

$$\ell \geq \frac{n_x}{n_z - n_d}. \quad (4.14)$$

A kifejezés jobb oldalának nevezője (4.13) miatt pozitív. ℓ -re alsó korlát adódik, mivel a szükségesnél több egyenlettel is megoldható a probléma.

A (4.13) feltétel az (A.7) darumodell linearizáltja esetében alkalmazva

$$n_{\bar{x}} = 2, \quad n_z = 4, \quad n_d = 2. \quad (4.15)$$

Mivel $4 > 2$, (4.13) teljesül, tehát az ismeretlen állapotok és bemenetek meghatározhatók $\frac{2}{4-2} = 1$ mintavételenyi mérési eredmény felhasználásával. A szükséges átalakítások elvégzésével azonban az ismeretlenek együtthatómátrixa szingulárisnak adódik, ezért a linearizált modellhez nem konstruálható ilyen megfigyelő.

Tekintsük (A.12) ingamodell linearizáltját. E modellnek két állapotát mérjük, és csak egy ismeretlen bemenete van, így (4.13) szerint meghatározhatóak ismeretlen állapotai és bemenetei a fenti módszerrel. Az egyenletrendszer előállításához $\frac{2}{2-1} = 2$ mintavételenyi egyenletre van szükségünk (4.11) rendszerből:

$$\begin{aligned} x[k+1] &= \Phi x[k] + \Gamma_d d[k], \\ x[k+2] &= \Phi x[k+1] + \Gamma_d d[k+1]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

A második egyenlet segítségével küszöböljük ki $x[k+1]$ -et az első egyenletből. Ekkor (4.16) új alakja

$$\begin{pmatrix} x[k+1] \\ x[k+2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Phi^2 \end{pmatrix} x[k] + \begin{pmatrix} \Gamma_d & 0 \\ \Phi \Gamma_d & \Gamma_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d[k] \\ d[k+1] \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

(4.17) a korábban bemutatott átalakítással (4.6) alakra hozható. Az átalakításokat elvégezve az ismeretlen mennyiségek együtthatómátrixa invertálhatónak bizonyul, így tehát kapunk egy $L^{-1}M$ mátrixot, amellyel az egymást követő mérési eredményeket szorozva megkapjuk az ismeretlen állapotokat és bemeneteket.

Az ingához tervezett megfigyelőt a daru mennyiségeinek becslésére használtuk fel konstans kötélhosszt feltételezve. A daru szimulált modelljének eredményeit (és késleltetett értékeit) adtuk a megfigyelő bemenetére. A nemlineáris, súrlódásmentes modellel végzett szimuláció eredményei a 4.1. ábrán láthatók. Mivel a terhet tartó kötélt csak kis mértékben leng ki, hossza alig változik és a sebességek is kicsik, a daru viselkedését igen jól írja le az inga lineáris modellje. Ennek köszönhetően a becslült értékek pontosak. A (4.17) egyenletrendszerben szerepel $x[k+2]$, $x[k+1]$, $x[k]$, $d[k+1]$, $d[k]$, tehát az ismeretlenek több lehetséges értéke is megjelenik a megoldásban. A 4.1. ábrán a legkésőbbi értékek láthatók, azaz $x[k+2]$ és $d[k+1]$.

A linearizált ingamodell alapján tervezett megfigyelő a Kálmán-szűrőhöz hasonlóan teljesen pontosan becsli az állapotokat. A szűrővel szemben azonban ez a megfigyelő a tolóerő értékét is szolgáltatja, az állapotok becslésének pontosságával.

A megfigyelő eredményeit a súrlódással kiegészített modell esetében a 4.2. ábra szemlélteti. Az ábrán a C függelékben tárgyalt súrlódásos bemenet látható a valódi bemenet helyett.

A mozgás során a kötélt hosszát munkaponti értéken tartani hivatott szabályozó beavatkozó jele többször oszcillálni kezd a C függelékben ismertetett módon. Ezekre az időkre a becslés elbizonytalanodik, sebes ingadozás figyelhető meg benne, ezeken kívül azonban a becslült értékek viszonylag gyorsan a valódi értékek közelében maradnak. A becslés pontossága a nem oszcilláló szakaszokon meghaladja az eddig ismertetett megfigyelők pontosságát.

4.1.2. Általános felépítésű lineáris rendszer

Általános esetben a rendszer állapotainak egyes lineáris kombinációi mérhetők az

$$y[k] = Cx[k]. \quad (4.18)$$

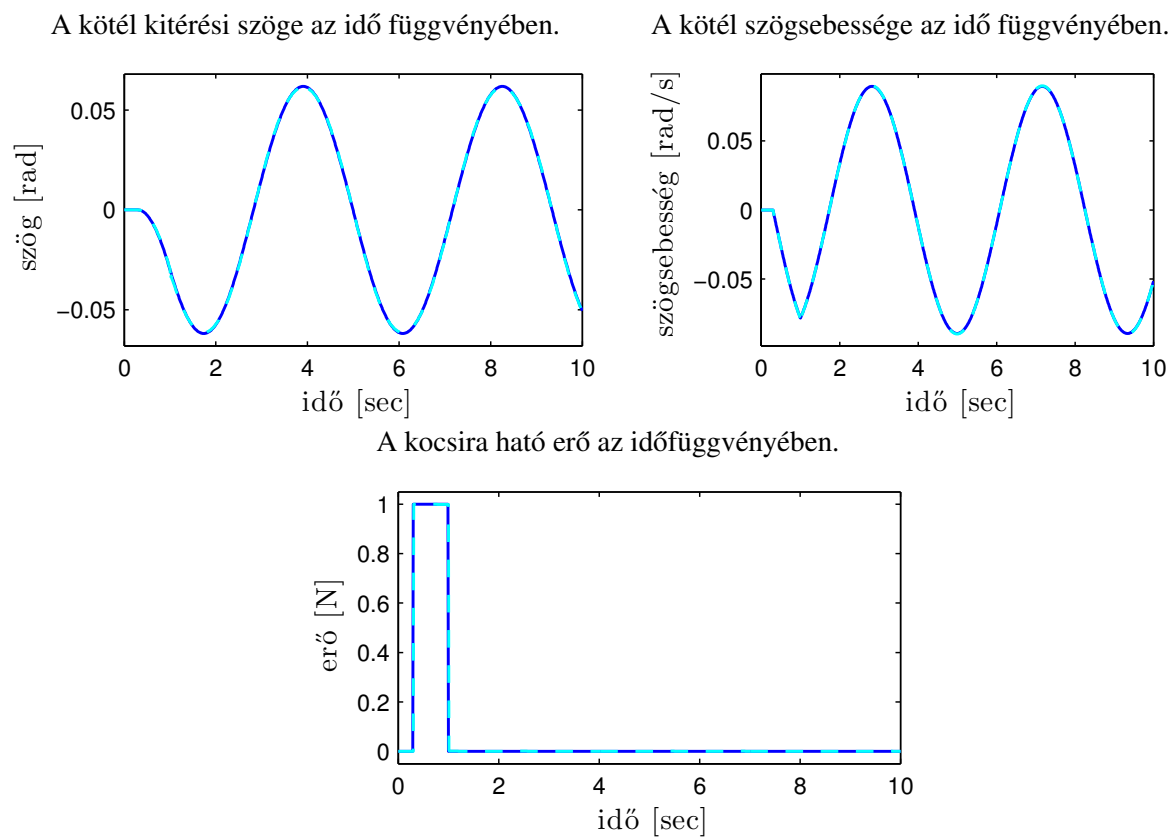
egyenlet szerint. Legyen a kimenetek száma

$$n_y = \dim\{y\}. \quad (4.19)$$

Tekintsük (a 4.18) egyenletet algebrai egyenletrendszernek, ekkor megoldhatóságának szükséges feltétele:

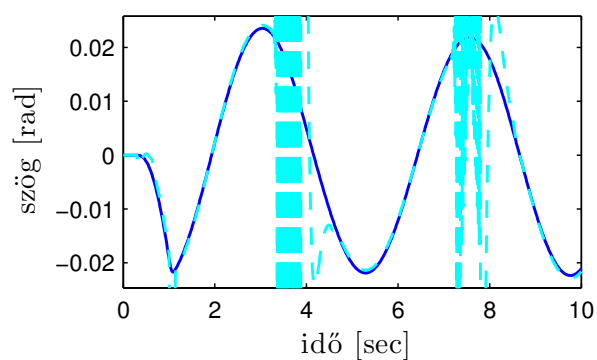
$$n_y \geq n_x, \quad (4.20)$$

azaz a rendszernek legalább annyi kimenete van, mint állapotváltozója. Ez a feltétel ritkán teljesül, bővítsük ki azonban az egyenletrendszert egy további mintavétel adataival. A következő $(k+1.)$ mintavételkor a kimenet

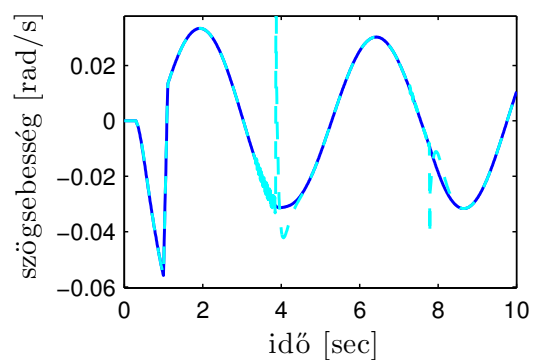


4.1.  bra. A megfigyelés eredménye a nemlineáris súrlódásmentes modellel, lineáris algebrai megfigyel  t alkalmazva. (folytonos - valódi, szaggatott - becsült)

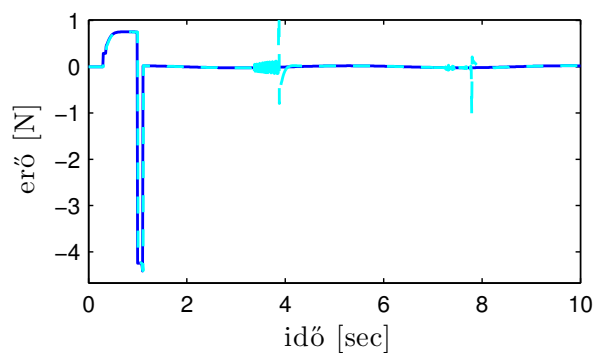
A kötél k t r si szöge az idő függvényében.



A kötél szögsebessége az idő függvényében.



A kocsira ható erő az időfüggvényében.



4.2.  bra. A megfigyelés eredménye a nemlineáris, súrlódással kiegészített modellel, lineáris algebrai megfigyel  t alkalmazva. (folytonos - valódi, szaggatott - becsült)

$$y[k+1] = Cx[k+1]. \quad (4.21)$$

A (2.13) rendszer állapotátmeneti egyenlete a k . mintavételkor

$$x[k+1] = \Phi x[k] + \Gamma_u u[k] + \Gamma_d d[k], \quad (4.22)$$

amelyet a (4.21) egyenletbe helyettesítve, és (4.18) egyenlettel kiegészítve a

$$\begin{aligned} y[k] &= Cx[k], \\ y[k+1] &= C\Phi x[k] + C\Gamma_u u[k] + C\Gamma_d d[k]. \end{aligned} \quad (4.23)$$

egyenletrendszert kapjuk. Az ismert mennyiségeket a bal oldalra rendezve és az oldalakat felcserélve:

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ C\Phi & C\Gamma_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x[k] \\ d[k] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y[k] \\ y[k+1] \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ C\Gamma_u \end{pmatrix} u[k]. \quad (4.24)$$

Ez az alak analóg (4.6) egyenlettel. Ezzel a kiegészítéssel lehetségessé vált az ismeretlen bemenetek meghatározása is. A megoldhatóság szükséges feltétele

$$2n_y \geq n_x + n_d, \quad (4.25)$$

Ez a feltétel teljesülhet akkor is, amikor (4.20) nem, amennyiben $n_y > n_d$. Tegyük fel, hogy (4.25) sem teljesül, azaz

$$2n_y < n_x + n_d, \quad (4.26)$$

és használjunk $\ell + 1$ mintavételnyi egyenletet. Az állapotvektor aktuális értékét mindig kifejezzük az első mintavételkor fennálló értékével, ahogy azt (4.21) esetén is tettük. Ekkor a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} y[k] &= Cx[k], \\ y[k+1] &= C\Phi x[k] + C\Gamma_u u[k] + C\Gamma_d d[k], \\ &\vdots \\ y[k+\ell] &= C\Phi^\ell x[k] + C\Phi^{\ell-1}\Gamma_u u[k] + C\Phi^{\ell-1}\Gamma_d d[k] + \dots \\ &\quad + \Gamma_u u[k+\ell-1] + \Gamma_d d[k+\ell-1], \end{aligned} \quad (4.27)$$

illetve átrendezve

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} C & 0 & \dots & 0 \\ C\Phi & C\Gamma_d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C\Phi^\ell & C\Phi^{\ell-1}\Gamma_d & \dots & \Gamma_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x[k] \\ d[k] \\ \vdots \\ d[k+\ell-1] \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y[k] \\ y[k+1] \\ \vdots \\ y[k+\ell] \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ C\Gamma_u & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C\Phi^{\ell-1}\Gamma_u & \dots & \Gamma_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u[k] \\ u[k+1] \\ \vdots \\ u[k+\ell-1] \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

(4.28) egyenletrendszer $(\ell + 1)n_y$ egyenletet és $n_x + \ell n_d$ ismeretlent tartalmaz, ezért megoldhatóságának szükséges feltétele, hogy létezzen véges ℓ ami kielégíti a

$$(\ell + 1)n_y \geq n_x + \ell n_d \tag{4.29}$$

egyenlőtlenséget. Átrendezve:

$$\ell(n_y - n_d) \geq n_x - n_d. \tag{4.30}$$

Összevetve (4.26) egyenlőtlenséggel, ismét azt látjuk, hogy további mintavételek hozzávételével csak akkor tudunk eredményt elérni, ha több kimenete van a rendszernek, mint ahány ismeretlen bemenete. Ennek teljesülése esetén

$$\ell \geq \frac{n_x - n_d}{n_y - n_d}, \tag{4.31}$$

a szükséges mintavételek minimális száma pedig $\ell + 1$.

Legyen az ismeretlenek együtthatómátrixa (4.28) egyenletben

$$L = \begin{pmatrix} C & 0 & \dots & 0 \\ C\Phi & C\Gamma_d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C\Phi^\ell & C\Phi^{\ell-1}\Gamma_d & \dots & \Gamma_d \end{pmatrix}, \tag{4.32}$$

az egyenlet teljes jobb oldala pedig Y . Ezek segítségével (4.28) megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele

$$\text{rank } L = \text{rank} \begin{pmatrix} L & Y \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Ismert továbbá, hogy a megoldás egyértelmű, ha még teljesül

$$\text{rank } L = \text{rank} \begin{pmatrix} L & Y \end{pmatrix} = n_x + n_d \quad (4.34)$$

is. Utóbbi esetben L invertálható, és a megoldás

$$\begin{pmatrix} x[k] \\ d[k] \\ \vdots \\ d[k + \ell - 1] \end{pmatrix} = L^{-1}Y \quad (4.35)$$

alakban adódik. Ez az alak a (4.7) egyenlet általánosításaként értelmezhető.

4.2. Algebrai megfigyelők ismeretlen bemenetű nemlineáris rendszerekhez

A 4.1. szakaszban felvázolt megfigyelő konstrukciója általánosítható nemlineáris rendszerekre is. A (4.27) egyenletrendszerhez hasonlóan a (2.14) rendszerre is felírhatók a következő összefüggések

$$\begin{aligned} y[k] &= g(x[k]), \\ y[k+1] &= g \circ \phi(x[k], u[k], d[k]), \\ &\vdots \\ y[k+\ell] &= g \circ \phi_{u[k+\ell-1], d[k+\ell-1]} \circ \dots \circ \phi(x[k], u[k], d[k]). \end{aligned} \quad (4.36)$$

A megfigyelt rendszer folytonos idejű modelljéből kiindulva ϕ leképzést (2.6) segítségével kapjuk. Mivel $\int f(x, u) dt$ primitív függvény legtöbbször nem határozható meg zárt alakban, az integrálást valamilyen numerikus módszerrel szükséges elvégezni. A legegyszerűbb numerikus integrálási módszer az Euler-módszer, amely az állapotokat konstansnak tételezi fel két mintavételi időpont között, így

$$\phi(x[k], u[k], d[k]) = x[k] + T_s f(x[k], u[k], d[k]). \quad (4.37)$$

Bár megtehető lenne az integráláshoz kisebb mintavételi időt választanunk az Euler-módszer alkalmazásakor, de ennél még pontosabb integrálási eljárások a Runge-Kutta algoritmusok, amelyek két mintavételi pont közötti értékeket is számítanak, majd súlyozott összegként adják meg az integrált a következő mintavételi pontban [7]. A Matlab a numerikus integrálást az ode utasításcsaláddal támogatja.

Az állapotmegfigyelés során tehát rögzített k esetén egy

$$\Psi(x[k], d[k], d[k+1], \dots, d[k+\ell-1]) = 0 \quad (4.38)$$

nemlineáris egyenletrendszer kell megoldani, amelyre a Matlab `fsolve` utasítása kínál numerikus alternatívát. A Ψ -ben szereplő $\phi(x[k+n], u[k+n], d[k+n])$ leképezések értékét ($0 \leq n \leq \ell-1$) a Matlab ode algoritmusainak valamelyikével számítjuk ki az `fsolve` minden iterálásakor. Az `fsolve` iterációját minden ciklusban a várt gyökökhöz közel eső számhalmazzal kell inicializálni, hogy az algoritmus a lehetséges gyökök közül az adott helyzetben fizikailag is értelmes megoldást találja meg. A megfigyelőnél az előző mintavételkor megoldás használható e célra.

A megfigyelő implementációjához a Matlab `ode23` algoritmusát, azaz a Bogacki-Shampine módszert választottuk a nemlineáris differenciálegyenlet numerikus megoldásához. Szimulációs tapasztalatok azt mutatják, hogy az egymásba ágyazott numerikus módszerek miatt a megfigyelő nem talál minden esetben megoldást. Az (A.7) modellel végzett szimulációk az eddig használt paraméterértékek mellett eredménytelenek voltak, az `fsolve` ezek során általában nem találta meg a (4.36) egyenletrendszer megoldását, vagy a vélt megoldás nem felelt meg az aktuális szituációnak. Az `fsolve`-ot kiváltó más, a problémához jobban illeszkedő numerikus algoritmus e problémán segíthet.

Az (A.12) ingamodellhez ugyanakkor bizonyos módosítások mellett található olyan beállítás, amelyhez már eredményesen konstruálható ilyen megfigyelő. A 4.1.1. szakaszban tárgyaltakhoz hasonlóan most is két mintavételn yi egyenletre van szükség az összes ismeretlen meghatározásához. Az `fsolve` megoldó algoritmus érzékenynek bizonyult a megfigyelt rendszer bizonyos paramétereire, többek közt mintavételi időre. A bemenetek és a megfigyelő mintavételi idejét szimulációs tapasztalat alapján 40 ms-ra választottuk.

Ebben a szimulációban eltérünk a korábban alkalmazott súrlódási modelltől, a kocsí és a sín közt ébredő nyomóerőt a teljes mozgás során konstans $(M + m)g = 15,696 \text{ N}^1$ értékűnek tételeztük fel.

A súrlódásmentes modellel végzett szimuláció eredményei a 4.4. ábrán láthatók. Az ingamodell viselkedése ebben az esetben kevésbé tér el az eddigi szimulációkon bemutatott darumodellétől.

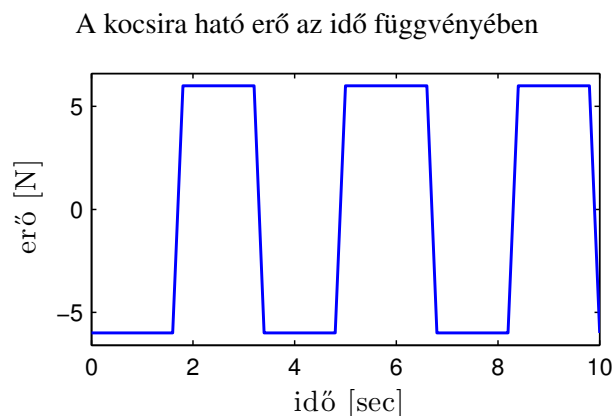
¹A jelölések az A függelék szerintiek, azaz M a kocsi tömege, m a teher tömege, g a nehézségi gyorsulás.

A bemeneti impulzus miatt a kocsi elindul, majd a tolóerő megszűnése után a teher rángató hatása érvényesül. A megfigyelő kis hibával állítja elő az ismeretlen mennyiségeket.

A 4.5. ábrán bemutatott súrlódást is tartalmazó modell viselkedése eltér a C.3. ábrán szemléltetett darumodellétől. A pontatlanabb súrlódási modell és a nagyobb mintavételi idő következtében a teher nem áll meg a tolóerő megszűnésekor. A sebessége ekkor kis amplitúdójú rezgésbe kezd, ami a súrlódási erőben is oszcillációt idéz elő.

A megfigyelő ilyen körülmények között a valóságoshoz közel eső megoldást talál a szimuláció során. A szög becslésében mutatkozik bizonytalanság, de a megfigyelő nem távolodik el túlságosan a valós görbétől. A szögsebességre és a súrlódással terhelt erőre egészen pontos becslést kapunk.

Annak demonstrálására, hogy e megfigyelő nem minden esetben képes megtalálni (4.36) egyenletrendszer aktuális szituációnak megfelelő megoldását, tekintsük a 4.6. ábrán látható szimulációt. Itt a darut mozgató erő a 4.3. ábrán látható 0,3 Hz frekvenciájú, 6 N amplitúdójú négy-szögjel.



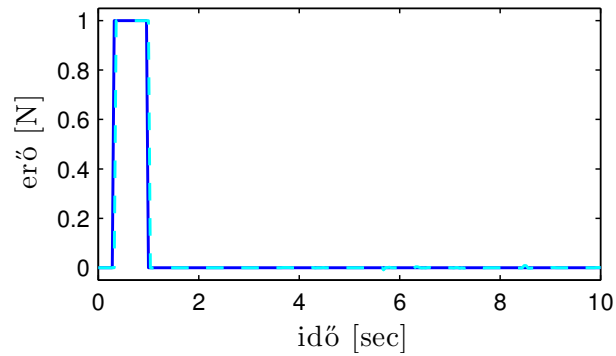
4.3. ábra. A 4.6. ábra szimulációjához használt bemenet.

A bemenetet a súrlódási hatások jelentősen csillapítják és tranziens jelenségekkel módosítják. A kocsit az első negatív impulzus még nem tudja megmozdítani, a hirtelen változó erő azonban kilöki egyensúlyi helyzetéből, így a kocsi mozgásba kezd. A sebesség csúcértéke a mozgás során növekszik, mivel a teher lengésével ebben a súrlódási modellben nem növekszik a Coulomb súrlódás. A bemenet frekvenciája közel esik a lengés sajátfrekvenciájához, ezért annak amplitúdója is növekszik.

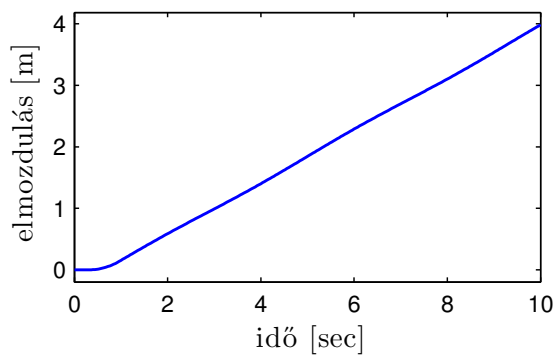
A megfigyelő először 5 s elteltével talál rossz megoldást. Mivel a következő mintavételkor erről a rossz megoldásról inicializáljuk a megoldó algoritmust, a megfigyelő egy ideig nem találja meg a valós szöget és bemenetet. A megfigyelő a hatodik másodperc után kicsivel azonban újra a valódi értékeket becsli. A nyolcadik másodperc után a becsült értékek végleg eltávolodnak a valóditól, a megfigyelő ez után már nem produkál többet jó eredményt.

A megfigyelő fent bemutatott viselkedése különbözik a dinamikus megfigyelők divergenciájától. Az algebrai megfigyelő esetében, ha az `fsolve` talál megoldást az egyenletrendszerre, akkor az nem vehet fel akármilyen értéket, hanem csak Ψ zérushelyeinek valamelyikét. Ezért lehetséges, hogy miután a becsült értékek egyszer eltávolodnak a valós viselkedéstől, a megfigyelő bizonyos idő után újra pontos eredményeket szolgáltat. Előfordulhat az is, hogy az `fsolve` a valóditól olyan távoli megoldást talál, amelyről inicializálva a megfigyelő végleg elszakad a valós jelenségtől.

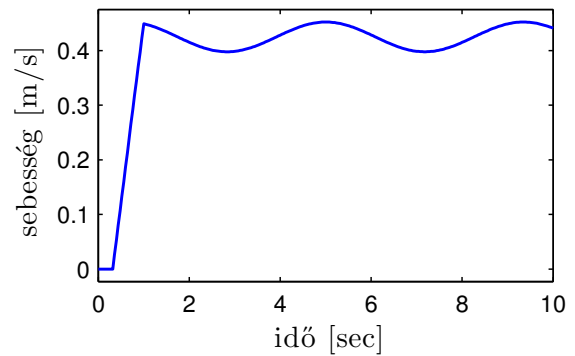
A kocsiira ható erő az időfüggvényében.



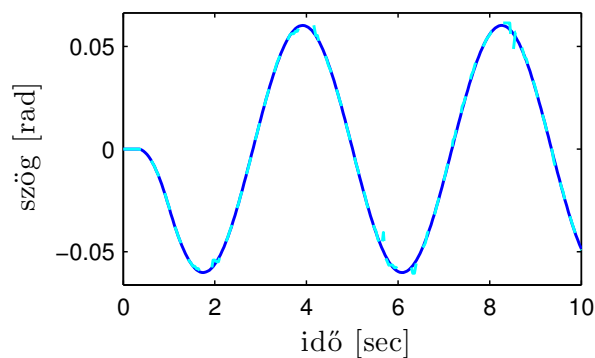
A kocsi elmozdulása az idő függvényében.



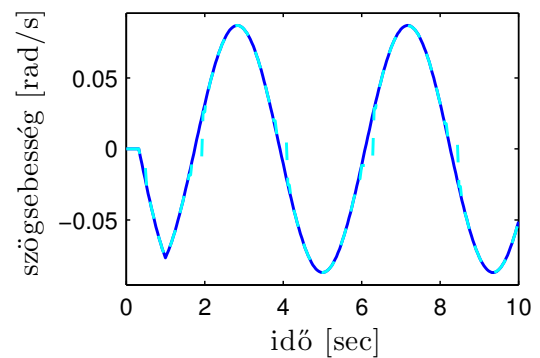
A kocsi sebessége az idő függvényében.



A kőtel kitérés szöge az idő függvényében.

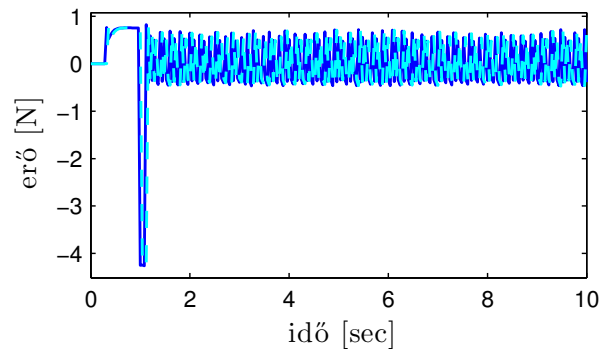


A kőtel szögsebessége az idő függvényében.

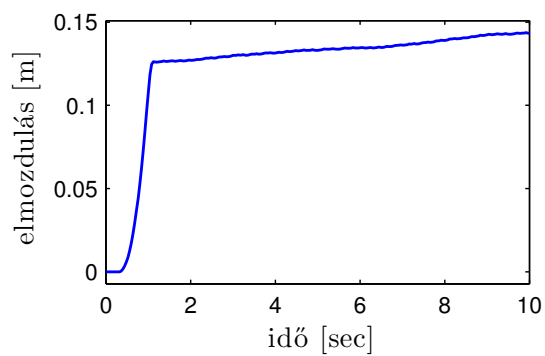


4.4. ábra. A megfigyelés eredménye a nemlineáris, súrlódásmentes ingamoddal, nemlineáris algebrai megfigyelőt alkalmazva. (folytonos - valódi, szaggatott - becsült)

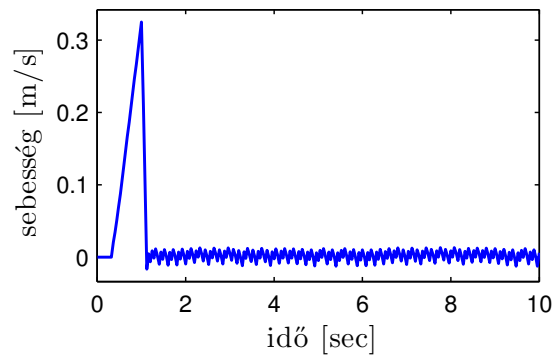
A kocsiira ható erő az időfüggvényében.



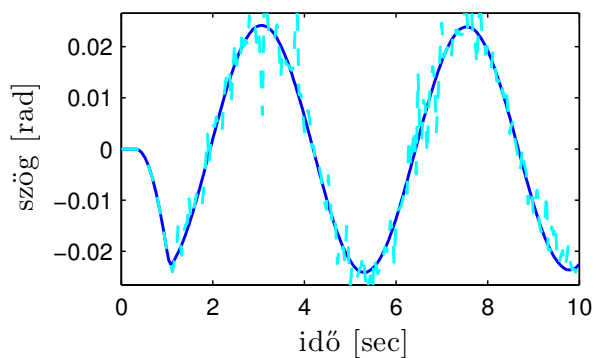
A kocsi elmozdulása az idő függvényében.



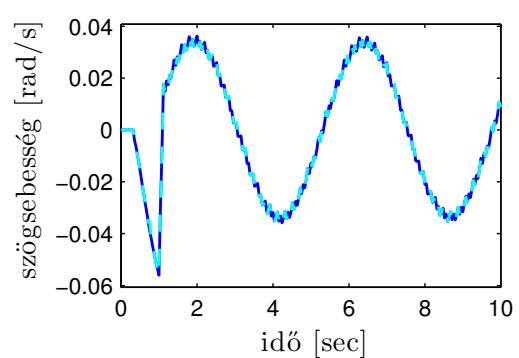
A kocsi sebessége az idő függvényében.



A kőtel kitérésí szöge az idő függvényében.

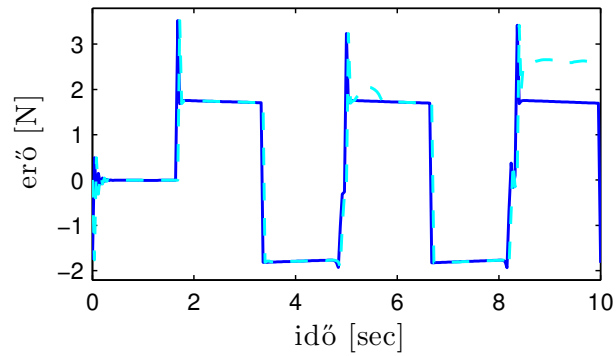


A kőtel szögsebessége az idő függvényében.

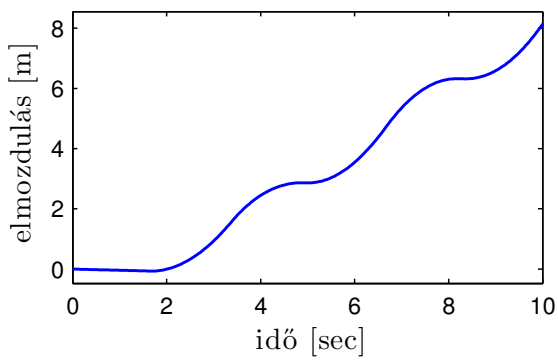


4.5. ábra. A megfigyelés eredménye a nemlineáris, súrlódással kiegészített ingamoddell, nemlineáris algebrai megfigyelőt alkalmazva. (folytonos - valódi, szaggatott - becsült)

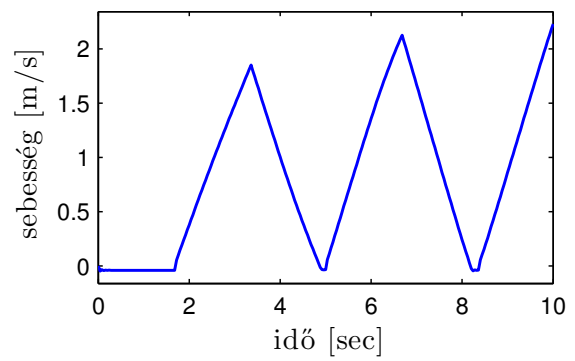
A kocsira ható erő az időfüggvényében.



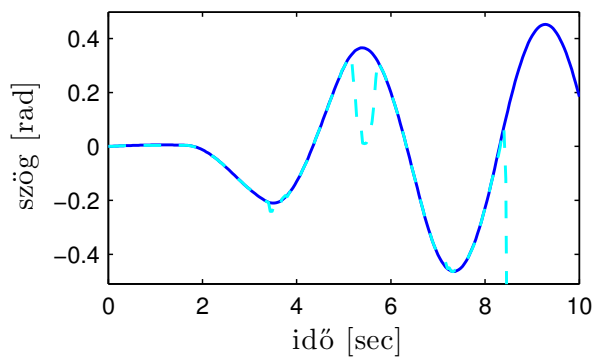
A kocsi elmozdulása az idő függvényében.



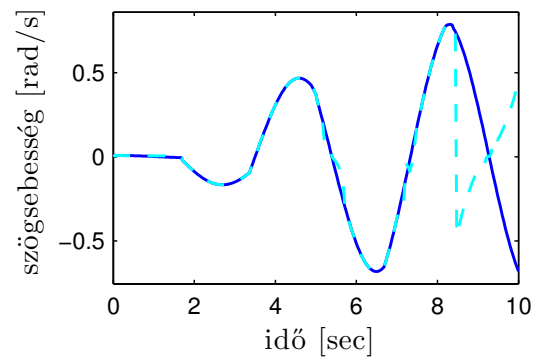
A kocsi sebessége az idő függvényében.



A kötel kitérési szöge az idő függvényében.



A kötel szögsebessége az idő függvényében.



4.6. ábra. A megfigyelés eredménye a nemlineáris, súrlódással kiegészített ingamoddell, négy-szögjel bemenetel, nemlineáris algebrai megfigyelőt alkalmazva. (folytonos - valódi, szaggatott - becsült)

5. fejezet

Összefoglalás

Dolgozatomban ismeretlen bemenetű nemlineáris rendszerekhez alkalmazható diszkrét idejű megfigyelőket vizsgáltam, valamint egy mechatronikai példarendszer (bakdaru) segítségével szemléltettem működésüket. A daru bemeneteit ismeretlennek tekintettem, mivel azok súrlódással terheltek, így a rendelkezésre álló értéktől (a beavatkozó jelektől) jelentősen eltérhetnek. A diszkrét idejű megfigyelők a bemenetet és a bemeneten ható zavarást is konstansnak tételezik fel két mintavételi pont közt, ezért ez a szimulációk során is biztosítottam.

Bemutattam az algebrai típusú megfigyelők egy osztályát, amelynek elemei az állapotok és ismeretlen bemenetek meghatározását a megfigyelt rendszerről alkotott modell egyenleteinek megoldására vezetik vissza. Lineáris modell esetén egy speciális esettől az általános felé haladva módszert adtam a különböző megfigyelők konstrukciójára. Megmutattam, hogy szükséges lehet több mintavételenyi mérési adatot felhasználni az egyenletrendszer megoldásához. Megadtam valamennyi lineáris modellre alapuló megfigyelő konstruálhatóságának szükséges feltételét, és az egyenletrendszer összeállításához felhasználandó mintavételek számát.

Az algebrai megfigyelők működését összevetettem hagyományos, dinamikus megfigyelők teljesítményével, valamint rámutattam a kapott eredmények közti különbségek lehetséges okaira is.

Megmutattam a lineáris modellre alapuló megfigyelők számítási módszerének kiterjesztését nemlineáris modellek esetén. A nemlineáris egyenletrendszer megoldása ekkor numerikus módszerek segítségével lehetséges. A Matlab `fsolve` és `ode` algoritmusának felhasználásával mutattam egy eljárást ilyen megfigyelő készítésére. Az így kapott numerikus egyenletmegoldó algoritmus nem bizonyult minden körülmények között stabilnak, ezért e struktúra működését a többi megfigyelőhöz képest speciális esetben (rögzített kötélhossz és egyszerűsített súrlódási modell) mutattam be.

Munkám folytatásában törekszem a nemlineáris egyenletrendszer megoldásán alapuló módszer

tökéletesítésére. Alternatívát keresek az algebrai (`fsolve`) és a differenciálegyenlet rendszer (`ode`) numerikus megoldó algoritmusára, valamint ezek kezdeti értékeinek jobb megválasztására. Ezáltal remélhető, hogy a módszer általánosabb körülmények között is használhatóvá válik, valamint futásideje is csökkenthető.

Nemlineáris egyenletrendszer megoldása helyett a lineáris modell felhasználása is eredményezhet a nemlineárisnál robusztusabb, ugyanakkor pontos működést. Ehhez a modell mátrixait az aktuális állapotok értékeinek megfelelően frissítjük (a modellt az aktuális munkapontban linearizáljuk), a bővített Kálmán-szűrő működéséhez hasonlóan.

További fejlesztésre ad lehetőséget a bakdaru modelljének pontosítása. A súrlódás is modellezhető a jelenleginél pontosabban, további jelenségek figyelembe vételével, valamint a paraméterkészlet arányosabb beállításával, amelyhez egy valódi bakdarun végzett mérések szolgálhatnak alapul.

Tervezem továbbá a dolgozatban bemutatott algoritmusok hatékonyságát a szimulációkon túl, valódi mérési adatokon végzett futtatásokkal is tesztelni.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőmnek, Dr. Kiss Bálintnak a dolgozatom megírásához nyújtott segítségét, az értékes iránymutatásait, munkám ellenőrzését és a sok rám szánt idejét.

Bakdaru modellje

A bakdaru kétdimenziós modelljének sematikus ábrája látható az A.1 ábrán. A továbbiakban megalkotjuk e rendszer dinamikus modelljét (2.1) alakjában, [8] eredményeit felhasználva. A rendszer bemeneteinek tekintjük a kocsira ható súrlódást és a csörlőre ható forgatónyomatékot: $\begin{pmatrix} F & C \end{pmatrix}^T$. Mérjük a kocsi pozícióját, a kötel hosszát, és ezek deriváltjait, azaz a kocsi sebességét és a kötel hosszának változási sebességét, így a rendszer kimenete a $\begin{pmatrix} x & R & \dot{x} & \dot{R} \end{pmatrix}^T$ vektor. Az állapotvektor a mért mennyiségek mellett tartalmazza a kötel függőlegessel bezárt szögét és e szög deriváltját: $\begin{pmatrix} x & R & \theta & \dot{x} & \dot{R} & \dot{\theta} \end{pmatrix}^T$.

41

modelljét a B függelékben részletezzük. Jelölje a csörlő tehetetlenségi nyomatékát J , a többi mennyiséget pedig az A.1 ábra szerinti jelölése.

Írjuk fel Newton II. törvényét a kocsira és a csörlőre, ekkor rendre a következő egyenleteket kapjuk:

$$M\ddot{x} = S + F + T \sin \theta, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{J}{\rho^2} \ddot{R} = s - \frac{C}{\rho} + T. \quad (\text{A.2})$$

A teherre is alkalmazzuk a mozgásegyenletet a koordinátatengelyek által kijelölt irányokban, ekkor

$$m\ddot{\xi} = -T \sin \theta, \quad (\text{A.3})$$

$$m\ddot{\zeta} = T \cos \theta - mg \quad (\text{A.4})$$

összefüggésekhez jutunk. A teher mozgására érvényes geometriai kényszerek:

$$\begin{aligned} \xi &= x + R \sin \theta, \\ \zeta &= -R \cos \theta. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Felhasználva (A.1), (A.2), (A.4), (A.5) egyenleteket a

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \left(\frac{M}{m} + \sin^2 \theta\right) & \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \left(\frac{J}{m\rho^2} + 1\right) & 0 \\ \cos \theta & 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{R} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (R\dot{\theta}^2 + g \cos \theta) \sin \theta + \frac{S}{m} + \frac{F}{m} \\ R\dot{\theta}^2 + g \cos \theta + \frac{s}{m} - \frac{C}{m\rho} \\ -2R\dot{\theta} - g \sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

alakú egyenletrendszer kapunk. Legyen a bal oldalon álló inerciamátrix K , a jobb oldalon álló vektor b . A korábban definiált állapotvektor és bemenet vektor felhasználásával a differenciálegyenlet-rendszer ezek után felírható (2.1) alakban:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ R \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{R} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{R} \\ \dot{\theta} \\ \begin{pmatrix} K^{-1}b \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (A.7)$$

$$y = \begin{pmatrix} x & R & \dot{x} & \dot{R} \end{pmatrix}^T.$$

A modell paramétereinek számszerű értékét A.1. táblázat tartalmazza.

Név	Jel	Érték	Mértékegység
teher tömege	m	0,1	kg
kocsi tömege	M	1,5	kg
csörlő tehetetlenségi nyomatéka	J	$1,02 \cdot 10^{-5}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
csörlő sugara	ρ	0,02	m
nehézségi gyorsulás	g	9,81	m/s^2

A.1. táblázat. A bakdaru modelljének számszerű paraméterei.

A bakdaru lineáris modelljének előállításához a rendszer nyugvó helyzetét választjuk munkapontnak, amelyben az állapotvektor $\begin{pmatrix} 0 & R_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$, ahol kötéll hosszát $R_0 = 5$ m-nek választjuk.

A súrlódási hatásokat nem vesszük bele a lineáris modellbe, tehát feltesszük, hogy $S = 0$ és $s = 0$. A darura a munkapontban nem hat tolóerő, viszont a teher megtartásához szükséges bizonyos forgatónyomaték. Mivel a daru nyugalmi helyzetében a teher nem mozog, a kötéll függőleges, így (A.2) és (A.4) felhasználásával $C_0 = mg\rho$. Ez alapján a munkaponti bemenetek értéke $\begin{pmatrix} 0 & mg\rho \end{pmatrix}^T$.

A Jacobi-mátrixokat kiszámítva ebben a munkapontban a rendszer állapotátmeneti és bemeneti mátrixa rendre

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0,654 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2,0928 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,6667 & 0 \\ 0 & -398,406 \\ -0,1333 & 0 \end{pmatrix} \quad (A.8)$$

értékű. Mivel a rendszer négy kimenete négy állapotváltozó, kimeneti mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

A diszkrét idejű lineáris modell állapotátmeneti és bemeneti mátrixa rendre

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,0000 & 0,01 & 0 & 0,0000 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9999 & 0 & 0 & 0,01 \\ 0 & 0 & 0,0065 & 1 & 0 & 0,0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0209 & 0 & 0 & 0,9999 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0,0000 & 0 \\ 0 & -0,0199 \\ -0,0000 & 0 \\ 0,0067 & 0 \\ 0 & -3,9841 \\ -0,0013 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

A nemlineáris modell esetén a kocsi vízszintes mozgása és a lengés szöge, valamint a kötélhossz dinamikája csatolt, így a nemlineáris modellt használó szimulációk során a teher zuhanásának megakadályozására egy állapotteres szabályozót használunk, amely a közel hosszát a munkaponti R_0 érték közelében tartja.

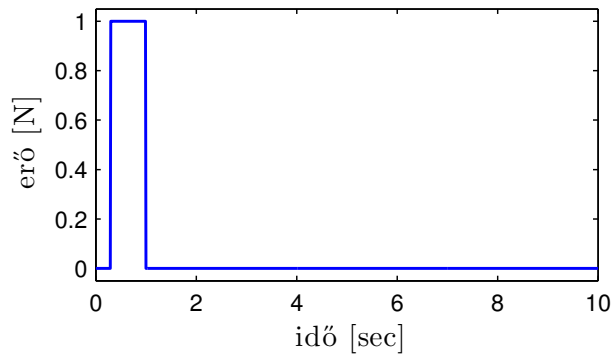
A darumodell szimulált viselkedése súrlódásmentes esetben ($S = 0$, $s = 0$) az A.2. ábrán látható. A daru kocsiját egy 1 N nagyságú erőimpulzussal toljuk 0,7 s ideig. A tolóerő hatására a kocsi megmozdul és a teher lengeni kezd. A lengés miatt változik a kötel hosszának konstans értéken tartásához szükséges forgatónyomaték, ezért beavatkozik a szabályozó. Ennek eredményeként hullámszik a forgatónyomaték a csörlőn.

A kötel hossza ugyan ingadozik, de a szabályozónak sikerül 4 mm-es hibasávban tartania azt. A kötélhossz deriváltja ennek köszönhetően kicsi, mm/s nagyságrendű a mozgás során.

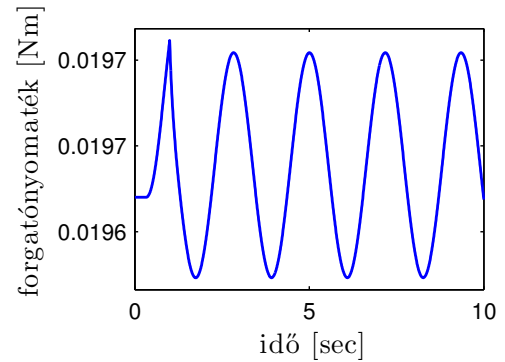
A teher a kocsi indulásakor tehetetlensége miatt lemarad, mivel arra a tolóerő nem hat közvetlenül. A modell nem tartalmaz közegellenállást, ezért tolóerő megszűnésével a lengés állandó amplitúdójú. A teher szögsebességét ábrázoló grafikonon látható, hogy a kocsi a megálláskor is megrántja a terhet, ezzel csökkentve a lengés amplitúdóját.

Mivel nincsenek súrlódási hatások, a tolóerő megszűnésekor a kocsi nem áll meg, hanem a megszerzett sebességével továbbhalad. A teher lengése kis mértékben rángatja a kocsit, ezért a sebesség nem konstans, a középvérték körül szinuszos ingadozása figyelhető meg.

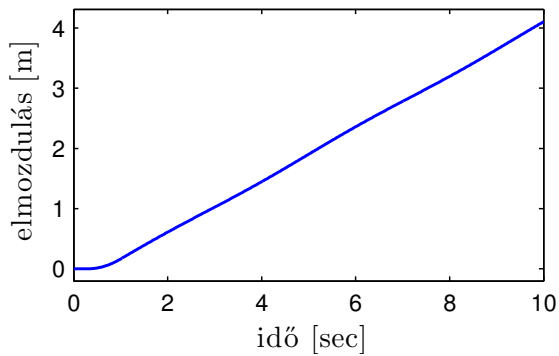
A kocsira ható erő az időfüggvényében.



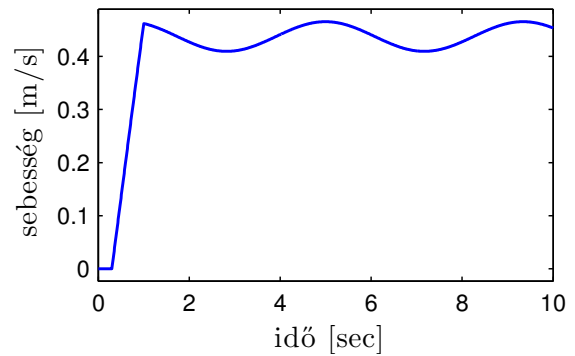
A csörlőre ható forgatónyomaték.



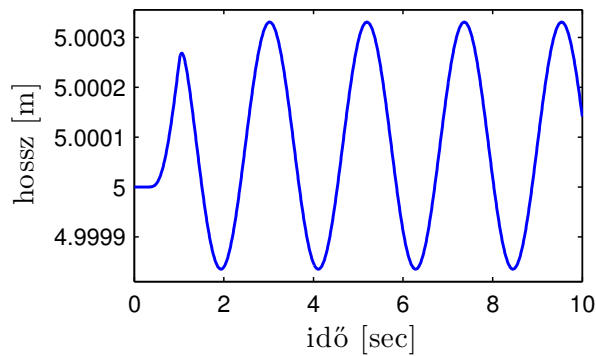
A kocsi elmozdulása az idő függvényében.



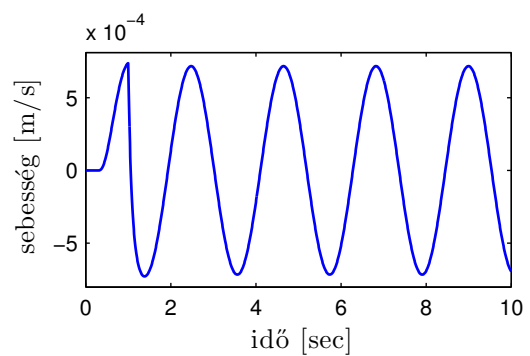
A kocsi sebessége az idő függvényében.



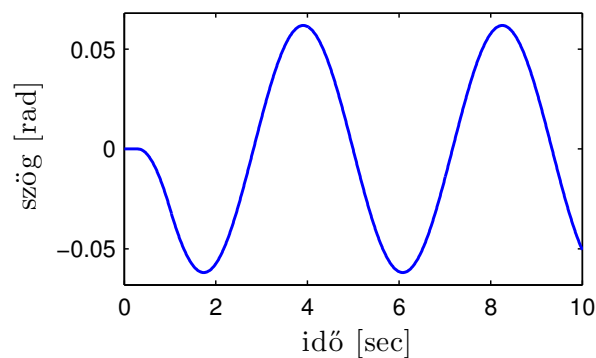
A kötel hossza az idő függvényében.



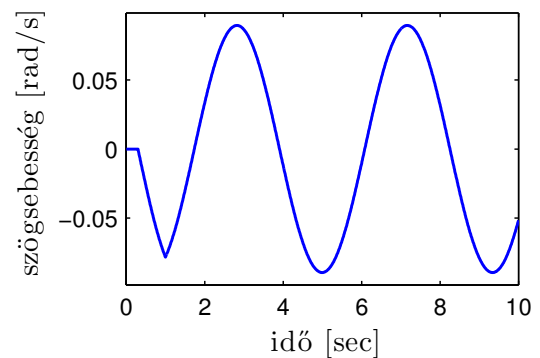
A kötel hossz-változása az idő függvényében.



A kötel kitérési szöge az idő függvényében.



A kötel szögsebessége az idő függvényében.



A.2. ábra. Szimulációs eredmények a súrlódást nem tartalmazó darumodellről.

A.2. Ingamodell

A bakdaruról készítünk egy egyszerűsített ingamodellt. Ezt (A.7) rendszerből úgy kapjuk, hogy a kötéll hosszát rögzítjük, és az azt módosító dinamikát elhagyjuk ($R = R_0$ és $\frac{d^n R}{dt^n} = 0$ ha $n > 0$). Ekkor a rendszer bemenete csak a tolóerő F , állapotvektora pedig $\begin{pmatrix} x & \theta & \dot{x} & \dot{\theta} \end{pmatrix}^T$. (A.6) egyenletrendszerből az $\ddot{R}$ -ot tartalmazó egyenletet elhagyva

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{M}{m} + \sin^2 \theta\right) & 0 \\ \cos \theta & R_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R_0 \dot{\theta}^2 + g \cos \theta) \sin \theta + \frac{S}{m} + \frac{F}{m} \\ -2R_0 \dot{\theta} - g \sin \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

egyenletrendszert kapjuk, amiben R_0 már paraméter. A bal oldalon álló mátrix legyen K_i , a jobb oldali vektor b_i . Az inga modellje így:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ K_i^{-1} b_i \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

$$y = \begin{pmatrix} x & \dot{x} \end{pmatrix}^T.$$

Az ingamodell lineáris mátrixai a darumodell mátrixaiból nyerhetők a megfelelő sorok és oszlopok elhagyásával. A folytonos idejű modell mátrixai a következők:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,654 & 0 & 0 \\ 0 & -2,0928 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,6667 \\ -0,1333 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

A diszkrét idejű lineáris modell mátrixai hasonlóan adódnak:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,0000 & 0,01 & 0,0000 \\ 0 & 0,9999 & 0 & 0,01 \\ 0 & 0,0065 & 1 & 0,0000 \\ 0 & -0,0209 & 0 & 0,9999 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0,0000 \\ -0,0000 \\ 0,0067 \\ -0,0013 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

A kimeneti mátrix a folytonos és diszkrét idejű modell esetén egyaránt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

B. Függelék

Súrlódás modellje

Érintkező felületek kölcsönhatásának leírására nagyszámú különböző modell létezik [1]. A darumodell esetén fellépő súrlódás modellezésénél a következő komponensekre szorítkozunk:

- tapadási súrlódás,
- Coulomb-súrlódás,
- Striebeck-súrlódás,
- viszkózus súrlódás.

Egy testet érdes felületen $\mathcal{T}$ nagyságú tolóerővel próbálunk mozgatni úgy, hogy $\mathcal{T}$ a felülettel párhuzamos irányú. Legyen a felület és a test között ébredő nyomóerő N , a felület tapadási súrlódási együtthatója μ_0 . Ekkor a test nem mozdul meg mindaddig, amíg

$$|\mathcal{T}| \leq \mu_0 |N|. \quad (\text{B.1})$$

Adott N mellett a tapadási erő maximális értéke $\mu_0 |N|$, jelöljük ezért F_{tmax} -szal. A tapadási súrlódási erő iránya ellentétes $\mathcal{T}$ irányával, ezért

$$F_t = \begin{cases} -\mathcal{T} & \text{ha } |\mathcal{T}| \leq F_{tmax} \\ 0 & \text{ha } |\mathcal{T}| > F_{tmax}. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Ha a testet toló erő elérte a tapadás határát, a tapadási erő megszűnik. Ekkor jelentkezik a Coulomb súrlódási erő, amelynek nagysága

$$F_C = -\mu N \operatorname{sgn} \{ \mathcal{T} \}, \quad (\text{B.3})$$

ahol μ a Coulomb súrlódási együttható, $\text{sgn} \{ \}$ pedig az előjelfüggvény, melynek definíciója

$$\text{sgn} \{x\} = \begin{cases} 1 & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \\ -1 & \text{ha } x < 0. \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Egy felület tapadási súrlódási együtthatója általában nagyobb, mint a Coulomb-súrlódási együtthatója ($\mu_0 \geq \mu$), ezért a Coulomb-súrlódási erő általában kisebb, mint a tapadási. A kettő közti váltáskor megfigyelhető egy exponenciálisan lecsengő transziens súrlódás, az úgynevezett Striebeck-hatás, amelynek nagysága

$$F_S = -(F_{tmax} - F_C)e^{-\frac{v}{v_S}\text{sgn} \{ \mathcal{T} \}}, \quad (\text{B.5})$$

ahol v a test sebessége, v_S pedig az úgynevezett Striebeck-sebesség.

Ha a test már mozog, akkor az előzőek mellett megfigyelhető egy sebességgel arányos súrlódási komponens is, amelyet viszkózus súrlódásnak hívunk. Ha a felület viszkózus súrlódási együtthatója σ , akkor

$$F_v = -\sigma v. \quad (\text{B.6})$$

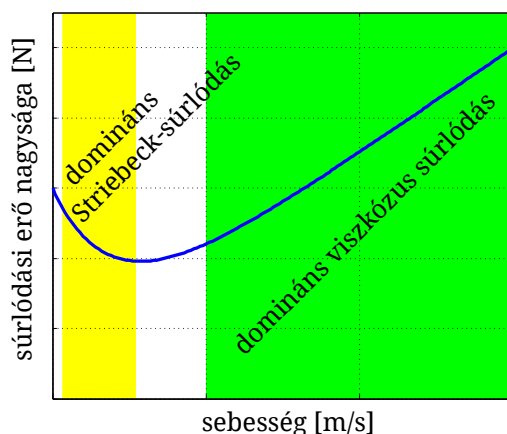
A test és az érdes felület között fellépő teljes súrlódás tehát

$$S = F_t + F_C + F_S + F_v. \quad (\text{B.7})$$

Behelyettesítve (B.2), (B.3), (B.5) és (B.6) összefüggéseket, megkapjuk a súrlódás teljes kifejezését:

$$S = \begin{cases} -\left(F_C + (F_{tmax} - F_C)e^{-\frac{v}{v_S}}\right)\text{sgn} \{v\} - \sigma v & \text{ha } v \neq 0 \\ -\mathcal{T} & \text{ha } v = 0. \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

A súrlódási erő sebességkarakteristikáját szemlélteti a B.1. ábra.



B.1. ábra. A súrlódási erő nagysága a sebesség függvényében.

A súrlódási modell paramétereinek értékét az A függelékben ismertetett daruhoz a B.1 táblázat tartalmazza. A csörlőn található kenőanyagok miatt az itt fellépő súrlódási hatásokat egy nagyságrenddel kisebbre becsültük a kocsi és a sín közt fellépőnél.

Név	Jel	Érték		Mértékegység
		kocsi	csörlő	
tapadási súrlódási együttható	μ_0	0,3	0,03	$\emptyset$
Coulomb súrlódási együttható	μ	0,27	0,027	$\emptyset$
Striebeck sebesség	v_S	0,03	0,003	m/s
viszkózus súrlódási együttható	σ	0,03	0,003	kg/s

B.1. táblázat. A súrlódási modell számszerű paraméterei.

Az A függelékben ismertetett daru súrlódással kiegészített modelljének szimulációs eredményei a B.2. ábrán láthatók. Az eredmények nagyban eltérnek az A.2. ábrán látható súrlódásmentes esettől.

A kocsi megmozdításához a tapadási súrlódás miatt most nagyobb erőre van szükség, ezért a tolóerő 5 N nagyságú. A súrlódás Striebeck-hatás okozta transziens viselkedése eredményezi a szabályozó gyorsan változó beavatkozó jelét a tolóerő éles váltásaikor. Állandósult állapotban már kisebb nyomatékkal is megoldható a teher megtartása.

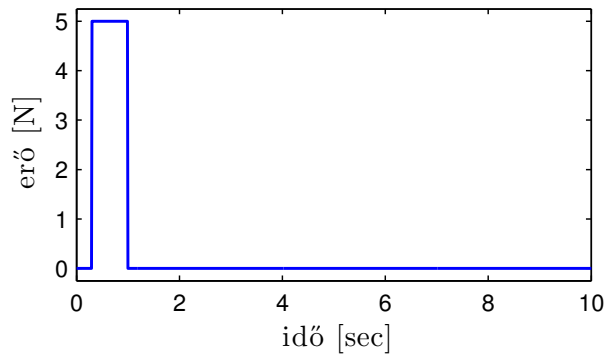
A kötel hosszának ingadozása kisebb, mint a súrlódásmentes esetben. mert a csörlőn megjelenő súrlódás miatt a kötel nehezebben tekeredik le. Ennek megfelelően a kötelhossz változási sebessége is szűk tartományban marad.

A kötel a kocsi indulásakor lengésbe kezd, azonban ez kisebb amplitúdójú, mint a súrlódásmentes esetben, mivel a súrlódás csökkenti a tolóerőt, így annak ellenére hogy nagyobb értékű, kevesebb energiát képes közölni a rendszerrel. Az erő megszűnésekor a kocsi a Coulomb-, majd

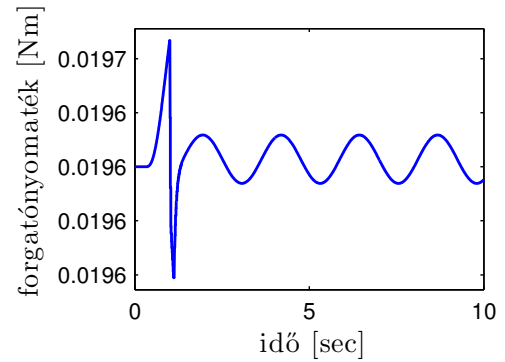
a tapadási súrlódás miatt megtorpan, nagyot rántva a terhen, melynek következtében lengésének iránya ellentétesre fordul.

A kocsi az erőhatás megszűnésének következtében nem áll meg teljesen, elmozdulásának grafikonja enyhén emelkedik ekkor is. Ezt az okozza, hogy a szimuláció numerikus pontatlansága miatt a kocsinak marad egy kicsi (mm/s nagyságrendű) állandósult sebessége. Ettől eltekintve azonban látható, hogy a súrlódási erők nagyon rövid időn belül megállítják a kocsit.

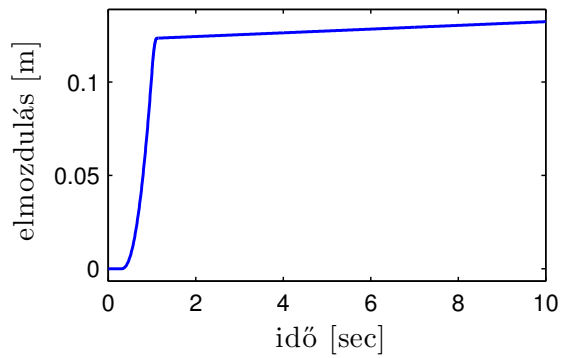
A kocsira ható erő az időfüggvényében.



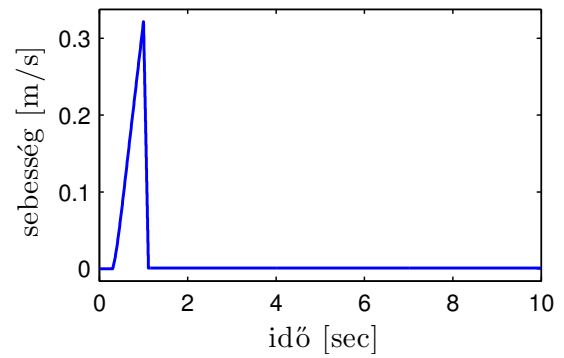
A csörlőre ható forgatónyomaték.



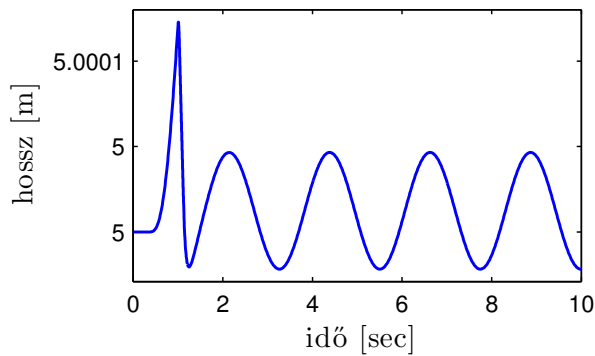
A kocsí elmozdulása az idő függvényében.



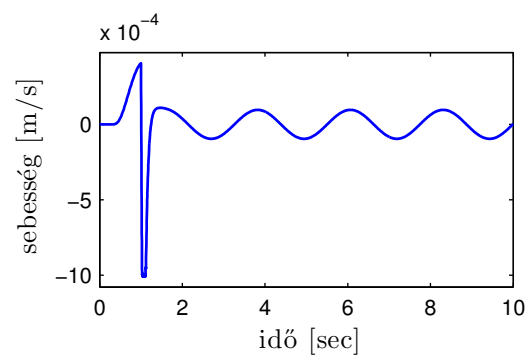
A kocsí sebessége az idő függvényében.



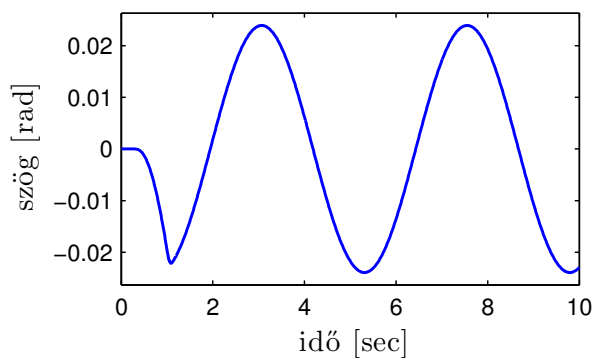
A kőtel hossza az idő függvényében.



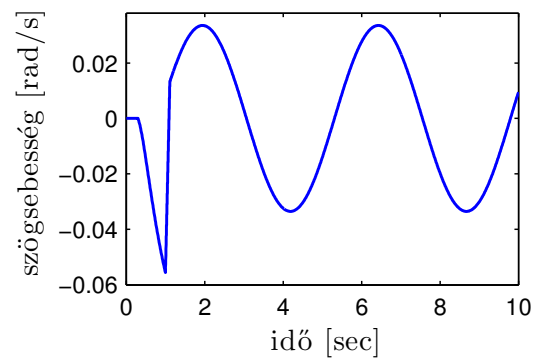
A kőtel hossz-változása az idő függvényében.



A kőtel kitérésí szöge az idő függvényében.



A kőtel szögsebessége az idő függvényében.



B.2. ábra. Szimulációs eredmények a súrlódást tartalmazó darumodellről.

C. Függelék

A súrlódási modell integrációja a darumodellbe

Tekintsük az A függelékben ismertetett darumodell (A.1) egyenletét. Ebben az egyenletben kocsit mozgó F erő, és a B függelékben részletezett S súrlódási erő összege szerepel. Mivel S további dinamikai egyenletekben nem jelenik meg, elmondható, hogy a súrlódás csak a tolóerőre hat közvetlenül. A valódi bemenethez a súrlódás tehát hozzáadódik, így létrehozva a súrlódásos bemenetet:

$$\tilde{F} = F + S. \quad (\text{C.1})$$

Az (A.2) egyenlet alapján, az előzővel azonos indoklással bevezethető a súrlódással terhelt forgatónyomaték bemenet:

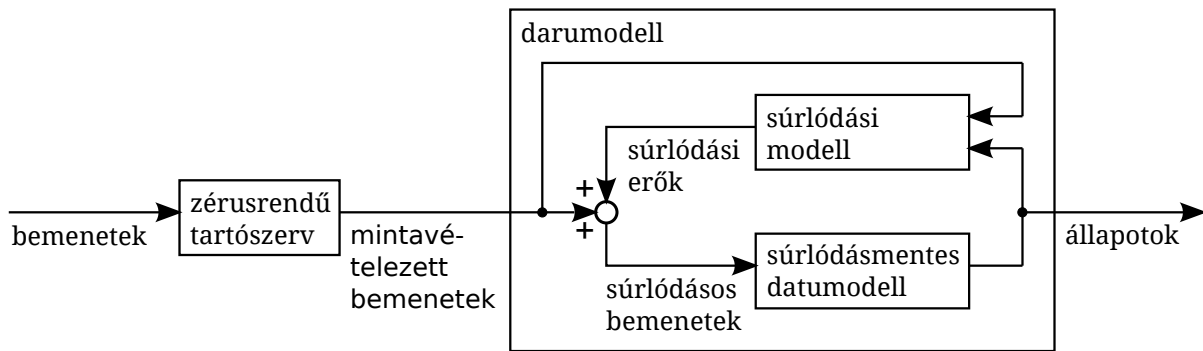
$$\tilde{C} = C - s\rho. \quad (\text{C.2})$$

Mivel a súrlódási erők csak a bemenetekhez adódnak hozzá, a daru viselkedése súrlódásos közegben modellezhető úgy, hogy a súrlódásmentes modell bemenetinek $\tilde{F}$ -ot és $\tilde{C}$ -ot tekintjük.

A beavatkozó jeleket (F -et és C -t) valós környezetben legtöbbször digitális szabályzó állítja elő. Ennek modellezésére a szimulációk során a darura adott bemeneteket 10 ms-os mintavételi idővel mintavételezzük. A mintavételezés nem terjed ki a súrlódási erőkre, mivel azok a rendszer belső erői.

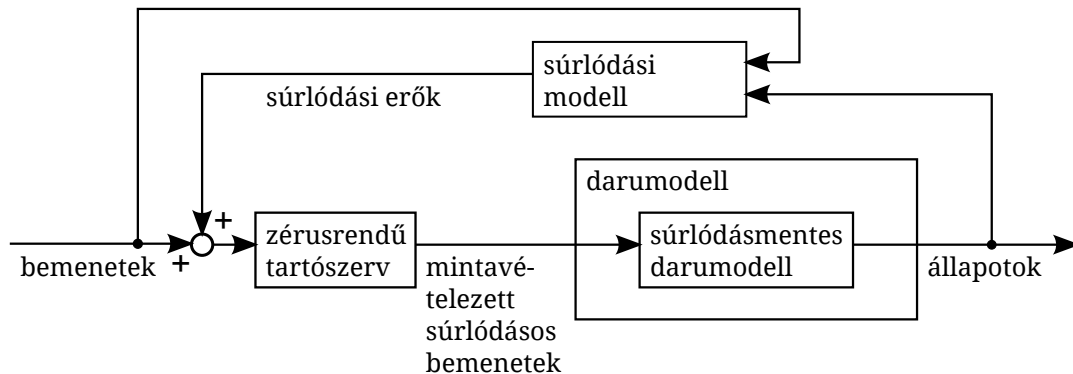
A fenti koncepciót szemlélteti a C.1. ábra.

A diszkrét idejű megfigyelők tervezésekor a dinamikus rendszer diszkrét idejű modelljéből indulunk ki, amely feltételezi, hogy a rendszer bemenetei két mintavétel között konstans értékűek. Ez a feltevés teljesül a darumodell esetén F -re és C -re, nem teljesül azonban az ismeretlen be-



C.1. ábra. A súrlódási modell integrációja a darumodellbe folytonos súrlódási hatásként.

menetnek tekintett $\tilde{F}$ -ra és $\tilde{C}$ -ra. Annak érdekében, hogy diszkrét idejű megfigyelők viselkedését eredményesen tudjuk vizsgálni, a szimulációk során eltérünk a C.1. ábrán vázolt struktúrától és a beavatkozó jelek helyett a súrlódásos bemeneteket mintavételezzük. E megoldás blokkvázlata látható a C.2. ábrán.



C.2. ábra. A súrlódási modell integrációja a darumodellbe mintavételezett súrlódási hatásként.

Az A függelékbeli darumodellt ezzel a megoldással szimulálva más eredményeket kapunk, mint a B.2. ábrán látható, folytonos súrlódási erőkkel szimulált viselkedés. A diszkrét súrlódás hatását a darumodellre a C.3. ábra szemlélteti.

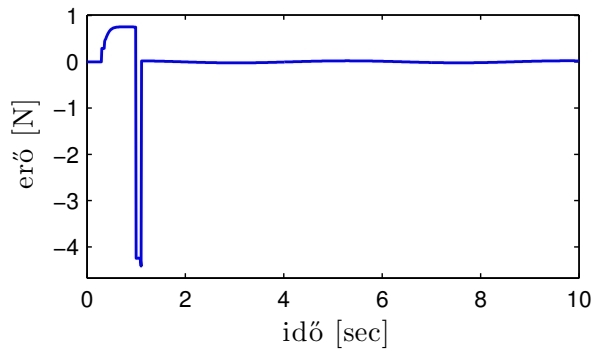
A darut most is 5 N nagyságú, 0,7 s hosszú erőimpulzussal toljuk, mint a B.2. ábrán látható szimuláció esetében. A C.3. ábrán a bemenetek helyett a súrlódásos bemeneteket ($\tilde{F}$ -ot és $\tilde{C}$ -ot) . Látható, hogy a Striebeck-súrlódás exponenciális lecsengése miatt a bemenetből egyre nagyobb rész tud érvényesülni. Amikor a tolóerő megszűnik, a Coulomb súrlódás egyeduralkodóvá válik, ez okozza a nagy negatív impulzust. A kocsi ekkor lassulni kezd, ezért a Striebeck-súrlódás növekszik, és végül a tapadási erő állítja meg a kocsi mozgását. A bemeneti erőben ez után kis ingadozás figyelhető meg, amit a lengésnek ellenálló tapadási erő okoz.

A szabályozónak a diszkrét súrlódás miatt nehéz a terhet megtartani, két esetben is produkál oszcillációt, majd ezt követően nagy beavatkozójelet. A kötél hosszában kezdettől fogva statikus hiba látható, amely az nagymértékű beavatkozások hatására megváltozik, de nem tűnik

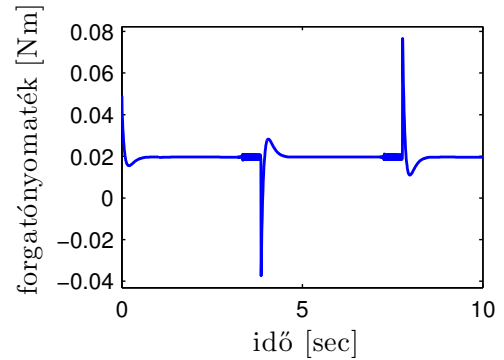
el.

Mivel a teher lengésének jellegét kevésbé befolyásolják a súrlódási hatások, mint a kocs mozgását, a szög és a szögsebesség alakulása nagymértékben hasonlít a B.2. ábrán láthatóhoz. A modellbeli numerikus pontatlanság miatt a kocs sebessége most sem zérus, miután látszólag megállt, ekkor is rendelkezik elhanyagolható sebességgel.

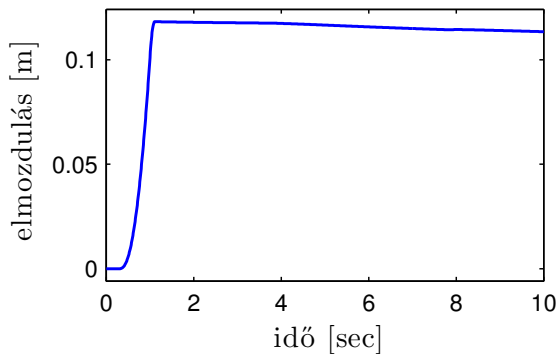
A kocsiira ható erő az időfüggvényében.



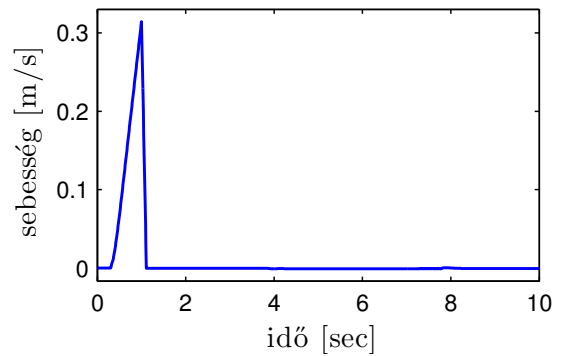
A csörlőre ható forgatónyomaték.



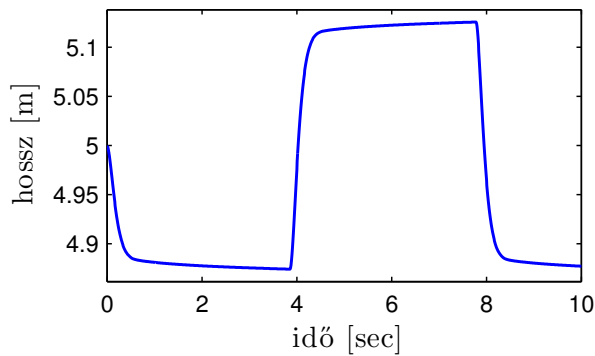
A kocsi elmozdulása az idő függvényében.



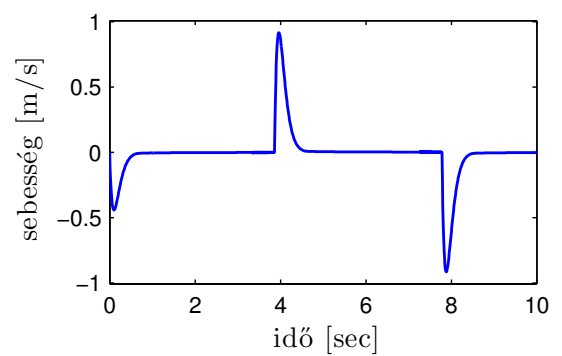
A kocsi sebessége az idő függvényében.



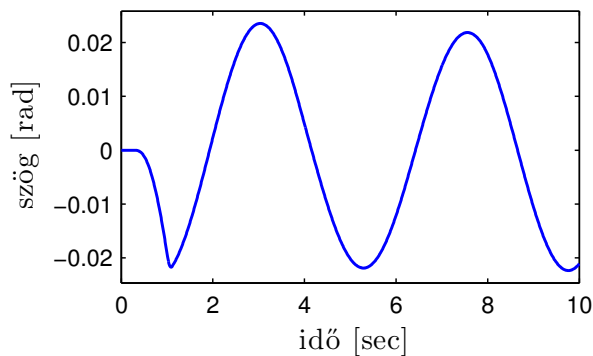
A kötel hossza az idő függvényében.



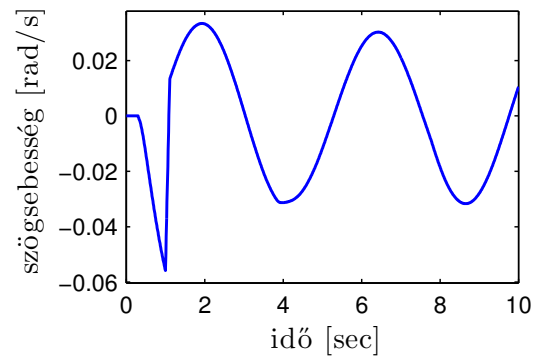
A kötel hossz-változása az idő függvényében.



A kötel kitérési szöge az idő függvényében.



A kötel szögsebessége az idő függvényében.



C.3. ábra. Szimulációs eredmények a mintavételezett súrlódást tartalmazó darumodellről.

Irodalomjegyzék

- [1] Brian Armstrong-Hélouvry, Pierre Dupont, and Carlos Canudas De Wit. A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction. *Automatica*, vol. 30(7):1083–1138, 1994.
- [2] Pierre R Belanger. Estimation of noise covariance matrices for a linear time-varying stochastic process. *Automatica*, 10(3):267–275, 1974.
- [3] Simon S. Haykin et al. *Kalman filtering and neural networks*. New York, John Wiley and Sons, Inc., 1st ed. edition, 2001. ISBN 0-471-22154-6, pp. 284.
- [4] Stefen Hui and Stanisław H Zak. Observer design for systems with unknown inputs. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 15(4):431, 2005.
- [5] Rudolph E. Kalman and Richard S. Bucy. New results in linear filtering and prediction theory. *Journal of Basic Engineering*, 83(3):95–108, 1961.
- [6] Rudolph E. Kalman et al. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of basic Engineering*, 82(1):35–45, 1960.
- [7] Béla Lantos. *Egyváltozós szabályozások*. Irányítási rendszerek elmélete és tervezése I. Budapest, Akadémia Kiadó, 1st ed. edition, 2001. ISBN 963-05-7787-9, pp. 491.
- [8] Jean Lévine. *Analysis and control of nonlinear systems*. Mathematical Engineering. Berlin, Heideberg, Springer-Verlag, 2009. ISBN 978-3-642-00838-2, pp. 281.
- [9] Magnus Linderöth, Kristian Soltesz, Anders Robertsson, and Rolf Johansson. Initialization of the kalman filter without assumptions on the initial state. In *Robotics and Automation (ICRA), 2011 IEEE International Conference on*, pages 4992–4997. IEEE, 2011.
- [10] Peter S Maybeck. *Stochastic models, estimation, and control*, volume 3. Access Online via Elsevier, 1982.
- [11] Paul E Moraal and Jessy W Grizzle. Observer design for nonlinear systems with discrete-time measurements. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 40(3):395–404, 1995.

- [12] Shreyas Sundaram. Observers for linear systems with unknown inputs (book chapter). URL: <https://ece.uwaterloo.ca/ssundara/courses/notes/uiobs.pdf>, 2012.
- [13] Shreyas Sundaram and Christoforos N Hadjicostis. Partial state observers for linear systems with unknown inputs. *Automatica*, 44(12):3126–3132, 2008.
- [14] Greg Welch and Gary Bishop. An introduction to the Kalman filter, 1995.