

Szimultán számrendszerek számítógépes vizsgálata $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ algebrai egészei körében

TDK-dolgozat

Témavezető:

Nagy Gábor
adjunktus

Készítette:

Krutki Tamás
programtervező informatikus BSc

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar
Komputeralgebra Tanszék
Budapest, 2014.

Lezárás dátuma: 2014.11.22.

Abstract

The concept of a number system can be generalised by increasing the number of bases. Number systems with more than one base are called simultaneous number systems. There exist number systems of the Gaussian integers with two bases, and some results are known about these systems. It is not hard to prove that there is no simultaneous number system of the Gaussian integers with three bases, however we hope that such systems exist amongst the algebraic integers of the $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ quadratic field.

It is possible to decide whether a given digit set and bases form a simultaneous number system in this structure with the verification of a finite set of number-triplets. The problem is that in the case of three bases, these sets are too large and checking every element takes too much time to be practical.

The subject of this paper is the development of software which can check these sets in acceptable times (parallelization, GPU computing), the description of the used algorithms, and using the software to verify the existence of simultaneous number systems with three bases.

The existence of simultaneous number systems with three bases was confirmed by the finished software for some concrete choices of bases (both with dense and K-type digit sets).

If not the entire set is checked but only a fixed number of elements, we can conjecture whether the examined system forms a simultaneous number system or not. With this technique it became possible to check a large number of cases and map the results in the neighbourhood of $(0,0)$. The resulting graph shows similarity with the graph of the norm function of the structure.

Kivonat

A számrendszerfogalom egyik lehetséges általánosítását kapjuk, ha az alapok számát növeljük. Ezeket a több alappal rendelkező számrendszereket szimultán számrendszereknek nevezzük. A Gauss-egészek körében léteznek szimultán számrendszerek két alappal, és ezekkel kapcsolatban számos eredmény ismert. Könnyen belátható, hogy 3 alappal nem létezik szimultán számrendszer a Gauss-egészek körében, azt reméljük azonban, hogy $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ kvadratikusan test algebrai egészei között igen.

Ismert, hogy a vizsgált struktúrában adott alapok és számjegyhalmaz esetén egy véges halmaz összes elemének ellenőrzésével eldönthető, hogy a rendszer számrendszert alkot-e. A probléma, hogy 3 alap esetén hiába véges a vizsgálandó halmaz, akkora, hogy túl sokáig tart az ellenőrzése.

A dolgozat tárgya a vizsgálatot meggyorsító program kifejlesztése (párhuzamosítás, GPU felhasználása a számításokhoz), a program működésének bemutatása, majd a programot felhasználva számrendszerek létezésének ellenőrzése adott alapokkal és számjegyhalmaz-konstrukciókkal.

A program segítségével két számjegyhalmaz-konstrukció (sűrű és K-típusú) esetén is sikerült néhány alap-hármashoz tartozó halmazt teljesen átvizsgálni és megbizonyosodni arról, hogy ezek valóban szimultán számrendszert alkotnak.

Ha adott alapokhoz tartozó halmazból véletlenszerűen választunk vizsgálandó elemeket, akkor a teljes halmaz átvizsgálása nélkül is sejthetjük, hogy a rendszer szimultán számrendszert alkot-e vagy sem. Ezen módszer segítségével sikerült a számrendszert alkotó alapok elhelyezkedését feltérképezni $(0,0)$ környezetében, ami kapcsolatot mutat a struktúrában értelmezett norma függvénnyel.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
1.1. Köszönetnyilvánítás	3
1.2. Összefoglalás	3
2. Fontos definíciók és tételek	5
2.1. Számrendszerek egy alappal	5
2.2. Szimultán számrendszerek	6
2.3. Szimultán számrendszerek számjegyhalmazai	8
2.3.1. Sűrű számjegyhalmaz	8
2.3.2. K-típusú számjegyhalmaz	9
2.4. A $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ kvadratikus test és az algebrai egészek gyűrűje ebben a testben . .	10
3. A vizsgált probléma bemutatása	12
3.1. Szimultán számrendszerek létezése három alappal és az alap-hármasok elhelyezkedése $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{5}]}$ -ben	12
3.2. A használt módszerek és algoritmusok bemutatása	15
3.2.1. A számhármasok ellenőrzésére használt algoritmus	15
3.2.2. További optimalizáció K-típusú számjegyhalmaz-konstrukció esetén . .	16
3.2.3. Nagy számú alap részleges ellenőrzése véletlenszerű elemválasztással .	17
4. A program tervezése, implementációja és használata	19
4.1. A program tervezése, felhasznált technológiák	19
4.2. A program szerkezete	20
4.2.1. Főprogram, input paraméterek feldolgozása	21
4.2.2. Számábrázolás és műveletek	21
4.2.3. Számjegyhalmazokhoz kapcsolódó műveletek	22
4.2.4. Számok felírhatóságának ellenőrzése	22
4.2.5. Segédfüggvények	24
4.3. A program fordítása és használata	24
4.3.1. Fordítás	24

4.3.2.	Használat	27
4.4.	Tesztelés, helyesség	29
4.5.	Tapasztalatok	30
4.5.1.	Számítások sebessége	30
4.5.2.	A program teljesítménye különböző fordítóprogramok és fordítási be- állítások mellett	31
4.6.	Lehetőségek továbbfejlesztésre	31
5.	Eredmények	33
5.1.	Becslések a számítások során előforduló minimális és maximális értékekre . .	33
5.2.	Szimultán számrendszerek létezése 3 alappal az $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{5}]}$ gyűrűben	34
5.3.	A szimultán számrendszert alkotó alap-hármasok elhelyezkedése és kapcsolata a norma-függvénnyel	35
6.	Az eredmények rövid összefoglalása	39
7.	Irodalomjegyzék	40
8.	Függelékek	42
A.	K-típusú jegyhalmazzal számrendszert nem alkotó alap-hármasok	42
A.1.	Az (a, b) , $(a + 1, b)$, $(a + 1, b + 1)$ alap-hármas-konstrukció esete . . .	42
A.2.	Az (a, b) , $(a, b + 1)$, $(a + 1, b + 1)$ alap-hármas-konstrukció esete . . .	46
A.3.	Az (a, b) , $(a - 1, b)$, $(a - 1, b + 1)$ alap-hármas-konstrukció esete . . .	50
A.4.	Az (a, b) , $(a, b + 1)$, $(a - 1, b + 1)$ alap-hármas-konstrukció esete . . .	54
B.	Sűrű jegyhalmazzal számrendszert nem alkotó alap-hármasok	59
B.1.	Az (a, b) , $(a + 1, b)$, $(a + 1, b + 1)$ alap-hármas-konstrukció esete . . .	59
B.2.	Az (a, b) , $(a, b + 1)$, $(a + 1, b + 1)$ alap-hármas-konstrukció esete . . .	61
B.3.	Az (a, b) , $(a - 1, b)$, $(a - 1, b + 1)$ alap-hármas-konstrukció esete . . .	63
B.4.	Az (a, b) , $(a + 1, b)$, $(a + 1, b + 1)$ alap-hármas-konstrukció esete . . .	65
C.	Grafikonok	67

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Köszönetnyilvánítás

Köszönetet mondok Nagy Gábor témavezetőmnek a probléma felvetéséért és témavezetői munkájáért, amellyel lehetővé tette dolgozatom elkészítését. Köszönet illeti még Vatai Emilt, aki számítógépet biztosított az elkészült program futtatásához.

1.2. Összefoglalás

Dolgozatomban a $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ kvadratikus test algebrai egészei körében szimultán számrendszerek létezésével foglalkozom. A „hagyományos” számrendszerfogalom kiterjeszthető tetszőleges, nullától eltérő valós vagy akár komplex alapra is. A számrendszerfogalom kiterjesztésének egy másik módja több alap bevezetése. Ekkor kapjuk az úgynevezett szimultán számrendszereket. Számrendszerek nem csak a valós (vagy komplex) számtestben, hanem számos más struktúrában is értelmezhetők. Ilyen például a Gauss-egészek gyűrűje, vagy a jelen dolgozatban vizsgált $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{5}]}$ gyűrű is (amely a $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ testbeli algebrai egészek gyűrűje). Az általánosított számrendszerekhez többféle számjegyhalmaz-konstrukció is ismert (lásd például [1]), ezek közül részletesen a sűrű és a K-típusú számjegyhalmazzal foglalkozom a dolgozatban.

Ahhoz, hogy egynél több alap szimultán számrendszert alkosson, szükséges, hogy különbségeik páronként egységek legyenek [1, 18. old.]. Ez kizárja 3 alappal rendelkező szimultán számrendszerek létezését a Gauss-egészek körében, de az $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{5}]}$ gyűrűben nem. Tudjuk (lásd 3.1), hogy ebben a gyűrűben egy adott alap-hármasra és számjegyhalmaz-konstrukcióra véges sok elem vizsgálatával eldönthető, hogy szimultán számrendszert alkotnak-e. Azonban a vizsgálandó elemek száma olyan nagy, hogy eddig nem volt lehetséges egy ilyen halmazt teljesen átvizsgálni.

A dolgozat keretében elkészült programmal lehetővé vált néhány (ha a kapott átvizsgálá-

landó halmaz viszonylag kis méretű¹⁾ esetben a teljes halmaz feldolgozása. A másik vizsgált kérdés a megfelelő (azaz szimultán számrendszert alkotó) alapok elhelyezkedése. Ez esetben nagy mennyiségű alap-hármaszt kell végignézni ezért teljes vizsgálatra nem volt lehetőség, így véletlenszerűen választott elemek lettek ellenőrizve. Mivel itt minden alap-hármasnál nagy számú véletlen elemet vizsgáltam, a kapott eredmények viszonylag erős sejtésnek tekinthetők. Ez alapján sikerült a megfelelő alapok elhelyezkedését feltérképezni az origó környezetében, amely kapcsolatot mutat az $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{5}]}$ elemeire értelmezett norma függvényvel. A vizsgált alap-hármasokat úgy kaptam, hogy kiválasztottam az első alapot, majd ennek koordinátáit megfelelően növelve illetve csökkentve állítottam elő a másik két alapot (így az alapok különbsége biztosan egység lesz). Ismert, hogy ha egy alap-hármas egy adott sorrendben szimultán számrendszert alkot, akkor ezek az alapok bármilyen más sorrendben véve is szimultán számrendszert alkotnak (lásd 3. tétel). Mivel így az alap-hármasokat első elemük egyértelműen meghatározza, lehetővé vált elhelyezkedésüknek a síkon való ábrázolása.

A dolgozat 4 fő részből áll. Az első részben a legfontosabb felhasznált matematikai fogalmakat, definíciókat és tételeket ismertetem. Ezek megtalálhatóak a szakirodalomban, de mivel elengedhetetlenek a dolgozat megértéséhez, ezért itt is megismétlem őket. Ahol lehetséges, példákat is adok a leírtak használatára. A második rész szól a vizsgált sejtésről és a vizsgálat módszereiről. A harmadik részben a program felépítését és működését mutatom be. Itt található a program teljesítményével és helyességével kapcsolatos néhány megjegyzés is. A negyedik részben az elért eredményeket ismertetem.

¹⁾a „kis méretű” halmazok elemszáma is milliárdos nagyságrendű

2. fejezet

Fontos definíciók és tételek

2.1. Számrendszerek egy alappal

A „szokásos” számrendszer fogalmat formalizálhatjuk az alábbi módon:

1. Definíció. Legyen b egy egynél nagyobb természetes szám. Ekkor tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ szám felírható $t = \sum_{k=0}^n a_k b^k + \sum_{l=1}^{\infty} c_l b^{-l} = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 . c_1 c_2 \dots)_b$ alakban, ahol $a_k, c_l \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ ($0 \leq k \leq n, l \in \mathbb{N}^+$). Ilyenkor b -t a számrendszer alapszámának (alapjának), az $\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, b-1\}$ halmazt pedig a számrendszer számjegyhalmazának nevezzük.

1. Példa. Legyen $b = 7$, a számjegyhalmaz pedig $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ekkor például a 11.71 számot

$$\begin{aligned} 1 \cdot 7^1 + 4 \cdot 7^0 + 4 \cdot 7^{-1} + 6 \cdot 7^{-2} + 5 \cdot 7^{-3} + 3 \cdot 7^{-4} + 4 \cdot 7^{-5} + 6 \cdot 7^{-6} + 5 \cdot 7^{-7} + \dots = \\ = (14.\overline{4653})_7 \end{aligned}$$

alakban írhatjuk fel hetes számrendszerben.

Ez a definíció általánosítható. A számrendszer alapszáma nem kell, hogy természetes szám legyen. Így kaphatunk számrendszereket valós ([4], [3]) vagy akár komplex alapszámmal [5] is, és az így felírt számokkal is el tudjuk végezni a szokásos műveleteket [7]. A számrendszer alapszámától függően a számjegyhalmazt is változtatnunk kell, sőt, előfordulhat, hogy több számjegyhalmaz-konstrukció is megfelelő egy adott alapszámhoz. Számjegyhalmaz-konstrukciókról később részletesebben is írok. Számrendszereket nem csak a valós (vagy komplex) számtesten értelmezhetünk, hanem számos más struktúrában is.

2. Példa. Legyen $b = -1 + i$, a számjegyhalmaz pedig $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Ekkor például a 3 számot

$$1 \cdot (-1 + i)^3 + 1 \cdot (-1 + i)^2 + 0 \cdot (-1 + i)^1 + 1 \cdot (-1 + i)^0 =$$

$$= (1101)_{-1+i}$$

alakban írhatjuk.

Dolgozatomban a $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ kvadratikus test algebrai egészei által alkotott gyűrűben foglalkozom számrendszerekkel. A K kvadratikus testben az algebrai egészek gyűrűjét $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ jelöli. Például a Gauss-egészek gyűrűje is ilyen gyűrű (a $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$ test részgyűrűje). Az $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{5}]}$ struktúráról bővebben 2.4-ben írok. Az ilyen gyűrűkben értelmezett számrendszerdefiníció is az előző definíció általánosítása, de mivel itt a gyűrű elemei egészek, ezért megköveteljük, hogy minden elemnek legyen véges kifejtése.

2. Definíció. A $(Z, \mathcal{A})$ párt ahol $Z \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ és $\mathcal{A}$ egy teljes maradékrendszer moduló Z számrendszernek nevezzük, ha minden $z \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ elem felírható $z = \sum_{j=0}^n a_j Z^j$ alakban. Z a számrendszer alapszáma, $\mathcal{A}$ pedig a számjegyhalmaz.

Itt az alapszám és a számjegyek is $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ elemei. Dolgozatomban a $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ esettel foglalkozom.

1. Megjegyzés. A továbbiakban $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{D}]}$ elemeit (a, b) jelölésben írom, azaz az $(1, \omega)$ bázist¹ használom az elemek felírására. Ez $D = 5$ esetén az $(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ bázist jelenti.

3. Példa. Tekintsük az $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{5}]}$ struktúrát, az alap legyen $(0, 3)$. Az alaphoz tartozó K -típusú számjegyhalmaz a következő:

$$\mathcal{A} = \{(-1, -2), (-1, -1), (-1, 0), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 2)\}$$

Írjuk fel az $(5, 2)$ számot ebben a számrendszerben:

$$(5, 2) = (-1, 2) \cdot (0, 3)^1 + (-1, -1) \cdot (0, 3)^0 = ((-1, 2)(-1, -1))_{(0,3)}$$

2.2. Szimultán számrendszerek

A számrendszerfogalom egy további lehetséges általánosítását kapjuk ha egynél több alapot veszünk. Ezek az úgynevezett szimultán számrendszerek. Az $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ gyűrűkben a következőképpen definiálhatunk szimultán számrendszereket:

3. Definíció. Legyen $Z_1, \dots, Z_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ és $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. $(Z_1, \dots, Z_n, \mathcal{A})$ szimultán számrendszer n darab alappal ha tetszőleges $z_1, \dots, z_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ egészeknek létezik a következő véges kifejtése:

$$z_1 = a_0 + a_1 Z_1 + a_2 Z_1^2 + \dots + a_k Z_1^k$$

¹Az algebrai egészekről és ω definíciójáról lásd a következő alfejezetet.

$\vdots$

$$z_n = a_0 + a_1 Z_n + a_2 Z_n^2 + \dots + a_k Z_n^k$$

ahol $a_i \in \mathcal{A}$ ($0 \leq i \leq k$).

Szimultán számrendszerekről olvashatunk például [1]-ben és [8]-ban.

4. Példa. Tekintsük az $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{5}]}$ struktúrát. Válasszunk három alapot, legyenek ezek $(-1, 3)$, $(0, 3)$, $(0, 4)$. A számjegyhalmazt az alapok K -típusú számjegyhalmazai alapján a későbbiekben leírt módon állítom elő. A jegyhalmaz nagy méretű (elemszáma az alapok normáinak szorzata), ezért az elemeket itt nem sorolom fel. Legyen a három felírandó szám $(-5, 2)$, $(1, -4)$ és $(6, 0)$. Ekkor:

$$\begin{aligned} (-5, 2) = & (0, -1) \cdot (-1, 3)^7 + (9, 9) \cdot (-1, 3)^6 + (-26, -50) \cdot (-1, 3)^5 + \\ & + (35, 59) \cdot (-1, 3)^4 + (18, 34) \cdot (-1, 3)^3 + (24, 27) \cdot (-1, 3)^2 + \\ & + (25, 31) \cdot (-1, 3)^1 + (-38, -64) \cdot (-1, 3)^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1, -4) = & (0, -1) \cdot (0, 3)^7 + (9, 9) \cdot (0, 3)^6 + (-26, -50) \cdot (0, 3)^5 + \\ & + (35, 59) \cdot (0, 3)^4 + (18, 34) \cdot (0, 3)^3 + (24, 27) \cdot (0, 3)^2 + \\ & + (25, 31) \cdot (0, 3)^1 + (-38, -64) \cdot (0, 3)^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6, 0) = & (0, -1) \cdot (0, 4)^7 + (9, 9) \cdot (0, 4)^6 + (-26, -50) \cdot (0, 4)^5 + \\ & + (35, 59) \cdot (0, 4)^4 + (18, 34) \cdot (0, 4)^3 + (24, 27) \cdot (0, 4)^2 + \\ & + (25, 31) \cdot (0, 4)^1 + (-38, -64) \cdot (0, 4)^0 \end{aligned}$$

Látható, hogy mindhárom számjegysorozat megegyezik, így sikerült ebben a $(-1, 3)$, $(0, 3)$, $(0, 4)$ alapok által alkotott rendszerben felírni a választott számhármast. Ha ez a rendszer valóban szimultán számrendszer, akkor bármely három számot felírhatjuk az előbbi módon. Ennek a kérdésnek az eldöntésével a dolgozat későbbi részében foglalkozom.

1. Tétel. Ha $(Z_1, \dots, Z_n, \mathcal{A})$ szimultán számrendszer akkor bármely két különböző alap különbsége egység.

A tétel bizonyítása megtalálható [1, 18. old.]-ban. Mivel bármely két alap különbsége egység, így az alapok páronként relatív prímek. Ez alapján kimondhatjuk a szimultán számrendszerek számjegyhalmazaira vonatkozó következő tételt:

2. Tétel. *Ha $(Z_1, \dots, Z_n, \mathcal{A})$ szimultán számrendszer akkor $\mathcal{A}$ teljes maradékrendszer modulo $\prod_{i=1}^n Z_i$.*

Mivel egy tetszőleges elemhez tartozó teljes maradékrendszer mérete megegyezik az elem normájának abszolútértékével, ezért a számjegyhalmaz mérete az alapok normáinak abszolútértékeinek szorzatával fog megegyezni. Tudjuk, hogy a Gauss-egészek körében léteznek szimultán számrendszerek két alappal ([1]). Az előbbi tétel kizárja kettőnél több alappal rendelkező szimultán számrendszerek létezését a Gauss-egészek körében, de $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{5}]}$ gyűrűben nem. Egyik célom éppen az ilyen, három alappal ellátott $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{5}]}$ -beli számrendszerek létezésének ellenőrzése volt. Az ellenőrizendő alap-hármasok meghatározásánál a következő tétel is fontos a felesleges számolás elkerüléséhez:

3. Tétel. *Ha $(Z_1, \dots, Z_n, \mathcal{A})$ szimultán számrendszer akkor a $Z_1, \dots, Z_n$ alapok tetszőleges permutációja is szimultán számrendszert alkot az $\mathcal{A}$ számjegyhalmazzal.*

Szimultán számrendszerek esetén felmerül a megfelelő számjegyhalmaz meghatározásának kérdése. Erről a következő alfejezetben írok.

2.3. Szimultán számrendszerek számjegyhalmazai

Szimultán számrendszerek esetén a megfelelő számjegyhalmaz konstrukciója nem nyilvánvaló. Több nevezetes számjegyhalmaz-konstrukció is ismert. Ilyen például a kanonikus, a K-típusú [1, 25-28. old.] és a sűrű számjegyhalmaz. Egy alap-n-es több számjegyhalmaz-konstrukcióval is szimultán számrendszert alkothat. Dolgozatomban a K-típusú és a sűrű számjegyhalmaz esetével foglalkozom.

2.3.1. Sűrű számjegyhalmaz

Adott $Z_1, \dots, Z_n$ alapokhoz tartozó sűrű jegyhalmaz a teljes modulo $\prod_{i=1}^n Z_i$ maradékrendszer minden maradékosztályából azt az elemet tartalmazza, amelynek koordináta-abszolútérték összege a legkisebb. Előállítható például úgy, hogy az origóból (üres számjegyhalmazzal) indulva a síkot „csigavonalban” járjuk be, és minden lépésben megvizsgáljuk, hogy van-e már a számjegyhalmazban az aktuális elemmel azonos maradékosztályba tartozó elem modulo $\prod_{i=1}^n Z_i$. Ha nincs, akkor az elemet a számjegyhalmazba helyezzük. Ezt az eljárást addig folytatjuk, amíg minden maradékosztálynak lesz reprezentánsa a számjegyhalmazban.

5. Példa. *Az $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{5}]}$ gyűrűben a $(-1, 3)$ alapszámhoz az*

$$\mathcal{A} = \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, -1), (1, 0), (1, 1), (2, -1), (2, 0)\}$$

sűrű számjegyhalmaz tartozik.

2.3.2. K-típusú számjegyhalmaz

A K-típusú jegyhalmazt először minden alapra külön-külön meghatározzuk, aztán az így kapott jegyhalmazokat „kombináljuk”.

4. Definíció. Legyen $Z = a + b\omega \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ algebrai egész² és $t = ||Z||$. Legyen $E_Z^{(\varepsilon, \delta)}$ azon $d = k + l\omega \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ ($k, l \in \mathbb{Z}$) elemek halmaza, amelyekre $d\bar{Z} = (k + l\omega)(a + b - b\omega) = r + s\omega$ teljesíti a következőket:

- ha $(\varepsilon, \delta) = (1, 1)$ akkor $r, s \in] - \frac{t}{2}, \frac{t}{2}]$,
- ha $(\varepsilon, \delta) = (-1, -1)$ akkor $r, s \in [- \frac{t}{2}, \frac{t}{2}[$,
- ha $(\varepsilon, \delta) = (-1, 1)$ akkor $r \in [- \frac{t}{2}, \frac{t}{2}[$, $s \in] - \frac{t}{2}, \frac{t}{2}]$,
- ha $(\varepsilon, \delta) = (1, -1)$ akkor $r \in] - \frac{t}{2}, \frac{t}{2}]$, $s \in [- \frac{t}{2}, \frac{t}{2}[$.

Az így kapott halmazokat nevezzük K-típusú számjegyhalmazoknak.

Ez a definíció egyben eljárást is ad egy adott elemhez tartozó K-típusú jegyhalmaz meghatározására. A számjegyhalmaz előállításakor (ε, δ) értéket a négy lehetőség közül tetszőlegesen választhatjuk meg. Egy adott $z \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ elemhez közvetlenül meghatározhatjuk, hogy mely K-típusú jegyhalmazbeli elemmel kongruens moduló Z . Erről 3.2.2-ben írok. K-típusú számjegyhalmazokról további információ található [1]-ben és [9]-ben.

6. Példa. Az $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{5}]}$ gyűrűben a $(-1, 3)$ alapszámhoz, $(\varepsilon, \delta) = (1, 1)$ választással az

$$\mathcal{A} = \{(-1, -2), (-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, -1), (1, 0), (1, 1), (1, 2)\}$$

K-típusú számjegyhalmaz tartozik.

Miután az egyes alapokra meghatároztuk a K-típusú számjegyhalmazokat, azokból a következő eljárással állíthatjuk elő a „kombinált” számjegyhalmazt:

5. Definíció. Legyen A_n az n -edik alaphoz tartozó K-típusú jegyhalmaz. Ekkor az $\mathcal{A}$ „kombinált” jegyhalmazt az

$$A^{(0)} = \bigcup_{a \in A_2} (A_1 + aZ_1)$$

$$A^{(1)} = \bigcup_{a \in A^{(0)}} (A_3 + aZ_3)$$

²Az algebrai egészekről és ω definíciójáról lásd a következő alfejezetet.

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
A^{(n-2)} &= \bigcup_{a \in A^{(n-3)}} (A_n + aZ_n) \\
\mathcal{A} &= A^{(n-2)}
\end{aligned}$$

eljárással kapjuk meg.

Ha az alapok páronként vett különbségei egységek (ez szükséges feltétele annak, hogy az alapok szimultán számrendszert alkothassanak), az így kapott számjegyhalmaz teljes maradékrendszert alkot moduló $\prod_{i=1}^n Z_i$ (hiszen az alapok páronként relatív prímek), tehát valóban megfelelő elemszámú halmazt kaptunk.

2.4. A $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ kvadratikus test és az algebrai egészek gyűrűje ebben a testben

6. Definíció. Kvadratikus testnek a racionális test másodfokú bővítéseit nevezzük, azaz a $\mathbb{Q}[\sqrt{D}]$ testeket ahol D egytől különböző négyzetmentes egész.

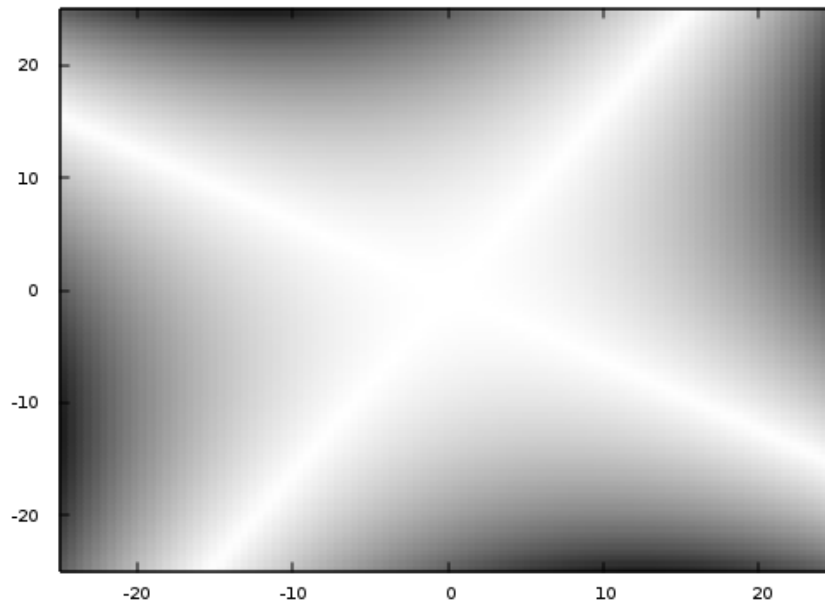
7. Definíció. Egy $\mathbb{Q}[\sqrt{D}]$ kvadratikus testbeli algebrai egészek gyűrűje az $a + b\omega$ alakú elemekből áll, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$ és $\omega = \begin{cases} \sqrt{D} & \text{ha } D \equiv 2 \text{ vagy } D \equiv 3 \pmod{4} \\ \frac{1+\sqrt{D}}{2} & \text{ha } D \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}$. A gyűrűt az $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{D}]}$ szimbólummal jelöljük.

4. Tétel. Ha $D > 0$ akkor az $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{D}]}$ gyűrűben végtelen sok egység van.

A tétel bizonyítása megtalálható [12, 64. old.] -ben.

A dolgozat hátralévő részében tárgyalt gyűrűt a $D = 5$ választással kapjuk (a Gauss-egészek a $D = -1$ választással állnak elő). Más D értékkel kapott gyűrűk vizsgálata is lehetséges lenne (mint tudjuk, a Gauss-egészek körében léteznek szimultán számrendszerek [8]), ebben a dolgozatban azonban csak a $D = 5$ esettel foglalkozom.

8. Definíció. A $Z \in \mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{5}]}$ elem normája $Z\bar{Z}$, melynek jelölése $||Z||$ vagy $N(Z)$. Az (a, b) elem normája így $N((a, b)) = a^2 + ab - b^2 \in \mathbb{Z}$ lesz.



2.1. ábra. Az $N(x, y) = x^2 + xy - y^2$ norma függvény. Sötétebb színhez nagyobb abszolútértékű függvényérték tartozik.

A norma az abszolútérték általánosítását jelenti. Fontos megjegyezni, hogy ebben a gyűrűben a norma negatív is lehet. A 4. tétel szerint az $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{5}]}$ gyűrűben végtelen sok egység van.

3. fejezet

A vizsgált probléma bemutatása

3.1. Szimultán számrendszerek létezése három alappal és az alap-hármasok elhelyezkedése $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{5}]}$ -ben

Sejtjük, hogy $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{5}]}$ gyűrűben léteznek szimultán számrendszerek 3 alappal, mind a sűrű, mind a K-típusú számjegyhalmaz-konstrukció esetén. Abban az esetben, ha valóban léteznek ilyen számrendszerek, a megfelelő (számrendszert alkotó) alapok elhelyezkedése is érdekes lehet. Ezeknek a kérdéseknek a vizsgálata a dolgozat tárgya.

Ha teljesíteni tudjuk a szimultán számrendszer definícióját, azaz bármely 3 elemhez tudunk egy közös megfelelő számjegysorozatot találni, akkor az adott alapok és jegyhalmaz valóban szimultán számrendszert alkotnak. Tekintsük a $(Z_1, Z_2, Z_3, \mathcal{A})$ rendszert. Mivel a számjegyhalmaz teljes maradékrendszert alkot moduló $\prod_{i=1}^3 Z_i$, ezért bármely $z_1, z_2, z_3 \in \mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{5}]}$ esetén egyértelműen létezik $d \in \mathcal{A}$ számjegy, hogy $Z_1 | z_1 - d$ és $Z_2 | z_2 - d$ és $Z_3 | z_3 - d$ is teljesül, azaz:

$$d \equiv z_1 \pmod{Z_1}$$

$$d \equiv z_2 \pmod{Z_2}$$

$$d \equiv z_3 \pmod{Z_3}$$

Ez alapján definiálhatjuk a $J_i : \mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{5}]} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{5}]}$ leképezéseket a $J_i(x) = \frac{x-d}{Z_i}$ hozzárendelési szabállyal (ahol $1 \leq i \leq 3$). Ezeket a függvényeket iterálva megkaphatjuk a z_1, z_2, z_3 számok számjegysorozatát, amely teljesíti a szimultán számrendszer definíciójában írtakat. (Értelemszerűen z_1 -et Z_1 alap szerint írjuk fel, így a J_1 függvény iterációjában z_1 lesz a kezdőérték. A másik két számhoz J_2 illetve J_3 függvényeket használjuk. A kapott számjegyek (d) az előbb mondottak miatt mindhárom függvény iterációja során meg fognak egyezni. Belátható, hogy J_i pályája egy idő után periodikus lesz (lásd például [1, 4-5. old.], [9] vagy [10]). Ez kétféleképpen lehetséges. Az egyik lehetőség, hogy $J_i^k(z_i) = 0$ valamely $k \in \mathbb{N}^+$

esetén (itt, és a továbbiakban is J_i^k jelöli J_i k -adik iteráltját). Ilyenkor megkaptuk a megfelelő számjegysorozatot, tehát z_1, z_2, z_3 felírható a Z_1, Z_2, Z_3 alapok és $\mathcal{A}$ számjegyhalmaz segítségével. A másik lehetőség, hogy $J_i^k(z_i) = J_i^{k+t}(z_i) \neq 0$ valamely $k, t \in \mathbb{N}^+$ esetben, azaz találtunk egy nullától eltérő periodikus elemet (az iterációs lépések kört alkotnak). A nullát triviális periodikus elemnek, a nullától eltérő periodikus elemeket pedig nemtriviális periodikus elemnek nevezzük. Ha találtunk egy nemtriviális periodikus elemet, akkor $(Z_1, Z_2, Z_3, \mathcal{A})$ nem szimultán számrendszer, hiszen a vizsgált számhármastak nincs olyan véges felírása amely megfelel a szimultán számrendszer definíciójának (az iteráció a kör miatt soha nem éri el a nullát).

Látszik tehát, hogy annak eldöntéséhez, hogy adott $(Z_1, Z_2, Z_3, \mathcal{A})$ rendszer valóban szimultán számrendszert alkot-e, minden z_1, z_2, z_3 számhármast meg kellene vizsgálnunk, hogy nem fordul-e elő nemtriviális periodikus elem az iteráció során. Ez végtelen sok eset vizsgálatát jelentené. Szerencsére egy, a későbbiekben ismertetett becslés miatt sok esetben elég csak egy véges halmazt átvizsgálni. Néhány esetben a becslés nem használható, ilyenkor nem tudjuk egy véges halmaz vizsgálatával megállapítani, hogy az adott rendszer valóban számrendszer-e (arra van esélyünk, hogy megállapítsuk, hogy az adott rendszer nem számrendszer, hiszen ehhez elég egyetlen nemtriviális periodikus elemet találni). A becsléssel a lehetséges periodikus elemek koordinátáinak maximális abszolútértékét határozhatjuk meg¹. Az elkészült program is az ezen korlátok által meghatározott halmaz elemeit ellenőrzi. Például ha az első két koordinátára kapott becslés 40, a második kettőre kapott becslés 60, az utolsó kettőre pedig 50, akkor a vizsgálandó számhármastak száma $81 \cdot 81 \cdot 121 \cdot 121 \cdot 101 \cdot 101 = 1\,183\,550\,343\,921$ (az első két koordináta -40 és 40 között változhat stb.). Ha minden ilyen számhármast sikerült felírni a rendszerben és nem találtunk nemtriviális periodikus elemet akkor a vizsgált rendszer valóban szimultán számrendszert alkot. Látható, hogy az átvizsgálandó halmazok mérete igen nagy, ezért eddig nem volt megfelelő program amely elfogadható idő alatt végig tudott volna ellenőrizni egy ilyen halmazt. Az egyik célom volt egy ilyen program elkészítése.

A vizsgálandó halmaz méretét a most következő eljárással tudjuk meghatározni adott alapok és számjegyhalmaz esetén:

Egy becslés segítségével meghatározhatjuk a maximális koordináta-abszolútértéket amely J_i függvény iterációja során előfordulhat. Legyen a vizsgált alap $Z_i = (z_{i1}, z_{i2})$, az előző iterációs lépés eredményét jelölje (a_1, b_1) , az adott iterációs lépéshez tartozó számjegy legyen (d_1, d_2) , és legyen $J_i((a_1, b_1)) = (a_2, b_2)$. Ekkor:

$$a_1 + b_1 \frac{1 + \sqrt{D}}{2} = d_1 + d_2 \frac{1 + \sqrt{D}}{2} + \left(a_2 + b_2 \frac{1 + \sqrt{D}}{2} \right) \cdot Z_1$$

$$a_2 + b_2 \frac{1 + \sqrt{D}}{2} = \frac{a_1 - d_1 + (b_1 - d_2) \frac{1 + \sqrt{D}}{2}}{z_{i1} + z_{i2} \frac{1 + \sqrt{D}}{2}} =$$

¹Három alap esetén számhármastakat vizsgálunk, így összesen 6 koordináta van.

$$\begin{aligned}
&= \frac{(a_1 - d_1) + \frac{b_1 - d_2}{2} + \frac{b_1 - d_2}{2} \sqrt{D}}{z_{i1} + \frac{z_{i2}}{2} + \frac{z_{i2}}{2} \sqrt{D}} \cdot \frac{z_{i1} + \frac{z_{i2}}{2} - \frac{z_{i2}}{2} \sqrt{D}}{z_{i1} + \frac{z_{i2}}{2} - \frac{z_{i2}}{2} \sqrt{D}} = \\
&= \frac{(a_1 - d_1)z_{i1} + \frac{(a_1 - d_1)z_{i2}}{2} + \frac{(b_1 - d_2)z_{i1}}{2} - \frac{(b_1 - d_2)z_{i2}}{4} - \frac{(b_1 - d_2)z_{i2}}{4} D}{z_{i1}^2 + \frac{z_{i2}^2}{4} + z_{i1}z_{i2} - z_{i2}^2 \frac{D}{4}} + \\
&\quad + \sqrt{D} \cdot \frac{\frac{(b_1 - d_2)z_{i1}}{2} + \frac{(b_1 - d_2)z_{i2}}{4} - \frac{(a_1 - d_1)z_{i2}}{2} - \frac{(b_1 - d_2)z_{i2}}{4}}{\|Z_i\|} = \\
&= \frac{(a_1 - d_1)z_{i1} + (a_1 - d_1)z_{i2} + \frac{(b_1 - d_2)z_{i2}}{4} - \frac{(b_1 - d_2)z_{i2}}{4} D}{\|Z_i\|} + \frac{\sqrt{D} + 1}{2} \cdot \frac{(b_1 - d_2)z_{i1} - (a_1 - d_1)z_{i2}}{\|Z_i\|}
\end{aligned}$$

Jelölje K a számjegyek koordinátáinak abszolútértékeinek maximumát (így $d_1, d_2 \in [-K, K]$), és tegyük fel, hogy $a_1, b_1 \in [-L, L]$. Az $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{5}]}$ gyűrűt vizsgáljuk, tehát $D = 5$. Ezeket a fentiekbe beírva a következőket kapjuk:

$$L = \frac{(K + L)|z_{i1}| + (K + L)|z_{i2}| + (K + L)|z_{i2}|}{\|Z_i\|}$$

illetve

$$L = \frac{(K + L)|z_{i1}| + (K + L)|z_{i2}|}{\|Z_i\|}$$

Ezek megoldásai

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{K(|z_{i1}| + 2|z_{i2}|)}{\|Z_i\| - |z_{i1}| - 2|z_{i2}|} \\
L_2 &= \frac{K(|z_{i1}| + |z_{i2}|)}{\|Z_i\| - |z_{i1}| - |z_{i2}|}
\end{aligned}$$

Legyen $M = \max\{|L_1|, |L_2|\}$. Ekkor M -nél nagyobb koordináta nem fordulhat elő a J_i iteráció során, periodikus elem koordinátájának abszolútértéke pedig nem lehet nagyobb mint M . Így véges számú elem vizsgálatával eldönthető, hogy van-e nemtriviális periodikus elem, azaz számrendszert alkot-e a vizsgált rendszer. Két esetben azonban nem használható az előbbi becslés. Az egyik lehetőség, hogy L_1 vagy L_2 meghatározásakor a nevezőben nullát kapunk, és így nem lehet M -et meghatározni. Ilyenkor nem tudjuk egy véges halmaz vizsgálatával eldönteni, hogy az adott rendszer számrendszert alkot-e. (Persze nemtriviális periodikus elemet találhatunk, ekkor a rendszer biztosan nem alkot számrendszert). A másik problémás eset, amikor a nevezőben negatív számot kapunk. Ilyenkor ugyan ki tudjuk számolni M -et, de az eredmény nem lesz használható, előfordulhat, hogy az iteráció elhagyja az így kapott vizsgálandó halmazt.

Egy másik vizsgált probléma az, hogy ha valóban léteznek szimultán számrendszerek, akkor a számrendszert alkotó alapok hol helyezkednek el a síkon és van-e valami szabályosság az elhelyezkedésükben. A következő alap-hármas konstrukciókat vizsgáltam:

1. $(a, b), (a + 1, b), (a + 1, b + 1)$
2. $(a, b), (a, b + 1), (a + 1, b + 1)$
3. $(a, b), (a - 1, b), (a - 1, b + 1)$
4. $(a, b), (a, b + 1), (a - 1, b + 1)$

Az első alap egyértelműen meghatározza a másik kettőt, így lehetséges az alapok elhelyezkedésének két dimenziós síkon való ábrázolása egy hat dimenziós tér helyett. Mivel itt nagyon sok alap-hármast kell megvizsgálni, még a viszonylag gyors ellenőrzőprogrammal sem volt lehetséges minden esetben a teljes halmazt végignézni (és persze bizonyos esetekben nem is tudunk a vizsgálandó halmazra korlátokat meghatározni). Ezért itt minden halmazból viszonylag nagy számú, véletlenszerűen választott elemet vizsgáltam. Amikor lehetséges volt a becslést meghatározni, akkor a becslés által megadott halmazból választottam az elemeket, amikor nem, akkor véletlenszerű koordinátákat vettem. Ha a becslés használható (azaz nem áll fenn az előző alfejezetben írt két problémás egyike sem), akkor az iteráció addig folytatódik, amíg periodikus elemet nem talál a program. Ha a talált periodikus elem nem nulla, akkor tudjuk, hogy az adott rendszer nem alkot számrendszert. Ha a becslés nem használható, akkor előfordulhat, hogy az iteráció nagy számú lépés után sem áll le, de ismétlődő elemet sem találunk. Ilyenkor egy adott lépésszám után a program megszakítja az iterációt, és ezt jelzi az eredmények kiírásakor (ezekben az esetekben valószínűleg nem kapunk számrendszert). Ha minden véletlenszerűen választott vizsgált elemet sikerült felírni probléma nélkül, akkor sejthetjük, hogy a rendszer nagy valószínűséggel számrendszert alkot, de biztosan nem állíthatjuk ezt (hiszen ahhoz a teljes halmaz átvizsgálása lenne szükséges).

3.2. A használt módszerek és algoritmusok bemutatása

3.2.1. A számhármassok ellenőrzésére használt algoritmus

Az előző fejezetekben leírtaknak megfelelően a fő feladat egy számhármass adott alapok szerinti felírásának minél gyorsabban való végrehajtása volt, közben persze a nemtriviális periodikus elemekre is figyelve. Az ellenőrzés az előbb ismertetett J_i függvények iterációjával működik. Az iteráció minden lépésében a

$$d \equiv z_1 \pmod{Z_1}$$

$$d \equiv z_2 \pmod{Z_2}$$

$$d \equiv z_3 \pmod{Z_3}$$

kongruencia-rendszer megoldásához átlagosan $\frac{|A|}{2}$ darab $\mathcal{A}$ -beli elemet kellene végigpróbálni (a számjegyhalmaz minden elemét kipróbáljuk, amíg meg nem találjuk a megoldást), ami jelentősen lassítaná az ellenőrzést. Ezt elkerülendő, gyorsabb ha a

$$d_1 \equiv z_1 \pmod{Z_1}$$

$$d_2 \equiv z_2 \pmod{Z_2}$$

$$d_3 \equiv z_3 \pmod{Z_3}$$

kongruenciákat oldjuk meg, úgy, hogy d_1 egy Z_1 szerinti teljes maradékrendszer egy eleme, d_2 és d_3 pedig hasonlóan Z_2 és Z_3 szerinti teljes maradékrendszerek elemei. Z_1 , Z_2 és Z_3 páronként relatív prímek, ezért d_1 , d_2 és d_3 egyértelműen meghatározza $\mathcal{A}$ keresett elemét (d -t). Mivel a Z_i szerinti teljes maradékrendszer elemszáma $||Z_i||$, míg A elemszáma $||Z_1|| \cdot ||Z_2|| \cdot ||Z_3||$, így jelentős sebességnövekedés érhető el, hiszen átlagosan $\frac{||Z_1|| \cdot ||Z_2|| \cdot ||Z_3||}{2}$ elem végigpróbálása helyett elég csupán $\frac{||Z_1||}{2} + \frac{||Z_2||}{2} + \frac{||Z_3||}{2}$ elemet végigpróbálni. Mivel még a vizsgálat elkezdése előtt meg tudjuk határozni $\mathcal{A}$ -t és Z_1 , Z_2 illetve Z_3 szerinti teljes maradékrendszereket is (például az alapokhoz tartozó K-típusú jegyhalmazok megfelelnek), ezért tudunk olyan programkódot generálni, amely már fordítás előtt rögzítve tartalmazza azt, hogy egy adott d_1 , d_2 , d_3 hármashoz mely $\mathcal{A}$ -beli elem tartozik. Ez a megoldás bármilyen számjegyhalmaz-konstrukció esetén működik. Előnye a számítások nagy sebessége és a viszonylag egyszerű implementáció, hátránya az, hogy a számjegyhalmaz-konstrukció vagy alapok változtatásához a programot is újra kell fordítani. Erről részletesebben a 4.3.1. és 4.3.2 szakaszokban írok. Az implementáció egyszerűsége miatt ez az algoritmus CPU-n és GPU-n is használható.

3.2.2. További optimalizáció K-típusú számjegyhalmaz-konstrukció esetén

K-típusú jegyhalmaz esetén d_1 , d_2 és d_3 meghatározására közvetlen módszert is ismerünk, ez az alábbi:

Legyen $D = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $Z_i = (z_{i1}, z_{i2}) = z_{i1} + z_{i2}D$ (ekkor $\overline{Z} = z_{i1} + z_{i2} - z_{i2}D$). Az $a = (a_1, a_2) = a_1 + a_2D$ számhoz tartozó $d = (d_1, d_2) = d_1 + d_2D$ K-típusú jegyet keressük.

$$a_1 + a_2D = (b_1 + b_2D)Z + d_1 + d_2D$$

$$(a_1 + a_2D)\overline{Z} = (b_1 + b_2D)Z\overline{Z} + (d_1 + d_2D)\overline{Z}$$

$$(a_1 + a_2D)(z_{i1} + z_{i2} - z_{i2}D) = (b_1 + b_2D)Z\overline{Z} + (d_1 + d_2D)\overline{Z}$$

$$a_1 z_{i1} + a_1 z_{i2} + \frac{-a_1 z_{i2} + a_2 z_{i1} + a_2 z_{i2}}{2} - \frac{a_2 z_{i2}}{4} - \frac{5a_2 z_{i2}}{4} + \sqrt{5} \left(\frac{a_2 z_{i1}}{2} + \frac{a_2 z_{i2}}{2} - \frac{a_2 z_{i2}}{4} - \frac{a_1 z_{i2}}{2} - \frac{a_2 z_{i2}}{4} \right) =$$

$$= b_1 t + \frac{b_2 t}{2} + r + \frac{s}{2} + \sqrt{5} \left(\frac{b_2 t}{2} + \frac{s}{2} \right)$$

Ebből:

$$a_1 z_{i1} + \frac{a_1 z_{i2}}{2} + \frac{a_2 z_{i1}}{2} - a_2 z_{i2} = b_1 t + \frac{b_2 t}{2} + r + \frac{s}{2}$$

és

$$a_2 z_{i1} - a_1 z_{i2} = b_2 t + s$$

A második egyenletből azt kapjuk, hogy $a_2 z_{i1} - a_1 z_{i2}$ -t t -vel maradékosan osztva (a maradék $\frac{-t}{2}$ és $\frac{t}{2}$ közötti) a hányados b_2 , a maradék pedig s . Az első átrendezve az

$$a_1 z_{i1} + \frac{a_1 z_{i2}}{2} + \frac{a_2 z_{i1}}{2} - a_2 z_{i2} - \frac{b_2 t}{2} - \frac{s}{2} = b_1 t + r$$

egyenletet kapjuk, ami alapján $a_1 z_{i1} + \frac{a_1 z_{i2}}{2} + \frac{a_2 z_{i1}}{2} - a_2 z_{i2} - \frac{b_2 t}{2} - \frac{s}{2}$ -nek t -vel való maradékos osztása (a maradék $\frac{-t}{2}$ és $\frac{t}{2}$ közötti) esetén a hányados b_1 a maradék pedig r . Ezek alapján már meghatározhatjuk d_1 -et és d_2 -t:

$$d_1 + d_2 D = a_1 + a_2 D - (b_1 + b_2 D) Z$$

Ilyenkor az előző megoldás helyett gyorsabb az, hogy ha az előbbi módszerrel közvetlenül kiszámoljuk d_1 , d_2 és d_3 értékét, majd egy előre generált hash táblában megkeressük, hogy az adott d_1 , d_2 , d_3 számokhoz mely $\mathcal{A}$ -beli érték tartozik. Itt fontos, hogy a hash táblában való keresés nagyon gyors legyen, ezért egy úgynevezett tökéletes hash függvényt ([2], [13]) használok, amelynek programkódját a GNU gperf² program segítségével generálom. Ez a megoldás azért lehetséges, mert előre ismerjük a vizsgált alap-hármas és számjegyhalmazt, és ezek a vizsgálat során sem fognak változni. Sajnos az előre generált kódrészek miatt az alapok vagy számjegyhalmaz-konstrukció változtatása esetén ebben az esetben is újra kell fordítani a programot, továbbá mivel a gperf nem támogatja a GPU-ra való kódgenerálást, ez az optimalizáció csak akkor működik ha a CPU-n futtatjuk a számításokat.

3.2.3. Nagy számú alap részleges ellenőrzése véletlenszerű elemválasztással

Meg szeretnénk vizsgálni, hogy $(0, 0)$ környezetében hol helyezkednek el azok az (a, b) számok, amelyek az 5.3-beli négy alap-hármas-konstrukció valamelyikével szimultán számrendszert alkotnak. A vizsgálat módja megegyezik az előbb ismertett algoritmussal, de mivel itt nem egy alaphoz tartozó nagy mennyiségű számhármas kell ellenőrizni, hanem sok alap-hármas esetén kell véletlenszerűen választott, alap-hármasonként viszonylag kevés elemet ellenőrizni,

²<https://www.gnu.org/software/gperf/>

így a program újrafordítása minden alap-hármas váltásnál nem megoldható. Emiatt implementálni kellett az előző algoritmust kódgenerálás nélkül, futásidőben felépített adatszerkezeteket használva. Ez ugyan csökkentette az ellenőrzés sebességét, de mivel itt az ellenőrzött elemek száma összességében jóval kisebb volt ezért ez nem okozott problémát. Az origótól távolodva a számjegyhalmazok elemszáma azonban gyorsan nő (hiszen a három alap normáinak szorzata adja meg a számjegyhalmaz méretét), és ezzel együtt az előállításukhoz szükséges idő és a tárolásukhoz szükséges memória is viszonylag hamar eléri azt a szintet ahonnan már nem volt lehetséges folytatni a számításokat a rendelkezésre álló erőforrásokkal. K-típusú számjegyhalmaz esetén a vizsgált alap-hármasok száma ezres nagyságrendű, sűrű jegyhalmaz esetén ennél is kevesebb. Ennek ellenére így, viszonylag kevés adatból is sikerült képet kapni a valószínűleg szimultán számrendszert alkotó alapok elhelyezkedéséről. A vizsgált (a, b) párokat az origóból indulva, „csigavonalban” haladva kaptam, így nagyjából egy origó körüli négyzetet sikerült feltérképezni. Célszerű volt ezzel a módszerrel végighaladni az alap-hármasokon, hiszen így nagyjából elmondható, hogy a kisebb méretű számjegyhalmazokat generáló alap-hármasok lesznek előbb megvizsgálva (mert $(0, 0)$ -tól távolodva az elemek normája többnyire növekszik, bár ez nem minden esetben van így, lásd 8.), tehát így tudtam a lehető legtöbb alap-hármas megvizsgálni, illetve a vizsgálat által lefedett területben sem voltak „lyukak”.

4. fejezet

A program tervezése, implementációja és használata

4.1. A program tervezése, felhasznált technológiák

A kitűzött problémának megfelelően az elkészült program két fő feladata egy megadott halmaz minden elemének átvizsgálása (itt az alapok és a számjegyhalmaz rögzített), illetve alap-hármasok és a hozzájuk tartozó számjegyhalmazok generálása, majd a vizsgálandó halmazok meghatározása és adott számú (a halmazokból véletlenszerűen választott) elem vizsgálata.

A program C++ nyelven készült (a C++11 szabvány lehetőségeit kihasználva). Az implementációhoz a C++ nyelvet választottam, mert fontos volt, hogy az elkészült program gyors legyen és akár alacsony szintű optimalizációkra is legyen lehetőség. A C++11 szabvány lehetőségeit kihasználva (például többszálúsítás beépített támogatása) sikerült külső függvénykönyvtárak használata nélkül elkészíteni a programot, így nincs egy adott rendszerhez vagy környezethez kötve. A C++ nyelv használatának hátránya volt, hogy a vizsgált gyűjteményekre vonatkozó műveleteket (és az elemek ábrázolását is) az alapoktól kellett megírni, szemben például egy matematikai programcsomag használatával ahol ezekre beépített támogatás található. Ebből adódóan azonban lehetőség volt kifejezetten a vizsgált matematikai struktúrára optimalizálni a műveleteket, és az így elért gyorsulás fontosabb volt mint az implementáció megkönnyítése.

Opcionálisan a GPU is felhasználható a számításokhoz, ennek a támogatása az OpenCL¹ szabvány segítségével lett megvalósítva. Az OpenCL multiplatformos és gyártófüggetlen, ezért esett rá a választás az NVIDIA CUDA² vagy más gyártók hasonló megoldásai helyett.

A nagyobb számítási teljesítmény érdekében a legtöbb konfigurációs lehetőség fordítási időben állítható (C++ preprocesszor makrók segítségével), illetve a program újrafordítása

¹<https://www.khronos.org/opencl/>

²http://www.nvidia.com/object/cuda_home_new.html

szükséges ha a vizsgált alapokat vagy számjegyhalmaz-konstrukciót változtatni szeretnénk (részletekért lásd 4.3.1). Ez a program használatában kényelmetlenséget jelent, de bizonyos esetekben jelentősen növeli az elérhető számítási sebességet.

A K-típusú jegyhalmaz esetén bekapcsolható optimalizált számítási mód használatához a GNU gperf³ segédprogramra is szükség van a program fordítása során.

A program parancssorban futtatható, a felhasználó parancssori paraméterek formájában adja meg a bemeneti adatokat (interaktív mód nincs), az eredmények pedig a standard kimenetre íródnak.

A program nem csak a fent említett két feladat elvégzésére használható, hanem ehhez kapcsolódóan képes az $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{5}]}$ -beli, $(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ bázisban felírt elemeket összeadni, kivonni, szorozni, oszthatóságot ellenőrizni, osztani, normát számolni, az $(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ és $(1, 1)$ bázisokbeli reprezentációk között váltani (lásd 4.3.2). Továbbá képes egy adott alap-háromashoz és számjegyhalmaz-konstrukcióhoz meghatározni a vizsgálandó halmazt és a számítások során előforduló minimális és maximális értékeket is (lásd 3.1, 4.3.2), illetve kódgenerálásra bizonyos optimalizációkhoz (lásd 4.3.1).

A program forráskódja elérhető a <https://github.com/prkc/tdk2014> címen.

4.2. A program szerkezete

A program 5 nagy részre osztható. A következő táblázatban található a részek leírása és a hozzájuk tartozó forrásfájlok neve.

Programrész	Forrásfájlok
Főprogram, input paraméterek feldolgozása	main.cpp
Számábrázolás és műveletek	i_s5.h, i_s5.cpp
Számjegyhalmazokhoz kapcsolódó műveletek	digits_s5.h, digits_s5.cpp
Számok számrendszerben való felírhatóságának ellenőrzése (CPU és GPU)	check_3base.h, check_3base.cpp, check_3base.kernel, check_3base_rand.kernel, check_3base.incl, check_3base_gpu.incl, perfect_hash.h, perfect_hash.cpp
Segédfüggvények	utils.h

4.1. táblázat. A program fő részei

Ezen felül a `utils` mappában található az `OpenCLInfo.cpp` segédprogram, amely az adott rendszeren az OpenCL-en keresztül elérhető hardverekről ad információt (ez az OpenCL-hez

³<https://www.gnu.org/software/gperf/>

kapcsolódó konfigurációnál lehet hasznos, lásd 4.3.1). Ez a program az „OpenCL Programming Guide” című könyvből [14] származik, a kód lényegi változtatás nélkül lett átvéve). Az alfejezet hátralévő részében a program előbb felsorolt 5 részének felépítését ismertetem.

4.2.1. Főprogram, input paraméterek feldolgozása

Itt található a `main` függvény, amely a parancssori paraméterek feldolgozását és a megfelelő számítások elindítását majd az eredmények kiírását végzi. Ezenkívül még 3 darab segéd-függvény is ebben a részben található: a `check` és `check_gpu` függvények már közvetlenül a tényleges számítást végző függvényekkel kommunikálnak, a `split_limits` függvény pedig az átvizsgálandó tartományt osztja fel részekre. Itt történik a számítások több szála oszttása is: n darab szál használata esetén az átvizsgálandó tartományt a `split_limits` függvény n darab részre osztja (lehetőség szerint nagyjából egyenlő részekre), minden szál egy ilyen részt vizsgál át. A szálakat a `check` és `check_gpu` függvények indítják el és kezelik, és végül ezek gyűjtik össze a szálak eredményeit és írják ki az összesített eredményt (és az eltelt időt). Ha a CPU-n futnak a számítások akkor a `check` függvényt használja a program, GPU esetén pedig a `check_gpu` függvényt. Ezen két függvény működése nagyjából megegyezik, abban térnek el, hogy GPU használata esetén nem hagyományos szálak (thread), hanem úgynevezett „work-item”-ek futnak, amelyek kezelését nem a program, hanem maga a GPU végzi.

4.2.2. Számábrázolás és műveletek

A program két típust használ $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{5}]}$ elemeinek ábrázolására. Az `i_s5` típus egy $(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ bázisban felírt elemet tárol, ez egy egész számokból álló rendezett párként van megvalósítva. A `q_s5` típus ettől annyiban tér el, hogy $(1, 1)$ bázisban tárolja az elemeket (valós számok rendezett párként (lebegőpontos számábrázolással)). A számítások az `i_s5` típust használják. Ennek oka az, hogy a szakirodalom alapján az egészekkel végzett műveletek jelentősen gyorsabbak mint a lebegőpontos számokkal végzettek (ez CPU és GPU esetén is igaz, amit a saját méréseim is megerősítettek). Emiatt a programban ahol csak lehet egész típust használok a számításokhoz (a GPU-n futó kódban is). Az egész típus használatának egyetlen hátránya, hogy osztás előtt minden esetben ellenőrizni kell, hogy az osztás valóban elvégezhető-e (az osztás eredménye is egész-e), de ez a használt algoritmusok megvalósítása során nem okoz problémát (ha nem tennénk meg az ellenőrzést akkor a kerekítés miatt hibás eredményt kaphatnánk).

Ezekben a fájlokban vannak megvalósítva az összeadás, kivonás, szorzás, oszthatóság ellenőrzése (`is_divisible`), osztás és norma meghatározása műveletek. A számokat kiíró és az $(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ és $(1, 1)$ bázisok közti átváltást végző függvények is itt találhatók.

4.2.3. Számjegyhalmazokhoz kapcsolódó műveletek

Itt találhatóak a számjegyhalmazok előállítására szolgáló függvények. A `dense` és a `k_type_combined` nevű függvények a sűrű illetve a K-típusú kombinált számjegyhalmazt állítják elő tetszőleges számú alapra. A `k_type` függvény egy alapra határozza meg a K-típusú számjegyhalmazt (a `k_type_combined` függvény ezt a függvényt hívja minden bemenetként kapott alapra majd kombinálja az eredményeket). A számjegyhalmazok definíciója és előállításuk leírása megtalálható a 2.3. részben.

A `generate_bases` függvény a megadott kezdőpontból indulva, a síkot csigavonalban bejárva előállítja a fordításkor meghatározott alakú alap-hármasokat (lásd 4.3.1.). A függvény addig fut amíg az előállított alap-hármasok száma el nem éri a paraméterként megadott mennyiséget.

A `digit_map_3base` és a `digit_map_3base_2` függvények csak a visszatérési értéként használt adatszerkezet felépítésében különböznek, mindkét függvény ugyanazt a számítást végzi. Egy megadott típusú számjegyhalmazhoz és 3 alaphoz kiszámolnak egy 3 dimenziós táblát, ahol a 3 alaphoz tartozó „nagy” számjegyhalmaz minden eleméhez az egyes alapok szerinti K-típusú számjegyhalmazok megfelelő elemei vannak rendelve. Azaz a kombinált számjegyhalmaz minden elemét egy számhármassal azonosítja, ahol az első szám az első alap K-típusú jegyhalmazából választott megfelelő elem, a második szám a második alap K-típusú jegyhalmazából választott megfelelő elem és így tovább. Lásd még 3.2.1.

4.2.4. Számok felírhatóságának ellenőrzése

Ez a rész 4 függvényből áll. Az egyes elemek felírhatóságának tényleges ellenőrzését a `check_3base`, `check_3base_gpu` és a `check_3base_multiple_bases` függvények végzik.

A `get_limits` függvény egy adott alap-hármashoz és számjegyhalmaz-konstrukcióhoz tartozó átvizsgálandó halmaz korlátait (lásd 3.1) és a számítások során lehetséges előforduló minimális és maximális értékeket határozza meg. Ha ezek nem meghatározhatók akkor üres listával tér vissza.

A `check_3base`, `check_3base_gpu` függvények ugyanazt a feladatot végzik (egy megadott halmaz elemeinek felírhatóságának ellenőrzését), az első függvény a CPU-t a második a GPU-t használja a számításokhoz. Egy elem vizsgálata a 3.2.1-ben leírtaknak megfelelően történik. Ha az iteráció lépszáma meghalad egy küszöbértéket (vagy nemtriviális periodikus elemet találunk), akkor a vizsgált elem az eredményhalmazba kerül. Üres eredményhalmaz esetén az összes vizsgált elem felírható az adott rendszerben. A program futása végén kiírja a kapott eredményhalmazt. Bizonyos, ezekhez a függvényekhez kapcsolódó beállítások csak CPU használatakor érhetők el. Ezek a következők:

- Vizsgálandó elemek fájlból való beolvasása.

- Az iteráció csak akkor érjen véget ha elértük a nullát vagy találtunk egy nemtriviális periodikus elemet (azaz nincs küszöbérték a lépésszáma).
- Minden iterációs lépés részletes kiírása.
- K-típusú számjegyhalmaz esetén további optimalizáció (gperf szükséges).

A következő beállítások CPU-ra és GPU-ra is elérhetők:

- A teljes halmaz helyett csak megadott számú, a halmazból véletlenszerűen választott elem vizsgálata.
- Az eredményhalmaz méretének korlátozása (ha az eredményhalmaz mérete meghaladja a korlátot, a program futása megszakad).

A `check_3base` és `check_3base_gpu` függvényekben kerülnek felhasználásra a `check_3base.incl`, `check_3base_gpu.incl`, `check_3base.kernel`, `check_3base_rand.kernel` fájlok is. Az `.incl` kiterjesztésű fájlok egy adott alaphármashoz és számjegyhalmazhoz generált kódot tartalmaznak és a fordítás során kerülnek beszúrásra a megfelelő függvények törzsébe (ez az optimalizáció miatt szükséges, lásd 3.2.1.). Az `.incl` kiterjesztésű fájlok pedig a közvetlenül a GPU-n futó kódot tartalmazzák (ezek nem C++, hanem OpenCL C⁴ nyelven vannak írva, és nem a programmal együtt, hanem közvetlenül a számítások elindítása előtt, a GPU-n fordulnak).

A `check_3base_multiple_bases` függvény bemenetként az ellenőrizendő alaphármások számát, a számjegyhalmaz-konstrukció típusát és a véletlenszerűen vizsgált elemek számát kapja. Opcionálisan megadhatjuk, hogy mely alaphármastól kezdje a vizsgálatot (hasznos ha valamiért megszakadt a vizsgálat és folytatni szeretnénk). A függvény futása során a `generate_bases` (lásd 4.2.3.) függvény segítségével előállít megadott számú alaphármast, majd minden alaphármashoz előállítja a hozzá tartozó számjegyhalmazt is. Továbbá minden ilyen rendszerhez kiszámolja a vizsgálandó halmaz méretét (ha ez meghatározható). Ezután vesz megadott számú véletlenszerűen választott elemet a vizsgálandó halmazból (vagy ha a halmaz nem meghatározható akkor véletlenszerűen generált elemeket) és elvégzi ezekre a vizsgálatot. Ha talál olyan elemet, amely nem írható fel ezekkel az alapokkal és jegyhalmazzal, akkor a következő formájú sort írja ki:

```
a b c false d e f g h i j k l m
```

ahol a, b, c a vizsgált alaphármas, d, e, f az a három szám amit nem sikerült felírni a rendszerben, g, h, i pedig az iteráció megszakítása előtt kapott utolsó számhármas. j 0 vagy 1 lehet attól függően, hogy az iteráció azért szakadt meg mert nemtriviális periodikus elemet találtunk (0) vagy mert az iteráció során túlléptünk egy előre megadott lépésszámot (1). Ha j értéke 0, akkor g, h, i a talált nemtriviális periodikus elem. Az utolsó három szám pedig a

⁴<https://www.khronos.org/registry/cl/specs/opencl-2.0-opencl.pdf>

vizsgált halmazt meghatározó becslés eredményei az 1.-2., 3.-4. és 5.-6. koordinátákra (lásd 3.1.). Ha a becslés nem határozható meg (mert nullával kellene osztani a képletben), akkor az utolsó három szám helyett a program a `no_limit` sztringet írja a sor végére. Ha minden elemet sikerült felírni (tehát úgy tűnik a rendszer valóban számrendszert alkot), akkor a kimenet

```
a b c true d e f
```

formájú ahol a , b , c a vizsgált alap-hármas, d , e és f pedig a becslés eredménye az előzőekben leírtaknak megfelelően. Így tehát ha összesen n darab alapot vizsgálunk, a kimenet n soros lesz, ahol minden sor az előző két változat valamelyike. Ez a függvény csak CPU-n és csak egy szálon használható. A függvény működésének elméleti háttere a 3.2.3. szakaszban található.

4.2.5. Segédfüggvények

Egyetlen forrásfájl, a `utils.h` tartozik ide. Ebben a `Timer` osztály definíciója található, amelyet a program a számítások elindítása és befejezése közt eltelt idő méréséhez használ. Az eltelt idő nagy pontosságú mérését a C++11-ben újdonságként megjelent `<chrono>` header teszi lehetővé.

4.3. A program fordítása és használata

A következő részben bemutatom a program fordításának módját és a lefordított program lehetséges paraméterezéseit. Egy adott paraméterezéssel úgy futtathatjuk a programot, hogy a végrehajtó állományt tartalmazó könyvtárba lépünk, majd kiadjuk a `./programneve paraméterek` vagy más rendszereken az ezzel ekvivalens parancsot.

4.3.1. Fordítás

Fordítás előtt érdemes módosítani a program futását befolyásoló opciókat, ezek a `check_3base.h` fájlban találhatók. Az opciókat a megfelelő sor kikommentezésével lehet letiltani, illetve a kommentjelek eltávolításával újra engedélyezni. Ha az opció neve után egy szám áll, akkor ott csak a szám módosítására van lehetőség, az opció nem letilthető (ne kommentezzük ki!). A lefordított programban ezek az értékek már nem változtathatók, a változtatásukhoz a program újrafordítása szükséges. A használható opciókat a következő táblázat foglalja össze:

Opció neve	Magyarázat
MAX_ITERATION_STEPS N	Egy elem vizsgálata során az iteráció maximális lépésszáma. Ha N iterációs lépés után sem nulla az eredmény, az elem hozzáadódik az eredményhalmazhoz és a következő elem vizsgálatával folytatódik a program futása.
MAX_RESULT_SIZE N	Az eredményhalmaz maximális megengedett elemszáma.
GPU_WORKITEM_COUNT N	A GPU-n párhuzamosan futó „work-item”-ek száma. Optimális értéke a használt GPU típusától függ.
K_TYPE_OPTIMIZATION	K-típusú számjegyhalmaz használata esetén bekapcsolható extra optimalizáció (lásd 3.2.2). Ha be van kapcsolva, a lefordított program csak K-típusú jegyhalmazokkal tud majd dolgozni. Csak a CPU-t használó számításokra van hatással.
PRINT_ITERATION_STEPS	Minden iterációs lépés kiírása minden elemre. Csak a CPU-t használó számításokra van hatással.
FULL_CHECK	Ha engedélyezve van, az iteráció csak akkor szakad meg ha periodikus elemet találtunk (nincs korlát a maximális lépésszáma). Csak a CPU-t használó számításokra van hatással.
ENABLE_RANDOM	Nem a teljes halmazt vizsgálja, hanem előre megadott számú, a halmazból véletlenszerűen választott elemet. Ha engedélyezve van, a lefordított program csak ilyen módon képes futni, a teljes halmaz átvizsgálására nincs lehetőség. Nem használható együtt az ENABLE_INPUT_FILE beállítással.
ENABLE_INPUT_FILE	A vizsgálandó elemeket fájlból olvassa be. Csak a CPU-t használó számításokra van hatással. Nem használható együtt az ENABLE_RANDOM beállítással.
ENABLE_GPU	A GPU használatának engedélyezése. Ha engedélyezve van, a program fordításához szükséges, hogy a rendszer támogassa az OpenCL-t (és a megfelelő OpenCL header fájlok megtalálhatóak legyenek).
CHECK_MAX_RESULT_SIZE	Ha engedélyezve van, a program minden elem vizsgálata után ellenőrzi, hogy elérte-e az eredményhalmaz a maximális elemszámot, és ha igen akkor a futás megszakad. Ha nincs engedélyezve, a MAX_RESULT_SIZE beállításnak sincs hatása.
BASE_TYPE N	N értéke 0, 1, 2 vagy 3 lehet. Meghatározza, hogy az alap-hármasok generálásakor mely alap-hármas konstrukciót használja a program (lásd 3.1., a 0, 1, 2, 3 értékek az ottani 1-es, 2-es, 3-as és 4-es konstrukcióknak felelnek meg).

4.2. táblázat. Fordítási opciók

A konfiguráció után a program könyvtárába lépve a

```
g++ *.cpp -std=c++11 -O2 -Wall -Wextra -pthread -lOpenCL
```

```
-Wno-missing-field-initializers -Wno-write-strings -o programneve
```

vagy ekvivalens paranccsal lefordítható a program. Az `-lOpenCL` kapcsoló csak akkor szükséges, ha az `ENABLE_GPU` opció engedélyezve van. Az így kapott program legtöbb funkciója még nem használható, ahhoz további fájlok generálása majd a program újrafordítása szükséges. Ha sem a GPU használatát, sem a K-típusú jegyhalmazokhoz való extra optimalizációt nem engedélyeztük, akkor a

```
./programneve generate_digit_check digit_type --base a1 a2
```

```
--base b1 b2 --base c1 c2 > check_3base.incl
```

parancs kiadására van szükség. Itt `digit_type` lehet `k_type` vagy `dense`. Három `--base` paraméter megadása szükséges, ahol (a_1, a_2) , (b_1, b_2) , (c_1, c_2) a három alapot jelenti $(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ bázisban felírva. Ha a GPU használata engedélyezve lett, akkor még egy

```
./programneve generate_digit_check_gpu digit_type --base a1 a2
```

```
--base b1 b2 --base c1 c2 > check_3base_gpu.incl
```

parancs kiadására is szükség van, ahol a paraméterezés az előző paranccsal egyezik meg. Ha még a K-típusú jegyhalmazhoz tartozó extra optimalizációt is engedélyeztük (lásd 3.2.2.) akkor szükséges még a `gperf` segédprogram használata is. Ehhez először ki kell adni a

```
./programneve generate_gperf_k_type_input digit_type --base a1 a2
```

```
--base b1 b2 --base c1 c2 > input.txt
```

parancsot. A paraméterezés itt is az előbbi hasonló parancsokéval egyezik meg. Ezt követi a `gperf` futtatása:

```
gperf -L C++ -tC input.txt > output.txt
```

Az így kapott `output.txt` fájlban található a `Perfect_Hash::hash` és `Perfect_Hash::in_word_set` függvények definíciója. A két függvénydefiníciót mozgassuk a `perfect_hash.cpp` fájlba (írjuk felül a már esetlegesen ottlévő ugyanilyen nevű függvénydefiníciókat). A kimeneti fájl maradék részét (a deklarációkat) pedig mozgassuk a `perfect_hash.h` fájlba (szintén írjuk felül az esetlegesen már ott található, régi deklarációkat).

Ezek után a program újbóli lefordításával (a fordítóprogram paraméterezése ugyanaz mint az előbb) már egy teljes értékű, működő programot kapunk. Azonban számjegyhalmaz vagy alap-háromas váltásakor ezeket a lépéseket újra el kell végezni, a programot pedig újra kell fordítani. Erre a bonyolult fordítási folyamatra a számítási sebesség maximalizálása érdekében van szükség. Sokkal gyorsabb kódot eredményez, ha bizonyos értékeket (például az alapokat és a számjegyhalmazt) már fordítás előtt ismerünk.

4.3.2. Használat

A program futtatásához szükséges RAM mennyisége az éppen használt számjegyhalmaz méretétől függ. Ez lehet pár megabájt vagy akár több gigabájt is.

Alapműveletek $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{5}]}$ elemeivel

Az (a, b) és (c, d) , $(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ bázisban felírt elemek összegének meghatározása a program következő paraméterezésével lehetséges:

```
add a b c d
```

A kivonás, szorzás, oszthatóság ellenőrzése és osztás műveletek is ennek megfelelően működnek, a fenti paraméterezésben az `add` helyére rendre a `sub`, `mul`, `is_divisible` és `div` utasítások kerülnek. A norma és a bázisok közti átváltás csak egy számot vár paraméterként, azaz például az (a, b) számot $(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ bázisból $(1, 1)$ bázisba a

```
q_s5_to_i_s5 a b
```

paraméterezéssel válthatjuk. A fordított irányú váltás az `i_s5_to_q_s5` utasítással lehetséges, a norma a `norm` utasítással számolható.

Jegyhalmazok generálása

Számjegyhalmazok a következő paraméterezéssel határozhatók meg:

```
digits digit_type --base a b --base c d
```

Itt a `--base` paraméterek száma tetszőleges lehet, és minden ilyen paraméter egy (a, b) koordinátájú, $(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ bázisbeli alapot jelöl. `digit_type` helyére `k_type`, `k_type_combined` vagy `dense` kerülhet. Az első esetben minden alaphoz külön számolódik K-típusú jegyhalmaz, a második esetben csak az alapokhoz tartozó kombinált K-típusú jegyhalmaz lesz kiszámolva, a harmadik esetben pedig az alapokhoz tartozó sűrű jegyhalmaz kerül meghatározásra.

Egy alap-hármas halmazának teljes ellenőrzése

Egy alap-hármas halmazának teljes ellenőrzése a

```
check digit_type --base a1 a2
```

```
--base b1 b2 --base c1 c2 --limit a1_min a1_max+1 --limit a2_min a2_max+1
```

```
--limit b1_min b1_max+1 --limit b2_min b2_max+1
```

```
--limit c1_min c1_max+1 --limit c2_min c2_max+1 -cpu-threads n
```

tehető meg, ahol `digit_type` értéke lehet `k_type` vagy `dense` (ezt meghatározza az, hogy milyen beállításokkal fordítottuk a programot). A 3 darab `--base` paraméter az alapokat adja meg az előzőekben leírtakkal azonos módon, a 6 darab `--limit` paraméter pedig a vizsgálandó halmazt határozza meg (lásd 3.1). Az első `--limit` paraméter az első alaphoz tartozó első koordinátára vonatkozik, a második az első alap második koordinátájára, a harmadik

a második alap első koordinátájára és így tovább. A limitek megadásánál figyeljünk arra, hogy maximumként a kívánt értéknél eggyel nagyobb számot kell megadni (mint ahogy az a fenti paraméterezésben is látható). Ha a számításokhoz a GPU-t szeretnénk használni (és ez a fordítás során engedélyezve lett), `check` helyett `check_gpu` írandó a fenti parancsba. Ilyenkor a `--cpu-threads` paraméter elhagyható. Az átvizsgálandó halmazt leíró korlátokat (ha meghatározhatók, lásd 3.1.) és a számjegyek illetve alapok koordinátáinak abszolútértékeinek maximumát a

```
get_limits digit_type --base a1 a2 --base b1 b2 --base c1 c2
```

paraméterezéssel kaphatjuk meg. Itt `digit_type` értékét az előzőekben leírtak szerint kell megadni. Ezen értékek ismeretében el tudjuk dönteni, hogy a használt adattípusban minden eredmény ábrázolható-e, és így elkerülhetjük a túl- vagy alulcsordulás veszélyét (lásd 5.1.). Ha a korlátok nem meghatározhatók, akkor a kimenet üres lesz.

Ha a számításokhoz a CPU-t használjuk, és fordításkor bekapcsoltuk a fájlból való beolvasást, akkor még egy `--input-filename fajlneve` paramétert is meg kell adni. Ha fordításkor engedélyeztük az `ENABLE_RANDOM` opciót, akkor meg kell adni egy `--random n` paramétert is, ahol n az ellenőrizendő elemek számát jelenti. Ezen fordítási opciók engedélyezése esetén a paraméterek megadására mindenképp szükség van, a program kizárólag bemeneti fájljal illetve véletlenszerű elemek vizsgálatával tud működni, egy korlátokkal megadott teljes halmaz átvizsgálására nincs lehetőség, ahhoz a program újrafordítása szükséges.

A program az ellenőrzés során nem fog kimenetet adni, az eredményhalmaz elemeit (azaz a rendszerben nem felírható számhármassokat) egyszerre, a vizsgálat végén írja ki a vizsgálat kezdete és vége közt eltelt idővel együtt.

Több alap-hármas ellenőrzése (véletlenszerű elemválasztás)

A szükséges paraméterezés:

```
check_multiple digit_type --random n --base-count m
```

ahol `digit_type` helyére `k_type` vagy `dense` kerülhet, n megadja hogy az egyes alap-hármasok vizsgálatakor hány véletlenszerűen választott elemet kell ellenőrizni, m pedig a vizsgált alap-hármasok számát határozza meg. A vizsgált alap-hármasok $(0,0)$ -tól indulva a 3.2.3. részben leírtak szerint lesznek meghatározva. Ha a program futása valamiért megszakadt, és az utolsó kiírt alap-hármas első alapja (a,b) volt, akkor a

```
check_multiple digit_type --random n --base-count m --continue a b
```

paraméterezéssel folytatható a vizsgálat.

Egyéb funkciók

Adott halmaz feldarabolása n egyenlő részre a következő paraméterezéssel lehetséges:

```
split_limits --limit a1min a1max+1 --limit a2min a2max+1 --cpu-threads n
```

Itt nem muszáj pont kettő darab korlátot megadni, a korlátok száma tetszőleges lehet (de

legalább egy). Például három alap esetén a vizsgált halmazt hat korlát adja meg (a hat koordinátára). Fontos, hogy a program csak akkor tudja n részre osztani a halmazt, ha a korlátok között van legalább egy olyan, hogy a maximum és minimum különbsége legalább n .

4.4. Tesztelés, helyesség

A szokásos tesztelésen és hibajavításokon kívül a program jellegéből adódóan néhány további fontos kérdésre is választ kellett adni az éles használat előtt. Ezek a következők:

- A programban végzett számítások eredménye valóban minden esetben helyes-e?
- Képes-e a program napokig vagy akár hetekig futni hibák és növekvő memóriahasználat nélkül?
- A futásidő valóban a kitűzött számításokkal telik, nem tölt el időt feleslegesen más dolgokkal a program?

A helyességet két szempontból is vizsgáltam: a képletek jól vannak-e leprogramozva és jó eredményeket adnak-e, illetve történhet-e hibás eredményre vezető túl- vagy alulcsordulás a számítások során. A képletek és számítások helyességét konkrét példák végigszámolásával és az eredmények összevetésével ellenőriztem, a túlcsordulás ellenőrzése azonban már nehezebb. Ha a programban beépített ellenőrzések lennének, amelyek még a műveletek végrehajtása előtt megállapítják, hogy történhet-e túlcsordulás akkor a számítási sebesség jelentősen csökkenne. Szerencsére pontosan ismert, hogy a program milyen műveleteket végez a bemenetekkel és az ellenőrző algoritmus minden lépésének eredményének koordinátáira is tudunk felső korlátot adni (lásd 3.1.), így minden bemenethez kiszámolható, hogy a műveletek során melyik a minimális és maximális érték ami még megjelenhet a programban. Ha ezeket az értékeket el tudjuk tárolni a használt adattípusban (alapértelmezetten `int`) akkor nem fordul elő túl- vagy alulcsordulás. A maximális és minimális érték meghatározásához az 5. fejezetben található becslések.

A második kérdés megválaszolásához meg kellett vizsgálni, hogy nem történik-e memóriaszivárgás a program futása során. Mivel a pointerok használatát az implementáció során ahol csak lehet kerültem, így a Valgrind⁵ segítségével nem volt nehéz meggyőződni arról, hogy valóban nincs memóriaszivárgás. Ezt később a program hosszabb ideig történő futtatása is megerősítette.

A harmadik kérdés eldöntéséhez a Callgrind⁶ nevű Valgrind modult használtam, amely a program futása közben gyűjt információt arról, hogy melyik függvény végrehajtásával mennyi

⁵<http://valgrind.org/>

⁶<http://valgrind.org/docs/manual/cl-manual.html>

időt tölt a program. A program az elvárásoknak megfelelően a futásidő majdnem⁷ egészét számításokkal töltötte. Ez az eszköz a számítások optimalizálásához is segítséget nyújt, mert könnyen kideríthető hogy mely műveletek igénylik a legtöbb időt (ezeket érdemes optimalizálni).

4.5. Tapasztalatok

Ebben a szakaszban konkrét futásidők és mérési eredmények szerepelnek. Minden eredményt egy Intel Core 2 Quad Q9505 (2.83GHz) négy magos processzorral és 8 GB RAM-mal ellátott gépen mértem. A számításokat a CPU-n futtattam, 4 szál használatával. A programot gcc 4.9.1-gyel, -O2 optimalizációs beállítással fordítottam. A GPU-n futtatott számításokhoz egy NVIDIA GeForce GTX 660 grafikus kártyát használtam. Ahol ezektől eltértem, azt külön jelzem.

Mivel a sebességet jelentősen befolyásolja az alapok és a számjegyhalmaz-konstrukció választása, továbbá a használt hardver és a fordítóprogram paraméterezése is, ezért a most következő adatok inkább csak arra szolgálnak, hogy képet kapjunk egy „átlagos” esetről, pontos mérésnek ezek nem tekinthetők (a valós értékek minden inputra változnak).

4.5.1. Számítások sebessége

	Alap algoritmus	Optimalizáció K-típusú jegyhalmazra
CPU	~ 3,3 millió	2,3–3,4 millió
GPU	~ 3,4 millió	Nem támogatott
CPU és GPU	2,1–3,5 millió	Nem támogatott

4.3. táblázat. Egy másodperc alatt ellenőrzött számhármassok száma, 4 szál (CPU) / 5120 work-item (GPU)

A számítások sebessége függ a számjegyhalmaztól és az alapoktól is. A fenti méréseket ezért azonos számjegyhalmazokkal és alapokkal végeztem, néhány tipikus vizsgált esetet vettem alapul.

A használt konfigurációval a GPU valamivel gyorsabbnak bizonyult a processzornál, de az eltérés nem elég nagy ahhoz, hogy érdemes legyen kizárólag a GPU-t használni (a GPU használata nehezebb, és pár beállítás illetve a K-típusú számjegyhalmaz esetén használt extra optimalizáció csak CPU-ra érhető el: lásd 4.3.1. és 3.2.2.). Nagyobb teljesítményű vagy több videokártya esetén azonban lehetséges, hogy érdekesebb GPU-t használni CPU helyett. A CPU és GPU egyszerre történő használatát nem támogatja a program, ám ez kikerülhető ha az inputot megfelezzük, majd a programot két példányban indítjuk el, ahol az egyik példány a CPU-t a másik a GPU-t használja (a fenti táblázathoz is ezt a módszert használtam).

⁷Az inicializálást és I/O-t leszámítva

A K-típusú jegyhalmaz esetén használt optimalizáció hatékonysága nagy mértékben függ a számjegyhalmaz méretétől. Minél nagyobb a számjegyhalmaz, annál hatékonyabb ezt használni az alap algoritmus helyett.

A CPU és GPU párhuzamos használatkor a programot két példányban kell indítani. Az egyik példány a CPU-t, a másik a GPU-t használja. Mivel a GPU-t használó példánynak is szüksége van CPU erőforrásokra (a GPU használatának ütemezéséhez), ezért a CPU-t használó példány kevesebb erőforráshoz jut, s így lassabb lesz. Összeségében a két példány párhuzamos futtatásával elérhető sebességnövekedés nem jelentős.

Sok alap-hármas részleges ellenőrzésekor a futásidőt nagyban befolyásolja, hogy az ellenőrzött alap-hármasokhoz mekkora számjegyhalmazok tartoznak. Az első ezer darab alap-hármas ellenőrzéséhez (a korábban ismertetett alap-hármas konstrukciókkal, minden alap-hármas esetén tízezer, véletlenszerűen választott elemmel) körülbelül 24-36 óra szükséges K-típusú jegyhalmaz-konstrukció használata esetén. Ugyanennyi idő alatt nagyjából 180 darab alap-hármas ellenőrizhető, ha a sűrű jegyhalmaz-konstrukciót használjuk. Ezen számítások során a legnagyobb előforduló memória-használat körülbelül 6-7 gigabájt volt.

4.5.2. A program teljesítménye különböző fordítóprogramok és fordítási beállítások mellett

A fejlesztés során észrevettem, hogy a használt fordítóprogram és a fordítóprogram paraméterezése jelentősen befolyásolhatja a program futási idejét. Érdekességképpen az alábbi táblázatban foglaltam össze néhány mérési eredményt:

	g++ 4.9.1	clang++ 3.5.0
-O0	396s	393s
-O1	84s	218s
-O2	76s	66s
-O3	75s	61s

4.4. táblázat. Futásidők különböző fordítóprogramok és fordítási beállítások mellett, 4 szál, 64 millió elem vizsgálata, egy „átlagosnak” tekinthető alap-hármas és számjegyhalmaz választás esetén

4.6. Lehetőségek továbbfejlesztésre

- Többszálú futás esetén a végzett műveletek részletes kiírása nem működik megfelelően (a szálak nem koordináltan használják a standard kimenetet és ezért keverednek az egyes szálakból származó üzenetek).
- Előfordulhat, hogy egy szál futása előbb ér véget mint a többié. Ilyenkor érdemes lehet egy új szálat indítani, a többi szál által átvizsgálandó mennyiséget pedig csökkenteni.

- A program használatát megkönnyítené ha kevesebb-szer kellene újrafordítani, illetve ha nem lenne szükséges minden új bemenethez újragenerálni a program bizonyos részeit. Érdekes lehet megvizsgálni, hogy hogyan lehetne sebességcsökkenés nélkül ezeket a problémákat megoldani.
- Az algoritmusok és számítások általánosítása, hogy ne csak $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{5}]}$ gyűrűben, hanem más struktúrákban is működjenek. Itt azonban figyelni kell arra, hogy eközben ne csökkenjen a számítási sebesség.
- Egyszerre több OpenCL eszköz (GPU) használata párhuzamosan.
- CPU és GPU egyszerre való használatának támogatása (ez a probléma kikerülhető a program két példányának futtatásával és a bemenet megfelelésével).
- Azon beállítások is elérhetőek legyenek GPU használatkor amelyek most csak CPU-val használhatók.

5. fejezet

Eredmények

5.1. Becslések a számítások során előforduló minimális és maximális értékekre

Az alap-hármasok és a számjegyhalmaz ismeretében a 3.1-ben leírtak segítségével meghatározhatjuk az iteráció során a J_i függvények eredményeként kapott értékek koordinátáinak maximális abszolútértékeit. Ez alapján becsléseket tudunk adni a számítások során előforduló legkisebb és legnagyobb tárolandó értékekre, és így elkerülhetjük a túl- vagy alulcsordulás miatti hibás eredményeket (hiszen csak olyan adattípust kell választani a számításokhoz amivel ábrázolható a most következő becslések alapján meghatározott minimális és maximális érték). Így még a program futtatása előtt kizárhatjuk a túl- vagy alulcsordulás lehetőségét. Ez természetesen csak akkor érvényes, ha a 3.1-ben leírtak alkalmazhatók (nem fordul elő nullával osztás vagy más problémás eset a 3.1-beli képletekben). Ha a 3.1-beli becslés nem működik, akkor a túl- vagy alulcsordulás lehetősége nem kizárható. Ez azonban a vizsgált esetekben nem okoz problémát, hiszen ahhoz, hogy egy véges halmaz ellenőrzésével eldönthessük egy rendszerről, hogy valóban számrendszer-e mindenképp szükséges, hogy a 3.1-beli becslés kiszámítható és használható legyen (különben a vizsgálandó halmazt sem tudnánk meghatározni).

Legyen $a = (a_1, a_2)$ vizsgálandó halmaz egy tetszőleges eleme, és $J_i(a) = (b_1, b_2)$, ekkor 3.1 alapján (b_1, b_2) is a vizsgálandó halmazba esik. Ha 3.1 alapján azt kaptuk, hogy a vizsgálandó halmaz elemeinek koordinátáinak abszolútértékei kisebbek, mint $M \in \mathbb{N}^+$ és M ábrázolható a használt adattípussal, akkor már csak J_i kiszámítása során fordulhat elő túl- vagy alulcsordulás. Mivel

$$J_i = \frac{a - d}{Z_i} \quad (d = (d_1, d_2) \in \mathcal{A})$$

ezért csak a kivonás, majd az osztás során tárolt értékekre kell alsó és felső becslést adni. Jelölje D az $\mathcal{A}$ -ban előforduló legnagyobb koordináta abszolútértékét és B az alapok között

előforduló legnagyobb koordináta abszolútértékét. Ekkor az $a - d$ különbségre

$$-(M + D) \leq a_1 - d_1, a_2 - d_2 \leq M + D$$

az alapok normájára pedig

$$-2B^2 \leq \|Z_i\| \leq 2B^2$$

igaz. Az osztás képlete a következő:

$$\frac{k}{l} = \frac{(k_1, k_2)}{(l_1, l_2)} = \left(\frac{k_1 l_1 + k_1 l_2 - k_2 l_2}{\|l\|}, \frac{k_2 l_1 - k_1 l_2}{\|l\|} \right)$$

A képlet és az előző két becslés alapján:

$$-3(M + D)B \leq (a_1 - d_1)z_{i_1} + (a_1 - d_1)z_{i_2} - (a_2 - d_2)z_{i_2} \leq 3(M + D)B$$

és

$$-2(M + D)B \leq (a_2 - d_2)z_{i_1} - (a_1 - d_1)z_{i_2} \leq 2(M + D)B$$

Több becslés megadására nincs szükség, hiszen tudjuk, hogy az osztás eredménye már a vizsgálandó halmaz eleme lesz, ezért annak koordinátáit M -mel becsülhetjük. Így látható, hogy ha $\pm \max\{2B^2, 3(M + D)B\}$ ábrázolható a használt adattípussal, akkor nem fog a számítások során túl- vagy alulcsordulás történni.

A GPU használata esetén szükséges még, hogy $\pm(2K + 2)^3$ is ábrázolható legyen, ez azonban csupán az implementáció limitációja, ettől eltekintve a használt algoritmus és emiatt a becslések is megegyeznek a CPU esetén látottakkal.

5.2. Szimultán számrendszerek létezése 3 alappal az $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{5}]}$ gyűrűben

Mind a sűrű, mind a K-típusú számjegyhalmaz-konstrukció esetén sikerült néhány alap-hármasra elvégezni a teljes (az ismertetett becslés által kapott) halmaz vizsgálatát, tehát elmondhatjuk, hogy valóban léteznek szimultán számrendszerek 3 alappal $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{5}]}$ -ben. Az ellenőrizendő alap-hármasok kiválasztásánál természetesen a vizsgálandó halmaz mérete volt a legfontosabb szempont. Ezenkívül még figyelni kellett arra is, hogy a számítások során előforduló minimális és maximális érték ábrázolható legyen a használt adattípusban (ne fordulhasson elő túl- vagy alulcsordulás). Az eredményeket a következő táblázatban foglalom össze:

Alap-hármas	Számjegyhalmaz-konstrukció	Ellenőrzött számhármások	Futásidő	Max. érték
$(-1, 3), (0, 3), (0, 4)$	sűrű (1 584 számjegy)	42 487 515 625 darab	16 óra	864
$(-1, 4), (0, 4), (0, 5)$	sűrű (7 600 számjegy)	379 205 945 209 darab	70 óra	2265
$(-5, 0), (-4, 0), (-4, 1)$	K-típusú (4 400 számjegy)	24 008 572 809 darab	4 óra	1875
$(-6, 0), (-5, 0), (-5, 1)$	K-típusú (17 100 számjegy)	31 739 204 025 darab	8 óra	2592
$(-6, 0), (-6, 1), (-5, 1)$	K-típusú (19 836 számjegy)	412 853 796 369 darab	28 óra	3438
$(-5, -1), (-5, 0), (-6, 0)$	K-típusú (26 100 számjegy)	23 315 152 249 darab	7 óra	2484
$(-6, -1), (-6, 0), (-5, 0)$	K-típusú (36 900 számjegy)	64 650 690 225 darab	27 óra	3078
$(6, 0), (5, 0), (5, 1)$	K-típusú (26 100 számjegy)	26 629 344 225 darab	8 óra	3556
$(5, 0), (6, 0), (6, 1)$	sűrű (36 900 számjegy)	13 509 180 441 darab	6 óra	2358
$(-6, 0), (-5, 0), (-5, 1)$	sűrű (17 100 számjegy)	9 957 844 521 darab	4 óra	2124
$(-5, 0), (-6, 0), (-6, 1)$	K-típusú (26 100 számjegy)	60 908 759 209 darab	22 óra	2898
$(-6, -1), (-5, -1), (-5, 0)$	sűrű (29 725 számjegy)	34 784 861 049 darab	12 óra	2538
$(5, 0), (5, 1), (6, 1)$	sűrű (29 725 számjegy)	34 784 861 049 darab	13 óra	2538
$(6, 0), (5, 0), (5, 1)$	sűrű (26 100 számjegy)	9 006 959 025 darab	3 óra	2124
$(-5, -1), (-5, 0), (-6, 0)$	sűrű (26 100 számjegy)	9 006 959 025 darab	5 óra	2124
$(6, -1), (6, 0), (5, 0)$	sűrű (26 100 számjegy)	13 198 563 225 darab	7 óra	2232

5.1. táblázat. Szimultán számrendszerek $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{5}]}$ -ben. Az utolsó oszlopban az előző alfejezetben leírt módon meghatározott, a számítások során előforduló maximális ábrázolandó érték található (a minimális érték ennek -1 -szerese). Észrevehető, hogy a futásidő nem arányos az átvizsgált elemek számával. Ezt az okozza, hogy a számjegyhalmazok elemszáma is változik. Minél nagyobb a számjegyhalmaz, annál tovább tart egy számhármás vizsgálata (illetve futtatási környezet változásai is befolyásolják a mért időket).

5.3. A szimultán számrendszert alkotó alap-hármasok elhelyezkedése és kapcsolata a norma-függvénnyel

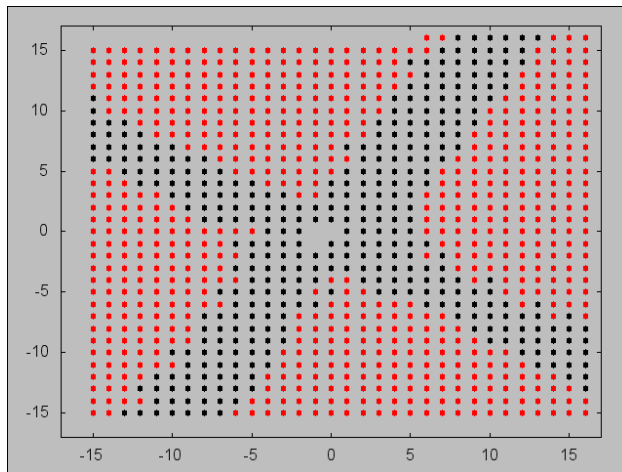
Ahhoz, hogy egy alap-hármasról és számjegyhalmaz-konstrukcióról teljes biztonsággal állíthassuk, hogy szimultán számrendszert alkotnak, nagyon nagy számú számhármás ellenőrzése szükséges (ha egyáltalán az adott esetben véges számú számhármás ellenőrzésével eldönthető a kérdés). Emiatt ezzel a módszerrel nem tudunk képet kapni a számrendszert alkotó alap-hármasok elhelyezkedéséről, mert a rendelkezésre álló idő alatt teljesen ellenőrizhető alap-hármasok száma túl kicsi ehhez. Azonban ha nem a teljes halmazt, hanem csak viszonylag nagy számú, véletlenszerűen választott elemet ellenőrzünk, akkor is nagy valószínűséggel meg tudjuk mondani, hogy az adott rendszer valóban számrendszer-e, még ha teljes biztonsággal nem is állíthatjuk ezt. Ha nemtriviális periodikus elemet találunk, akkor persze rögtön tudjuk, hogy a vizsgált rendszer nem alkothat számrendszert. Ha a 3.1-beli becslés használható az átvizsgálandó halmaz meghatározására, akkor érdemes ebből a halmazból véletlenszerűen választani a vizsgálandó elemeket. Ha a becslés nem használható, akkor megkötések nélkül választunk tetszőleges gyűrűbeli elemet a vizsgálathoz. A megvalósítás technikai részleteiről lásd még a 3.2.3. alfejezetet.

K-típusú jegyhalmazzal 1000 darab, sűrű jegyhalmazzal 180 darab alap-hármaszt vizsgáltam mind a négy használt alap-hármas konstrukció esetén. A rendelkezésre álló erőforrásokkal ennél lényegesen több alap-hármas vizsgálatára nem volt lehetőség, mert az alap-hármasok koordinátáinak növekedésével mind a számjegyhalmaz mérete, mind a számjegyhalmaz ki-

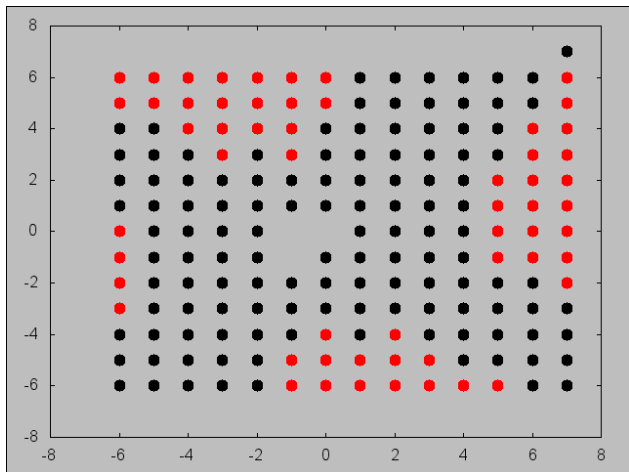
számításához szükséges idő gyorsan nő. Az alap-hármasokat úgy kaptam, hogy az origóból indulva, a síkot „csigavonalban” bejárva, az aktuális koordinátákat vettem az első alapnak, majd ebből határoztam meg a második és harmadik alapot. A második és harmadik alap meghatározására négyféle konstrukciót használtam, ezek a következők:

1. $(a, b), (a + 1, b), (a + 1, b + 1)$
2. $(a, b), (a, b + 1), (a + 1, b + 1)$
3. $(a, b), (a - 1, b), (a - 1, b + 1)$
4. $(a, b), (a, b + 1), (a - 1, b + 1)$

Minden egyes alap-hármas esetén 10 000 darab, a fentebb írtak szerinti módon választott számhármas felírhatóságát ellenőriztem, majd a kapott eredményeket grafikonon ábrázoltam (elég csak az első alapot jelölni, hiszen az egyértelműen meghatározza a második és harmadikat is, így az ábrázoláshoz egy két dimenziós koordinátarendszer is megfelel). A grafikonokon minden vizsgált pontot vörös vagy fekete színnel jelölök. Az alábbi grafikonokon vörös színnel jelölöm azoknak az alap-hármasoknak az első alapjait amelyek valószínűleg szimultán számrendszert alkotnak, míg a feketével a szimultán számrendszert nem alkotó alap-hármasok első alapjait jelzem. Látható, hogy az origó közvetlen környezetében egy „lyuk” van a grafikonokon. A hiányzó alap-hármasokat nem vizsgáltam, ugyanis ezek egyik eleme $(0, 0)$, amely nyilvánvalóan nem lehet számrendszer alapszáma (s így szimultán számrendszer alapja sem).



5.1. ábra. Alap-hármasok első alapjainak elhelyezkedése a síkon. K-típusú számjegyhalmaz, 1. alap-hármas-konstrukció.

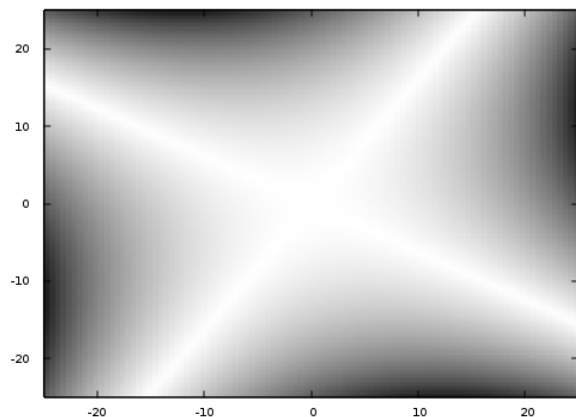


5.2. ábra. Alap-hármasok első alapjainak elhelyezkedése a síkon. Sűrű számjegyhalmaz, 1. alap-hármas-konstrukció.

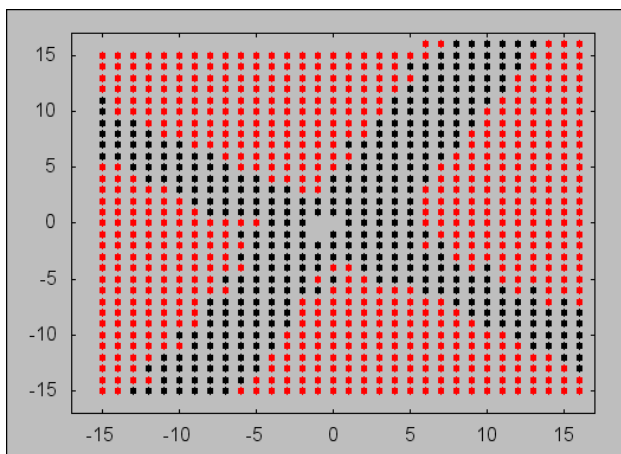
A grafikonok nagy méretű változatai, illetve a másik 3 alap-hármas-konstrukció grafikonjai a függelékben találhatók.

Látszik, hogy az alap-hármas konstrukció vagy számjegyhalmaz-konstrukció változtatása nem befolyásolja a kapott eredmények jellegét, az egyes grafikonok közti eltérések nem jelentősek. Emiatt a fejezet további részében nem fontos, hogy pontosan melyik számjegyhalmaz- és alap-konstrukciót használjuk, az eredmények jellegére vonatkozó megállapítások minden esetben érvényesek maradnak. A „fekete” (azaz valószínűleg szimultán számrendszert nem alkotó) esetekben sem tudjuk mindig biztosan, hogy az adott alapok valóban nem alkotnak szimultán számrendszert. Előfordul olyan eset, amikor egy számhármas adott alapokkal való felírhatóságának vizsgálata során az iteráció nagy számú¹ lépés után sem áll le (azaz ennyi lépésben sem találtunk periodikus elemet). Ezek pontosan azok az alap-hármasok amelyekre ugyan meg tudjuk határozni a vizsgálandó halmazt megadó becslés értékét, de az érték nem használható (részletekért lásd 3.1.). Ilyenkor azt sejtjük, hogy a vizsgált alap-hármas nem alkot szimultán számrendszert, ám ezt biztosan nem állíthatjuk. A „fekete” esetek nagy részében azonban nem ez a helyzet. Többnyire találunk nemtriviális periodikus elemet, és ekkor biztosan állíthatjuk, hogy a vizsgált rendszer nem szimultán számrendszer. Mivel nagy számú ilyen eset van, ezért ezeket itt most hely hiányában nem sorolom fel, a függelékben megtalálható ezen alap-hármasok listája (minden alap-hármashoz egy nemtriviális periodikus elemet is megadok).

A fenti grafikonokat nézve feltűnhet a gyűrűhöz tartozó norma függvényével való hasonlóság:



5.3. ábra. Az $N(x, y) = x^2 + xy - y^2$ norma függvény (a grafikonon nagyobb abszolútértékű függvényértékhez sötétebb szín tartozik).



5.4. ábra. Alap-hármasok első alapjainak elhelyezkedése a síkon. Vörös pontok jelölik a valószínűleg szimultán számrendszert alkotó alap-hármasok első alapjait, a fekete pontok a számrendszert nem alkotó alap-hármasok első alapjaihoz tartoznak.

Látható, hogy a kis normájú alapok többnyire nem alkotnak szimultán számrendszert, míg

¹A program futása során 1024 volt a maximális lépésszám az iteráció megszakítása előtt.

egy bizonyos értéknél nagyobb normájú alapok mind szimultán számrendszert alkotnak. A kapcsolat azonban nem nyilvánvaló, mert a „fekete” és „vörös” alapok határa nem egyértelmű (ez a grafikonon is jól látszik, a „vörös” és „fekete” területek határa nem egyenletes, vannak „kilógó” pontok). Előfordulnak esetek, amikor egy kisebb normájú alap számrendszert alkot, de egy hozzá közeli, nagyobb normájú alap nem. Ezen megfigyelések alapján sejthetjük, hogy létezik valamilyen könnyen ellenőrizhető feltétel, amellyel tetszőleges alap-hármasra eldönthető, hogy szimultán számrendszert alkot-e vagy sem, s ez a feltétel kapcsolatban áll az alap-hármasok normájának abszolútértékének nagyságával. Mindazonáltal ilyen összefüggés jelenleg nem ismert, s így a norma függvény és a megfelelő alap-hármasok elhelyezkedésének kapcsolata nem teljesen világos. A konkrét kapcsolat megállapítása, vagy legalábbis az előbb leírtak pontosítása további kutatások témája lehet.

6. fejezet

Az eredmények rövid összefoglalása

Az elkészült program segítségével sikerült megbizonyosodni arról, hogy K-típusú és sűrű jegyhalmazkonstrukció használata esetén is léteznek szimultán számrendszerek az $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{5}]}$ gyűrűben. Becslés segítségével garantálható, hogy az ehhez elvégzett számítások során nem történt túl- vagy alulcsordulás. Nagy számú alap-hármas részleges vizsgálatával sikerült képet kapni a számrendszert alkotó alap-hármasok elhelyezkedéséről (sűrű és K-típusú számjegyhalmaz esetén is). A kapott adatokból látható, hogy kapcsolat van a számrendszert alkotó alap-hármasok és a gyűrűhöz tartozó norma függvény között. További vizsgálatok célja lehet még több alap-hármas teljes ellenőrzése, új alap-hármas vagy számjegyhalmaz-konstrukciók keresése, illetve a számrendszert alkotó alap-hármasok elhelyezkedésének még nagyobb területen való feltérképezése, és a norma függvénnyel valamilyen konkrét kapcsolat megállapítása. Ez a probléma más struktúrákban is érdekes lehet (létezik-e szimultán számrendszer 4 vagy több alappal?).

7. fejezet

Irodalomjegyzék

- [1] Nagy Gábor: Általánosított számrendszerek vizsgálata a komplex számok körében (2012)
- [2] Cormen - Leiserson - Rivest - Stein: Új algoritmusok (2003)
- [3] William J. Gilbert, R. James Green: Negative Based Number Systems (Mathematics Magazine Vol. 52, No. 4, September, 1979 p. 240)
- [4] George Bergman: A Number System with an Irrational Base, Mathematics Magazine Vol. 31, No. 2 (Nov. - Dec., 1957), pp. 98-110
- [5] Complex base systems, elérhető a http://en.wikipedia.org/wiki/Complex_base_systems címen.
- [6] Kiss Emil: Bevezetés az algebrába. Typotex (2007)
- [7] William J. Gilbert: Arithmetic in Complex Bases (Mathematics Magazine Vol. 57, No. 2, March 1984)
- [8] G. Nagy: On the simultaneous number systems of Gaussian integers, Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. 35. (2011), 223-238
- [9] G. Farkas: Periodic elements and number systems in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, Mathematical and Computer Modelling, 38 (2003), 783-788
- [10] G. Farkas: Digital expansion in real algebraic quadratic fields, Mathematica Pannonica Janus Pannonius Univ. (Pécs), 10/2 (1999), 235-248
- [11] Járai Antal (szerk.): Bevezetés a matematikába. ELTE Eötvös Kiadó (2009)
- [12] Alan Baker: A Comprehensive Course in Number Theory, Cambridge University Press (2012).

- [13] Perfect hash function, elérhető a http://en.wikipedia.org/wiki/Perfect_hash_function címen.
- [14] Aaftab Munshi: OpenCL Programming Guide, Addison-Wesley Professional (2011)

8. fejezet

Függelékek

Azok az alap-hármasok, ahol valamely alap normája 0 vagy 1 (és így a hozzá tartozó számjegyhalmaz elemszáma is 0 vagy 1) nem alkothatnak szimultán számrendszert. Ezek triviális esetnek tekinthetők ezért nem szerepelnek az alábbi táblázatokban, de itt felsorolom a vizsgált tartományba eső ilyen alapokat:

$(0, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(-2, 1)$, $(-1, 1)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(-3, 2)$, $(1, 2)$, $(-5, 3)$, $(2, 3)$, $(-8, 5)$, $(3, 5)$, $(-13, 8)$, $(5, 8)$, $(8, 13)$.

A. K-típusú jegyhalmazzal számrendszert nem alkotó alap-hármasok

A.1. Az (a, b) , $(a + 1, b)$, $(a + 1, b + 1)$ alap-hármas-konstrukció esete

Alap-hármas	Nemtriviális periodikus elem
$(-15, 6)$, $(-14, 6)$, $(-14, 7)$	$(-127, 84)$, $(-134, 90)$, $(-126, 92)$
$(-15, 7)$, $(-14, 7)$, $(-14, 8)$	$(-46, 27)$, $(-49, 28)$, $(-77, -21)$
$(-15, 10)$, $(-14, 10)$, $(-14, 11)$	$(-55, 20)$, $(-52, 30)$, $(-50, 30)$
$(-15, 11)$, $(-14, 11)$, $(-14, 12)$	$(213, -144)$, $(225, -147)$, $(220, -141)$
$(-14, 6)$, $(-13, 6)$, $(-13, 7)$	$(114, -72)$, $(121, -77)$, $(114, -78)$
$(-13, -15)$, $(-12, -15)$, $(-12, -14)$	$(198, 331)$, $(201, 342)$, $(213, 357)$
$(-13, 5)$, $(-12, 5)$, $(-12, 6)$	$(-91, 60)$, $(-97, 65)$, $(-90, 67)$
$(-13, 9)$, $(-12, 9)$, $(-12, 10)$	$(102, -55)$, $(105, -62)$, $(101, -61)$
$(-12, -15)$, $(-11, -15)$, $(-11, -14)$	$(-120, -190)$, $(-126, -194)$, $(-130, -205)$
$(-12, -13)$, $(-11, -13)$, $(-11, -12)$	$(-256, -406)$, $(-266, -418)$, $(-279, -442)$
$(-12, 4)$, $(-11, 4)$, $(-11, 5)$	$(-70, 50)$, $(-75, 55)$, $(-68, 58)$
$(-12, 5)$, $(-11, 5)$, $(-11, 6)$	$(30, -20)$, $(32, -22)$, $(25, -30)$
$(-11, -14)$, $(-10, -14)$, $(-10, -13)$	$(162, 263)$, $(166, 272)$, $(176, 286)$
$(-11, -13)$, $(-10, -13)$, $(-10, -12)$	$(144, 237)$, $(147, 246)$, $(157, 259)$
$(-11, -12)$, $(-10, -12)$, $(-10, -11)$	$(126, 213)$, $(128, 222)$, $(138, 234)$
$(-11, 4)$, $(-10, 4)$, $(-10, 5)$	$(40, -21)$, $(44, -22)$, $(46, -14)$
$(-10, -12)$, $(-9, -12)$, $(-9, -11)$	$(-44, -76)$, $(-42, -81)$, $(-48, -84)$
$(-10, -10)$, $(-9, -10)$, $(-9, -9)$	$(88, 154)$, $(89, 162)$, $(98, 172)$

Alap-hármas	Nemtriviális periodikus elem
$(-10, 3), (-9, 3), (-9, 4)$	$(44, -32), (48, -36), (42, -39)$
$(-10, 7), (-9, 7), (-9, 8)$	$(-94, 62), (-102, 64), (-98, 61)$
$(-9, -14), (-8, -14), (-8, -13)$	$(-16419, -9363), (27217, -31821), (17238, -12457)$
$(-9, -13), (-8, -13), (-8, -12)$	$(-1417, -1187), (80, 172), (-124, 351)$
$(-9, -11), (-8, -11), (-8, -10)$	$(-122, -196), (-130, -202), (-136, -218)$
$(-9, -10), (-8, -10), (-8, -9)$	$(-84, -139), (-86, -146), (-94, -156)$
$(-9, 2), (-8, 2), (-8, 3)$	$(29, -26), (32, -30), (26, -34)$
$(-9, 3), (-8, 3), (-8, 4)$	$(24, -13), (27, -14), (29, -7)$
$(-8, -15), (-7, -15), (-7, -14)$	$(62, 106), (66, 108), (69, 114)$
$(-8, -13), (-7, -13), (-7, -12)$	$(2144, -2331), (12074, 17789), (-12430, -9947)$
$(-8, -9), (-7, -9), (-7, -8)$	$(-66, -108), (-68, -114), (-75, -123)$
$(-8, -8), (-7, -8), (-7, -7)$	$(-92, -146), (-98, -153), (-106, -168)$
$(-8, -7), (-7, -7), (-7, -6)$	$(-42, -78), (-42, -84), (-49, -91)$
$(-8, 1), (-7, 1), (-7, 2)$	$(16, -22), (18, -26), (12, -31)$
$(-8, 2), (-7, 2), (-7, 3)$	$(-18, 6), (-21, 6), (-24, -2)$
$(-8, 6), (-7, 6), (-7, 7)$	$(-18, 26), (-24, 21), (-24, 18)$
$(-7, -15), (-6, -15), (-6, -14)$	$(-259, -413), (-266, -427), (-281, -450)$
$(-7, -14), (-6, -14), (-6, -13)$	$(140, 231), (146, 238), (154, 252)$
$(-7, -13), (-6, -13), (-6, -12)$	$(96, 141), (93, 150), (99, 159)$
$(-7, -8), (-6, -8), (-6, -7)$	$(57, 93), (54, 102), (66, 108)$
$(-7, -7), (-6, -7), (-6, -6)$	$(40, 67), (41, 72), (47, 79)$
$(-7, -5), (-6, -5), (-6, -4)$	$(20, 45), (19, 50), (25, 55)$
$(-7, 1), (-6, 1), (-6, 2)$	$(13, -14), (15, -17), (10, -21)$
$(-7, 2), (-6, 2), (-6, 3)$	$(5, -2), (6, -2), (14, 12)$
$(-7, 5), (-6, 5), (-6, 6)$	$(-36, -23), (-19, 8), (-17, 9)$
$(-6, -14), (-5, -14), (-5, -13)$	$(-218, -344), (-224, -357), (-238, -378)$
$(-6, -13), (-5, -13), (-5, -12)$	$(-192, -306), (-198, -318), (-211, -338)$
$(-6, -12), (-5, -12), (-5, -11)$	$(-168, -270), (-174, -281), (-186, -300)$
$(-6, -9), (-5, -9), (-5, -8)$	$(-4950, -3670), (5214, 77), (-2903, 3109)$
$(-6, -8), (-5, -8), (-5, -7)$	$(53, -283), (103, 182), (0, 351)$
$(-6, -6), (-5, -6), (-5, -5)$	$(28, 46), (29, 50), (34, 56)$
$(-6, -5), (-5, -5), (-5, -4)$	$(20, 36), (20, 40), (25, 45)$
$(-6, -3), (-5, -3), (-5, -2)$	$(4, 22), (2, 26), (7, 29)$
$(-6, -1), (-5, -1), (-5, 0)$	$(-4, -20), (-4, -24), (-10, -31)$
$(-6, 1), (-5, 1), (-5, 2)$	$(-8, 2), (-10, 2), (-13, -5)$
$(-5, -13), (-4, -13), (-4, -12)$	$(-181, -281), (-186, -293), (-199, -312)$
$(-5, -12), (-4, -12), (-4, -11)$	$(157, 247), (162, 258), (174, 276)$
$(-5, -11), (-4, -11), (-4, -10)$	$(55, 80), (55, 85), (60, 91)$
$(-5, -10), (-4, -10), (-4, -9)$	$(135, 210), (138, 222), (150, 240)$
$(-5, -8), (-4, -8), (-4, -7)$	$(1229, -366), (3276, -7304), (-2011, 2934)$
$(-5, -4), (-4, -4), (-4, -3)$	$(-9, -12), (-12, -12), (-12, -16)$
$(-5, -3), (-4, -3), (-4, -2)$	$(-15, -21), (-18, -23), (-21, -30)$
$(-5, -2), (-4, -2), (-4, -1)$	$(11, 11), (14, 12), (16, 18)$
$(-5, -1), (-4, -1), (-4, 0)$	$(9, 3), (12, 3), (13, 8)$
$(-5, 4), (-4, 4), (-4, 5)$	$(20, -5), (20, -10), (18, -10)$
$(-4, -11), (-3, -11), (-3, -10)$	$(-126, -194), (-130, -204), (-141, -220)$
$(-4, -10), (-3, -10), (-3, -9)$	$(106, 166), (110, 175), (120, 190)$
$(-4, -9), (-3, -9), (-3, -8)$	$(-88, -140), (-92, -148), (-101, -162)$
$(-4, -6), (-3, -6), (-3, -5)$	$(-48, 182), (781, 171), (-410, -472)$
$(-4, -5), (-3, -5), (-3, -4)$	$(145, -124), (-42, -5), (-48, 91)$
$(-4, -3), (-3, -3), (-3, -2)$	$(-6, -8), (-12, -6), (-9, -12)$
$(-4, -2), (-3, -2), (-3, -1)$	$(2, 6), (1, 8), (4, 10)$
$(-4, -1), (-3, -1), (-3, 0)$	$(2, -4), (4, -6), (1, -7)$
$(-4, 0), (-3, 0), (-3, 1)$	$(-4, 0), (-6, 0), (-12, -12)$
$(-3, -9), (-2, -9), (-2, -8)$	$(-81, -123), (-84, -131), (-93, -144)$
$(-3, -8), (-2, -8), (-2, -7)$	$(29, 36), (28, 40), (32, 44)$
$(-3, -7), (-2, -7), (-2, -6)$	$(-21, -30), (-21, -33), (-24, -37)$

Alap-hármas	Nemtriviális periodikus elem
$(-3, -5), (-2, -5), (-2, -4)$	$(39, 370), (473, 654), (-411, 123)$
$(-3, -4), (-2, -4), (-2, -3)$	$(249, 93), (121, 245), (2, 82)$
$(-3, -3), (-2, -3), (-2, -2)$	$(348, -484), (108, 781), (-989, -444)$
$(-3, -1), (-2, -1), (-2, 0)$	$(-1, -2), (-1, -3), (-4, -7)$
$(-3, 3), (-2, 3), (-2, 4)$	$(2, 8), (-1, 6), (-1, 4)$
$(-2, -6), (-1, -6), (-1, -5)$	$(18, 34), (21, 36), (24, 42)$
$(-2, -5), (-1, -5), (-1, -4)$	$(-2, -16), (-8, -14), (-9, -17)$
$(-2, -3), (-1, -3), (-1, -2)$	$(-58, -57), (220, -21), (1, 23)$
$(-2, -2), (-1, -2), (-1, -1)$	$(-248, -706), (-44, -447), (-288, 831)$
$(-2, 2), (-1, 2), (-1, 3)$	$(0, 9), (-5, 6), (-4, 4)$
$(-1, -6), (0, -6), (0, -5)$	$(31, 41), (32, 46), (38, 54)$
$(-1, -4), (0, -4), (0, -3)$	$(7, 6), (6, 8), (8, 10)$
$(-1, -2), (0, -2), (0, -1)$	$(949, 278), (301, 144), (588, 630)$
$(-1, 2), (0, 2), (0, 3)$	$(5, 5), (6, 1), (3, 1)$
$(0, -5), (1, -5), (1, -4)$	$(-13, -4), (-12, -7), (-16, -11)$
$(0, -3), (1, -3), (1, -2)$	$(-2, -4), (-3, -5), (-6, -10)$
$(0, -2), (1, -2), (1, -1)$	$(-425, 213), (446, -125), (-508, 78)$
$(0, 4), (1, 4), (1, 5)$	$(10, 14), (11, 11), (8, 10)$
$(1, -3), (2, -3), (2, -2)$	$(6, -4), (4, -3), (6, -2)$
$(1, -2), (2, -2), (2, -1)$	$(-449, 355), (266, -135), (838, 788)$
$(1, 5), (2, 5), (2, 6)$	$(3, 3), (12, -3), (3, 2)$
$(1, 7), (2, 7), (2, 8)$	$(29, 36), (31, 31), (26, 29)$
$(2, -4), (3, -4), (3, -3)$	$(-15, 10), (-12, 8), (-15, 7)$
$(2, -3), (3, -3), (3, -2)$	$(-909, -84), (-9, -117), (279, -899)$
$(2, -2), (3, -2), (3, -1)$	$(475, 709), (435, 98), (216, -114)$
$(2, -1), (3, -1), (3, 0)$	$(-281, -853), (567, 420), (-287, -52)$
$(2, 0), (3, 0), (3, 1)$	$(-2, -6), (-1, -3), (0, -2)$
$(2, 1), (3, 1), (3, 2)$	$(-2, 4), (0, 2), (-1, 2)$
$(2, 7), (3, 7), (3, 8)$	$(-44, -72), (-40, -68), (-37, -61)$
$(3, -5), (4, -5), (4, -4)$	$(8, -12), (5, -12), (3, -18)$
$(3, -2), (4, -2), (4, -1)$	$(1, -15), (-9, 75), (-1, 35)$
$(3, -1), (4, -1), (4, 0)$	$(6, 3), (3, 0), (3, -1)$
$(3, 0), (4, 0), (4, 1)$	$(-9, -3), (-6, -2), (-6, 0)$
$(3, 1), (4, 1), (4, 2)$	$(0, -11), (-1, -8), (1, -7)$
$(3, 2), (4, 2), (4, 3)$	$(-6, -15), (-6, -12), (-4, -10)$
$(3, 3), (4, 3), (4, 4)$	$(-9, -12), (-7, -11), (-6, -9)$
$(3, 9), (4, 9), (4, 10)$	$(70, 115), (65, 110), (61, 101)$
$(4, -5), (5, -5), (5, -4)$	$(10, -2), (10, 0), (20, 15)$
$(4, -4), (5, -4), (5, -3)$	$(-103, -430), (-616, 491), (-72, 142)$
$(4, -3), (5, -3), (5, -2)$	$(28, -14), (1, 14), (-34, -14)$
$(4, -1), (5, -1), (5, 0)$	$(-4, 12), (-4, 8), (-6, 7)$
$(4, 0), (5, 0), (5, 1)$	$(-4, -20), (-3, -15), (0, -12)$
$(4, 1), (5, 1), (5, 2)$	$(-14, -32), (-12, -26), (-8, -21)$
$(4, 2), (5, 2), (5, 3)$	$(-4, -22), (-5, -18), (-2, -16)$
$(4, 3), (5, 3), (5, 4)$	$(12, 28), (12, 24), (9, 21)$
$(4, 4), (5, 4), (5, 5)$	$(-36, -56), (-32, -51), (-28, -44)$
$(4, 10), (5, 10), (5, 11)$	$(56, 90), (55, 85), (50, 80)$
$(4, 11), (5, 11), (5, 12)$	$(-102, -168), (-96, -162), (-91, -151)$
$(5, -3), (6, -3), (6, -2)$	$(-492, -918), (-742, 959), (-483, -776)$
$(5, -2), (6, -2), (6, -1)$	$(-14, -1), (-10, 2), (-10, 4)$
$(5, -1), (6, -1), (6, 0)$	$(-25, 5), (-20, 5), (-21, 8)$
$(5, 0), (6, 0), (6, 1)$	$(-25, -5), (-20, -4), (-20, 0)$
$(5, 1), (6, 1), (6, 2)$	$(-27, -17), (-22, -15), (-21, -10)$
$(5, 2), (6, 2), (6, 3)$	$(-31, -31), (-26, -28), (-24, -22)$
$(5, 3), (6, 3), (6, 4)$	$(10, 37), (11, 32), (7, 29)$
$(5, 4), (6, 4), (6, 5)$	$(45, 65), (40, 60), (36, 52)$
$(5, 5), (6, 5), (6, 6)$	$(30, 55), (29, 50), (25, 45)$

Alap-hármas	Nemtriviális periodikus elem
(5, 6), (6, 6), (6, 7)	(27, 40), (24, 38), (22, 34)
(5, 12), (6, 12), (6, 13)	(126, 205), (120, 198), (114, 186)
(5, 14), (6, 14), (6, 15)	(-154, -259), (-146, -252), (-140, -238)
(6, -6), (7, -6), (7, -5)	(-14, 8), (-13, 7), (-22, -6)
(6, -3), (7, -3), (7, -2)	(-6, 12), (-8, 6), (-9, 6)
(6, -1), (7, -1), (7, 0)	(6, -30), (6, -24), (10, -21)
(6, 4), (7, 4), (7, 5)	(-56, -74), (-50, -69), (-46, -60)
(6, 5), (7, 5), (7, 6)	(-66, -96), (-60, -90), (-55, -80)
(6, 6), (7, 6), (7, 7)	(-78, -120), (-72, -113), (-66, -102)
(6, 7), (7, 7), (7, 8)	(-92, -146), (-86, -138), (-79, -126)
(6, 8), (7, 8), (7, 9)	(-36, -48), (-30, -48), (-28, -44)
(6, 13), (7, 13), (7, 14)	(110, 180), (80, 190), (100, 165)
(6, 14), (7, 14), (7, 15)	(-168, -274), (-161, -266), (-154, -252)
(7, -6), (8, -6), (8, -5)	(995, -324), (-34, 742), (398, 449)
(7, -5), (8, -5), (8, -4)	(809, -207), (-215, -77), (807, -633)
(7, -3), (8, -3), (8, -2)	(-26, 3), (-21, 6), (-21, 9)
(7, -2), (8, -2), (8, -1)	(19, -32), (18, -26), (22, -24)
(7, 6), (8, 6), (8, 7)	(-91, -133), (-84, -126), (-78, -114)
(7, 7), (8, 7), (8, 8)	(105, 161), (98, 153), (91, 140)
(7, 8), (8, 8), (8, 9)	(-70, -121), (-68, -114), (-62, -106)
(7, 9), (8, 9), (8, 10)	(-139, -223), (-132, -213), (-123, -198)
(7, 15), (8, 15), (8, 16)	(198, 321), (191, 312), (183, 297)
(8, -5), (9, -5), (9, -4)	(-585, -587), (-561, -1098), (177, 311)
(8, -4), (9, -4), (9, -3)	(12, -20), (14, -13), (16, -12)
(8, 7), (9, 7), (9, 8)	(56, 120), (56, 112), (49, 105)
(8, 8), (9, 8), (9, 9)	(-136, -208), (-128, -199), (-120, -184)
(8, 9), (9, 9), (9, 10)	(-154, -242), (-146, -232), (-137, -216)
(8, 10), (9, 10), (9, 11)	(104, 174), (101, 166), (94, 156)
(8, 11), (9, 11), (9, 12)	(-76, -120), (-72, -116), (-68, -109)
(9, -8), (10, -8), (10, -7)	(-27, 14), (-26, 12), (-36, -2)
(9, 9), (10, 9), (10, 10)	(171, 261), (162, 251), (153, 234)
(9, 10), (10, 10), (10, 11)	(-191, -299), (-182, -288), (-172, -270)
(9, 11), (10, 11), (10, 12)	(-213, -339), (-204, -327), (-193, -308)
(9, 12), (10, 12), (10, 13)	(237, 381), (228, 368), (216, 348)
(10, -9), (11, -9), (11, -8)	(132, -84), (124, -80), (126, -87)
(10, -5), (11, -5), (11, -4)	(-50, 20), (-44, 22), (-45, 25)
(10, -4), (11, -4), (11, -3)	(58, -54), (55, -47), (60, -46)
(10, 11), (11, 11), (11, 12)	(-232, -362), (-222, -350), (-211, -330)
(10, 12), (11, 12), (11, 13)	(256, 406), (246, 393), (234, 372)
(10, 13), (11, 13), (11, 14)	(-170, -282), (-166, -272), (-157, -259)
(10, 14), (11, 14), (11, 15)	(70, 120), (70, 115), (66, 110)
(11, -6), (12, -6), (12, -5)	(31, -29), (32, -22), (34, -22)
(11, 12), (12, 12), (12, 13)	(-277, -431), (-266, -418), (-254, -396)
(11, 13), (12, 13), (12, 14)	(-303, -479), (-292, -465), (-279, -442)
(11, 14), (12, 14), (12, 15)	(331, 529), (320, 514), (306, 490)
(11, 15), (12, 15), (12, 16)	(-361, -581), (-350, -565), (-335, -540)
(11, 16), (12, 16), (12, 17)	(-91, -151), (-90, -146), (-86, -140)
(12, -10), (13, -10), (13, -9)	(-176, 110), (-167, 105), (-170, 112)
(12, -9), (13, -9), (13, -8)	(4214, 5918), (5824, -2749), (2429, 1792)
(12, -8), (13, -8), (13, -7)	(-211, 276), (-52, 54), (1089, 82)
(12, 14), (13, 14), (13, 15)	(354, 558), (342, 543), (328, 518)
(12, 15), (13, 15), (13, 16)	(384, 612), (372, 596), (357, 570)
(12, 16), (13, 16), (13, 17)	(-416, -668), (-404, -651), (-388, -624)
(13, -11), (14, -11), (14, -10)	(205, -130), (195, -125), (198, -133)
(13, -8), (14, -8), (14, -7)	(-694, 1665), (-1719, -3414), (-1871, 2673)
(13, -7), (14, -7), (14, -6)	(127, -84), (121, -77), (126, -79)
(13, -6), (14, -6), (14, -5)	(113, -86), (108, -78), (114, -78)

Alap-hármas	Nemtriviális periodikus elem
(13, 16), (14, 16), (14, 17)	(-441, -701), (-428, -684), (-412, -656)
(14, -11), (15, -11), (15, -10)	(-54, 32), (-52, 30), (-62, 17)
(14, -8), (15, -8), (15, -7)	(-70, 0), (-49, 28), (-50, 30)
(15, -12), (16, -12), (16, -11)	(259, -162), (248, -156), (252, -164)
(15, -8), (16, -8), (16, -7)	(-112, 57), (-104, 58), (-106, 62)
(15, -7), (16, -7), (16, -6)	(153, -114), (147, -105), (154, -105)
(16, -13), (17, -13), (17, -12)	(294, -186), (282, -180), (286, -189)
(16, -9), (17, -9), (17, -8)	(56, -16), (48, -24), (48, -27)
(16, -8), (17, -8), (17, -7)	(184, -128), (177, -119), (184, -120)

A.2. Az (a, b) , $(a, b + 1)$, $(a + 1, b + 1)$ alap-hármas-konstrukció esete

Alap-hármas	Nemtriviális periodikus elem
(-15, 7), (-15, 8), (-14, 8)	(-80, 50), (-77, 49), (-70, 70)
(-15, 10), (-15, 11), (-14, 11)	(-62, 17), (-52, 30), (-54, 32)
(-14, 5), (-14, 6), (-13, 6)	(-114, 78), (-108, 78), (-113, 86)
(-14, 6), (-14, 7), (-13, 7)	(-79, 47), (-77, 44), (-84, 43)
(-14, 7), (-14, 8), (-13, 8)	(-2781, 1436), (6739, -2127), (-2481, -778)
(-14, 10), (-14, 11), (-13, 11)	(-133, 65), (-125, 70), (-130, 75)
(-13, -15), (-13, -14), (-12, -14)	(-328, -518), (-342, -543), (-354, -558)
(-13, 7), (-13, 8), (-12, 8)	(-1904, 1807), (125, 88), (-254, 223)
(-13, 8), (-13, 9), (-12, 9)	(2943, -438), (6972, -3267), (5940, -5820)
(-13, 9), (-13, 10), (-12, 10)	(170, -112), (167, -105), (176, -110)
(-12, -15), (-12, -14), (-11, -14)	(306, 490), (320, 514), (331, 529)
(-12, -14), (-12, -13), (-11, -13)	(-163, -279), (-173, -292), (-176, -303)
(-12, 5), (-12, 6), (-11, 6)	(-34, 22), (-32, 22), (-31, 29)
(-11, -15), (-11, -14), (-10, -14)	(-66, -110), (-70, -115), (-70, -120)
(-11, -14), (-11, -13), (-10, -13)	(-157, -259), (-166, -272), (-170, -282)
(-11, -13), (-11, -12), (-10, -12)	(-234, -372), (-246, -393), (-256, -406)
(-11, -12), (-11, -11), (-10, -11)	(-211, -330), (-222, -350), (-232, -362)
(-11, 3), (-11, 4), (-10, 4)	(60, -46), (55, -47), (58, -54)
(-11, 4), (-11, 5), (-10, 5)	(-45, 25), (-44, 22), (-50, 20)
(-11, 8), (-11, 9), (-10, 9)	(-126, 87), (-124, 80), (-132, 84)
(-10, -13), (-10, -12), (-9, -12)	(-132, -216), (-140, -228), (-144, -237)
(-10, -12), (-10, -11), (-9, -11)	(-193, -308), (-204, -327), (-213, -339)
(-10, -11), (-10, -10), (-9, -10)	(-172, -270), (-182, -288), (-191, -299)
(-10, -10), (-10, -9), (-9, -9)	(153, 234), (162, 251), (171, 261)
(-10, 7), (-10, 8), (-9, 8)	(36, 2), (26, -12), (27, -14)
(-9, -14), (-9, -13), (-8, -13)	(6497, -11190), (-17984, -39487), (-2934, -9836)
(-9, -12), (-9, -11), (-8, -11)	(41, 68), (44, 72), (44, 76)
(-9, -11), (-9, -10), (-8, -10)	(-156, -250), (-166, -267), (-174, -278)
(-9, -10), (-9, -9), (-8, -9)	(-79, -137), (-86, -146), (-88, -154)
(-9, -9), (-9, -8), (-8, -8)	(-120, -184), (-128, -199), (-136, -208)
(-9, -8), (-9, -7), (-8, -7)	(-105, -154), (-112, -168), (-120, -176)
(-9, 2), (-9, 3), (-8, 3)	(36, -29), (32, -30), (34, -36)
(-9, 3), (-9, 4), (-8, 4)	(-16, 12), (-14, 13), (-12, 20)
(-9, 4), (-9, 5), (-8, 5)	(-589, -73), (160, 326), (358, -507)
(-8, -14), (-8, -13), (-7, -13)	(837, 702), (-430, 38), (-176, -352)
(-8, -13), (-8, -12), (-7, -12)	(-8822, -9273), (12700, -3945), (-10502, 13350)
(-8, -10), (-8, -9), (-7, -9)	(27, 48), (30, 51), (29, 55)
(-8, -9), (-8, -8), (-7, -8)	(106, 168), (114, 182), (121, 191)

Alap-hármas	Nemtriviális periodikus elem
$(-8, -8), (-8, -7), (-7, -7)$	$(91, 140), (98, 153), (105, 161)$
$(-8, -7), (-8, -6), (-7, -6)$	$(-78, -114), (-84, -126), (-91, -133)$
$(-8, 1), (-8, 2), (-7, 2)$	$(-22, 24), (-18, 26), (-19, 32)$
$(-8, 2), (-8, 3), (-7, 3)$	$(21, -9), (21, -6), (26, -3)$
$(-8, 4), (-8, 5), (-7, 5)$	$(-657, 162), (65, -452), (-284, 659)$
$(-8, 5), (-8, 6), (-7, 6)$	$(901, 178), (-725, 109), (533, -124)$
$(-7, -15), (-7, -14), (-6, -14)$	$(-154, -252), (-161, -266), (-168, -274)$
$(-7, -14), (-7, -13), (-6, -13)$	$(-165, -265), (-190, -270), (-180, -290)$
$(-7, -9), (-7, -8), (-6, -8)$	$(-16, -28), (-18, -30), (-12, -36)$
$(-7, -8), (-7, -7), (-6, -7)$	$(-47, -79), (-52, -86), (-54, -92)$
$(-7, -7), (-7, -6), (-6, -6)$	$(66, 102), (72, 113), (78, 120)$
$(-7, -6), (-7, -5), (-6, -5)$	$(25, 55), (30, 60), (30, 66)$
$(-7, -5), (-7, -4), (-6, -4)$	$(-46, -60), (-50, -69), (-56, -74)$
$(-7, 0), (-7, 1), (-6, 1)$	$(-10, 21), (-6, 24), (-6, 30)$
$(-7, 2), (-7, 3), (-6, 3)$	$(9, -6), (8, -6), (6, -12)$
$(-7, 5), (-7, 6), (-6, 6)$	$(-22, -6), (-13, 7), (-14, 8)$
$(-6, -15), (-6, -14), (-5, -14)$	$(140, 238), (146, 252), (154, 259)$
$(-6, -13), (-6, -12), (-5, -12)$	$(-72, -114), (-78, -120), (-79, -126)$
$(-6, -9), (-6, -8), (-5, -8)$	$(231, 2708), (-629, -7153), (530, 2806)$
$(-6, -7), (-6, -6), (-5, -6)$	$(-44, -68), (-48, -76), (-54, -80)$
$(-6, -6), (-6, -5), (-5, -5)$	$(-25, -45), (-29, -50), (-30, -55)$
$(-6, -5), (-6, -4), (-5, -4)$	$(-16, -36), (-20, -40), (-20, -45)$
$(-6, -4), (-6, -3), (-5, -3)$	$(29, 36), (32, 43), (37, 47)$
$(-6, -3), (-6, -2), (-5, -2)$	$(24, 22), (26, 28), (31, 31)$
$(-6, -2), (-6, -1), (-5, -1)$	$(-11, 21), (-7, 22), (-10, 27)$
$(-6, 0), (-6, 1), (-5, 1)$	$(-21, 8), (-20, 5), (-25, 5)$
$(-6, 1), (-6, 2), (-5, 2)$	$(10, -4), (10, -2), (14, 1)$
$(-6, 2), (-6, 3), (-5, 3)$	$(-978, 396), (683, -656), (-238, -198)$
$(-5, -12), (-5, -11), (-4, -11)$	$(91, 151), (96, 162), (102, 168)$
$(-5, -11), (-5, -10), (-4, -10)$	$(100, 160), (110, 170), (112, 180)$
$(-5, -9), (-5, -8), (-4, -8)$	$(245, -111), (119, -77), (-434, -231)$
$(-5, -8), (-5, -7), (-4, -7)$	$(974, -2034), (1665, -3676), (-2470, -2175)$
$(-5, -5), (-5, -4), (-4, -4)$	$(16, 28), (19, 32), (20, 36)$
$(-5, -4), (-5, -3), (-4, -3)$	$(-9, -21), (-12, -24), (-12, -28)$
$(-5, -3), (-5, -2), (-4, -2)$	$(-16, -18), (-18, -23), (-22, -26)$
$(-5, -2), (-5, -1), (-4, -1)$	$(-13, -8), (-14, -12), (-18, -14)$
$(-5, -1), (-5, 0), (-4, 0)$	$(-12, 0), (-12, -3), (-16, -4)$
$(-5, 0), (-5, 1), (-4, 1)$	$(-7, -1), (-8, -4), (-12, -8)$
$(-5, 2), (-5, 3), (-4, 3)$	$(5, -86), (21, -16), (-36, 3)$
$(-5, 3), (-5, 4), (-4, 4)$	$(-152, -66), (355, 170), (-61, -74)$
$(-4, -10), (-4, -9), (-3, -9)$	$(101, 162), (110, 175), (115, 185)$
$(-4, -6), (-4, -5), (-3, -5)$	$(-257, -245), (-52, -1590), (-11, 546)$
$(-4, -4), (-4, -3), (-3, -3)$	$(6, 12), (8, 14), (6, 18)$
$(-4, -3), (-4, -2), (-3, -2)$	$(10, 14), (12, 18), (15, 21)$
$(-4, -2), (-4, -1), (-3, -1)$	$(1, -7), (-1, -8), (0, -11)$
$(-4, -1), (-4, 0), (-3, 0)$	$(-6, 0), (-6, -2), (-9, -3)$
$(-4, 0), (-4, 1), (-3, 1)$	$(3, -1), (3, 0), (6, 3)$
$(-4, 1), (-4, 2), (-3, 2)$	$(28, -50), (-33, 67), (-2, 33)$
$(-4, 4), (-4, 5), (-3, 5)$	$(-3, 18), (-5, 12), (-8, 12)$
$(-3, -8), (-3, -7), (-2, -7)$	$(-37, -61), (-40, -68), (-44, -72)$
$(-3, -6), (-3, -5), (-2, -5)$	$(758, -390), (502, -951), (670, -794)$
$(-3, -5), (-3, -4), (-2, -4)$	$(-75, 192), (-419, -38), (392, 204)$
$(-3, -4), (-3, -3), (-2, -3)$	$(-493, -986), (616, 91), (986, 721)$
$(-3, -2), (-3, -1), (-2, -1)$	$(-1, -3), (-2, -4), (-2, -6)$
$(-3, -1), (-3, 0), (-2, 0)$	$(0, 2), (1, 3), (2, 6)$
$(-3, 0), (-3, 1), (-2, 1)$	$(-928, 286), (306, 124), (-562, 303)$
$(-3, 1), (-3, 2), (-2, 2)$	$(92, -632), (-369, 920), (-729, 353)$

Alap-hármas	Nemtriviális periodikus elem
$(-3, 2), (-3, 3), (-2, 3)$	$(-56, 946), (19, 233), (-598, -65)$
$(-3, 3), (-3, 4), (-2, 4)$	$(15, -7), (12, -8), (15, -10)$
$(-2, -7), (-2, -6), (-1, -6)$	$(18, 24), (22, 26), (21, 30)$
$(-2, -6), (-2, -5), (-1, -5)$	$(5, 7), (9, 6), (6, 9)$
$(-2, -4), (-2, -3), (-1, -3)$	$(-28, -5), (1, 3), (-85, -88)$
$(-2, -3), (-2, -2), (-1, -2)$	$(-986, 908), (-41, 64), (-32, 353)$
$(-2, -2), (-2, -1), (-1, -1)$	$(699, 710), (-102, 203), (-674, -534)$
$(-2, -1), (-2, 0), (-1, 0)$	$(-455, 972), (-684, -336), (-103, 870)$
$(-2, 1), (-2, 2), (-1, 2)$	$(33, 224), (-890, -192), (440, 440)$
$(-2, 2), (-2, 3), (-1, 3)$	$(6, 7), (1, -1), (1, -1)$
$(-2, 3), (-2, 4), (-1, 4)$	$(11, -1), (8, -3), (10, -5)$
$(-1, -5), (-1, -4), (0, -4)$	$(-10, -18), (-11, -22), (-14, -24)$
$(-1, -3), (-1, -2), (0, -2)$	$(9, -276), (518, 879), (539, -643)$
$(-1, -2), (-1, -1), (0, -1)$	$(783, -529), (246, -315), (-872, 163)$
$(-1, 0), (-1, 1), (0, 1)$	$(565, 272), (356, 447), (-147, 71)$
$(-1, 1), (-1, 2), (0, 2)$	$(-655, 55), (735, -188), (-936, -267)$
$(-1, 2), (-1, 3), (0, 3)$	$(6, 10), (3, 5), (2, 4)$
$(0, -4), (0, -3), (1, -3)$	$(3, -6), (6, -9), (1, -7)$
$(0, -3), (0, -2), (1, -2)$	$(0, -1), (1, -3), (-2, -4)$
$(0, -2), (0, -1), (1, -1)$	$(665, 980), (461, 802), (-268, 220)$
$(0, 1), (0, 2), (1, 2)$	$(885, -820), (105, -709), (331, -878)$
$(0, 3), (0, 4), (1, 4)$	$(18, 29), (13, 21), (11, 18)$
$(0, 5), (0, 6), (1, 6)$	$(25, 29), (20, 23), (20, 19)$
$(1, -4), (1, -3), (2, -3)$	$(-6, 3), (-8, 3), (-7, 0)$
$(1, -3), (1, -2), (2, -2)$	$(-3, 2), (-4, 2), (-5, -2)$
$(1, -2), (1, -1), (2, -1)$	$(490, -57), (-964, -90), (-470, 719)$
$(1, -1), (1, 0), (2, 0)$	$(135, -343), (663, 459), (-360, -833)$
$(1, 0), (1, 1), (2, 1)$	$(378, 401), (725, 599), (-644, -120)$
$(1, 1), (1, 2), (2, 2)$	$(-539, -128), (927, -74), (-893, 585)$
$(1, 2), (1, 3), (2, 3)$	$(58, -23), (-165, 22), (38, 37)$
$(1, 4), (1, 5), (2, 5)$	$(5, 7), (4, 6), (6, 4)$
$(1, 5), (1, 6), (2, 6)$	$(-18, -24), (-15, -21), (-16, -18)$
$(2, -4), (2, -3), (3, -3)$	$(-1, 4), (-1, 6), (2, 8)$
$(2, -3), (2, -2), (3, -2)$	$(824, 279), (126, 667), (-496, 631)$
$(2, -2), (2, -1), (3, -1)$	$(-144, 207), (-200, 608), (-184, 381)$
$(2, -1), (2, 0), (3, 0)$	$(-2, -5), (1, 0), (2, 2)$
$(2, 0), (2, 1), (3, 1)$	$(-2, -6), (2, -4), (0, -2)$
$(2, 2), (2, 3), (3, 3)$	$(-264, -47), (-27, 835), (819, -785)$
$(2, 3), (2, 4), (3, 4)$	$(301, 153), (26, 211), (-38, 583)$
$(2, 4), (2, 5), (3, 5)$	$(559, 683), (453, 808), (316, 548)$
$(2, 6), (2, 7), (3, 7)$	$(-13, -24), (-12, -21), (-9, -21)$
$(2, 8), (2, 9), (3, 9)$	$(-93, -144), (-84, -131), (-81, -123)$
$(3, -3), (3, -2), (4, -2)$	$(-969, -776), (-203, -143), (-557, -212)$
$(3, -2), (3, -1), (4, -1)$	$(158, 208), (109, 934), (316, -805)$
$(3, -1), (3, 0), (4, 0)$	$(6, 6), (3, 0), (2, 0)$
$(3, 0), (3, 1), (4, 1)$	$(-7, -6), (-6, -2), (-4, -2)$
$(3, 1), (3, 2), (4, 2)$	$(4, 10), (1, 8), (2, 6)$
$(3, 2), (3, 3), (4, 3)$	$(-6, -12), (0, -12), (-4, -8)$
$(3, 4), (3, 5), (4, 5)$	$(53, 31), (-8, -24), (28, -21)$
$(3, 5), (3, 6), (4, 6)$	$(-875, -950), (136, -455), (-651, -416)$
$(3, 8), (3, 9), (4, 9)$	$(-61, -101), (-56, -92), (-52, -88)$
$(3, 9), (3, 10), (4, 10)$	$(120, 190), (110, 175), (106, 166)$
$(3, 10), (3, 11), (4, 11)$	$(141, 220), (130, 204), (126, 194)$
$(4, -4), (4, -3), (5, -3)$	$(-52, -18), (-142, -102), (26, -7)$
$(4, -1), (4, 0), (5, 0)$	$(0, -12), (4, -8), (3, -6)$
$(4, 0), (4, 1), (5, 1)$	$(13, 8), (12, 3), (9, 3)$
$(4, 1), (4, 2), (5, 2)$	$(-16, -18), (-14, -12), (-11, -11)$

Alap-hármas	Nemtriviális periodikus elem
(4, 2), (4, 3), (5, 3)	(-21, -30), (-18, -23), (-15, -21)
(4, 3), (4, 4), (5, 4)	(-4, -12), (0, -12), (-3, -9)
(4, 7), (4, 8), (5, 8)	(2070, 524), (4407, -7851), (-2507, 1074)
(4, 9), (4, 10), (5, 10)	(20, 30), (18, 28), (20, 25)
(4, 10), (4, 11), (5, 11)	(-91, -151), (-85, -140), (-80, -135)
(4, 11), (4, 12), (5, 12)	(174, 276), (162, 258), (157, 247)
(4, 12), (4, 13), (5, 13)	(199, 312), (186, 293), (181, 281)
(5, -4), (5, -3), (6, -3)	(-53, 183), (-176, -28), (-867, -965)
(5, -3), (5, -2), (6, -2)	(41, -53), (628, 244), (54, -110)
(5, -2), (5, -1), (6, -1)	(13, 5), (10, -2), (8, -2)
(5, -1), (5, 0), (6, 0)	(0, -20), (5, -15), (4, -12)
(5, 0), (5, 1), (6, 1)	(10, 31), (4, 24), (4, 20)
(5, 2), (5, 3), (6, 3)	(7, 29), (2, 26), (4, 22)
(5, 3), (5, 4), (6, 4)	(36, 52), (32, 43), (28, 40)
(5, 4), (5, 5), (6, 5)	(25, 45), (20, 40), (20, 36)
(5, 5), (5, 6), (6, 6)	(-34, -56), (-29, -50), (-28, -46)
(5, 7), (5, 8), (6, 8)	(-350, 280), (99, 157), (202, -21)
(5, 8), (5, 9), (6, 9)	(-2684, 2542), (2925, -2239), (-96, -3189)
(5, 11), (5, 12), (6, 12)	(-42, -72), (-40, -67), (-36, -66)
(5, 12), (5, 13), (6, 13)	(-211, -338), (-198, -318), (-192, -306)
(5, 13), (5, 14), (6, 14)	(238, 378), (224, 357), (218, 344)
(6, -6), (6, -5), (7, -5)	(17, -9), (19, -8), (36, 23)
(6, -3), (6, -2), (7, -2)	(-28, -24), (-12, 4), (-10, 4)
(6, -2), (6, -1), (7, -1)	(10, -21), (15, -17), (13, -14)
(6, -1), (6, 0), (7, 0)	(0, -30), (6, -24), (5, -20)
(6, 4), (6, 5), (7, 5)	(25, 55), (19, 50), (20, 45)
(6, 5), (6, 6), (7, 6)	(-66, -102), (-60, -90), (-55, -85)
(6, 6), (6, 7), (7, 7)	(-79, -126), (-72, -113), (-67, -107)
(6, 7), (6, 8), (7, 8)	(-56, -88), (-64, -72), (-48, -76)
(6, 12), (6, 13), (7, 13)	(-60, -99), (-57, -93), (-45, -96)
(6, 13), (6, 14), (7, 14)	(154, 252), (146, 238), (140, 231)
(6, 14), (6, 15), (7, 15)	(281, 450), (266, 427), (259, 413)
(6, 15), (6, 16), (7, 16)	(-312, -496), (-296, -472), (-289, -457)
(7, -6), (7, -5), (8, -5)	(1041, -896), (1041, -580), (-370, 45)
(7, -3), (7, -2), (8, -2)	(24, 2), (21, -6), (18, -6)
(7, -2), (7, -1), (8, -1)	(-31, -19), (-26, -8), (-22, -6)
(7, 6), (7, 7), (8, 7)	(-49, -91), (-42, -84), (-42, -78)
(7, 7), (7, 8), (8, 8)	(-62, -106), (-55, -98), (-54, -92)
(7, 8), (7, 9), (8, 9)	(75, 123), (68, 114), (66, 108)
(7, 12), (7, 13), (8, 13)	(1527, 2194), (6278, 17575), (5053, 7753)
(7, 14), (7, 15), (8, 15)	(-166, -268), (-157, -254), (-152, -246)
(7, 15), (7, 16), (8, 16)	(-200, -328), (-191, -312), (-184, -304)
(7, 16), (7, 17), (8, 17)	(361, 578), (344, 552), (336, 536)
(8, -6), (8, -5), (9, -5)	(513, -246), (6, 437), (623, -588)
(8, -5), (8, -4), (9, -4)	(-979, 546), (544, 419), (560, -290)
(8, -4), (8, -3), (9, -3)	(-29, 7), (-27, 14), (-24, 13)
(8, -3), (8, -2), (9, -2)	(26, -34), (32, -30), (29, -26)
(8, 7), (8, 8), (9, 8)	(-64, -120), (-56, -112), (-56, -105)
(8, 8), (8, 9), (9, 9)	(79, 137), (71, 128), (70, 121)
(8, 9), (8, 10), (9, 10)	(-94, -156), (-86, -146), (-84, -139)
(8, 10), (8, 11), (9, 11)	(68, 109), (65, 101), (61, 98)
(8, 12), (8, 13), (9, 13)	(-386, -837), (359, -79), (733, 393)
(8, 13), (8, 14), (9, 14)	(-9816, 10150), (28755, -30913), (-11519, 1354)
(8, 16), (8, 17), (9, 17)	(-233, -379), (-223, -362), (-216, -353)
(9, -8), (9, -7), (10, -7)	(-24, 13), (-26, 12), (-30, 2)
(9, -4), (9, -3), (10, -3)	(39, -3), (36, -12), (32, -12)
(9, 9), (9, 10), (10, 10)	(98, 172), (89, 162), (88, 154)

Alap-hármas	Nemtriviális periodikus elem
(9, 10), (9, 11), (10, 11)	(-115, -193), (-106, -182), (-104, -174)
(9, 11), (9, 12), (10, 12)	(132, 216), (123, 204), (120, 196)
(10, -5), (10, -4), (11, -4)	(46, -14), (44, -22), (40, -21)
(10, 11), (10, 12), (11, 12)	(-138, -234), (-128, -222), (-126, -213)
(10, 12), (10, 13), (11, 13)	(157, 259), (147, 246), (144, 237)
(10, 13), (10, 14), (11, 14)	(110, 176), (106, 166), (101, 162)
(11, -10), (11, -9), (12, -9)	(144, -93), (148, -98), (138, -96)
(11, -6), (11, -5), (12, -5)	(-25, 30), (-32, 22), (-30, 20)
(11, -5), (11, -4), (12, -4)	(-68, 58), (-75, 55), (-70, 50)
(11, 12), (11, 13), (12, 13)	(163, 279), (152, 266), (150, 256)
(11, 13), (11, 14), (12, 14)	(-184, -306), (-173, -292), (-170, -282)
(11, 14), (11, 15), (12, 15)	(-205, -335), (-194, -320), (-190, -310)
(11, 15), (11, 16), (12, 16)	(-280, -452), (-270, -430), (-260, -420)
(12, -10), (12, -9), (13, -9)	(-162, 101), (-167, 105), (-157, 102)
(12, -9), (12, -8), (13, -8)	(-133, 3313), (-2406, -4250), (1199, 848)
(12, -6), (12, -5), (13, -5)	(90, -67), (97, -65), (91, -60)
(12, 14), (12, 15), (13, 15)	(-213, -357), (-201, -342), (-198, -331)
(12, 15), (12, 16), (13, 16)	(-388, -624), (-372, -596), (-361, -581)
(12, 16), (12, 17), (13, 17)	(-421, -680), (-404, -651), (-393, -635)
(13, -9), (13, -8), (14, -8)	(86, -576), (-87, 124), (139, -494)
(13, -8), (13, -7), (14, -7)	(1098, 442), (-2154, -11726), (-1312, 898)
(13, -7), (13, -6), (14, -6)	(114, -78), (121, -77), (114, -72)
(13, 16), (13, 17), (14, 17)	(176, 269), (172, 256), (164, 252)
(14, -12), (14, -11), (15, -11)	(-220, 141), (-225, 147), (-213, 144)
(14, -11), (14, -10), (15, -10)	(-130, 80), (-134, 82), (-130, 75)
(14, -8), (14, -7), (15, -7)	(-77, -21), (-49, 28), (-46, 27)
(14, -7), (14, -6), (15, -6)	(-126, 92), (-134, 90), (-127, 84)
(15, -8), (15, -7), (16, -7)	(-154, 105), (-162, 104), (-154, 98)
(16, -9), (16, -8), (17, -8)	(-120, 64), (-120, 72), (-114, 69)
(16, -8), (16, -7), (17, -7)	(-121, 47), (-119, 58), (-112, 57)

A.3. Az (a, b) , $(a - 1, b)$, $(a - 1, b + 1)$ alap-hármas-konstrukció esete

Alap-hármas	Nemtriviális periodikus elem
(-15, 7), (-16, 7), (-16, 8)	(112, -57), (105, -56), (105, -49)
(-15, 8), (-16, 8), (-16, 9)	(114, -69), (108, -66), (106, -62)
(-15, 11), (-16, 11), (-16, 12)	(162, -97), (157, -90), (151, -91)
(-14, 7), (-15, 7), (-15, 8)	(-98, 56), (-92, 54), (-91, 49)
(-14, 10), (-15, 10), (-15, 11)	(54, -32), (55, -25), (50, -30)
(-13, 6), (-14, 6), (-14, 7)	(127, -84), (120, -78), (114, -78)
(-13, 7), (-14, 7), (-14, 8)	(66, -40), (62, -38), (64, -30)
(-13, 8), (-14, 8), (-14, 9)	(1664, -1504), (2305, -785), (-328, 1908)
(-12, -15), (-13, -15), (-13, -14)	(-354, -558), (-342, -544), (-357, -570)
(-12, 6), (-13, 6), (-13, 7)	(-114, 72), (-107, 67), (-102, 66)
(-12, 7), (-13, 7), (-13, 8)	(-1174, 18), (3923, 26944), (915, 488)
(-12, 8), (-13, 8), (-13, 9)	(-196, -344), (-43, -83), (100, 408)
(-12, 9), (-13, 9), (-13, 10)	(-110, 66), (-106, 60), (-101, 61)
(-11, -15), (-12, -15), (-12, -14)	(-198, -331), (-195, -320), (-205, -335)
(-11, -14), (-12, -14), (-12, -13)	(303, 479), (292, 466), (306, 490)
(-11, -13), (-12, -13), (-12, -12)	(-277, -431), (-266, -419), (-279, -442)
(-11, 5), (-12, 5), (-12, 6)	(60, -31), (55, -30), (55, -25)

Alap-hármas	Nemtriviális periodikus elem
$(-10, -14), (-11, -14), (-11, -13)$	$(58, 112), (62, 105), (66, 110)$
$(-10, -13), (-11, -13), (-11, -12)$	$(-150, -256), (-148, -246), (-157, -259)$
$(-10, -12), (-11, -12), (-11, -11)$	$(232, 362), (222, 351), (234, 372)$
$(-10, 4), (-11, 4), (-11, 5)$	$(50, -20), (45, -20), (46, -14)$
$(-10, 5), (-11, 5), (-11, 6)$	$(30, -20), (28, -18), (25, -20)$
$(-9, -12), (-10, -12), (-10, -11)$	$(126, 213), (124, 204), (132, 216)$
$(-9, -10), (-10, -10), (-10, -9)$	$(-171, -261), (-162, -252), (-172, -270)$
$(-9, -9), (-10, -9), (-10, -8)$	$(153, 225), (144, 217), (153, 234)$
$(-9, 4), (-10, 4), (-10, 5)$	$(-40, 21), (-36, 20), (-36, 16)$
$(-9, 7), (-10, 7), (-10, 8)$	$(-68, 41), (-65, 36), (-61, 37)$
$(-8, -13), (-9, -13), (-9, -12)$	$(7396, 12436), (-38420, -170), (-5354, -25)$
$(-8, -11), (-9, -11), (-9, -10)$	$(-34, -70), (-38, -64), (-41, -68)$
$(-8, -10), (-9, -10), (-9, -9)$	$(-88, -154), (-87, -146), (-94, -156)$
$(-8, -9), (-9, -9), (-9, -8)$	$(-72, -136), (-72, -128), (-79, -137)$
$(-8, -7), (-9, -7), (-9, -6)$	$(-106, -146), (-98, -140), (-105, -154)$
$(-8, 3), (-9, 3), (-9, 4)$	$(32, -12), (28, -12), (29, -7)$
$(-8, 5), (-9, 5), (-9, 6)$	$(398, -565), (1247, 1460), (935, 526)$
$(-7, -14), (-8, -14), (-8, -13)$	$(-18573, -2983), (-610, 2068), (-14557, -445)$
$(-7, -13), (-8, -13), (-8, -12)$	$(-315, 213), (-134, 9), (-488, 115)$
$(-7, -9), (-8, -9), (-8, -8)$	$(-19, -51), (-24, -45), (-27, -48)$
$(-7, -8), (-8, -8), (-8, -7)$	$(-105, -161), (-98, -154), (-106, -168)$
$(-7, -7), (-8, -7), (-8, -6)$	$(-42, -91), (-43, -84), (-49, -91)$
$(-7, -6), (-8, -6), (-8, -5)$	$(-79, -107), (-72, -102), (-78, -114)$
$(-7, 2), (-8, 2), (-8, 3)$	$(29, -26), (26, -22), (22, -24)$
$(-7, 3), (-8, 3), (-8, 4)$	$(24, -13), (21, -12), (21, -9)$
$(-7, 4), (-8, 4), (-8, 5)$	$(129, 338), (832, 220), (-159, -47)$
$(-7, 5), (-8, 5), (-8, 6)$	$(758, -82), (-942, -285), (-847, -128)$
$(-7, 6), (-8, 6), (-8, 7)$	$(48, -27), (46, -22), (42, -24)$
$(-6, -15), (-7, -15), (-7, -14)$	$(-168, -274), (-162, -266), (-169, -281)$
$(-6, -14), (-7, -14), (-7, -13)$	$(88, 144), (84, 140), (56, 168)$
$(-6, -8), (-7, -8), (-7, -7)$	$(-12, 44), (14, 26), (16, 28)$
$(-6, -7), (-7, -7), (-7, -6)$	$(-42, -78), (-42, -72), (-47, -79)$
$(-6, -5), (-7, -5), (-7, -4)$	$(-18, -56), (-20, -50), (-25, -55)$
$(-6, -4), (-7, -4), (-7, -3)$	$(-48, -54), (-42, -51), (-46, -60)$
$(-6, 1), (-7, 1), (-7, 2)$	$(16, -22), (14, -18), (10, -21)$
$(-6, 2), (-7, 2), (-7, 3)$	$(-18, 6), (-15, 6), (-16, 2)$
$(-6, 5), (-7, 5), (-7, 6)$	$(8, -6), (2, -14), (7, -5)$
$(-5, -14), (-6, -14), (-6, -13)$	$(140, 231), (134, 224), (140, 238)$
$(-5, -13), (-6, -13), (-6, -12)$	$(-126, -205), (-121, -198), (-127, -211)$
$(-5, -8), (-6, -8), (-6, -7)$	$(3527, -380), (7179, 81), (7672, 4569)$
$(-5, -6), (-6, -6), (-6, -5)$	$(5, 25), (10, 20), (12, 22)$
$(-5, -5), (-6, -5), (-6, -4)$	$(20, 45), (21, 40), (25, 45)$
$(-5, -4), (-6, -4), (-6, -3)$	$(37, 47), (32, 44), (36, 52)$
$(-5, -3), (-6, -3), (-6, -2)$	$(0, 31), (3, 26), (7, 29)$
$(-5, -2), (-6, -2), (-6, -1)$	$(-27, -17), (-22, -16), (-24, -22)$
$(-5, -1), (-6, -1), (-6, 0)$	$(25, 5), (20, 5), (21, 10)$
$(-5, 1), (-6, 1), (-6, 2)$	$(14, 1), (11, 0), (13, 5)$
$(-5, 2), (-6, 2), (-6, 3)$	$(5, -2), (4, -2), (6, 2)$
$(-5, 3), (-6, 3), (-6, 4)$	$(-52, 557), (697, -305), (973, -662)$
$(-4, -14), (-5, -14), (-5, -13)$	$(218, 344), (212, 331), (226, 350)$
$(-4, -12), (-5, -12), (-5, -11)$	$(102, 168), (97, 162), (102, 174)$
$(-4, -11), (-5, -11), (-5, -10)$	$(34, 56), (32, 54), (31, 60)$
$(-4, -9), (-5, -9), (-5, -8)$	$(1333, -3990), (-2497, 4238), (2414, 2128)$
$(-4, -8), (-5, -8), (-5, -7)$	$(-143, -498), (-42, 1), (83, -123)$
$(-4, -4), (-5, -4), (-5, -3)$	$(12, 28), (13, 24), (16, 28)$
$(-4, -3), (-5, -3), (-5, -2)$	$(-22, -26), (-18, -24), (-21, -30)$
$(-4, -2), (-5, -2), (-5, -1)$	$(18, 14), (14, 13), (16, 18)$

Alap-hármas	Nemtriviális periodikus elem
$(-4, -1), (-5, -1), (-5, 0)$	$(4, 20), (4, 16), (8, 21)$
$(-4, 0), (-5, 0), (-5, 1)$	$(-16, 4), (-12, 3), (-12, 0)$
$(-4, 1), (-5, 1), (-5, 2)$	$(-8, 2), (-6, 2), (-7, -1)$
$(-4, 2), (-5, 2), (-5, 3)$	$(-65, 76), (44, 151), (29, -23)$
$(-4, 3), (-5, 3), (-5, 4)$	$(-1, 31), (-17, 9), (60, -12)$
$(-4, 4), (-5, 4), (-5, 5)$	$(22, -12), (21, -8), (18, -10)$
$(-3, -13), (-4, -13), (-4, -12)$	$(-181, -281), (-176, -269), (-189, -286)$
$(-3, -12), (-4, -12), (-4, -11)$	$(157, 247), (152, 236), (164, 252)$
$(-3, -10), (-4, -10), (-4, -9)$	$(-45, -70), (-44, -66), (-50, -70)$
$(-3, -5), (-4, -5), (-4, -4)$	$(29, 346), (1871, -427), (-1216, -920)$
$(-3, -3), (-4, -3), (-4, -2)$	$(-6, -15), (-7, -12), (-9, -15)$
$(-3, -2), (-4, -2), (-4, -1)$	$(11, 11), (8, 10), (10, 14)$
$(-3, -1), (-4, -1), (-4, 0)$	$(6, -9), (3, -6), (1, -7)$
$(-3, 0), (-4, 0), (-4, 1)$	$(-3, 6), (-2, 4), (0, 6)$
$(-3, 2), (-4, 2), (-4, 3)$	$(44, -3), (73, 25), (79, -86)$
$(-2, -11), (-3, -11), (-3, -10)$	$(-126, -194), (-122, -184), (-133, -198)$
$(-2, -9), (-3, -9), (-3, -8)$	$(52, 88), (48, 84), (51, 93)$
$(-2, -8), (-3, -8), (-3, -7)$	$(-16, -28), (-14, -27), (-12, -32)$
$(-2, -6), (-3, -6), (-3, -5)$	$(-508, 64), (55, -466), (118, 38)$
$(-2, -5), (-3, -5), (-3, -4)$	$(-55, -70), (-15, 49), (70, 55)$
$(-2, -3), (-3, -3), (-3, -2)$	$(-418, -285), (-666, 440), (-26, 84)$
$(-2, -1), (-3, -1), (-3, 0)$	$(2, -4), (0, -2), (-1, -3)$
$(-2, 0), (-3, 0), (-3, 1)$	$(-4, 2), (-2, 1), (-2, 0)$
$(-2, 1), (-3, 1), (-3, 2)$	$(-137, -935), (888, -783), (-834, -79)$
$(-2, 2), (-3, 2), (-3, 3)$	$(-270, 20), (-355, 532), (952, 425)$
$(-1, -9), (-2, -9), (-2, -8)$	$(81, 123), (78, 115), (87, 126)$
$(-1, -7), (-2, -7), (-2, -6)$	$(30, 51), (27, 48), (29, 55)$
$(-1, -6), (-2, -6), (-2, -5)$	$(3, 6), (2, 6), (-6, 12)$
$(-1, -4), (-2, -4), (-2, -3)$	$(-875, -1088), (-439, 187), (216, -99)$
$(-1, -3), (-2, -3), (-2, -2)$	$(-980, -443), (709, -174), (964, -345)$
$(-1, -2), (-2, -2), (-2, -1)$	$(983, -269), (925, 433), (-127, -675)$
$(-1, -1), (-2, -1), (-2, 0)$	$(-5, 5), (-4, -15), (6, -5)$
$(-1, 0), (-2, 0), (-2, 1)$	$(-393, -791), (-933, -972), (-840, 439)$
$(-1, 1), (-2, 1), (-2, 2)$	$(913, -233), (359, 474), (883, -794)$
$(-1, 2), (-2, 2), (-2, 3)$	$(3, 0), (6, 6), (2, 0)$
$(0, -6), (-1, -6), (-1, -5)$	$(18, 34), (15, 32), (16, 38)$
$(0, -5), (-1, -5), (-1, -4)$	$(14, 24), (12, 22), (13, 27)$
$(0, -3), (-1, -3), (-1, -2)$	$(-8, 2), (160, -19), (56, -26)$
$(0, -2), (-1, -2), (-1, -1)$	$(-500, 184), (908, 963), (-604, 747)$
$(0, -1), (-1, -1), (-1, 0)$	$(839, 542), (646, -592), (267, -544)$
$(0, 1), (-1, 1), (-1, 2)$	$(-811, -544), (-897, 522), (546, 813)$
$(0, 2), (-1, 2), (-1, 3)$	$(2, -3), (-1, -1), (-1, -1)$
$(0, 3), (-1, 3), (-1, 4)$	$(7, 0), (6, 3), (4, 1)$
$(1, -4), (0, -4), (0, -3)$	$(6, 13), (4, 12), (4, 16)$
$(1, -3), (0, -3), (0, -2)$	$(1, 3), (0, 3), (-3, 6)$
$(1, -2), (0, -2), (0, -1)$	$(-909, -615), (558, -269), (944, -920)$
$(1, 1), (0, 1), (0, 2)$	$(-898, 939), (-200, 793), (-651, 471)$
$(1, 2), (0, 2), (0, 3)$	$(-836, 577), (270, -875), (986, -715)$
$(1, 4), (0, 4), (0, 5)$	$(13, 8), (10, 12), (8, 10)$
$(2, -3), (1, -3), (1, -2)$	$(-4, -6), (-3, -4), (-6, -8)$
$(2, -2), (1, -2), (1, -1)$	$(-915, -54), (-662, -857), (412, 8)$
$(2, -1), (1, -1), (1, 0)$	$(449, -231), (-577, 668), (-697, 448)$
$(2, 0), (1, 0), (1, 1)$	$(343, 630), (944, 882), (606, 42)$
$(2, 1), (1, 1), (1, 2)$	$(17, 8), (-5, 4), (0, 5)$
$(2, 2), (1, 2), (1, 3)$	$(-146, 179), (-16, 90), (-158, -342)$
$(2, 3), (1, 3), (1, 4)$	$(-29, 65), (-181, 352), (-306, -7)$
$(2, 5), (1, 5), (1, 6)$	$(-10, 30), (10, 20), (9, 17)$

Alap-hármas	Nemtriviális periodikus elem
(3, -3), (2, -3), (2, -2)	(-4, 2), (-5, 3), (-6, 4)
(3, -2), (2, -2), (2, -1)	(696, 443), (152, -650), (-28, -209)
(3, -1), (2, -1), (2, 0)	(-329, -681), (-319, 829), (-209, -291)
(3, 0), (2, 0), (2, 1)	(-2, -3), (-4, -6), (-2, -2)
(3, 2), (2, 2), (2, 3)	(-96, -516), (898, -755), (-193, -139)
(3, 3), (2, 3), (2, 4)	(-343, -979), (-277, -145), (998, 809)
(3, 5), (2, 5), (2, 6)	(353, 321), (1119, 815), (1221, -177)
(3, 7), (2, 7), (2, 8)	(-65, -101), (-68, -109), (-61, -98)
(3, 9), (2, 9), (2, 10)	(-99, -147), (-102, -157), (-93, -144)
(4, -4), (3, -4), (3, -3)	(4, -8), (6, -7), (4, -12)
(4, -3), (3, -3), (3, -2)	(-722, -383), (307, -57), (-967, -825)
(4, -2), (3, -2), (3, -1)	(86, -827), (750, -860), (-668, 149)
(4, -1), (3, -1), (3, 0)	(-2, 0), (-4, -2), (-3, 1)
(4, 0), (3, 0), (3, 1)	(-4, -2), (-6, -3), (-6, 0)
(4, 1), (3, 1), (3, 2)	(2, 6), (2, 8), (-1, 7)
(4, 2), (3, 2), (3, 3)	(6, 8), (8, 9), (14, 2)
(4, 4), (3, 4), (3, 5)	(305, -326), (-166, -746), (459, 8)
(4, 5), (3, 5), (3, 6)	(357, 914), (-203, -785), (238, 997)
(4, 9), (3, 9), (3, 10)	(60, 106), (66, 110), (61, 101)
(4, 11), (3, 11), (3, 12)	(-148, -224), (-152, -236), (-141, -220)
(5, -5), (4, -5), (4, -4)	(8, -12), (11, -12), (11, -16)
(5, -3), (4, -3), (4, -2)	(-73, -62), (65, -128), (-116, -109)
(5, -1), (4, -1), (4, 0)	(-3, 6), (-3, 9), (-6, 7)
(5, 0), (4, 0), (4, 1)	(-3, -12), (-4, -16), (0, -12)
(5, 1), (4, 1), (4, 2)	(0, 11), (-1, 14), (-5, 13)
(5, 2), (4, 2), (4, 3)	(-15, -21), (-18, -24), (-16, -18)
(5, 3), (4, 3), (4, 4)	(9, 12), (11, 13), (12, 9)
(5, 8), (4, 8), (4, 9)	(-3447, -2791), (5670, 566), (-2249, 7404)
(5, 10), (4, 10), (4, 11)	(55, 80), (54, 86), (50, 80)
(5, 12), (4, 12), (4, 13)	(-181, -281), (-186, -294), (-174, -276)
(5, 13), (4, 13), (4, 14)	(207, 317), (212, 331), (199, 312)
(6, -5), (5, -5), (5, -4)	(-12, 10), (-14, 10), (-13, 14)
(6, -4), (5, -4), (5, -3)	(90, -276), (-637, -767), (211, 146)
(6, -3), (5, -3), (5, -2)	(-875, 39), (324, -572), (-210, 176)
(6, -2), (5, -2), (5, -1)	(-8, 2), (-11, 0), (-10, 4)
(6, -1), (5, -1), (5, 0)	(-4, 12), (-4, 16), (-8, 13)
(6, 3), (5, 3), (5, 4)	(12, 28), (12, 32), (7, 29)
(6, 4), (5, 4), (5, 5)	(-36, -56), (-40, -61), (-36, -52)
(6, 5), (5, 5), (5, 6)	(10, 18), (10, 20), (5, 20)
(6, 7), (5, 7), (5, 8)	(4750, 1499), (-1182, -3223), (-2575, 2556)
(6, 8), (5, 8), (5, 9)	(-143, 61), (-59, -111), (165, 430)
(6, 12), (5, 12), (5, 13)	(-114, -192), (-121, -198), (-114, -186)
(6, 14), (5, 14), (5, 15)	(246, 384), (252, 399), (238, 378)
(7, -3), (6, -3), (6, -2)	(7, -5), (6, -9), (9, -6)
(7, -2), (6, -2), (6, -1)	(-14, -1), (-18, -4), (-16, 2)
(7, 5), (6, 5), (6, 6)	(30, 55), (31, 60), (25, 55)
(7, 6), (6, 6), (6, 7)	(-67, -107), (-72, -114), (-66, -102)
(7, 7), (6, 7), (6, 8)	(5, 7), (6, 7), (19, -2)
(7, 13), (6, 13), (6, 14)	(21, -77), (-28, -49), (-27, -46)
(7, 14), (6, 14), (6, 15)	(154, 259), (162, 266), (154, 252)
(7, 16), (6, 16), (6, 17)	(321, 503), (328, 520), (312, 496)
(8, -6), (7, -6), (7, -5)	(-14, 8), (-15, 9), (-18, 6)
(8, -5), (7, -5), (7, -4)	(410, -143), (1409, 1166), (549, 762)
(8, -3), (7, -3), (7, -2)	(24, -18), (26, -22), (30, -21)
(8, 7), (7, 7), (7, 8)	(-54, -92), (-56, -98), (-49, -91)
(8, 8), (7, 8), (7, 9)	(66, 108), (69, 114), (62, 106)
(8, 13), (7, 13), (7, 14)	(-6144, -3206), (3618, -12558), (5603, -4764)

Alap-hármas	Nemtriviális periodikus elem
(8, 15), (7, 15), (7, 16)	(64, 120), (72, 120), (69, 114)
(9, -7), (8, -7), (8, -6)	(48, -27), (51, -30), (55, -29)
(9, -6), (8, -6), (8, -5)	(-983, 423), (368, -724), (-962, -93)
(9, -5), (8, -5), (8, -4)	(219, 767), (585, 252), (-536, -897)
(9, -4), (8, -4), (8, -3)	(-24, 13), (-28, 12), (-28, 16)
(9, -3), (8, -3), (8, -2)	(26, -3), (31, 0), (29, -7)
(9, 8), (8, 8), (8, 9)	(-70, -121), (-72, -128), (-64, -120)
(9, 9), (8, 9), (8, 10)	(-139, -223), (-146, -233), (-137, -216)
(9, 10), (8, 10), (8, 11)	(37, 61), (38, 64), (32, 62)
(9, 12), (8, 12), (8, 13)	(-18179, -28284), (-27196, -19946), (-4239, -3446)
(9, 13), (8, 13), (8, 14)	(-304, -1512), (108, -159), (-419, 305)
(10, -4), (9, -4), (9, -3)	(12, -20), (10, -27), (16, -20)
(10, 10), (9, 10), (9, 11)	(-104, -174), (-107, -182), (-98, -172)
(10, 11), (9, 11), (9, 12)	(76, 120), (80, 124), (78, 115)
(11, -8), (10, -8), (10, -7)	(-27, 14), (-28, 16), (-32, 12)
(11, -5), (10, -5), (10, -4)	(40, -21), (45, -20), (45, -25)
(11, 12), (10, 12), (10, 13)	(144, 237), (148, 246), (138, 234)
(11, 13), (10, 13), (10, 14)	(-162, -263), (-167, -272), (-157, -259)
(12, -9), (11, -9), (11, -8)	(-84, 48), (-88, 52), (-93, 51)
(12, -6), (11, -6), (11, -5)	(-20, 10), (-25, 5), (-22, 12)
(12, -5), (11, -5), (11, -4)	(50, -20), (56, -18), (55, -25)
(12, 13), (11, 13), (11, 14)	(170, 282), (174, 292), (163, 279)
(12, 14), (11, 14), (11, 15)	(-120, -190), (-125, -195), (-122, -184)
(12, 15), (11, 15), (11, 16)	(260, 420), (268, 432), (260, 410)
(13, -8), (12, -8), (12, -7)	(-28, -56), (-4845, 3111), (2026, 1997)
(13, -6), (12, -6), (12, -5)	(-60, 31), (-66, 30), (-66, 36)
(13, 12), (12, 12), (12, 13)	(-277, -431), (-288, -444), (-276, -420)
(13, 15), (12, 15), (12, 16)	(-220, -361), (-225, -372), (-213, -357)
(13, 16), (12, 16), (12, 17)	(242, 393), (248, 404), (236, 388)
(14, -10), (13, -10), (13, -9)	(44, -22), (45, -25), (50, -20)
(14, -9), (13, -9), (13, -8)	(2369, 1041), (1994, -1438), (412, 2474)
(14, -8), (13, -8), (13, -7)	(-3, -351), (70, -5), (-1711, -654)
(14, -7), (13, -7), (13, -6)	(-72, 42), (-78, 42), (-79, 47)
(14, 14), (13, 14), (13, 15)	(-354, -558), (-366, -573), (-352, -546)
(15, -11), (14, -11), (14, -10)	(130, -75), (135, -80), (141, -79)
(15, -8), (14, -8), (14, -7)	(-93, 59), (-86, 82), (-102, 64)
(15, -7), (14, -7), (14, -6)	(84, -43), (91, -42), (91, -49)
(16, -11), (15, -11), (15, -10)	(86, -54), (90, -56), (91, -60)
(16, -8), (15, -8), (15, -7)	(-98, 56), (-105, 56), (-106, 62)

A.4. Az (a, b) , $(a, b + 1)$, $(a - 1, b + 1)$ alap-hármas-konstrukció esete

Alap-hármas	Nemtriviális periodikus elem
(-15, 7), (-15, 8), (-16, 8)	(-106, 62), (-105, 56), (-98, 56)
(-15, 10), (-15, 11), (-16, 11)	(60, -31), (56, -34), (54, -32)
(-14, 7), (-14, 8), (-15, 8)	(-102, 64), (-86, 82), (-93, 59)
(-14, 10), (-14, 11), (-15, 11)	(-220, 141), (-215, 135), (-205, 130)
(-13, -15), (-13, -14), (-14, -14)	(-352, -546), (-366, -573), (-354, -558)
(-13, 6), (-13, 7), (-14, 7)	(32, -15), (36, -6), (30, -12)
(-13, 7), (-13, 8), (-14, 8)	(-1216, -1444), (43, -151), (-365, 331)
(-13, 8), (-13, 9), (-14, 9)	(-2131, -1708), (-3945, -3339), (3702, -2889)

Alap-hármas	Nemtriviális periodikus elem
$(-13, 9), (-13, 10), (-14, 10)$	$(70, -50), (70, -45), (66, -44)$
$(-12, 7), (-12, 8), (-13, 8)$	$(-1780, -2121), (-1060, 5796), (1072, -556)$
$(-11, -15), (-11, -14), (-12, -14)$	$(-122, -184), (-125, -195), (-120, -190)$
$(-11, -14), (-11, -13), (-12, -13)$	$(279, 442), (292, 466), (282, 452)$
$(-11, 4), (-11, 5), (-12, 5)$	$(-80, 55), (-74, 56), (-70, 50)$
$(-11, 5), (-11, 6), (-12, 6)$	$(22, -12), (25, -5), (20, -10)$
$(-11, 8), (-11, 9), (-12, 9)$	$(144, -93), (140, -88), (132, -84)$
$(-10, -14), (-10, -13), (-11, -13)$	$(-157, -259), (-167, -272), (-162, -263)$
$(-10, -13), (-10, -12), (-11, -12)$	$(234, 372), (246, 394), (237, 381)$
$(-10, 4), (-10, 5), (-11, 5)$	$(45, -25), (45, -20), (40, -21)$
$(-10, 7), (-10, 8), (-11, 8)$	$(32, -12), (28, -16), (27, -14)$
$(-9, -12), (-9, -11), (-10, -11)$	$(-115, -193), (-124, -204), (-120, -196)$
$(-9, -11), (-9, -10), (-10, -10)$	$(-98, -172), (-107, -182), (-104, -174)$
$(-9, -8), (-9, -7), (-10, -7)$	$(-121, -168), (-128, -184), (-120, -176)$
$(-9, 3), (-9, 4), (-10, 4)$	$(52, -36), (47, -37), (44, -32)$
$(-8, -14), (-8, -13), (-9, -13)$	$(141, -1019), (155, -416), (-406, -930)$
$(-8, -13), (-8, -12), (-9, -12)$	$(16, -359), (3538, 20154), (-11780, -1852)$
$(-8, -11), (-8, -10), (-9, -10)$	$(-64, -124), (-76, -128), (-74, -122)$
$(-8, -10), (-8, -9), (-9, -9)$	$(-137, -216), (-146, -233), (-139, -223)$
$(-8, 2), (-8, 3), (-9, 3)$	$(-29, 7), (-31, 0), (-26, 3)$
$(-8, 3), (-8, 4), (-9, 4)$	$(-28, 16), (-28, 12), (-24, 13)$
$(-8, 4), (-8, 5), (-9, 5)$	$(208, -674), (-944, 646), (580, -581)$
$(-8, 5), (-8, 6), (-9, 6)$	$(-833, -970), (862, 641), (-590, 232)$
$(-8, 6), (-8, 7), (-9, 7)$	$(29, -26), (30, -21), (27, -21)$
$(-7, -14), (-7, -13), (-8, -13)$	$(4247, -19489), (-13574, 12136), (3954, 6368)$
$(-7, -9), (-7, -8), (-8, -8)$	$(62, 106), (69, 114), (66, 108)$
$(-7, -8), (-7, -7), (-8, -7)$	$(-49, -91), (-56, -98), (-54, -92)$
$(-7, 2), (-7, 3), (-8, 3)$	$(-30, 21), (-26, 22), (-24, 18)$
$(-7, 4), (-7, 5), (-8, 5)$	$(-415, 616), (-86, -1261), (517, 542)$
$(-7, 5), (-7, 6), (-8, 6)$	$(-18, 6), (-15, 9), (-14, 8)$
$(-6, -15), (-6, -14), (-7, -14)$	$(-154, -252), (-162, -266), (-154, -259)$
$(-6, -14), (-6, -13), (-7, -13)$	$(27, 46), (28, 49), (-21, 77)$
$(-6, -8), (-6, -7), (-7, -7)$	$(4, -34), (-14, -26), (-14, -24)$
$(-6, -7), (-6, -6), (-7, -6)$	$(36, 66), (42, 72), (40, 67)$
$(-6, -6), (-6, -5), (-7, -5)$	$(-25, -55), (-31, -60), (-30, -55)$
$(-6, 1), (-6, 2), (-7, 2)$	$(16, -2), (18, 4), (14, 1)$
$(-6, 2), (-6, 3), (-7, 3)$	$(15, -9), (15, -6), (12, -7)$
$(-6, 5), (-6, 6), (-7, 6)$	$(38, -16), (34, -18), (32, -15)$
$(-5, -15), (-5, -14), (-6, -14)$	$(-238, -378), (-252, -399), (-246, -384)$
$(-5, -13), (-5, -12), (-6, -12)$	$(-42, -72), (-44, -77), (-36, -78)$
$(-5, -9), (-5, -8), (-6, -8)$	$(190, 268), (54, -91), (81, -360)$
$(-5, -8), (-5, -7), (-6, -7)$	$(-1908, 2599), (1514, -5816), (5180, -3461)$
$(-5, -6), (-5, -5), (-6, -5)$	$(-25, -45), (-30, -50), (-28, -46)$
$(-5, -5), (-5, -4), (-6, -4)$	$(20, 16), (19, 21), (16, 20)$
$(-5, -4), (-5, -3), (-6, -3)$	$(7, 29), (12, 32), (12, 28)$
$(-5, 0), (-5, 1), (-6, 1)$	$(8, -13), (4, -16), (4, -12)$
$(-5, 1), (-5, 2), (-6, 2)$	$(10, -4), (11, 0), (8, -2)$
$(-5, 2), (-5, 3), (-6, 3)$	$(-296, -856), (491, -301), (-456, 837)$
$(-5, 3), (-5, 4), (-6, 4)$	$(-73, -71), (229, -326), (-26, 125)$
$(-5, 4), (-5, 5), (-6, 5)$	$(-14, -1), (-10, 4), (-10, 2)$
$(-4, -14), (-4, -13), (-5, -13)$	$(199, 312), (212, 331), (207, 317)$
$(-4, -13), (-4, -12), (-5, -12)$	$(174, 276), (186, 294), (181, 281)$
$(-4, -12), (-4, -11), (-5, -11)$	$(60, 91), (65, 97), (67, 90)$
$(-4, -11), (-4, -10), (-5, -10)$	$(-50, -80), (-54, -86), (-55, -80)$
$(-4, -9), (-4, -8), (-5, -8)$	$(5556, -3816), (-8808, 8825), (2788, 2237)$
$(-4, -4), (-4, -3), (-5, -3)$	$(9, 21), (13, 24), (12, 21)$
$(-4, -3), (-4, -2), (-5, -2)$	$(16, 18), (18, 24), (15, 21)$

Alap-hármas	Nemtriviális periodikus elem
$(-4, -2), (-4, -1), (-5, -1)$	$(-5, 13), (-1, 14), (0, 11)$
$(-4, 0), (-4, 1), (-5, 1)$	$(-7, -1), (-9, -6), (-6, -3)$
$(-4, 2), (-4, 3), (-5, 3)$	$(100, 154), (-120, 135), (68, 27)$
$(-4, 4), (-4, 5), (-5, 5)$	$(-11, 16), (-11, 12), (-8, 12)$
$(-3, -12), (-3, -11), (-4, -11)$	$(-141, -220), (-152, -236), (-148, -224)$
$(-3, -11), (-3, -10), (-4, -10)$	$(-120, -190), (-130, -205), (-126, -194)$
$(-3, -10), (-3, -9), (-4, -9)$	$(-61, -101), (-66, -110), (-60, -106)$
$(-3, -6), (-3, -5), (-4, -5)$	$(84, -273), (41, -138), (725, -656)$
$(-3, -5), (-3, -4), (-4, -4)$	$(-324, -339), (-601, 113), (-377, 1048)$
$(-3, -3), (-3, -2), (-4, -2)$	$(-12, -8), (-10, -14), (-8, -12)$
$(-3, -2), (-3, -1), (-4, -1)$	$(-1, 7), (2, 8), (2, 6)$
$(-3, -1), (-3, 0), (-4, 0)$	$(0, -6), (-3, -9), (-2, -6)$
$(-3, 0), (-3, 1), (-4, 1)$	$(-4, 3), (-2, 4), (-2, 2)$
$(-3, 1), (-3, 2), (-4, 2)$	$(-147, -7), (712, 286), (-628, -387)$
$(-3, 2), (-3, 3), (-4, 3)$	$(123, -270), (185, 833), (-312, -504)$
$(-3, 3), (-3, 4), (-4, 4)$	$(-4, 12), (-6, 7), (-4, 8)$
$(-2, -10), (-2, -9), (-3, -9)$	$(93, 144), (102, 157), (99, 147)$
$(-2, -9), (-2, -8), (-3, -8)$	$(32, 44), (36, 48), (39, 42)$
$(-2, -8), (-2, -7), (-3, -7)$	$(37, 61), (41, 68), (36, 65)$
$(-2, -6), (-2, -5), (-3, -5)$	$(-1072, 567), (-807, -1226), (-150, 163)$
$(-2, -4), (-2, -3), (-3, -3)$	$(256, 510), (-163, -27), (656, 446)$
$(-2, -3), (-2, -2), (-3, -2)$	$(86, -237), (-294, 495), (-183, 611)$
$(-2, -1), (-2, 0), (-3, 0)$	$(2, -2), (0, -2), (0, -1)$
$(-2, 0), (-2, 1), (-3, 1)$	$(-512, -983), (502, 465), (983, -634)$
$(-2, 1), (-2, 2), (-3, 2)$	$(-772, -498), (827, 592), (390, 65)$
$(-2, 2), (-2, 3), (-3, 3)$	$(-3, 6), (-4, 3), (-3, 3)$
$(-1, -7), (-1, -6), (-2, -6)$	$(-6, -18), (-6, -21), (2, -24)$
$(-1, -6), (-1, -5), (-2, -5)$	$(-9, -17), (-10, -20), (10, -30)$
$(-1, -4), (-1, -3), (-2, -3)$	$(-426, -265), (-208, 12), (-31, -128)$
$(-1, -3), (-1, -2), (-2, -2)$	$(-90, -667), (119, -571), (-179, 724)$
$(-1, -2), (-1, -1), (-2, -1)$	$(1, 0), (0, 1), (-3, 0)$
$(-1, -1), (-1, 0), (-2, 0)$	$(-197, -834), (-574, 662), (709, -451)$
$(-1, 0), (-1, 1), (-2, 1)$	$(-276, 967), (-654, -345), (476, 381)$
$(-1, 1), (-1, 2), (-2, 2)$	$(151, -601), (38, 189), (-151, 478)$
$(-1, 2), (-1, 3), (-2, 3)$	$(8, -6), (6, -4), (4, -3)$
$(0, -7), (0, -6), (-1, -6)$	$(38, 54), (44, 62), (43, 55)$
$(0, -5), (0, -4), (-1, -4)$	$(18, 28), (22, 34), (21, 29)$
$(0, -3), (0, -2), (-1, -2)$	$(-352, 713), (-774, -597), (319, 227)$
$(0, -2), (0, -1), (-1, -1)$	$(318, 44), (798, -793), (917, 83)$
$(0, 1), (0, 2), (-1, 2)$	$(-984, 500), (-262, 363), (-273, -549)$
$(0, 2), (0, 3), (-1, 3)$	$(4, 6), (2, 4), (3, 5)$
$(0, 3), (0, 4), (-1, 4)$	$(12, 21), (9, 15), (11, 18)$
$(1, -4), (1, -3), (0, -3)$	$(-4, -1), (-6, -3), (-7, 0)$
$(1, -3), (1, -2), (0, -2)$	$(2, 3), (3, 5), (0, 5)$
$(1, -2), (1, -1), (0, -1)$	$(-518, -702), (279, -580), (675, -309)$
$(1, 0), (1, 1), (0, 1)$	$(35, 281), (-447, 805), (909, -344)$
$(1, 1), (1, 2), (0, 2)$	$(328, 221), (345, 60), (478, 640)$
$(1, 2), (1, 3), (0, 3)$	$(-39, -7), (137, 77), (-38, 13)$
$(1, 4), (1, 5), (0, 5)$	$(4, 15), (4, 11), (6, 12)$
$(1, 5), (1, 6), (0, 6)$	$(-16, -38), (-15, -32), (-18, -34)$
$(2, -3), (2, -2), (1, -2)$	$(-1, 2), (1, 6), (-2, 3)$
$(2, -2), (2, -1), (1, -1)$	$(375, -465), (-391, -167), (-333, 529)$
$(2, -1), (2, 0), (1, 0)$	$(-786, -4), (66, 333), (316, -248)$
$(2, 0), (2, 1), (1, 1)$	$(3, -6), (-14, 30), (9, -6)$
$(2, 1), (2, 2), (1, 2)$	$(-37, 344), (587, 57), (636, -668)$
$(2, 2), (2, 3), (1, 3)$	$(-854, 44), (763, -629), (829, -226)$
$(2, 3), (2, 4), (1, 4)$	$(16, 136), (335, -213), (-526, -557)$

Alap-hármas	Nemtriviális periodikus elem
(2, 5), (2, 6), (1, 6)	(6, -12), (-2, -6), (-3, -6)
(2, 6), (2, 7), (1, 7)	(29, 55), (27, 48), (30, 51)
(2, 8), (2, 9), (1, 9)	(-87, -126), (-78, -115), (-81, -123)
(3, -3), (3, -2), (2, -2)	(-1000, 565), (-364, 700), (614, 406)
(3, -2), (3, -1), (2, -1)	(-247, -423), (958, 908), (-820, -658)
(3, -1), (3, 0), (2, 0)	(-2, -2), (-1, 0), (-2, 0)
(3, 0), (3, 1), (2, 1)	(-1, -3), (0, -2), (2, -4)
(3, 2), (3, 3), (2, 3)	(391, 72), (333, -922), (-579, 702)
(3, 4), (3, 5), (2, 5)	(42, 49), (-13, -8), (1, -22)
(3, 5), (3, 6), (2, 6)	(155, 91), (354, 345), (605, -102)
(3, 7), (3, 8), (2, 8)	(-6, -15), (-6, -14), (-7, -14)
(3, 8), (3, 9), (2, 9)	(51, 93), (48, 84), (52, 88)
(3, 10), (3, 11), (2, 11)	(133, 198), (122, 184), (126, 194)
(4, -3), (4, -2), (3, -2)	(-109, -43), (-69, 78), (-46, -53)
(4, -1), (4, 0), (3, 0)	(0, -6), (2, -4), (3, -6)
(4, 0), (4, 1), (3, 1)	(-6, -13), (-3, -9), (-3, -12)
(4, 1), (4, 2), (3, 2)	(-10, -14), (-8, -10), (-11, -11)
(4, 2), (4, 3), (3, 3)	(6, 9), (5, 7), (9, 6)
(4, 4), (4, 5), (3, 5)	(1011, -126), (-1745, -445), (-421, 136)
(4, 9), (4, 10), (3, 10)	(-50, -70), (-44, -66), (-45, -70)
(4, 12), (4, 13), (3, 13)	(189, 286), (176, 269), (181, 281)
(5, -5), (5, -4), (4, -4)	(18, -10), (21, -8), (22, -12)
(5, -4), (5, -3), (4, -3)	(-90, 8), (19, -15), (4, 38)
(5, -3), (5, -2), (4, -2)	(31, -33), (65, 210), (13, -74)
(5, -2), (5, -1), (4, -1)	(7, 1), (6, -2), (8, -2)
(5, -1), (5, 0), (4, 0)	(12, 0), (12, -3), (16, -4)
(5, 0), (5, 1), (4, 1)	(-8, -21), (-4, -16), (-4, -20)
(5, 1), (5, 2), (4, 2)	(2, 16), (-1, 14), (-4, 18)
(5, 2), (5, 3), (4, 3)	(9, 21), (6, 18), (4, 22)
(5, 3), (5, 4), (4, 4)	(-12, -16), (-11, -13), (-16, -12)
(5, 7), (5, 8), (4, 8)	(282, -129), (-42, 14), (-112, -414)
(5, 8), (5, 9), (4, 9)	(1915, 1185), (-3208, -357), (-2430, -2874)
(5, 10), (5, 11), (4, 11)	(-91, -151), (-86, -140), (-90, -146)
(5, 11), (5, 12), (4, 12)	(72, 102), (65, 97), (66, 102)
(6, -6), (6, -5), (5, -5)	(9, -2), (10, -1), (10, -2)
(6, -4), (6, -3), (5, -3)	(3, -340), (-957, 611), (325, -807)
(6, -3), (6, -2), (5, -2)	(6, 2), (4, -2), (5, -2)
(6, -2), (6, -1), (5, -1)	(-21, 8), (-22, 11), (-27, 13)
(6, -1), (6, 0), (5, 0)	(0, -20), (4, -16), (5, -20)
(6, 0), (6, 1), (5, 1)	(-21, -10), (-20, -5), (-25, -5)
(6, 1), (6, 2), (5, 2)	(24, 22), (22, 16), (27, 17)
(6, 2), (6, 3), (5, 3)	(29, 36), (26, 29), (31, 31)
(6, 3), (6, 4), (5, 4)	(-36, -52), (-32, -44), (-37, -47)
(6, 4), (6, 5), (5, 5)	(-25, -45), (-21, -40), (-20, -45)
(6, 5), (6, 6), (5, 6)	(22, 34), (20, 30), (25, 30)
(6, 7), (6, 8), (5, 8)	(1660, 5403), (7056, -6291), (497, -3062)
(6, 12), (6, 13), (5, 13)	(43, 84), (44, 77), (47, 79)
(6, 13), (6, 14), (5, 14)	(-140, -238), (-134, -224), (-140, -231)
(6, 15), (6, 16), (5, 16)	(-298, -464), (-282, -442), (-289, -457)
(7, -6), (7, -5), (6, -5)	(7, -5), (2, -14), (8, -6)
(7, -3), (7, -2), (6, -2)	(16, -2), (15, -6), (18, -6)
(7, -2), (7, -1), (6, -1)	(10, -21), (14, -18), (16, -22)
(7, 3), (7, 4), (6, 4)	(46, 60), (42, 51), (48, 54)
(7, 4), (7, 5), (6, 5)	(25, 55), (20, 50), (18, 56)
(7, 5), (7, 6), (6, 6)	(66, 102), (60, 91), (66, 96)
(7, 6), (7, 7), (6, 7)	(-47, -79), (-42, -72), (-42, -78)
(7, 7), (7, 8), (6, 8)	(-44, -72), (-40, -66), (-32, -76)

Alap-hármas	Nemtriviális periodikus elem
(7, 13), (7, 14), (6, 14)	(56, 168), (84, 140), (88, 144)
(7, 14), (7, 15), (6, 15)	(169, 281), (162, 266), (168, 274)
(8, -7), (8, -6), (7, -6)	(-11, 4), (-12, 3), (-12, 4)
(8, -6), (8, -5), (7, -5)	(392, 879), (387, 687), (-139, -884)
(8, -5), (8, -4), (7, -4)	(716, -768), (-663, 306), (246, -529)
(8, -4), (8, -3), (7, -3)	(-12, -3), (-9, 3), (-11, 2)
(8, -3), (8, -2), (7, -2)	(-24, -2), (-22, 4), (-26, 3)
(8, 5), (8, 6), (7, 6)	(78, 114), (72, 102), (79, 107)
(8, 6), (8, 7), (7, 7)	(91, 140), (84, 127), (91, 133)
(8, 7), (8, 8), (7, 8)	(-62, -106), (-56, -98), (-56, -105)
(8, 8), (8, 9), (7, 9)	(-27, -48), (-24, -45), (-19, -51)
(8, 12), (8, 13), (7, 13)	(-431, 683), (443, -367), (-654, -705)
(8, 13), (8, 14), (7, 14)	(266, 14078), (-24383, 18920), (-36755, -14615)
(8, 15), (8, 16), (7, 16)	(72, 128), (72, 120), (75, 123)
(8, 16), (8, 17), (7, 17)	(144, 217), (135, 209), (137, 216)
(9, -6), (9, -5), (8, -5)	(-408, -330), (577, 1112), (-728, -666)
(9, -4), (9, -3), (8, -3)	(-29, 7), (-28, 12), (-32, 12)
(9, 6), (9, 7), (8, 7)	(105, 154), (98, 140), (106, 146)
(9, 7), (9, 8), (8, 8)	(-120, -184), (-112, -169), (-120, -176)
(9, 8), (9, 9), (8, 9)	(-79, -137), (-72, -128), (-72, -136)
(9, 9), (9, 10), (8, 10)	(94, 156), (87, 146), (88, 154)
(9, 10), (9, 11), (8, 11)	(27, 41), (26, 38), (36, 34)
(9, 12), (9, 13), (8, 13)	(13108, 18274), (15357, 21880), (8000, -11466)
(10, -8), (10, -7), (9, -7)	(-61, 37), (-65, 36), (-68, 41)
(10, -5), (10, -4), (9, -4)	(-52, 36), (-56, 36), (-61, 40)
(10, 8), (10, 9), (9, 9)	(153, 234), (144, 217), (153, 225)
(10, 9), (10, 10), (9, 10)	(-98, -172), (-90, -162), (-90, -171)
(10, 10), (10, 11), (9, 11)	(-193, -308), (-182, -289), (-191, -299)
(10, 11), (10, 12), (9, 12)	(132, 216), (124, 204), (126, 213)
(11, -6), (11, -5), (10, -5)	(25, -20), (28, -18), (30, -20)
(11, -5), (11, -4), (10, -4)	(-60, 46), (-65, 45), (-70, 50)
(11, 10), (11, 11), (10, 11)	(211, 330), (200, 310), (210, 320)
(11, 11), (11, 12), (10, 12)	(234, 372), (222, 351), (232, 362)
(11, 12), (11, 13), (10, 13)	(-157, -259), (-148, -246), (-150, -256)
(11, 13), (11, 14), (10, 14)	(-66, -110), (-62, -105), (-58, -112)
(12, -6), (12, -5), (11, -5)	(-55, 25), (-55, 30), (-60, 31)
(12, 11), (12, 12), (11, 12)	(-254, -396), (-242, -374), (-253, -385)
(12, 12), (12, 13), (11, 13)	(279, 442), (266, 419), (277, 431)
(12, 13), (12, 14), (11, 14)	(306, 490), (292, 466), (303, 479)
(12, 14), (12, 15), (11, 15)	(335, 540), (320, 515), (331, 529)
(12, 15), (12, 16), (11, 16)	(-86, -140), (-82, -134), (-79, -141)
(13, -10), (13, -9), (12, -9)	(-40, 21), (-46, 14), (-44, 22)
(13, -9), (13, -8), (12, -8)	(345, 456), (20, 114), (35, -51)
(13, -8), (13, -7), (12, -7)	(-710, -1066), (-23477, -31446), (2909, 3816)
(13, -7), (13, -6), (12, -6)	(-66, 36), (-67, 40), (-72, 42)
(13, 13), (13, 14), (12, 14)	(-328, -518), (-314, -493), (-326, -506)
(13, 14), (13, 15), (12, 15)	(357, 570), (342, 544), (354, 558)
(13, 16), (13, 17), (12, 17)	(-162, -259), (-156, -248), (-164, -252)
(14, -9), (14, -8), (13, -8)	(-103, -1218), (3658, 3081), (-2308, -1245)
(14, -8), (14, -7), (13, -7)	(49, -13), (43, -26), (46, -27)
(14, -7), (14, -6), (13, -6)	(-114, 78), (-120, 78), (-127, 84)
(14, 15), (14, 16), (13, 16)	(-412, -656), (-396, -628), (-409, -643)
(14, 16), (14, 17), (13, 17)	(445, 714), (428, 685), (441, 701)
(15, -11), (15, -10), (14, -10)	(130, -80), (135, -80), (140, -86)
(15, -8), (15, -7), (14, -7)	(91, -49), (92, -54), (98, -56)
(15, 16), (15, 17), (14, 17)	(-471, -748), (-454, -718), (-468, -734)
(16, -12), (16, -11), (15, -11)	(151, -91), (157, -90), (162, -97)

Alap-hármas	Nemtriviális periodikus elem
$(16, -9), (16, -8), (15, -8)$	$(62, -44), (66, -42), (69, -45)$
$(16, -8), (16, -7), (15, -7)$	$(-154, 105), (-161, 105), (-169, 112)$

B. Sűrű jegyhalmazzal számrendszert nem alkotó alap-hármasok

B.1. Az $(a, b), (a + 1, b), (a + 1, b + 1)$ alap-hármas-konstrukció esete

Alap-hármas	Nemtriviális periodikus elem
$(-6, -6), (-5, -6), (-5, -5)$	$(-14, 10), (-64, 41), (-20, 14)$
$(-6, -5), (-5, -5), (-5, -4)$	$(28, -20), (60, -40), (35, -25)$
$(-6, -4), (-5, -4), (-5, -3)$	$(-20, 4), (-31, 10), (-24, 4)$
$(-6, 1), (-5, 1), (-5, 2)$	$(2, -6), (2, -8), (-5, -18)$
$(-6, 2), (-5, 2), (-5, 3)$	$(-5, 6), (34, -22), (0, -6)$
$(-6, 3), (-5, 3), (-5, 4)$	$(-435, -891), (132, -405), (689, 241)$
$(-5, -4), (-4, -4), (-4, -3)$	$(-3, 6), (-12, 12), (-4, 8)$
$(-5, -3), (-4, -3), (-4, -2)$	$(-12, 3), (-21, 8), (-15, 3)$
$(-5, -2), (-4, -2), (-4, -1)$	$(11, -11), (18, -16), (12, -14)$
$(-5, -1), (-4, -1), (-4, 0)$	$(-6, 9), (-9, 12), (-5, 13)$
$(-5, 0), (-4, 0), (-4, 1)$	$(6, 3), (8, 4), (12, 12)$
$(-5, 3), (-4, 3), (-4, 4)$	$(-6, 2), (7, 2), (4, 14)$
$(-5, 4), (-4, 4), (-4, 5)$	$(25, 35), (10, 10), (6, 4)$
$(-4, -6), (-3, -6), (-3, -5)$	$(297, -7), (-532, -270), (87, 238)$
$(-4, -5), (-3, -5), (-3, -4)$	$(-11, 6), (0, -4), (-6, 4)$
$(-4, -3), (-3, -3), (-3, -2)$	$(-4, 4), (-36, 24), (-6, 6)$
$(-4, -2), (-3, -2), (-3, -1)$	$(8, -6), (19, -13), (10, -8)$
$(-4, -1), (-3, -1), (-3, 0)$	$(6, -2), (10, -4), (8, -1)$
$(-4, 0), (-3, 0), (-3, 1)$	$(0, 2), (0, 3), (6, 12)$
$(-4, 1), (-3, 1), (-3, 2)$	$(217, -252), (443, 92), (-414, 303)$
$(-4, 2), (-3, 2), (-3, 3)$	$(621, -857), (788, 74), (-971, 22)$
$(-3, -5), (-2, -5), (-2, -4)$	$(1, 1), (3, -4), (4, 3)$
$(-3, -4), (-2, -4), (-2, -3)$	$(4, 0), (-1, -2), (-3, 0)$
$(-3, -3), (-2, -3), (-2, -2)$	$(571, -8), (-50, -631), (-400, -82)$
$(-3, -1), (-2, -1), (-2, 0)$	$(1, 0), (3, -1), (2, 1)$
$(-3, 0), (-2, 0), (-2, 1)$	$(0, -1), (-3, 0), (1, 4)$
$(-3, 1), (-2, 1), (-2, 2)$	$(-199, -946), (348, 470), (-961, -785)$
$(-3, 2), (-2, 2), (-2, 3)$	$(207, 651), (-980, 962), (-120, -843)$
$(-2, -6), (-1, -6), (-1, -5)$	$(-26, 12), (-12, 3), (-18, 6)$
$(-2, -5), (-1, -5), (-1, -4)$	$(-18, 10), (-2, 0), (-4, 1)$
$(-2, -3), (-1, -3), (-1, -2)$	$(1, -1), (-1, 0), (1, 1)$
$(-2, -2), (-1, -2), (-1, -1)$	$(-319, 650), (785, 263), (86, -841)$
$(-2, -1), (-1, -1), (-1, 0)$	$(-760, -409), (-687, -508), (-113, -597)$
$(-2, 0), (-1, 0), (-1, 1)$	$(-748, 214), (81, 82), (-215, 12)$
$(-2, 1), (-1, 1), (-1, 2)$	$(-283, 163), (957, 636), (342, -137)$
$(-2, 2), (-1, 2), (-1, 3)$	$(-1, 2), (-3, 1), (-2, 1)$
$(-2, 3), (-1, 3), (-1, 4)$	$(-6, -12), (-3, -9), (-2, -6)$
$(-1, -4), (0, -4), (0, -3)$	$(9, -8), (2, -4), (4, -6)$
$(-1, -2), (0, -2), (0, -1)$	$(881, 257), (533, 592), (474, -160)$
$(-1, 1), (0, 1), (0, 2)$	$(-568, 27), (462, -350), (-462, 226)$

Alap-hármas	Nemtriviális periodikus elem
$(-1, 2), (0, 2), (0, 3)$	$(-1, 2), (-8, 6), (-2, 2)$
$(0, -3), (1, -3), (1, -2)$	$(2, 2), (2, 3), (4, 6)$
$(0, -2), (1, -2), (1, -1)$	$(676, -325), (918, 854), (425, -439)$
$(0, -1), (1, -1), (1, 0)$	$(-602, -948), (-191, 249), (-725, 667)$
$(0, 1), (1, 1), (1, 2)$	$(-4, -735), (99, 197), (-742, 161)$
$(0, 2), (1, 2), (1, 3)$	$(-739, -694), (-367, -653), (-321, -957)$
$(0, 4), (1, 4), (1, 5)$	$(-2, 6), (-11, 11), (-4, 6)$
$(1, -4), (2, -4), (2, -3)$	$(-10, 5), (-8, 3), (-11, 1)$
$(1, -3), (2, -3), (2, -2)$	$(-4, 2), (-3, 1), (-2, 4)$
$(1, -2), (2, -2), (2, -1)$	$(-772, 156), (-708, 730), (945, -898)$
$(1, -1), (2, -1), (2, 0)$	$(1, -1), (0, 0), (-1, -1)$
$(1, 0), (2, 0), (2, 1)$	$(713, -650), (834, -811), (-103, -74)$
$(1, 1), (2, 1), (2, 2)$	$(-463, -513), (-380, 903), (538, 177)$
$(1, 2), (2, 2), (2, 3)$	$(37, -904), (-13, 686), (51, -713)$
$(1, 3), (2, 3), (2, 4)$	$(8, 8), (-1, 1), (1, -5)$
$(1, 5), (2, 5), (2, 6)$	$(3, 0), (27, -15), (4, -1)$
$(1, 6), (2, 6), (2, 7)$	$(15, -3), (32, -14), (18, -6)$
$(2, -3), (3, -3), (3, -2)$	$(112, -56), (964, 191), (961, -806)$
$(2, -2), (3, -2), (3, -1)$	$(817, 833), (-344, -239), (-646, 10)$
$(2, -1), (3, -1), (3, 0)$	$(-435, -327), (-171, 774), (523, 810)$
$(2, 0), (3, 0), (3, 1)$	$(-4, -2), (-2, -1), (-2, 0)$
$(2, 1), (3, 1), (3, 2)$	$(-6, 2), (-2, 0), (-3, 1)$
$(2, 3), (3, 3), (3, 4)$	$(861, 322), (448, -734), (-924, 42)$
$(2, 4), (3, 4), (3, 5)$	$(-3, -1), (4, 5), (3, 3)$
$(2, 5), (3, 5), (3, 6)$	$(-224, 781), (211, 627), (418, 634)$
$(3, -2), (4, -2), (4, -1)$	$(1, 1), (8, -3), (0, -4)$
$(3, -1), (4, -1), (4, 0)$	$(-12, -21), (-3, -6), (-1, -3)$
$(3, 0), (4, 0), (4, 1)$	$(-9, -3), (-6, -2), (-6, 0)$
$(3, 1), (4, 1), (4, 2)$	$(11, 0), (7, 1), (8, -1)$
$(3, 2), (4, 2), (4, 3)$	$(-12, 3), (-6, 0), (-8, 2)$
$(3, 3), (4, 3), (4, 4)$	$(-42, 24), (-6, 2), (-12, 6)$
$(3, 5), (4, 5), (4, 6)$	$(1, -2), (3, -2), (2, 0)$
$(4, -5), (5, -5), (5, -4)$	$(-8, -6), (-10, -10), (-35, -50)$
$(4, -4), (5, -4), (5, -3)$	$(5, 4), (-7, 34), (-1, 7)$
$(4, -3), (5, -3), (5, -2)$	$(-1, 5), (2, 4), (-14, -3)$
$(4, -2), (5, -2), (5, -1)$	$(10, 14), (-2, -5), (0, -2)$
$(4, -1), (5, -1), (5, 0)$	$(-12, -8), (-8, -4), (-7, -1)$
$(4, 0), (5, 0), (5, 1)$	$(12, -16), (9, -12), (12, -12)$
$(4, 1), (5, 1), (5, 2)$	$(22, -4), (16, -2), (18, -5)$
$(4, 2), (5, 2), (5, 3)$	$(-32, 14), (-21, 8), (-26, 12)$
$(4, 3), (5, 3), (5, 4)$	$(-24, 20), (-12, 12), (-18, 15)$
$(4, 4), (5, 4), (5, 5)$	$(-28, 20), (-9, 8), (-16, 12)$
$(4, 5), (5, 5), (5, 6)$	$(-48, 28), (4, -4), (14, -10)$
$(5, -3), (6, -3), (6, -2)$	$(905, 514), (759, 650), (316, 532)$
$(5, -2), (6, -2), (6, -1)$	$(15, 16), (8, 6), (6, 2)$
$(5, 3), (6, 3), (6, 4)$	$(-44, 17), (-31, 10), (-37, 15)$
$(5, 4), (6, 4), (6, 5)$	$(-35, 30), (-20, 20), (-28, 24)$
$(5, 5), (6, 5), (6, 6)$	$(35, -15), (18, -5), (25, -10)$
$(5, 6), (6, 6), (6, 7)$	$(47, -31), (10, -8), (20, -14)$
$(6, -6), (7, -6), (7, -5)$	$(-2, 4), (-1, 5), (34, 62)$
$(6, -3), (7, -3), (7, -2)$	$(-42, -66), (-6, -8), (-3, -3)$
$(6, -2), (7, -2), (7, -1)$	$(-6, -28), (-2, -19), (2, -14)$
$(6, 5), (7, 5), (7, 6)$	$(48, -42), (30, -30), (40, -35)$
$(6, 6), (7, 6), (7, 7)$	$(-54, 24), (-32, 11), (-42, 18)$
$(7, -6), (8, -6), (8, -5)$	$(663, 415), (119, -802), (317, -14)$
$(7, -5), (8, -5), (8, -4)$	$(728, 240), (-504, -67), (-464, 112)$
$(7, -3), (8, -3), (8, -2)$	$(-20, -43), (-9, -24), (-3, -15)$

Alap-hármas	Nemtriviális periodikus elem
$(7, 7), (8, 7), (8, 8)$	$(77, -35), (50, -19), (63, -28)$

B.2. Az $(a, b), (a, b + 1), (a + 1, b + 1)$ alap-hármas-konstrukció esete

Alap-hármas	Nemtriviális periodikus elem
$(-6, -6), (-6, -5), (-5, -5)$	$(25, -10), (18, -5), (35, -15)$
$(-6, -5), (-6, -4), (-5, -4)$	$(28, -24), (20, -20), (35, -30)$
$(-6, -4), (-6, -3), (-5, -3)$	$(-37, 15), (-31, 10), (-44, 17)$
$(-6, 1), (-6, 2), (-5, 2)$	$(-6, -2), (-8, -6), (-15, -16)$
$(-6, 2), (-6, 3), (-5, 3)$	$(-16, 308), (18, -813), (528, -910)$
$(-5, -5), (-5, -4), (-4, -4)$	$(-16, 12), (-9, 8), (-28, 20)$
$(-5, -4), (-5, -3), (-4, -3)$	$(15, -3), (12, 0), (20, -4)$
$(-5, -2), (-5, -1), (-4, -1)$	$(-18, 5), (-16, 2), (-22, 4)$
$(-5, -1), (-5, 0), (-4, 0)$	$(-12, 0), (-12, -3), (-16, -4)$
$(-5, 0), (-5, 1), (-4, 1)$	$(6, -7), (4, -8), (4, -12)$
$(-5, 1), (-5, 2), (-4, 2)$	$(-2, -2), (-5, -7), (14, 24)$
$(-5, 2), (-5, 3), (-4, 3)$	$(-10, -7), (-3, -4), (-3, 2)$
$(-5, 3), (-5, 4), (-4, 4)$	$(7, -3), (10, 12), (-24, -16)$
$(-5, 4), (-5, 5), (-4, 5)$	$(35, 50), (10, 10), (8, 6)$
$(-4, -6), (-4, -5), (-3, -5)$	$(3, 0), (3, 17), (-4, 0)$
$(-4, -4), (-4, -3), (-3, -3)$	$(6, -3), (3, -1), (21, -12)$
$(-4, -3), (-4, -2), (-3, -2)$	$(10, -8), (6, -6), (15, -12)$
$(-4, -2), (-4, -1), (-3, -1)$	$(-9, 8), (-6, 7), (-11, 11)$
$(-4, -1), (-4, 0), (-3, 0)$	$(-6, 6), (-4, 6), (-6, 9)$
$(-4, 0), (-4, 1), (-3, 1)$	$(1, 3), (3, 6), (12, 21)$
$(-4, 1), (-4, 2), (-3, 2)$	$(-4, -4), (-2, -7), (0, 2)$
$(-3, -6), (-3, -5), (-2, -5)$	$(558, -22), (-361, -159), (-851, -669)$
$(-3, -5), (-3, -4), (-2, -4)$	$(2, -2), (4, -4), (0, 4)$
$(-3, -4), (-3, -3), (-2, -3)$	$(445, 71), (715, -541), (444, -71)$
$(-3, -2), (-3, -1), (-2, -1)$	$(4, -3), (2, -2), (8, -6)$
$(-3, -1), (-3, 0), (-2, 0)$	$(4, -2), (3, -1), (6, -2)$
$(-3, 0), (-3, 1), (-2, 1)$	$(38, 626), (153, -923), (980, 61)$
$(-3, 1), (-3, 2), (-2, 2)$	$(-867, 466), (925, 425), (-294, 848)$
$(-3, 2), (-3, 3), (-2, 3)$	$(-72, 369), (-144, -591), (478, -883)$
$(-2, -6), (-2, -5), (-1, -5)$	$(4, -1), (27, -15), (3, 0)$
$(-2, -4), (-2, -3), (-1, -3)$	$(-1, -4), (-1, 3), (4, -4)$
$(-2, -3), (-2, -2), (-1, -2)$	$(677, -211), (306, -934), (-540, -124)$
$(-2, -2), (-2, -1), (-1, -1)$	$(-632, 911), (643, 323), (65, -772)$
$(-2, -1), (-2, 0), (-1, 0)$	$(-719, 957), (795, 176), (-485, 54)$
$(-2, 0), (-2, 1), (-1, 1)$	$(-1, 1), (1, -1), (1, 0)$
$(-2, 1), (-2, 2), (-1, 2)$	$(752, 531), (-486, -587), (-52, 792)$
$(-2, 2), (-2, 3), (-1, 3)$	$(2, -4), (3, -1), (4, -2)$
$(-2, 3), (-2, 4), (-1, 4)$	$(-11, 1), (-8, 3), (-10, 5)$
$(-1, -5), (-1, -4), (0, -4)$	$(-10, 4), (-22, 11), (-8, 2)$
$(-1, -3), (-1, -2), (0, -2)$	$(-465, 578), (480, 102), (422, -824)$
$(-1, -2), (-1, -1), (0, -1)$	$(112, -241), (345, -687), (764, -410)$
$(-1, 0), (-1, 1), (0, 1)$	$(825, -190), (357, 941), (-745, -938)$
$(-1, 1), (-1, 2), (0, 2)$	$(721, 697), (836, -382), (-769, 674)$
$(-1, 2), (-1, 3), (0, 3)$	$(-4, -6), (-2, -3), (-2, -2)$
$(0, -4), (0, -3), (1, -3)$	$(-12, 9), (-21, 15), (-9, 8)$
$(0, -3), (0, -2), (1, -2)$	$(2, 0), (6, -2), (2, 1)$

Alap-hármas	Nemtriviális periodikus elem
(0, -2), (0, -1), (1, -1)	(737, -858), (47, -857), (112, 8)
(0, 1), (0, 2), (1, 2)	(-936, -68), (645, -242), (29, 413)
(0, 3), (0, 4), (1, 4)	(4, -6), (2, -4), (9, -8)
(1, -4), (1, -3), (2, -3)	(-2, -6), (-3, -9), (-6, -12)
(1, -3), (1, -2), (2, -2)	(2, 0), (3, 1), (8, 10)
(1, -2), (1, -1), (2, -1)	(-470, -771), (-938, 19), (937, -403)
(1, -1), (1, 0), (2, 0)	(-435, 723), (-611, -914), (-419, 730)
(1, 0), (1, 1), (2, 1)	(-13, 802), (-408, 50), (-504, 159)
(1, 1), (1, 2), (2, 2)	(-741, -601), (-424, -418), (-833, -400)
(1, 2), (1, 3), (2, 3)	(1, 1), (2, 0), (-1, -1)
(1, 4), (1, 5), (2, 5)	(4, -1), (2, 0), (18, -10)
(1, 5), (1, 6), (2, 6)	(24, -18), (15, -12), (38, -26)
(2, -3), (2, -2), (3, -2)	(945, -58), (-848, -474), (-861, 648)
(2, -2), (2, -1), (3, -1)	(931, -753), (-598, -106), (648, 30)
(2, -1), (2, 0), (3, 0)	(-3, 2), (1, 1), (-1, -1)
(2, 0), (2, 1), (3, 1)	(-2, -1), (-3, 1), (-1, 0)
(2, 2), (2, 3), (3, 3)	(534, -616), (-90, -639), (-990, -962)
(2, 3), (2, 4), (3, 4)	(3, 1), (-3, -5), (1, -1)
(2, 4), (2, 5), (3, 5)	(2, 2), (1, -5), (1, 0)
(2, 6), (2, 7), (3, 7)	(23, -16), (12, -9), (51, -33)
(3, -3), (3, -2), (4, -2)	(-139, -610), (-416, 976), (-176, 395)
(3, -2), (3, -1), (4, -1)	(-344, 800), (-602, 907), (-969, -907)
(3, -1), (3, 0), (4, 0)	(-6, -6), (-3, 0), (-2, 0)
(3, 0), (3, 1), (4, 1)	(1, -7), (4, -6), (2, -4)
(3, 1), (3, 2), (4, 2)	(-2, 6), (-6, 7), (-2, 4)
(3, 2), (3, 3), (4, 3)	(-21, 12), (-108, 66), (-14, 8)
(3, 4), (3, 5), (4, 5)	(5, -7), (4, -1), (-16, 4)
(3, 5), (3, 6), (4, 6)	(156, 440), (-629, 510), (411, 886)
(4, -5), (4, -4), (5, -4)	(6, 4), (10, 10), (25, 35)
(4, -4), (4, -3), (5, -3)	(-16, 8), (0, 6), (6, -1)
(4, -1), (4, 0), (5, 0)	(-12, -12), (-8, -4), (-6, -3)
(4, 0), (4, 1), (5, 1)	(-5, 13), (-9, 12), (-6, 9)
(4, 1), (4, 2), (5, 2)	(-12, 14), (-18, 16), (-11, 11)
(4, 2), (4, 3), (5, 3)	(-15, 3), (-21, 8), (-12, 3)
(4, 3), (4, 4), (5, 4)	(-12, 4), (-24, 12), (-9, 3)
(4, 4), (4, 5), (5, 5)	(-17, 9), (95, -60), (-10, 5)
(5, -4), (5, -3), (6, -3)	(-790, -393), (912, -746), (891, -435)
(5, -3), (5, -2), (6, -2)	(-3, 6), (-9, -16), (-2, -7)
(5, -2), (5, -1), (6, -1)	(5, 18), (-2, 8), (-2, 6)
(5, -1), (5, 0), (6, 0)	(0, -20), (5, -15), (4, -12)
(5, 3), (5, 4), (6, 4)	(28, -24), (41, -31), (24, -20)
(5, 4), (5, 5), (6, 5)	(-25, 10), (-40, 20), (-20, 8)
(5, 5), (5, 6), (6, 6)	(20, -14), (64, -41), (14, -10)
(5, 6), (5, 7), (6, 7)	(-19, 13), (18, -10), (-8, 6)
(6, -6), (6, -5), (7, -5)	(-3, -1), (-5, -4), (-40, -61)
(6, -3), (6, -2), (7, -2)	(-38, -64), (-2, -6), (-1, -4)
(6, -2), (6, -1), (7, -1)	(-11, -32), (-2, -19), (-1, -15)
(6, 3), (6, 4), (7, 4)	(-50, 18), (-60, 26), (-44, 17)
(6, 4), (6, 5), (7, 5)	(40, -35), (55, -43), (35, -30)
(6, 5), (6, 6), (7, 6)	(42, -18), (60, -30), (35, -15)
(6, 6), (6, 7), (7, 7)	(-21, 19), (-43, 32), (-16, 15)
(7, -6), (7, -5), (8, -5)	(-10, 16), (10, 9), (-5, 1)
(7, -3), (7, -2), (8, -2)	(-26, -28), (-15, -9), (-12, -6)
(7, 6), (7, 7), (8, 7)	(63, -28), (84, -42), (54, -24)
(7, 7), (7, 8), (8, 8)	(42, -34), (69, -50), (34, -28)

B.3. Az (a, b) , $(a - 1, b)$, $(a - 1, b + 1)$ alap-hármas-konstrukció esete

Alap-hármas	Nemtriviális periodikus elem
$(-6, -5), (-7, -5), (-7, -4)$	$(-78, 58), (-50, 40), (-40, 35)$
$(-6, 2), (-7, 2), (-7, 3)$	$(-6, -18), (-3, -12), (-12, -26)$
$(-6, 5), (-7, 5), (-7, 6)$	$(4, 2), (26, 38), (3, 1)$
$(-5, -6), (-6, -6), (-6, -5)$	$(135, -85), (30, -20), (20, -14)$
$(-5, -5), (-6, -5), (-6, -4)$	$(35, -30), (15, -17), (10, -15)$
$(-5, -4), (-6, -4), (-6, -3)$	$(44, -17), (28, -8), (24, -4)$
$(-5, 1), (-6, 1), (-6, 2)$	$(-1, -15), (0, -11), (-5, -18)$
$(-5, 2), (-6, 2), (-6, 3)$	$(8, 10), (4, 4), (36, 56)$
$(-5, 3), (-6, 3), (-6, 4)$	$(-309, -775), (290, 964), (-927, 600)$
$(-4, -5), (-5, -5), (-5, -4)$	$(-28, 20), (4, 0), (3, 1)$
$(-4, -4), (-5, -4), (-5, -3)$	$(68, -44), (23, -16), (16, -12)$
$(-4, -3), (-5, -3), (-5, -2)$	$(32, -14), (18, -6), (15, -3)$
$(-4, -2), (-5, -2), (-5, -1)$	$(26, -22), (16, -15), (12, -14)$
$(-4, -1), (-5, -1), (-5, 0)$	$(-12, 16), (-8, 12), (-5, 13)$
$(-4, 0), (-5, 0), (-5, 1)$	$(-4, 12), (-3, 9), (0, 12)$
$(-4, 1), (-5, 1), (-5, 2)$	$(6, 4), (4, 2), (8, 9)$
$(-4, 2), (-5, 2), (-5, 3)$	$(-5, -3), (-18, 14), (0, -1)$
$(-4, 3), (-5, 3), (-5, 4)$	$(4, 8), (1, -2), (-17, 3)$
$(-4, 4), (-5, 4), (-5, 5)$	$(6, 14), (23, 41), (4, 10)$
$(-3, -5), (-4, -5), (-4, -4)$	$(-2, -4), (-23, 9), (-18, 7)$
$(-3, -3), (-4, -3), (-4, -2)$	$(42, -27), (5, -4), (3, -3)$
$(-3, -2), (-4, -2), (-4, -1)$	$(-11, 11), (-4, 6), (-2, 6)$
$(-3, -1), (-4, -1), (-4, 0)$	$(-15, 6), (-9, 3), (-8, 1)$
$(-3, 0), (-4, 0), (-4, 1)$	$(3, -6), (2, -4), (0, -6)$
$(-3, 2), (-4, 2), (-4, 3)$	$(-1, 3), (-5, -6), (3, 5)$
$(-3, 4), (-4, 4), (-4, 5)$	$(-4, -16), (-9, -22), (-4, -13)$
$(-2, -6), (-3, -6), (-3, -5)$	$(448, 450), (648, 469), (486, 6)$
$(-2, -5), (-3, -5), (-3, -4)$	$(1, -1), (-4, -2), (7, -4)$
$(-2, -3), (-3, -3), (-3, -2)$	$(-20, -208), (644, 480), (-742, 410)$
$(-2, -1), (-3, -1), (-3, 0)$	$(8, -6), (2, -2), (1, -2)$
$(-2, 0), (-3, 0), (-3, 1)$	$(0, 2), (0, 1), (2, 4)$
$(-2, 1), (-3, 1), (-3, 2)$	$(578, 545), (26, 397), (160, 222)$
$(-2, 2), (-3, 2), (-3, 3)$	$(693, 636), (698, 380), (614, 799)$
$(-2, 3), (-3, 3), (-3, 4)$	$(3, 9), (7, 14), (3, 7)$
$(-1, -6), (-2, -6), (-2, -5)$	$(3, -3), (8, -6), (66, -42)$
$(-1, -5), (-2, -5), (-2, -4)$	$(-1, 2), (-19, 13), (4, -1)$
$(-1, -4), (-2, -4), (-2, -3)$	$(16, 13), (5, 6), (-2, -3)$
$(-1, -3), (-2, -3), (-2, -2)$	$(-87, -562), (-990, 638), (790, -557)$
$(-1, -2), (-2, -2), (-2, -1)$	$(969, 738), (189, 972), (98, 684)$
$(-1, -1), (-2, -1), (-2, 0)$	$(-3, 3), (-12, -5), (-3, -2)$
$(-1, 0), (-2, 0), (-2, 1)$	$(152, -679), (-76, -448), (129, -240)$
$(-1, 1), (-2, 1), (-2, 2)$	$(480, 783), (-206, -736), (880, -107)$
$(-1, 2), (-2, 2), (-2, 3)$	$(-4, 2), (-2, 2), (-2, 1)$
$(-1, 3), (-2, 3), (-2, 4)$	$(10, -5), (8, -2), (6, -3)$
$(0, -5), (-1, -5), (-1, -4)$	$(-10, 8), (-20, 14), (-47, 31)$
$(0, -3), (-1, -3), (-1, -2)$	$(7, 6), (0, -4), (-1, -4)$
$(0, -2), (-1, -2), (-1, -1)$	$(154, -20), (158, 286), (-680, -45)$
$(0, -1), (-1, -1), (-1, 0)$	$(84, 161), (612, 619), (-648, 542)$
$(0, 1), (-1, 1), (-1, 2)$	$(42, -190), (955, 873), (-895, -719)$
$(0, 2), (-1, 2), (-1, 3)$	$(6, -6), (0, -3), (0, -2)$

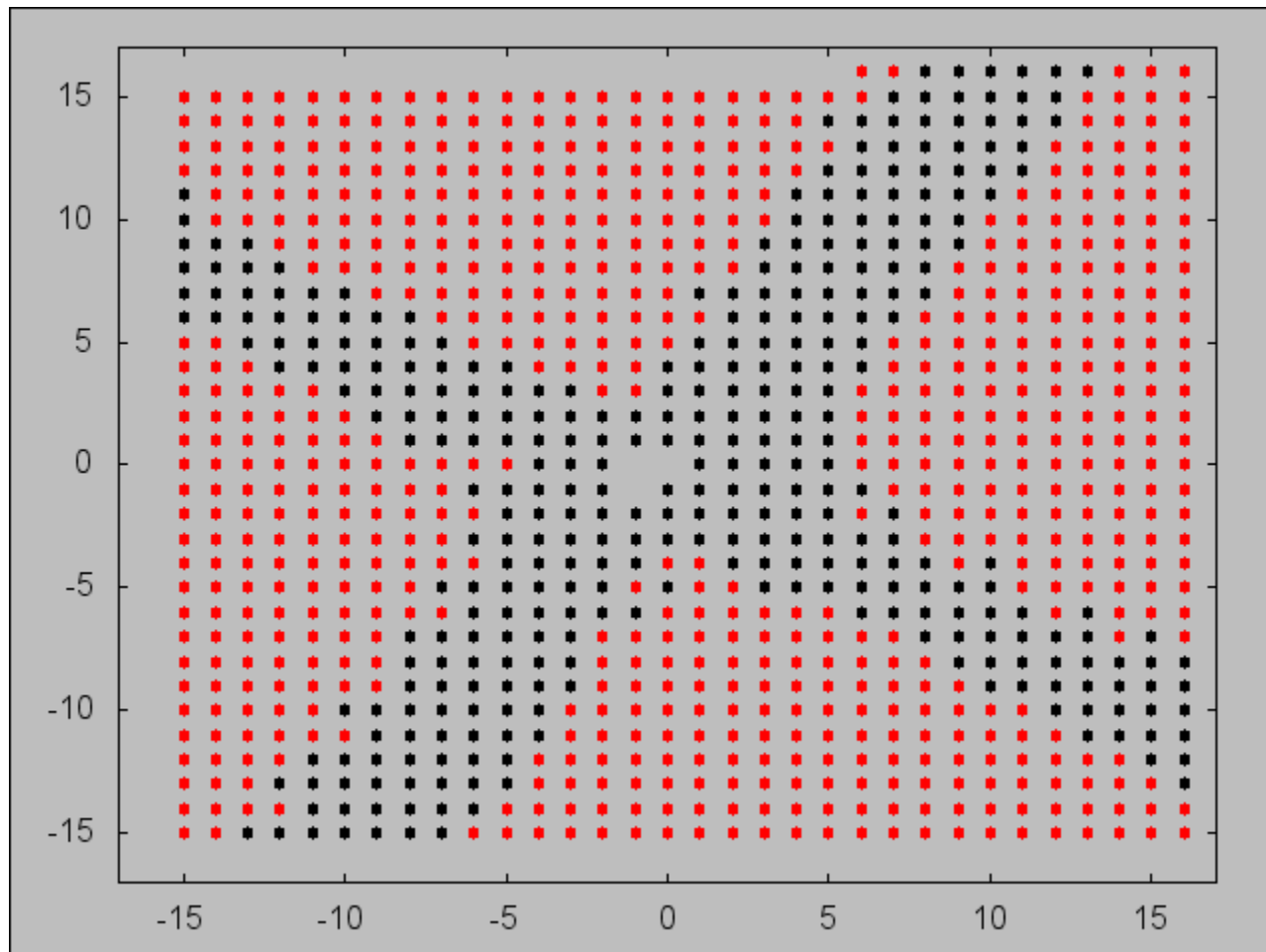
Alap-hármas	Nemtriviális periodikus elem
(0, 3), (-1, 3), (-1, 4)	(0, 6), (3, 6), (2, 4)
(0, 4), (-1, 4), (-1, 5)	(2, 11), (6, 11), (5, 8)
(1, -3), (0, -3), (0, -2)	(1, -2), (3, -3), (12, -9)
(1, -2), (0, -2), (0, -1)	(-234, -279), (-326, -189), (-958, 103)
(1, 1), (0, 1), (0, 2)	(-188, -714), (769, -490), (-420, -649)
(1, 2), (0, 2), (0, 3)	(126, -953), (-455, -47), (-13, -225)
(1, 4), (0, 4), (0, 5)	(-23, 18), (-6, 8), (-4, 6)
(2, -3), (1, -3), (1, -2)	(-2, -4), (-1, -3), (-2, -6)
(2, -2), (1, -2), (1, -1)	(-640, -452), (-165, 342), (801, -227)
(2, -1), (1, -1), (1, 0)	(474, -515), (-995, -446), (451, -753)
(2, 0), (1, 0), (1, 1)	(163, -890), (900, -966), (-482, 956)
(2, 1), (1, 1), (1, 2)	(1, 3), (1, -1), (1, 0)
(2, 2), (1, 2), (1, 3)	(15, 358), (-114, 24), (965, 15)
(2, 3), (1, 3), (1, 4)	(1, 1), (6, -14), (-14, -17)
(2, 5), (1, 5), (1, 6)	(64, -38), (6, -2), (4, -1)
(2, 6), (1, 6), (1, 7)	(28, -26), (9, -15), (6, -12)
(3, -3), (2, -3), (2, -2)	(-2, 0), (-2, 1), (-2, 2)
(3, -2), (2, -2), (2, -1)	(-158, -189), (-156, -483), (-890, -628)
(3, -1), (2, -1), (2, 0)	(469, -873), (928, -957), (-159, 453)
(3, 0), (2, 0), (2, 1)	(-1, 0), (-2, 0), (-4, 2)
(3, 2), (2, 2), (2, 3)	(317, -947), (725, -644), (-662, 655)
(3, 3), (2, 3), (2, 4)	(-182, 615), (-868, 532), (-744, -986)
(3, 5), (2, 5), (2, 6)	(-5, -4), (-2, 4), (-14, 6)
(4, -3), (3, -3), (3, -2)	(-929, -307), (813, -467), (794, 651)
(4, -2), (3, -2), (3, -1)	(755, 960), (596, 448), (-634, 429)
(4, -1), (3, -1), (3, 0)	(2, 2), (6, 8), (2, 1)
(4, 0), (3, 0), (3, 1)	(-2, 4), (-3, 6), (-6, 6)
(4, 1), (3, 1), (3, 2)	(-4, -2), (-6, -2), (-8, 1)
(4, 2), (3, 2), (3, 3)	(4, -4), (10, -8), (56, -36)
(4, 4), (3, 4), (3, 5)	(-3, -3), (10, -1), (-1, 4)
(4, 5), (3, 5), (3, 6)	(585, -626), (-926, 66), (-860, 692)
(5, -4), (4, -4), (4, -3)	(2, 5), (0, 2), (-10, -14)
(5, -3), (4, -3), (4, -2)	(3, 0), (3, -2), (-6, 3)
(5, -1), (4, -1), (4, 0)	(-6, -3), (-9, -6), (-7, -1)
(5, 0), (4, 0), (4, 1)	(6, -9), (8, -12), (12, -12)
(5, 1), (4, 1), (4, 2)	(-11, 11), (-16, 15), (-23, 18)
(5, 2), (4, 2), (4, 3)	(12, -3), (18, -6), (26, -12)
(5, 3), (4, 3), (4, 4)	(3, -6), (7, -9), (18, -15)
(5, 4), (4, 4), (4, 5)	(2, 1), (4, 0), (-16, 12)
(6, -5), (5, -5), (5, -4)	(8, 6), (6, 2), (15, 16)
(6, -4), (5, -4), (5, -3)	(-5, -5), (11, -16), (-4, -4)
(6, -3), (5, -3), (5, -2)	(238, 844), (-454, 584), (-626, -244)
(6, -2), (5, -2), (5, -1)	(-6, -4), (-11, -11), (-6, -2)
(6, -1), (5, -1), (5, 0)	(12, 8), (16, 12), (13, 5)
(6, 3), (5, 3), (5, 4)	(20, -4), (28, -8), (37, -15)
(6, 4), (5, 4), (5, 5)	(-8, 12), (-15, 17), (-28, 24)
(6, 5), (5, 5), (5, 6)	(14, -10), (30, -20), (95, -60)
(7, -3), (6, -3), (6, -2)	(4, 5), (27, 42), (3, 3)
(7, -2), (6, -2), (6, -1)	(1, 15), (4, 22), (-2, 14)
(7, 4), (6, 4), (6, 5)	(-35, 30), (-50, 40), (-68, 50)
(7, 6), (6, 6), (6, 7)	(31, -16), (54, -30), (102, -60)
(7, 7), (6, 7), (6, 8)	(4, -1), (9, -4), (101, -61)

B.4. Az (a, b) , $(a + 1, b)$, $(a + 1, b + 1)$ alap-hármas-konstrukció esete

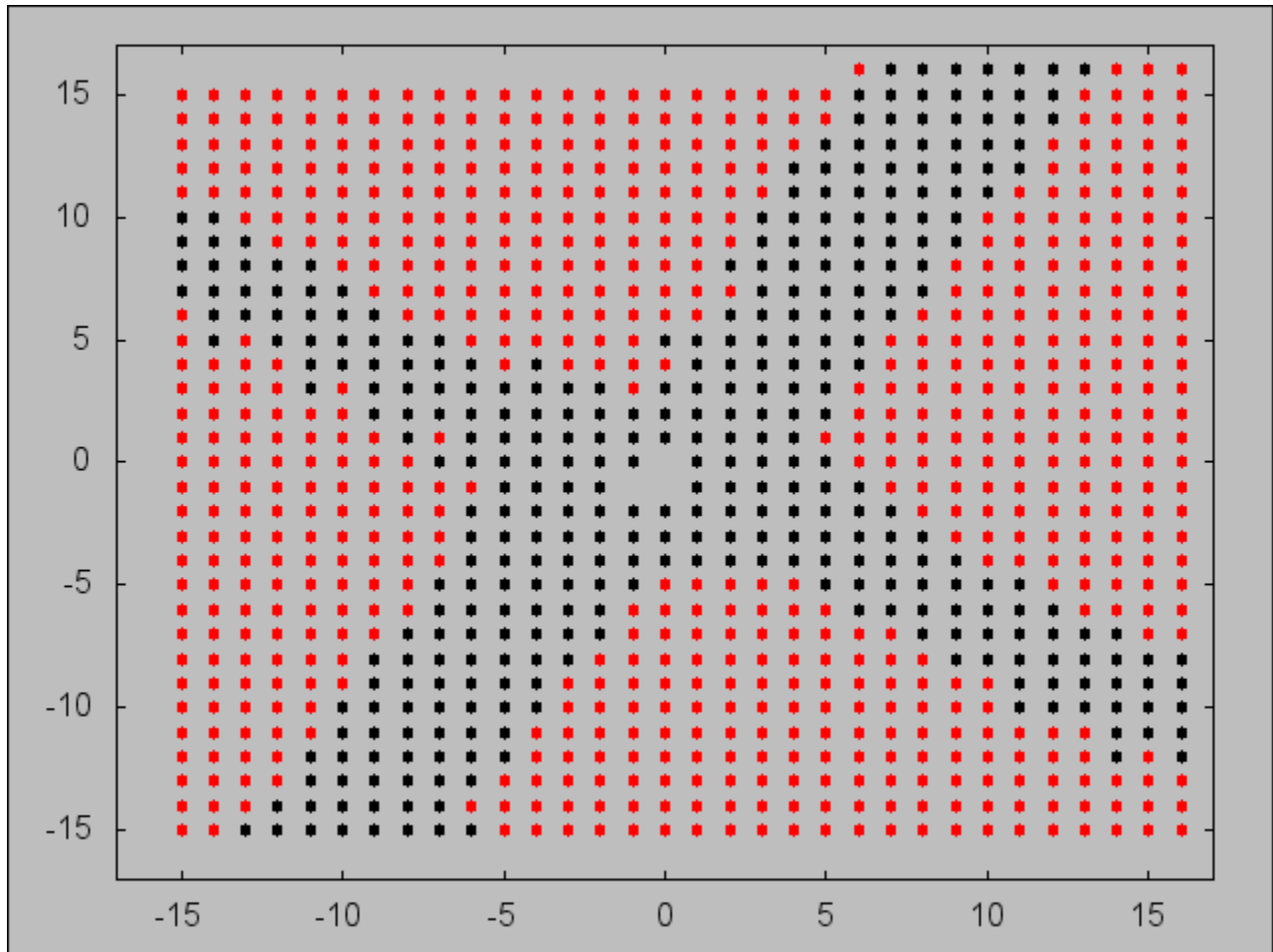
Alap-hármas	Nemtriviális periodikus elem
$(-6, -5), (-6, -4), (-7, -4)$	$(-68, 50), (-50, 40), (-35, 30)$
$(-6, 1), (-6, 2), (-7, 2)$	$(14, 12), (22, 26), (15, 16)$
$(-6, 2), (-6, 3), (-7, 3)$	$(-6, -6), (-54, -84), (-8, -10)$
$(-5, -6), (-5, -5), (-6, -5)$	$(-35, 25), (-10, 10), (-4, 6)$
$(-5, -5), (-5, -4), (-6, -4)$	$(28, -24), (15, -17), (8, -12)$
$(-5, -4), (-5, -3), (-6, -3)$	$(-37, 15), (-28, 8), (-20, 4)$
$(-5, 0), (-5, 1), (-6, 1)$	$(-8, 13), (-4, 16), (-4, 12)$
$(-5, 1), (-5, 2), (-6, 2)$	$(-2, -8), (-11, -22), (-4, -10)$
$(-5, 2), (-5, 3), (-6, 3)$	$(-138, 307), (754, -53), (-434, 562)$
$(-5, 3), (-5, 4), (-6, 4)$	$(2, 3), (-1, 7), (1, -3)$
$(-5, 4), (-5, 5), (-6, 5)$	$(16, 31), (2, 8), (6, 14)$
$(-4, -5), (-4, -4), (-5, -4)$	$(44, -28), (-8, 4), (-3, 1)$
$(-4, -4), (-4, -3), (-5, -3)$	$(33, -18), (16, -7), (9, -3)$
$(-4, -3), (-4, -2), (-5, -2)$	$(26, -12), (18, -6), (12, -3)$
$(-4, -2), (-4, -1), (-5, -1)$	$(18, -5), (15, -1), (11, 0)$
$(-4, -1), (-4, 0), (-5, 0)$	$(-12, 0), (-12, -4), (-9, -3)$
$(-4, 0), (-4, 1), (-5, 1)$	$(1, 8), (6, 15), (3, 9)$
$(-4, 1), (-4, 2), (-5, 2)$	$(-2, -2), (8, 14), (-3, -4)$
$(-4, 2), (-4, 3), (-5, 3)$	$(6, 5), (-1, -2), (1, -3)$
$(-4, 3), (-4, 4), (-5, 4)$	$(-10, -14), (0, 2), (2, 5)$
$(-3, -6), (-3, -5), (-4, -5)$	$(97, -361), (619, 336), (-824, -451)$
$(-3, -5), (-3, -4), (-4, -4)$	$(5, -4), (-4, -1), (5, -11)$
$(-3, -3), (-3, -2), (-4, -2)$	$(-56, 36), (-10, 8), (-4, 4)$
$(-3, -2), (-3, -1), (-4, -1)$	$(17, -9), (10, -4), (6, -2)$
$(-3, -1), (-3, 0), (-4, 0)$	$(-6, 0), (-6, -3), (-4, -2)$
$(-3, 0), (-3, 1), (-4, 1)$	$(-3, 1), (-4, -2), (-2, 0)$
$(-3, 1), (-3, 2), (-4, 2)$	$(-53, -213), (-63, 445), (612, 853)$
$(-3, 2), (-3, 3), (-4, 3)$	$(287, 637), (-164, 930), (-787, 785)$
$(-2, -6), (-2, -5), (-3, -5)$	$(9, 17), (14, -7), (-5, -3)$
$(-2, -4), (-2, -3), (-3, -3)$	$(-784, -690), (501, -560), (-805, -689)$
$(-2, -3), (-2, -2), (-3, -2)$	$(-733, 184), (414, 470), (360, 446)$
$(-2, -1), (-2, 0), (-3, 0)$	$(4, -2), (2, 0), (1, 0)$
$(-2, 0), (-2, 1), (-3, 1)$	$(180, -137), (179, -528), (-290, -457)$
$(-2, 1), (-2, 2), (-3, 2)$	$(205, 0), (440, 278), (589, -294)$
$(-2, 2), (-2, 3), (-3, 3)$	$(9, 12), (2, 1), (3, 3)$
$(-1, -6), (-1, -5), (-2, -5)$	$(4, -1), (6, -2), (64, -38)$
$(-1, -4), (-1, -3), (-2, -3)$	$(15, 17), (5, 5), (-2, 4)$
$(-1, -3), (-1, -2), (-2, -2)$	$(-850, -966), (-775, -245), (513, -198)$
$(-1, -2), (-1, -1), (-2, -1)$	$(0, 0), (1, 1), (2, -2)$
$(-1, -1), (-1, 0), (-2, 0)$	$(-159, 702), (-124, 29), (-187, -768)$
$(-1, 0), (-1, 1), (-2, 1)$	$(-193, 987), (-643, -113), (-194, -516)$
$(-1, 1), (-1, 2), (-2, 2)$	$(-243, 918), (-190, -32), (975, -405)$
$(-1, 2), (-1, 3), (-2, 3)$	$(-6, 2), (-4, 2), (-3, 1)$
$(0, -5), (0, -4), (-1, -4)$	$(-4, 6), (-6, 8), (-23, 18)$
$(0, -3), (0, -2), (-1, -2)$	$(56, 552), (-867, -614), (854, 573)$
$(0, -2), (0, -1), (-1, -1)$	$(685, -312), (-641, -860), (631, -756)$
$(0, 1), (0, 2), (-1, 2)$	$(647, 501), (122, -728), (-711, -207)$
$(0, 2), (0, 3), (-1, 3)$	$(-12, 9), (-3, 3), (-1, 2)$
$(1, -5), (1, -4), (0, -4)$	$(5, 8), (6, 11), (2, 11)$
$(1, -4), (1, -3), (0, -3)$	$(7, -3), (9, -3), (14, -7)$
$(1, -3), (1, -2), (0, -2)$	$(0, 2), (0, 3), (-6, 6)$
$(1, -2), (1, -1), (0, -1)$	$(540, 696), (-868, 19), (478, 884)$
$(1, 0), (1, 1), (0, 1)$	$(977, -83), (46, 473), (-620, -499)$
$(1, 1), (1, 2), (0, 2)$	$(-158, 621), (0, -897), (859, -960)$

Alap-hármas	Nemtriviális periodikus elem
(1, 2), (1, 3), (0, 3)	(2, -2), (-16, -3), (1, -8)
(1, 4), (1, 5), (0, 5)	(16, -15), (6, -8), (2, -6)
(2, -4), (2, -3), (1, -3)	(6, -3), (8, -2), (10, -5)
(2, -3), (2, -2), (1, -2)	(2, 0), (6, 6), (3, 0)
(2, -2), (2, -1), (1, -1)	(-536, -761), (640, -210), (122, -895)
(2, -1), (2, 0), (1, 0)	(263, 739), (275, -583), (-900, 840)
(2, 0), (2, 1), (1, 1)	(2, 0), (-12, -10), (-2, -2)
(2, 1), (2, 2), (1, 2)	(34, -357), (479, 794), (-56, 389)
(2, 2), (2, 3), (1, 3)	(247, 872), (-812, 940), (-893, -16)
(2, 3), (2, 4), (1, 4)	(0, 1), (3, 2), (10, 10)
(2, 5), (2, 6), (1, 6)	(-66, 42), (-8, 6), (-3, 3)
(2, 6), (2, 7), (1, 7)	(43, -20), (24, -9), (15, -3)
(3, -4), (3, -3), (2, -3)	(4, -2), (6, 0), (6, -3)
(3, -3), (3, -2), (2, -2)	(-113, 758), (974, 494), (-260, -262)
(3, -2), (3, -1), (2, -1)	(-339, 578), (-330, 717), (-841, 451)
(3, -1), (3, 0), (2, 0)	(-2, -4), (0, -1), (0, -2)
(3, 0), (3, 1), (2, 1)	(-1, -3), (0, -2), (2, -4)
(3, 2), (3, 3), (2, 3)	(-913, 415), (-91, -698), (392, -587)
(3, 4), (3, 5), (2, 5)	(4, -4), (0, -3), (-5, -6)
(3, 5), (3, 6), (2, 6)	(501, -570), (-912, 14), (46, 249)
(4, -5), (4, -4), (3, -4)	(-4, -13), (-9, -22), (-4, -16)
(4, -3), (4, -2), (3, -2)	(-3, -3), (-5, 4), (1, -3)
(4, -1), (4, 0), (3, 0)	(0, -6), (2, -4), (3, -6)
(4, 0), (4, 1), (3, 1)	(1, -7), (3, -6), (6, -9)
(4, 1), (4, 2), (3, 2)	(-2, 6), (-4, 6), (-11, 11)
(4, 2), (4, 3), (3, 3)	(-9, 6), (-14, 9), (-111, 69)
(4, 4), (4, 5), (3, 5)	(16, -14), (-6, -4), (-8, -5)
(5, -5), (5, -4), (4, -4)	(6, 4), (18, 23), (8, 6)
(5, -4), (5, -3), (4, -3)	(-16, -14), (-2, 4), (-2, 4)
(5, -3), (5, -2), (4, -2)	(1, 2), (-7, 15), (4, 1)
(5, -2), (5, -1), (4, -1)	(-8, -9), (-4, -2), (-6, -4)
(5, -1), (5, 0), (4, 0)	(-12, -12), (-9, -6), (-12, -8)
(5, 0), (5, 1), (4, 1)	(-5, 13), (-8, 12), (-12, 16)
(5, 1), (5, 2), (4, 2)	(14, 2), (15, -1), (22, -4)
(5, 2), (5, 3), (4, 3)	(15, -3), (18, -6), (32, -14)
(5, 3), (5, 4), (4, 4)	(4, -8), (7, -9), (24, -20)
(6, -4), (6, -3), (5, -3)	(-328, 86), (-441, 648), (899, -153)
(6, -3), (6, -2), (5, -2)	(36, 56), (4, 4), (8, 10)
(6, -2), (6, -1), (5, -1)	(-5, -18), (0, -11), (-1, -15)
(6, 3), (6, 4), (5, 4)	(24, -4), (28, -8), (44, -17)
(6, 4), (6, 5), (5, 5)	(-10, 15), (-15, 17), (-35, 30)
(6, 5), (6, 6), (5, 6)	(-8, -2), (-10, 0), (-35, 15)
(7, -6), (7, -5), (6, -5)	(-2, 3), (12, 26), (-2, 4)
(7, -3), (7, -2), (6, -2)	(12, 26), (3, 12), (6, 18)
(7, 4), (7, 5), (6, 5)	(40, -35), (50, -40), (78, -58)
(7, 6), (7, 7), (6, 7)	(-19, 2), (-24, 6), (-54, 24)
(7, 7), (7, 8), (6, 8)	(-2, 4), (-4, 5), (-96, 62)

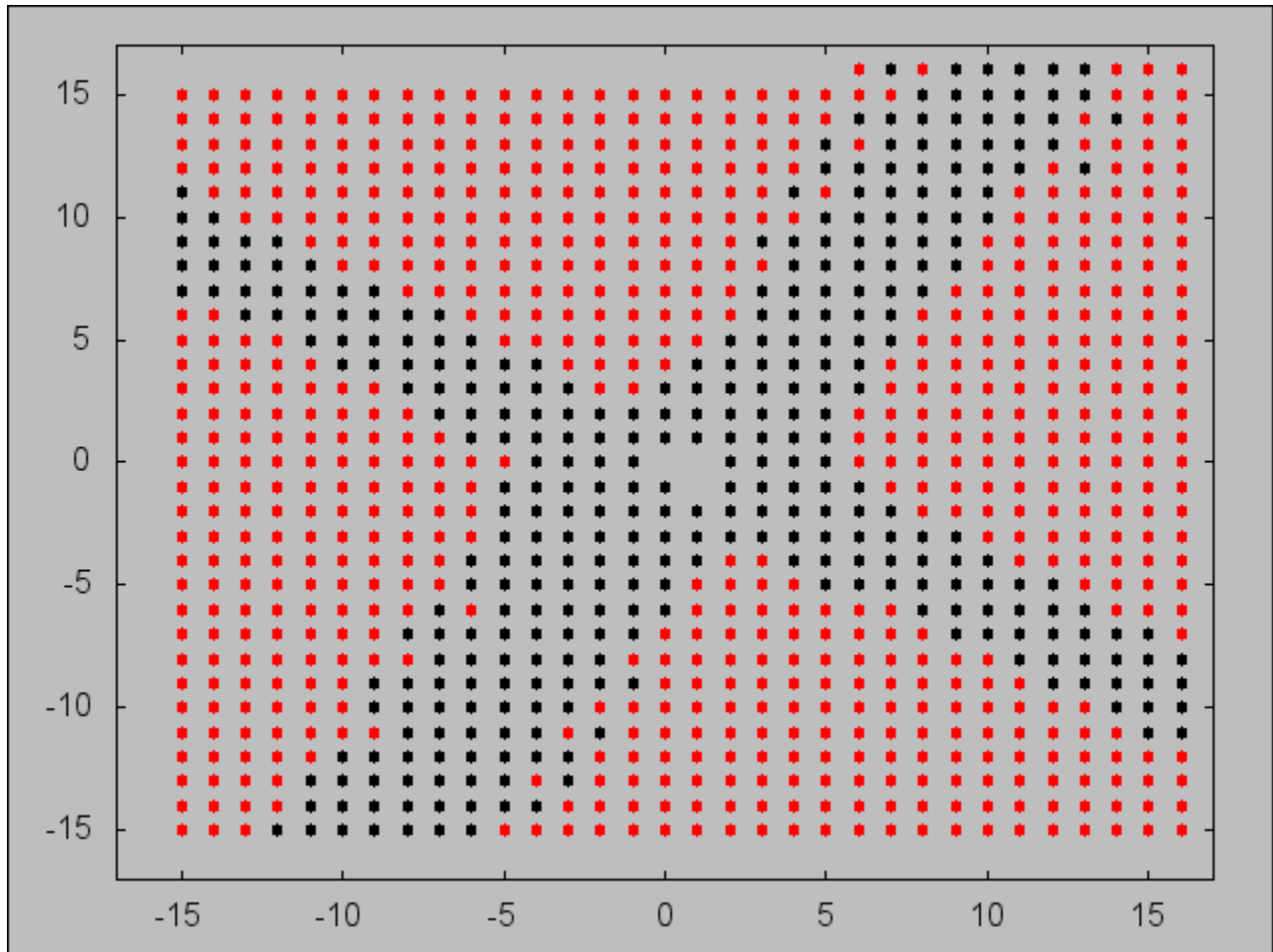
C. Grafikonok



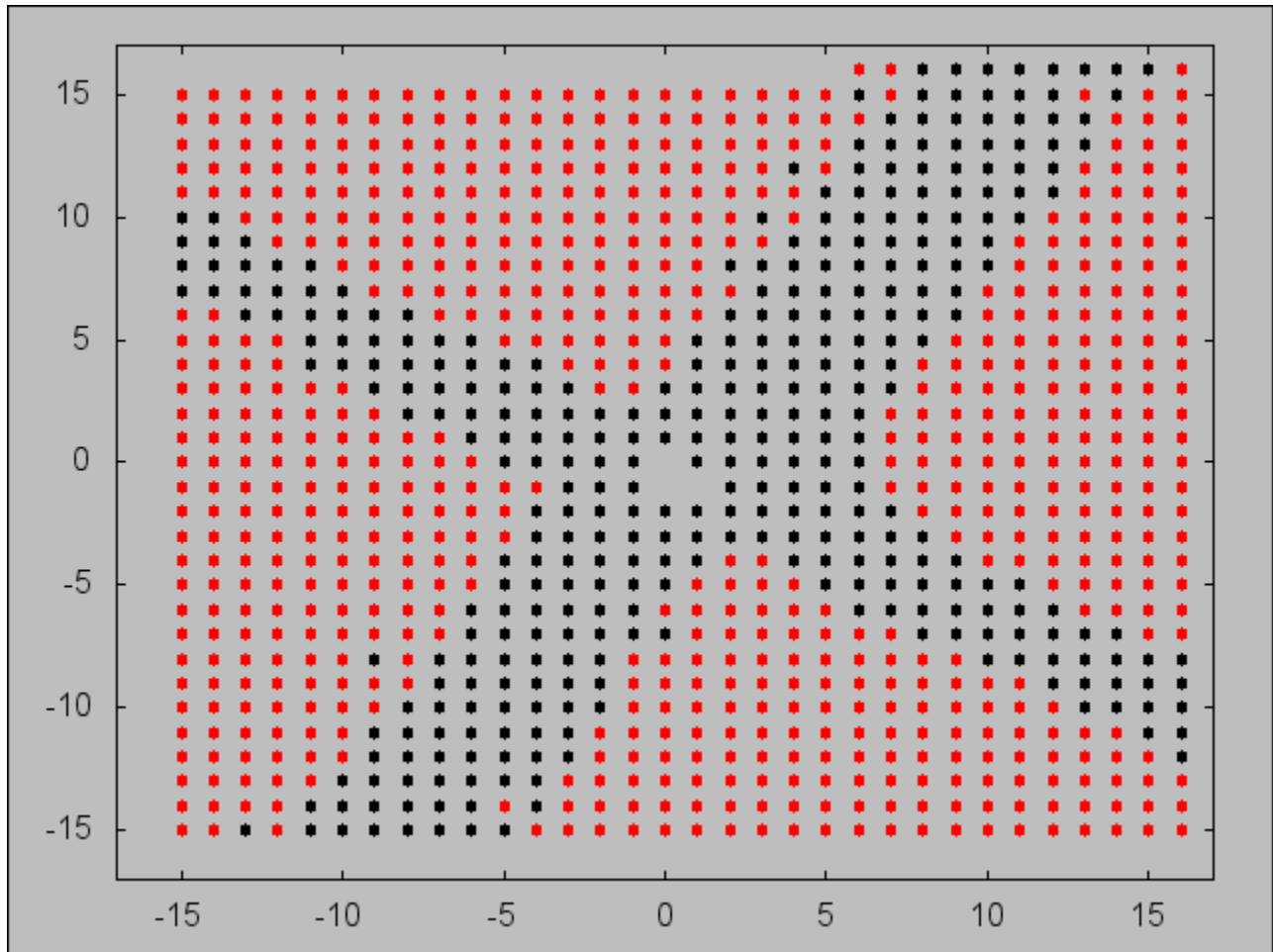
8.1. ábra. Alap-hármasok első alapjainak elhelyezkedése a síkon. K-típusú számjegyhalmaz, 1. alap-hármas-konstrukció.



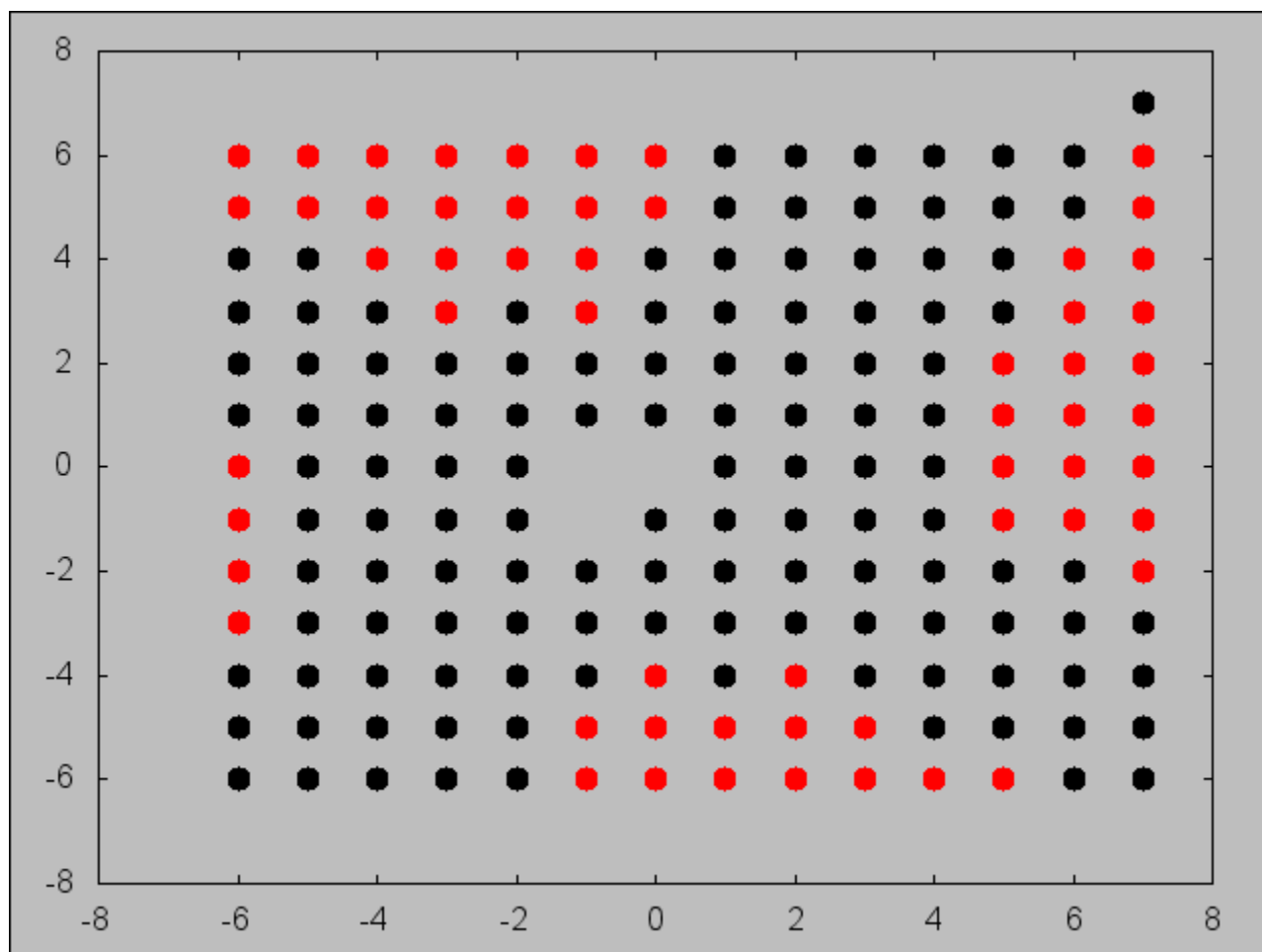
8.2. ábra. Alap-hármasok első alapjainak elhelyezkedése a síkon. K-típusú számjegyhalmaz, 2. alap-hármas-konstrukció.



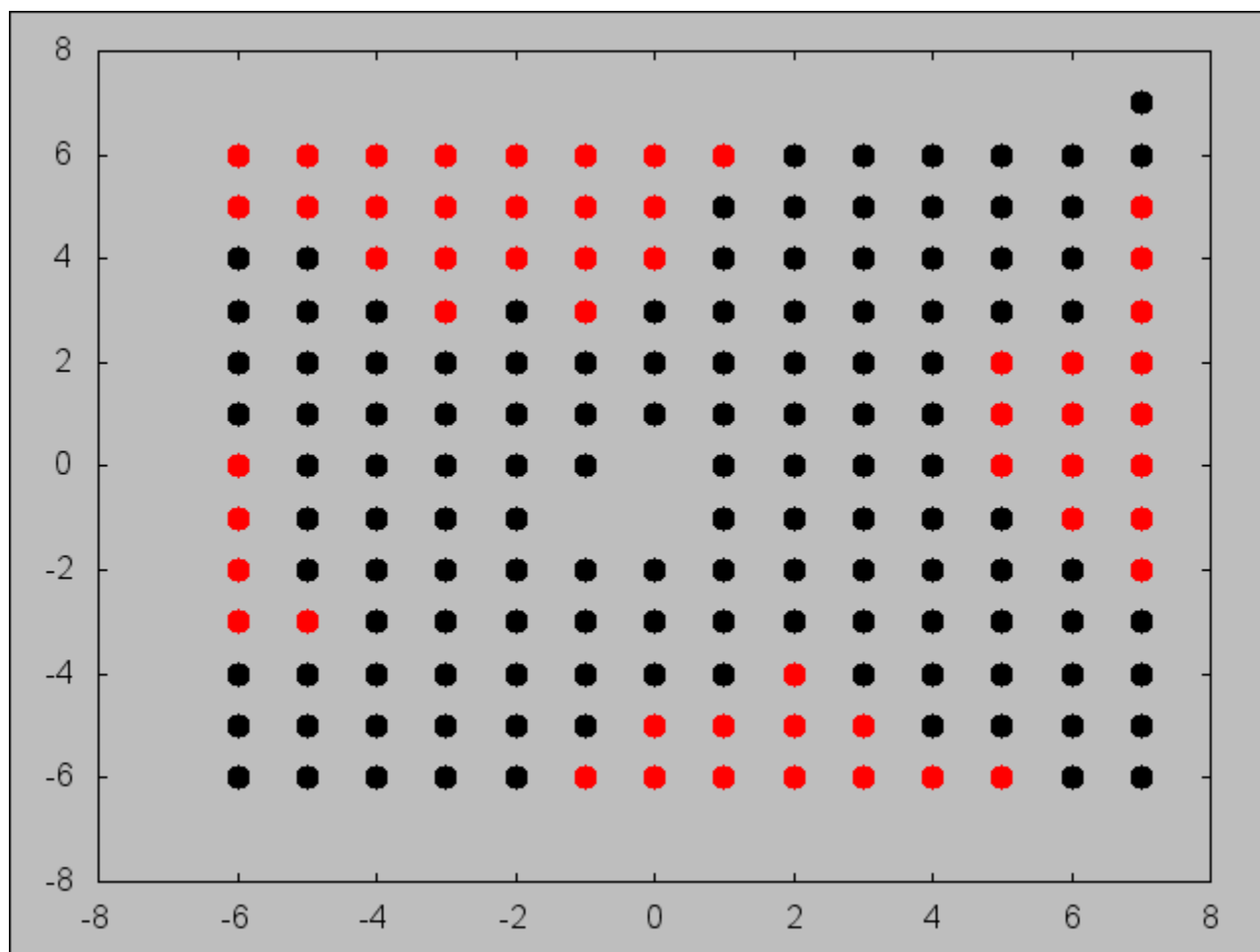
8.3. ábra. Alap-hármasok első alapjainak elhelyezkedése a síkon. K-típusú számjegyhalmaz, 3. alap-hármas-konstrukció.



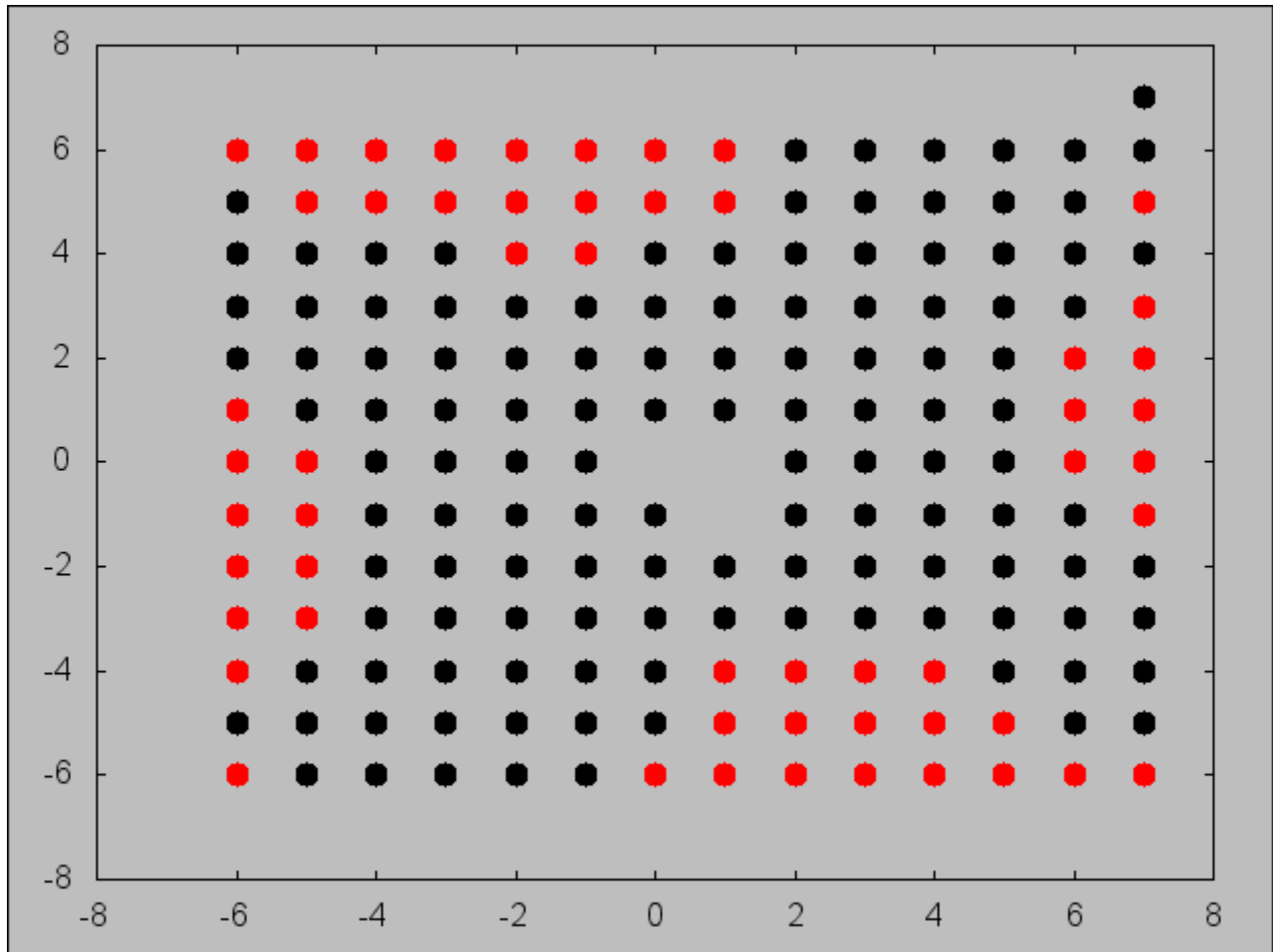
8.4. ábra. Alap-hármasok első alapjainak elhelyezkedése a síkon. K-típusú számjegyhalmaz, 4. alap-hármas-konstrukció.



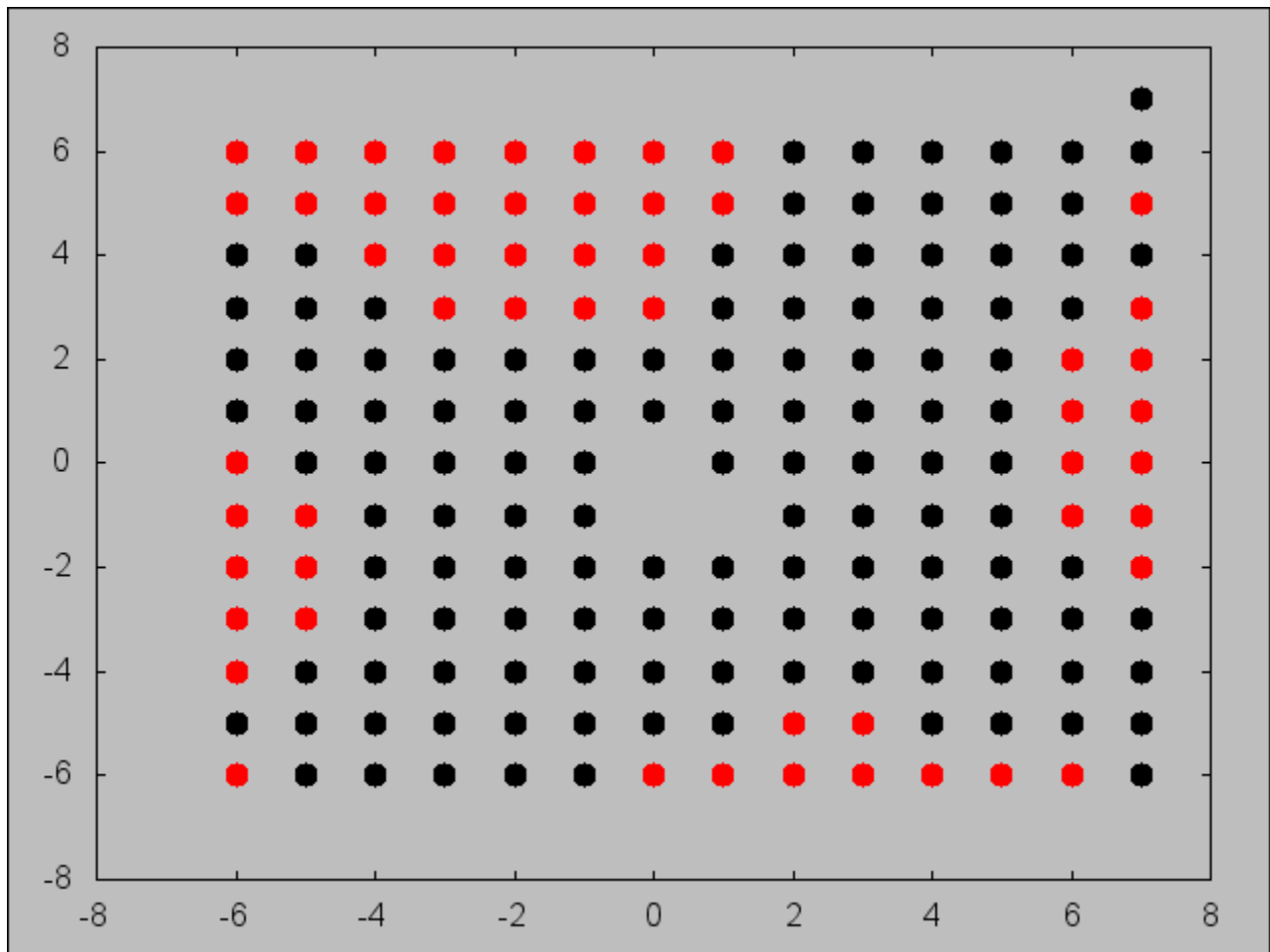
8.5. ábra. Alap-hármasok első alapjainak elhelyezkedése a síkon. Sűrű számjegyhalmaz,
1. alap-hármas-konstrukció.



8.6. ábra. Alap-hármasok első alapjainak elhelyezkedése a síkon. Sűrű számjegyhalmaz, 2. alap-hármas-konstrukció.



8.7. ábra. Alap-hármasok első alapjainak elhelyezkedése a síkon. Sűrű számjegyhalmaz, 3. alap-hármas-konstrukció.



8.8. ábra. Alap-hármasok első alapjainak elhelyezkedése a síkon. Sűrű számjegyhalmaz, 4. alap-hármas-konstrukció.