

Librálnak-e a rezonáns TNO-k?

TDK dolgozat

Készítette:

Kővári Emese

földtudományi BSc szakos hallgató

Témavezető:

Dr. Érdi Bálint

egyetemi tanár

ELTE TTK Csillagászati Tanszék



Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Budapest

2014

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. Transzneptun objektumok	2
3. A rezonancia jelensége	3
3.1. Középmozgás rezonancia	4
3.2. A rezonancia első és második alapmodellje	6
3.3. 7:4-es rezonancia a Kuiper-övezetben	8
4. Eredmények	9
4.1. Egy „új” rezonanciaváltozó	9
4.2. A számítások menete	11
4.3. Általános amplitúdónövekedés	12
4.4. A librációs szigetek kiterjedése	15
4.5. A TNO-k kategorizálása	18
5. Összegzés	20
Függelék	22
1. Függelék	23
Hivatkozások	24

1. Bevezetés

A Naprendszer dinamikájának egyik igen érdekes területe a kisbolygók mozgásának vizsgálata. A fő aszteroidaövezetben és a Kuiper-övben található jelentős számú, változatos pályájú kis égitest sokféle dinamikai probléma vizsgálatát teszi lehetővé, köztük a rezonancia tanulmányozását is. Munkám során a Neptunusz pályáján túli objektumok középmozgás rezonanciáját vizsgáltam, és arra a kérdésre kerestem a választ, hogy található-e olyan mennyiség, amely a valóságot jól tükrözve, közelítéseket nem tartalmazva jellemzi a rezonanciát, és ezen mennyiség milyen új eredményt kínál a rezonanciákra nézve. Dolgozatom a Neptunuszon túli kis égitestek és a rezonancia jelenségének általános jellemzésével kezdődik, majd az általam vizsgált 7:4-es rezonanciát mutatom be részletesebben. Ezt követően a rezonancia hagyományos, illetve új megközelítéséről lesz szó, amit az eredmények közzlése és azok kvantitatív elemzése követ.

2. Transzneptun objektumok

Először 1949-ben K. E. Edgeworth, majd tőle függetlenül 1951-ben G. P. Kuiper egy, a Neptunusz pályáján túli öv létezésének megsejtéséről számolt be. Ezt az övezetet később Kuiper-övezetnek nevezték el, a benne található kis égitestek pedig a transzneptun objektumok (TNO-k). Az első feljegyzett kisbolygó az (15760) 1992 QB1 volt, felfedezése D. C. Jewitt és J. X. Luu nevéhez fűződik. (Bár a legelső felfedezett TNO a Plútó volt 1930-ban.) A ma ismert Neptunuszon túli kis égitestek száma 1500 körüli, összességében pedig a 100 km-nél nagyobb méretű, 30-50 AU tartományban található objektumok számát 70 000-re teszik. A Kuiper-öv össztömege 50 AU-n belül nagyjából 0.06-0.26 földtömeg, az eredeti tömeg viszont ennek az értéknek körülbelül 50-500-szorosa - azaz 4-30 földtömeg - lehetett (ez az az érték, ami a nagy Kuiper-objektumoknak a Naprendszer koránál rövidebb idejű összeállásához szükséges volt). Ezen tömeghiány-probléma máig megoldatlan kérdés.

A Kuiper-övezet alapvetően két részre osztható. A 40 AU-nál kisebb félnagy-tengelyű objektumok alkotják a belső övet. Ezen tartományban a stabil pályák egytől egyig középmozgás rezonanciákhoz (4:3-as és 3:2-es) kötődnek. A 36 és 39 AU közötti régióhoz tartozó majdnem szabályos körpályák teljesen néptelenek. A klasszikus vagy külső Kuiper-övezetbe pedig a 42 AU-nál nagyobb félnagy-tengelyű

égitestek tartoznak. Ezen pályák nem rezonánsak.

Egy napjainkban népszerű elképzelés szerint a Kuiper-övezet ma megfigyelhető szerkezete olyan mechanizmus eredményeképpen jött létre, mely során az övbeli objektumok pályái általános excentricitásnövekedést szenvedtek. Ez az elmélet több problémára is magyarázattal szolgál. Egyrészt érthetővé válik, miért néptelenek ma a 36-39 AU közötti nemrezonáns körpályák: az excentricitásnövekedés miatt az égitestek elhagyták ezen pályákat. Másrészt: a belső Kuiper-öv objektumai azért vannak mind rezonanciában a Neptunusszal, mert a nagyexcentricitású pályák közül csak a rezonánsak stabilak. Illetve a tömeghiány-problémára is kapunk egy lehetséges magyarázatot: a kisexcentricitású pályákat elhagyó égitestek közül csak kevés talált stabil, rezonáns pályát, a többi a perturbációk hatására szétesett.

3. A rezonancia jelensége

A rezonancia jelenségének leírásához érdemes a perturbációs számításból kiindulni. Az egyszerűség kedvéért foglalkozzunk a perturbált kéttest-problémával, amely azt vizsgálja, hogy hogyan mozog a Nap gravitációs terében egy olyan, elhanyagolható tömegű égitest, melyre egy másik bolygó perturbáló hatása is hat. A perturbációt kifejező perturbációs függvény pályaelemek szerinti D'Alembert-féle sorfejtése a következőképpen írható fel:

$$R = \sum C \cos D, \quad (1)$$

ahol C -ben a perturbáló égitest tömege és az első közelítésben konstansnak tekintett pályaelemek és szerepelnek, D pedig az alábbi alakot ölti:

$$D = (pn + p'n')t + B'. \quad (2)$$

B' egy pályaelemektől függő konstans, n és n' a két égitest középmozgásai, p és p' pedig egész számok. A perturbációs függvény sorfejtését a bolygómozgások Lagrange-egyenleteibe beírva, a jobb oldalakon $K \sin D$ vagy $K \cos D$ alakú tagokból álló végtelen sorokat kapunk (K a pályaelemektől függő állandó). A megoldás során ezeket a tagokat kell integrálni, mely integrálok eredménye így a t idő $pn + p'n'$ együtthatójának értékétől fog függeni. Ha ezen együttható nullával egyenlő, akkor konstans tagokat integrálva az idő szerint az idővel egyenesen arányos ún. szekuláris perturbációkat kapunk. Ha a $pn + p'n'$ nem egyenlő nullával, akkor a $\cos$ és $\sin$ tagok

az idő valódi periodikus függvényei, és periodikus perturbációk adódnak eredményül.

A periodikus perturbációk esetében a perturbáció A amplitúdója és P periódusa:

$$A = \frac{K}{pn + p'n'}, \quad (3)$$

$$P = \frac{2\pi}{pn + p'n'}. \quad (4)$$

Ha a vizsgált égitestek keringési idejét a $T = 2\pi/n$ és $T' = 2\pi/n'$ alakban felírva $P \approx T, T'$, akkor rövid periódusú perturbációkról, $P \gg T, T'$ esetében pedig hosszú periódusú perturbációkról beszélünk. A (3) egyenlet alapján az amplitúdó fordítottan arányos a $pn + p'n'$ -vel, így ha $pn + p'n' \approx 0$, úgy, hogy p, p' kicsi, akkor ténylegesen nagy amplitúdójú perturbációk jönnek létre: ez a rezonancia jelensége.

3.1. Középmozgás rezonancia

A rezonanciának két fő típusát különböztethetjük meg: középmozgás rezonancia esetén két égitest pályamenti keringése között áll fenn a rezonancia, szekuláris rezonanciánál pedig maguk a pályák rezonánsak.

A középmozgás rezonancia szükséges (de nem elégséges) feltétele, hogy a két égitest középmozgásainak aránya felírható legyen kis egész számok hányadosaként, azaz:

$$\frac{n}{n'} = \frac{p+q}{p}, \quad (5)$$

ahol n a belső, n' a külső égitest középmozgása, a p és q számok pedig relatív prímek. (q -t a rezonancia rendjének nevezzük.) Ez ekvivalens azzal az alakkal, amiben az n, n' középmozgások helyett a T, T' keringési idők szerepelnek:

$$\frac{T'}{T} = \frac{p+q}{p}. \quad (6)$$

(6) alapján pedig Kepler harmadik törvényét felhasználva adódik a rezonáns fél-nagy tengely:

$$a = a' \left(\frac{T}{T'} \right)^{\frac{2}{3}} = a' \left(\frac{p}{p+q} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (7)$$

A rezonancia (6) alakú szükséges feltételéből látszódik, hogy középmozgás rezonancia esetén a külső (tehát hosszabb - T' - keringési idejű) égitest p fordulatot tesz

meg, amíg a belső bolygó q -szor kerül meg a Napot. Mivel a perturbáció nagysága

$$A \sim e^q \quad (8)$$

szerint az excentricitás q -adik hatványával arányos, a legnagyobb amplitúdót a $q = 1$ esetében kapjuk. Ezek az elsőrendű rezonanciák (például 2:1, 3:2, 4:3, stb.). A magasabb rendű rezonanciák akkor fontosak, amikor az e excentricitás nagy.

Középmozgás rezonancia esetén bevezethető egy ún. Θ rezonanciaváltozó, melyet a következőképpen definiálhatunk:

$$\Theta = (p + q)\lambda' - p\lambda - q\tilde{\omega}, \quad (9)$$

ahol $\lambda = M + \tilde{\omega}$ és $\lambda' = M' + \tilde{\omega}'$ a közepes pályamenti hosszúságok (M és M' a középanomáliák, $\tilde{\omega}$ és $\tilde{\omega}'$ pedig a perihéliumhosszúságok). A rezonanciaváltozó értékének egy 180° körüli korlátos intervallumban való változása (librációja) elégséges feltételt jelent a rezonanciára. (Ha a rezonanciaváltozó 0° és 360° között minden értéket felvesz, azt mondjuk, Θ cirkulál.) Itt említeném meg, hogy az előző állítás alapján bármely rezonáns objektum libráل, így viszont ellentmondás fedezhető fel a dolgozat címében: „Librálnak-e a rezonáns TNO-k?”. A látszó paradoxon feloldására az Eredmények részben kerül sor.

Vizsgáljuk meg a rezonanciaváltozó szemléletes jelentését! A két égitest együttállásakor (konjunkciójakor) $\lambda = \lambda'$ (közelítőleg), így (9) alapján együttállás esetén a rezonanciaváltozó a következő alakot ölti:

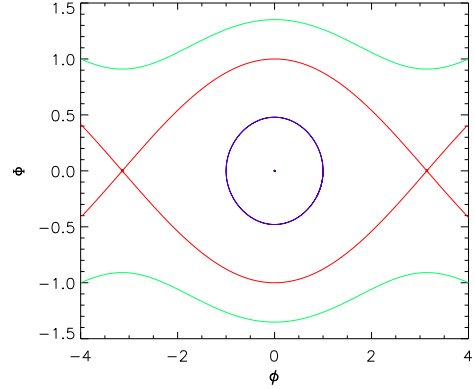
$$\Theta_e = q(\lambda - \tilde{\omega}) = qM. \quad (10)$$

Θ_e -t ismerve pedig meghatározható az együttállások helye a belső pálya $\tilde{\omega}$ pericentrumához képest. És mivel a két égitest konjunkciójakor van legközelebb egymáshoz, ekkor fognak közöttük a legerősebb perturbációk is hatni. Ilyenformán azt mondhatjuk, hogy a rezonanciaváltozó szerepe az, hogy megmondja, az objektumok hol zavarják egymást legjobban pályájuk során.

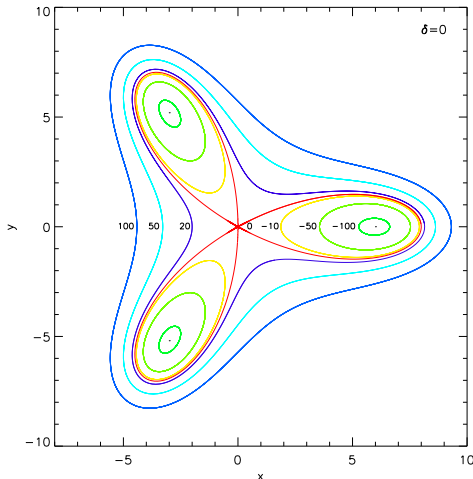
(Megjegyzem, hogy Θ úgy is definiálható, hogy (9)-ben $\tilde{\omega}$ helyett $\tilde{\omega}'$ -t írunk. Ekkor az együttállások helyét a külső pálya $\tilde{\omega}'$ perihéliumához viszonyítva kapjuk meg.)

3.2. A rezonancia első és második alapmodellje

A rezonancia első alapmodelljéről csak annyit jegyeznék meg, hogy elsőrend esetén a rezonancia tulajdonképpen az inga-problémának felel meg: ahogyan az inga egy középhelyzet körül ingadozik, úgy librál a rezonanciaváltozó egy egyensúlyi érték körül. A rezonancia fázistere így analóg az inga fázisterével (1. ábra (Érdi, 2011)): a mozgás két régiója különíthető el két szeparátrixszal: a szeparátrixokon belüli tartomány a librációé (inga esetében a lengőmozgásé), az azokon kívüli pedig a cirkulációé (ingánál a forgómozgásé). A libráció centrumában lévő stabil egyensúlyi helyzet az inga egyensúlyi helyzetére utal, a szeparátrix két ága pedig két instabil egyensúlyi pontot köt össze: ez a két pont a 2π -periodicitás miatt tulajdonképpen azonos és az inga instabil egyensúlyi helyzetének felel meg.



1. ábra. Inga fázistere. (ϕ az egyensúlyi helyzettől való kitérés szöge, Φ az impulzus.)



2. ábra. Harmadrendű rezonancia fázistere

Magasabb rendű rezonanciáknál azonban a pálya mentén már nem egy, hanem a rezonancia rendjével megegyező számú librációs sziget van jelen. Ezek a rezonanciák nem modellezhetők az inga-problémával. Így született meg a rezonancia második alapmodellje a magasabb rendű rezonanciák fázisterének leírására (Henrard és Lemaître, 1983).

Murray és Dermott (1999) mutatta meg, hogy egy k -adrendű $j : (j - k)$ arányú rezonanciánál az egy szabadsági fokúra redukált Hamilton-függvény do-

mináns része:

$$H = \alpha J + \beta J^2 + \varepsilon (2J)^{k/2} \cos k\theta, \quad (11)$$

ahol

$$\alpha = \frac{(j-k)n - jn' - k\tilde{\omega}}{k}, \quad \beta = \frac{3}{2k^2} \left[\frac{(j-k)^2}{ma^2} + \frac{j^2}{m'a'^2} \right],$$

$$\varepsilon = f_d(n^2)^{1-\frac{k}{4}} \frac{a^{3-k}}{a'} \frac{m'}{m_c} m^{1-\frac{k}{2}},$$

$$J = \sqrt{\mu a}(1 - \sqrt{1 - e^2}), \quad k\theta = j\lambda' + (k-j)\lambda - k\tilde{\omega}.$$

A kifejezésekben $a, n, e, \lambda, \tilde{\omega}$ rendre a félnagytengelyt, középmozgást, excentricitást, közepes pályamenti hosszúságot és perihéliumhosszúságot jelentik. m és m' a rezonáns égitestek tömege, melyek egy m_c tömegű központi test körül keringenek. (Az ε kifejezésében szereplő f_d -t az egy szabadsági fokú probléma esetén konstansnak tekintjük.) A (11)-ben megjelenő két változó az impulzus jellegű, e^2 -tel arányos J és az együttállásokat megadó θ szögváltozó. Megfelelő transzformációs lépéseket (ld.: (12)) elvégezve azon paraméterek, melyektől (11) függ, egy paraméterbe tömöríthetők:

$$\Phi = \frac{J}{\eta}, \quad \tau = \beta\eta t, \quad \phi = \begin{cases} \theta + \pi, & \text{ha } k \text{ páros} \\ \theta, & \text{ha } k \text{ páratlan} \end{cases}, \quad (12)$$

ahol

$$\eta = \left[\frac{(-1)^k 2\beta}{\varepsilon} \right]^{\frac{2}{k-4}}, \quad (13)$$

τ pedig egy új független változó t helyett. A transzformáció eredményeképpen a (11)-es Hamilton-függvény a következő alakot ölti:

$$H = \delta\Phi + \Phi^2 + (-1)^k 2(2\Phi)^{\frac{k}{2}} \cos k\phi, \quad (14)$$

melyben az egyetlen változtatható paraméter a

$$\delta = \alpha \left[\frac{4}{\varepsilon^2 \beta^{(2-k)}} \right]^{\frac{1}{4-k}}. \quad (15)$$

Harmadrendű rezonancia ($k = 3$) fázisterét $\delta = 0$ -ra a 2. ábra mutatja, ahol $x = \sqrt{2\Phi} \cos \phi$, $y = \sqrt{2\Phi} \sin \phi$.

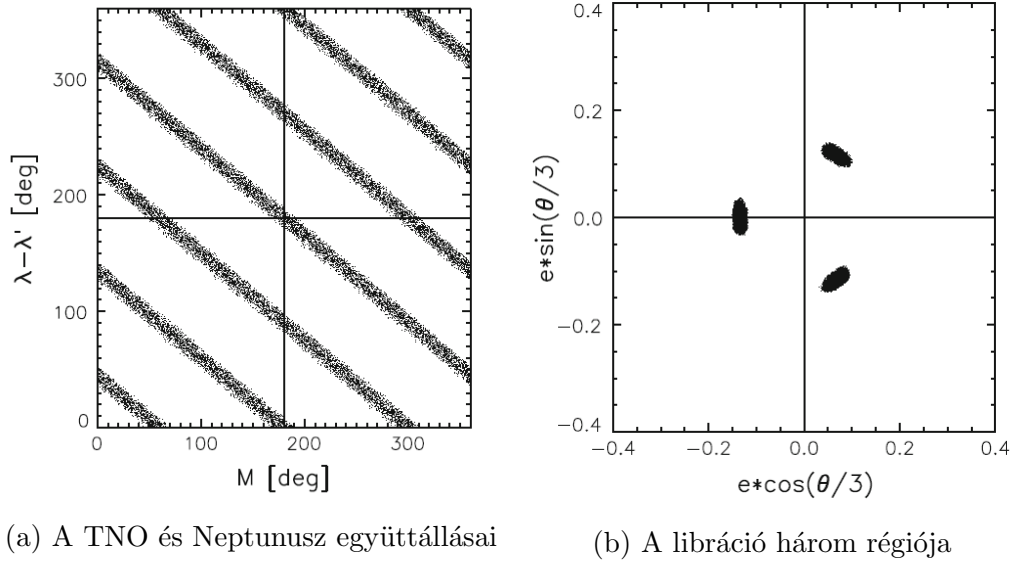
3.3. 7:4-es rezonancia a Kuiper-övezetben

Naprendszerünkben a kisbolygók jelentős része rezonáns pályákat foglal el. Ennek hátterében a rezonancia mint egyfajta védelmi mechanizmus áll: a rezonáns - olykor kifejezetten nagy excentricitású és inklinációjú, nagybolygók vagy más aszteroidák pályáit metsző pályákon keringő - kis égitestek pályáiknak csak bizonyos tartományaiban lehetnek együttállásban a másik égitesttel (a Naprendszer esetében - a fő aszteroidaövbeli égitestek - a Jupiterrel, - a transzneptun objektumok - a Neptunusszal), ez pedig megóvjá őket az óriásbolygó szoros megközelítésétől, a pályájukat megváltoztató erős perturbációktól és az ütközésektől. A különféle rezonanciák dinamikája, jellemzői egészen mások. TDK munkámban a Neptunusszal 7:4-es rezonanciában álló objektumok mozgását vizsgáltam, így most ezt a harmadrendű rezonanciát mutatom be részletesebben.

A 7:4-es rezonancia régiója a Naptól $a \simeq 43.7$ AU távolságban található, ahol összesen körülbelül 250 db TNO kering. Közülük viszont mindössze 21 mutat librációt a rezonanciaváltozójában (meglehetősen széles tartományban mozgó librációs amplitúdóval). A 7:4-es rezonanciában lévő transzneptun objektumok összegyűjtése Gladman és mtsai. (2008) nevéhez fűződik. A tartomány dinamikájával Lykawka és Mukai (2005) foglalkoztak behatóbban. Megállapításuk szerint a rezonancia legstabilabb ($e = 0.25 - 0.30$ excentricitáshoz és $i = 0^\circ - 5^\circ$ inklinációhoz tartozó) része szinte teljesen néptelen. Az $e > 0.25$ excentricitású objektumok hiányát dinamikai szimulációk is alátámasztják (Hahn és Malhotra (2005); Levison és mtsai. (2008); Yeh és Chang (2009)). Mindez azt sejteti, hogy a rezonáns régió a Kuiper-öv létrejötté után viszonylag sokáig lakatlan volt.

A kis excentricitásértékek mellett alapvetően kicsi a pályák inklinációja is: $2.5^\circ - 14^\circ$ közötti, a leggyakoribb érték $i = 5^\circ$ (Gladman és mtsai., 2012). Lykawka és Mukai (2005) mutatta meg, hogy az $i > 10^\circ$ inklinációjú, 7:4-es rezonanciában lévő égitestek a Naprendszer korával összemérhető időtartamot nem élnek túl.

A 3. ábra (Érdi és mtsai., 2012) a Neptunusszal 7:4-es rezonanciában álló TNO-k közül az egyik - a 2002 PB171 - rezonanciájának jellegzetességeit mutatja. A 3a. ábra vízszintes tengelyén a TNO M középanomáliája szerepel, a függőleges tengelyen pedig a TNO és a Neptunusz közepes pályamenti hosszúságának különbsége. Harmadrendű rezonanciáról lévén szó, a Θ rezonanciaváltozó 180° körül librál és a pálya mentén 3 együttállás lehetséges: a 3a. ábráról leolvasható, hogy a konjunkció ($\lambda - \lambda' = 0$) $M = 60^\circ$, $M = 180^\circ$ és $M = 300^\circ$ körül jöhet létre, vagyis távol a TNO perihéliumától, a 3b. ábra pedig az együttállás három szigetét mutatja a rezonancia



3. ábra. A 2002 PB171 TNO librációja

második alapmodelljének megfelelően (a szigetek kiterjedése a librációs amplitúdó értékének $2/3$ -szorosa).

4. Eredmények

4.1. Egy „új” rezonanciaváltozó

A 3.1 részben leírtaknak megfelelően egy TNO és a Neptunusz közötti 7:4-es rezonancia esetén a Θ rezonanciaváltozó a

$$\Theta = 7\lambda_T - 4\lambda_N - 3\tilde{\omega}_T \quad (16)$$

alakot ölti. Itt tehát a közepes pályamenti hosszúságok szerepelnek, melyek az M középanomália és a $\tilde{\omega}$ perihéliumhosszúságok összegeként írhatók fel.

Tekintsünk egy helio- vagy baricentrikus ekliptikai koordinátarendszert! Ennek az xy -síkjá megegyezik az ekliptika síkjával. Vegyünk fel ebben a síkban egy ellipszis pályát, melynek egyik fókuszpontja a koordinátarendszer origójával essen egybe! A fókuszpontból az ellipszis pályán keringő égitest pillanatnyi helyéhez húzott vezérsugár és az origó-pericentrum egyenes által bezárt szög a v valódi anomália, mely nem változik egyenletesen (mivel az égitest a pericentrum közelében

gyorsabban, az apocentrum közelében pedig lassabban halad). A középanomália ezzel szemben egyenletesen változik, hiszen definíció szerint: a pericentrumtól mért átlagos szögtávolság. Ennek megfelelően a középanomália hol a valódi anomália előtt jár, hol utána. Az előzőek alapján nyilvánvaló, hogy a - pályaelemekből számolt - középanomáliákon keresztül a közepes pályamenti hosszúságokkal definiált rezonanciaváltozó a valóságot nem tükrözi pontosan, csak közelíti azt. Éppen ezért felmerül a kérdés, hogy bevezethető-e egy olyan rezonanciaváltozó, mely a valósághoz közelebb áll.

Erre a célra szóba jöhetne a valódi pályamenti hosszúságok használata a közepes pályamenti hosszúságok helyett. Még jobb lenne azonban egy, a pályaelemektől független, csak az égitestek tényleges pozícióvektorától függő mennyiség. TDK munkámban az ilyen módon létrehozott, pályaelemektől nem függő „új” rezonanciaváltozóval foglalkoztam. A következőkben azt mutatom be, hogyan kaphatjuk meg, ha ismerjük a TNO bármely időpillanatbeli helykoordinátáit.

A fent vázolt xyz derékszögű ekliptikai koordinátarendszernél maradva, a TNO $\mathbf{r}$ helyvektorának hossza:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (17)$$

az yz-síkra eső vetülete (x tengelytől mért távolsága) pedig:

$$r_{yz} = \sqrt{y^2 + z^2}. \quad (18)$$

Ekkor

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{r_{yz}}{r}, \quad (19)$$

ahol φ az égitest x tengellyel bezárt ún. pozíciószöge. 7:4-es rezonancia esetén a két rezonáns égitest (esetünkben a TNO és Neptunusz) szögsebessége:

$$\frac{\dot{\varphi}_N}{\dot{\varphi}_T} \approx \frac{7}{4}. \quad (20)$$

A fenti egyenletet nullára rendezve, majd integrálva:

$$\Phi = 7\varphi_T - 4\varphi_N + \text{const.}, \quad (21)$$

ahol Φ a pályaelemektől már nem függő rezonanciaváltozó, a konstans pedig egy integrációs állandó, melyet a (16)-tal való összehasonlítás alapján a TNO kezdeti perihéliumhosszúságának háromszorosára érdemes beállítani ahhoz, hogy a rezo-

nanciováltozó időbeli viselkedését kirajzoló ábra középértéke 180° körül legyen.

A kutatás során az n -test probléma (egyik esetben $n=2$, másikon $n=6$, ld.: később) mozgásegyenleteit 1 millió évre numerikusan integrálva azt vizsgáltam, hogy a 7:4-es rezonancia régiójában lévő azon 21 TNO, melynek hagyományos rezonanciaváltozója az idő függvényében ábrázolva librációt mutat, vajon megtartja-e a libráló mozgást a pozíciószögeken alapuló rezonanciaváltozóval is, azaz: a rezonanciák fennállnak-e a valóságban is.

4.2. A számítások menete

A Naptól $a \simeq 43.7$ AU távolságban található mintegy 250 kis égitest közül a hagyományos rezonanciaváltozóiban librációt mutató 21 TNO 2013. április 18-ra vonatkozó kezdeti pályaelemeit felhasználva a mozgásegyenleteket 1 millió évre integráltam numerikusan. Az említett epochára vonatkozó kezdeti pályaelemeket a NASA JPL Horizons nevű honlapjáról kértem le.

A számítást C nyelven írt programok végezték, melyek a numerikus integrálás Runge–Kutta–Dormand–Prince-féle módszerét alkalmazva a kezdeti $\mathbf{v}_0$ és $\mathbf{r}_0$ derékszögű ekliptikai koordinátákból számolták ki a további $\mathbf{v}_1, \mathbf{r}_1; \mathbf{v}_2, \mathbf{r}_2; \mathbf{v}_3, \mathbf{r}_3$; stb. koordinátákat. A felhasznált dinamikai modell a Napot, a 4 óriásbolygót és az adott TNO-t tartalmazta. Az integrátor beágyazott 7(6)-odrendű, változó lépésközű volt: egy beépített pontosságbecslő alakította a lépésközt úgy, hogy minden kiszámolt koordináta elérje a megadott pontosságot (egymillió éves integrálásra a koordinátákban 15 cm-es pontosságot állítottam be). A programokat témavezetőm, Dr. Érdi Bálint írta, én pedig módosításokat végeztem rajtuk. A programokkal elsősorban a Θ és Φ rezonanciaváltozók időbeli viselkedését vizsgáltam, de érdekes volt nyomon követni a pályaelemek változását is, egymillió éven keresztül.

A programok egy része heliocentrikus (napközéppontú), másik része pedig baricentrikus (origója a Naprendszer tömegközéppontja) ekliptikai koordinátarendszerekben számolt. A koordinátarendszerek különbözősége nem eredményezett lényeges különbséget, mindössze annyit, hogy az eredményül kapott $T - \Theta$ függvények (T az időt jelöli) a baricentrikus koordinátarendszer esetében simábbak voltak, mivel ebben a rendszerben a rövid periódusú perturbációk nem jelennek meg. (A következőkben bemutatásra kerülő ábrák mindegyike baricentrikus rendszerben számolt adatokból készült.)

Itt említeném meg azt is, hogy azok a programok, melyek a hagyományos módon

számolták a rezonanciaváltozót, a pályaelemek számításához a hattest-problémát (Nap, TNO és a 4 óriásbolygó) kéttest-problémával (Nap, TNO és Nap, Neptunusz) közelítették. Éppen ezért, mivel a pozíciószögekkel definiált rezonanciaváltozó számításához pályaelemekre nincs szükség, ennek esetében a fenti közelítést nem kell megtenni, a modell sokkal pontosabb, a valósághoz közelebb álló lesz.

A kimeneti adatfájlok tartalmát MATLAB-ban ábrázoltam, illetve itt végeztem a kvantitatív elemzésekhez szükséges számításokat is.

4.3. Általános amplitúdónövekedés

Először a hagyományos rezonanciaváltozóra vonatkozó számítások eredményét mutatom be. Mind a 21, 7:4-es rezonanciában álló TNO-ra (adataikat ld.: 1. táblázatban) kiszámítottam a C-programok segítségével a Θ értékét 1 millió évre, és annak időbeli változását ábrázoltam. A kapott görbék szép, librációs jelleget mutatnak (4. ábra), a librációs amplitúdó körülbelül 38° és 150° közötti értékeket vett fel bármely TNO esetében (1. táblázat). Egyelőre nem ismert, miért éppen ezek a (közepes) amplitúdók alakulnak ki (minden bizonnyal függnék a kezdeti pályaelemektől, de a pontos ok kiderítése még további kutatásokat igényel). Emellett a TNO

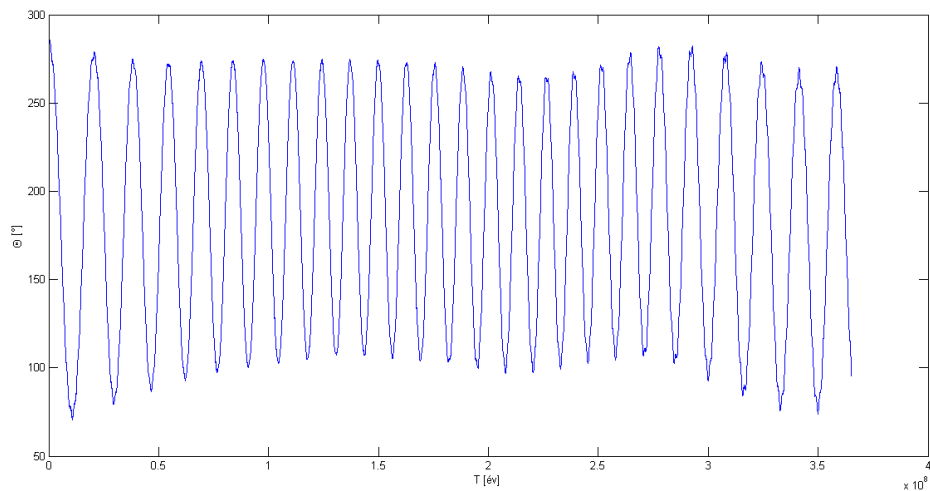
$$x = e \cos \frac{\Theta}{3}, \quad y = e \sin \frac{\Theta}{3} \quad (22)$$

- a rezonancia második alapmodelljének megfelelő - derékszögű koordinátáit kiírva és ábrázolva a harmadrendű rezonanciára jellemző három sziget is láthatóvá vált (5. ábra).

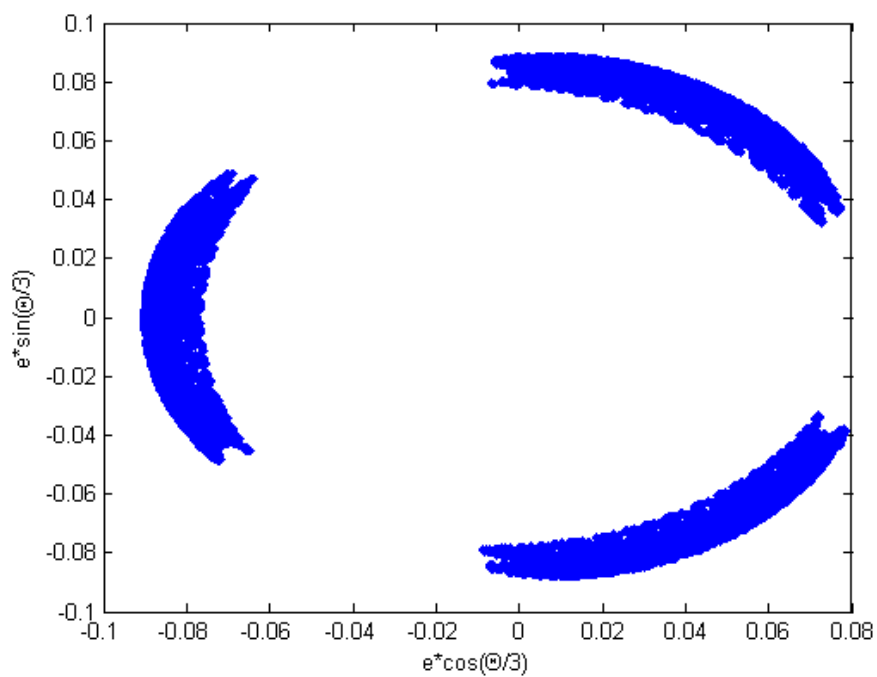
A pozíciószögekkel definiált Φ rezonanciaváltozóval történt számítások eredményeit a fentiekhez hasonló módon ábrázoltam MATLAB-ban. A 21 TNO mindegyikénél megmaradt a T - Φ görbékben megfigyelhető librációs jelleg (6. és 7. ábra), a librációs amplitúdó viszont jelentősen növekedett (8. ábra). (Az átlagos amplitúdónövekedés 135.7° volt.) Megjegyezném, hogy a görbék librációs jellegének megmaradása nem jelenti, hogy a Φ rezonanciaváltozó librál, hiszen Φ a legtöbb égitest esetében 0° és 360° között minden értéket felvesz (7. ábra), így - a 3.1. részben leírtaknak megfelelően - a rezonanciaváltozó cirkulál.

Az amplitúdónövekedés oka a következőképpen magyarázható: Tekintsük a

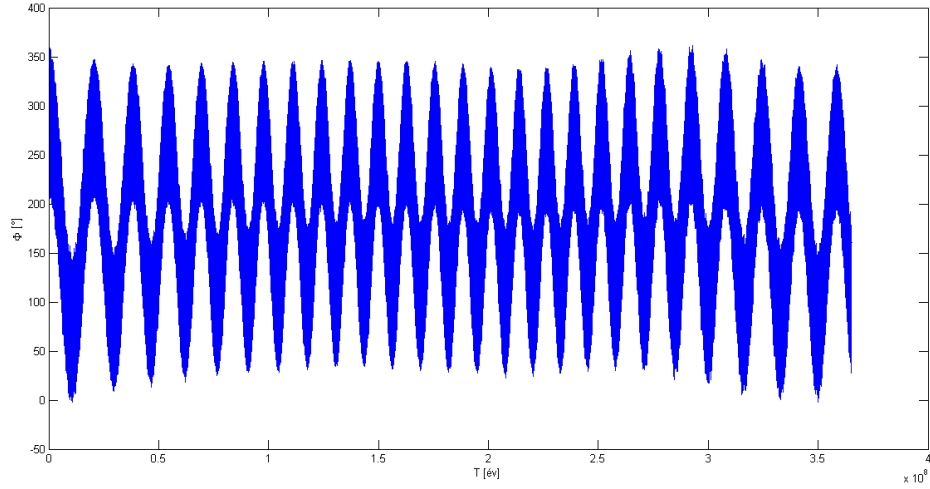
$$\Phi = 7w_T - 4w_N - 3\tilde{w}_T \quad (23)$$



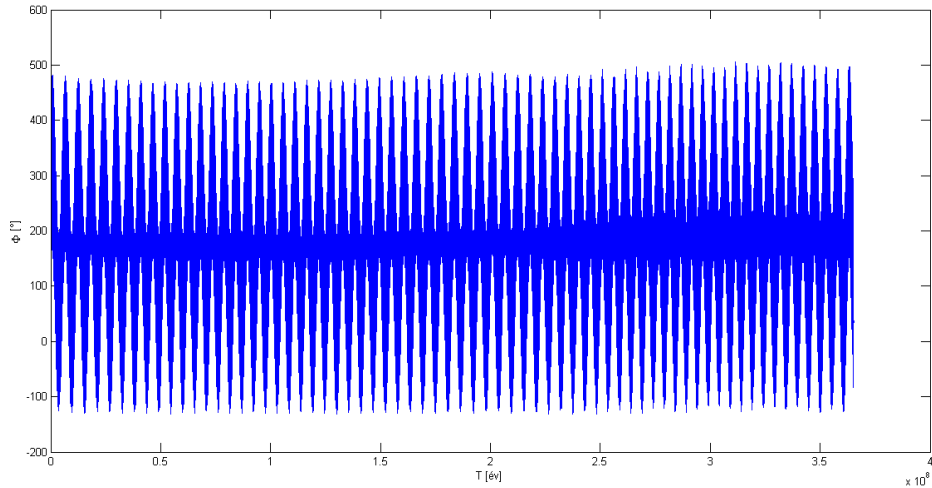
4. ábra. A (119066) 2001 KJ76 rezonanciaváltozójának időbeli viselkedése. Θ 180° körül libráل körülbelül 107° -os amplitúdóval. A hagyományos rezonanciaváltozó viselkedése hasonló jellegű a többi rezonáns TNO esetében is.



5. ábra. A librációs szigetek a (119066) 2001 KJ76 esetében a rezonancia második alapmodelljének megfelelően, a hagyományos rezonanciaváltozóból számítva.

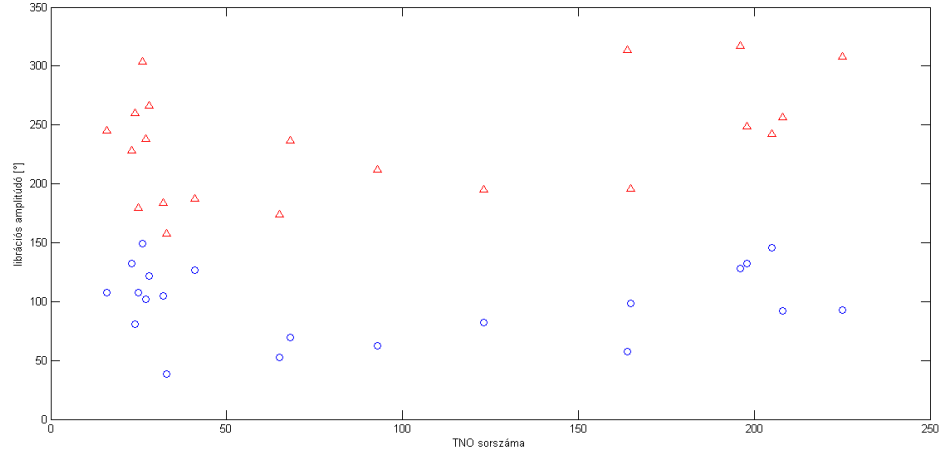


6. ábra. A (119066) 2001 KJ76 pozícióvektorokon alapuló rezonanciaváltozójának időbeli változása. A librációs amplitúdó 179.9° .



7. ábra. A (119067) 2001 KP76 pozícióvektorokon alapuló rezonanciaváltozójának időbeli változása. A librációs amplitúdó 304.1° .

rezonanciaváltozót, ahol w -k a valódi pályamenti hosszúságok. (23) jobb közelítést ad, mint (16), hiszen a közepes pályamenti hosszúságok helyett itt a valódi pályamenti hosszúságok szerepelnek. (23) emellett (21)-gyel összemérhető pontosságú, a valóságot jól tükrözi, (21)-gyel ellentétben viszont tartalmazza az excentricitásokat, hiszen nem független a pályaelemektől. Az amplitúdónövekedés oka pedig az excentricitásokban keresendő. Figyelembe véve, hogy a Neptunusz excentricitása kicsi



8. ábra. A librációs amplitúdók növekedésének mértéke. (A kék színű körök a hagyományos, a piros háromszögek pedig a pályaelemektől nem függő rezonanciaváltozóhoz tartozó amplitúdókat jelentik az egyes TNO-kra.)

($e \approx 0.0086$), és körpálya esetén a valódi és közepes pályamenti hosszúság megegyezik, a Neptunusz esetében $\lambda_N \approx w_N$, így a (16) és (23) rezonanciaváltozók használatából fakadó amplitúdóeltérések a (23) egyenlet jobb oldalának első tagjából származnak, ugyanis $\lambda_T \not\approx w_T$. A λ közepes és w valódi pályamenti hosszúságok közötti eltérés ekvivalens az M közép- és v valódi anomália eltéréseivel, ami pedig

$$v = M + (2 \sin M)e + \left(\frac{5}{4} \sin 2M\right)e^2 + \left(-\frac{1}{4} \sin M + \frac{13}{12} \sin 3M\right)e^3 + \dots \quad (24)$$

alapján közelítőleg a (fokba átszámított) excentricitás kétszerese (tekintve, hogy a (24) sorfejtésben a harmadik tagtól kezdve minden elhanyagolható). Mivel a (23) egyenletben szerepel még egy 7-es szorzó, a teljes eltérés az excentricitás 14-szeresével egyezik meg (fokba átszámítva). Tekintve, hogy (23) jól közelíti (21)-et, a tapasztalt amplitúdónövekedés a fentiek alapján az excentricitásnak tulajdonítható. A gondolatmenetet a számított értékek is alátámasztják.

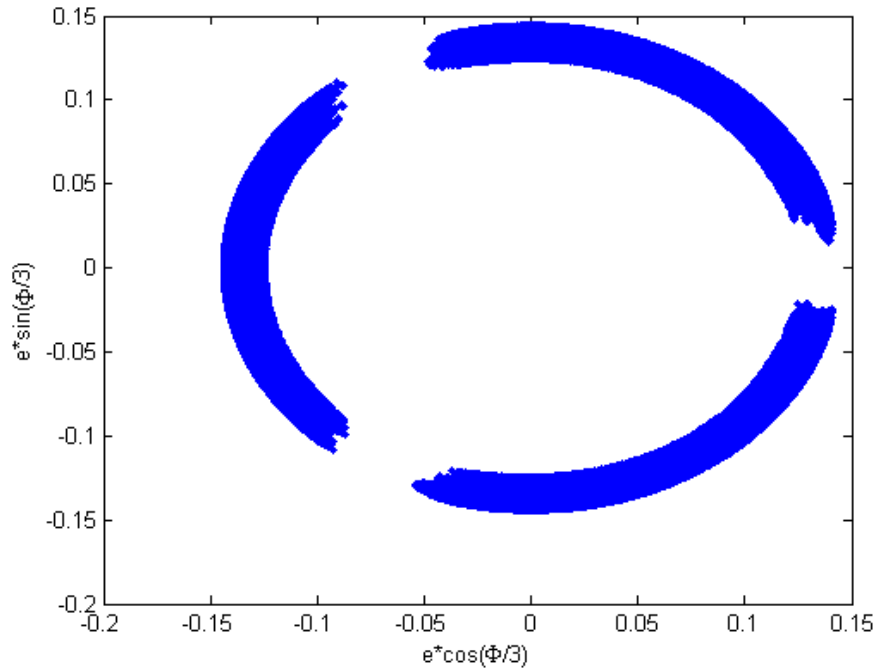
4.4. A librációs szigetek kiterjedése

Mint azt már a 3.3. fejezetben leírtam, a librációs szigetek kiterjedése a librációs amplitúdó értékének 2/3-szorosa. Meggondolva, hogy a 7:4-es, harmadrendű rezonancia esetén 3 együttállási régió alakul ki a TNO pályája mentén, különálló

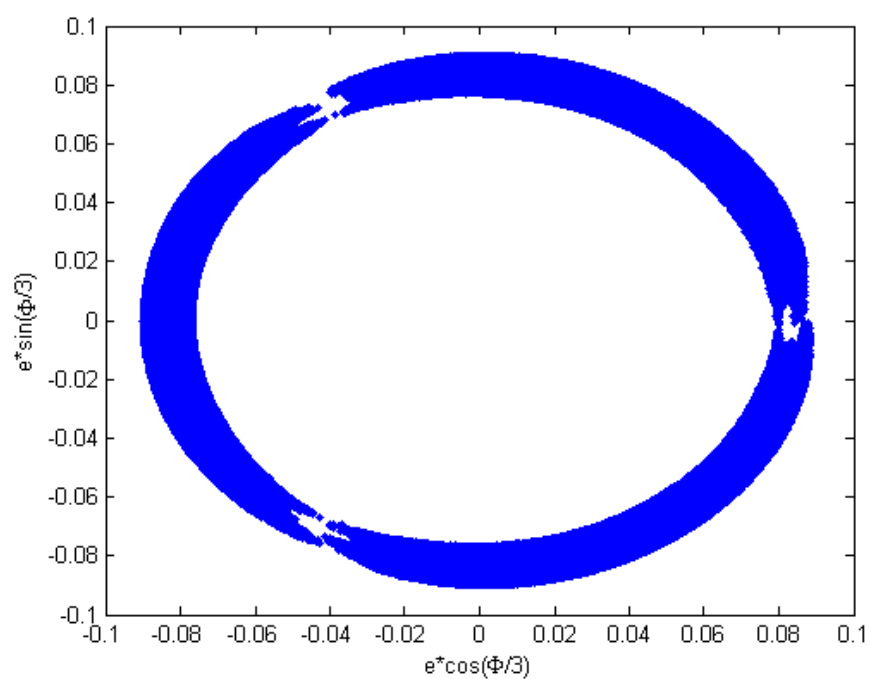
szigeteket akkor kapunk, ha a librációs amplitúdó nem haladja meg a 180° -ot. A 8. ábra alapján azonban nyilvánvaló, hogy ez a feltétel a pozíciószögeken alapuló rezonanciaváltozóval számolva a legtöbb TNO esetében nem teljesül. Mindössze három, a (119066) 2001 KJ76, a (135742) 2002 PB171 és az 1999 HG12 jelzésű égitesteknél kisebb 180° -nál az amplitúdó (1. táblázat). Ezeknél várhatjuk, hogy az

$$x = e \cos \frac{\Phi}{3}, \quad y = e \sin \frac{\Phi}{3} \quad (25)$$

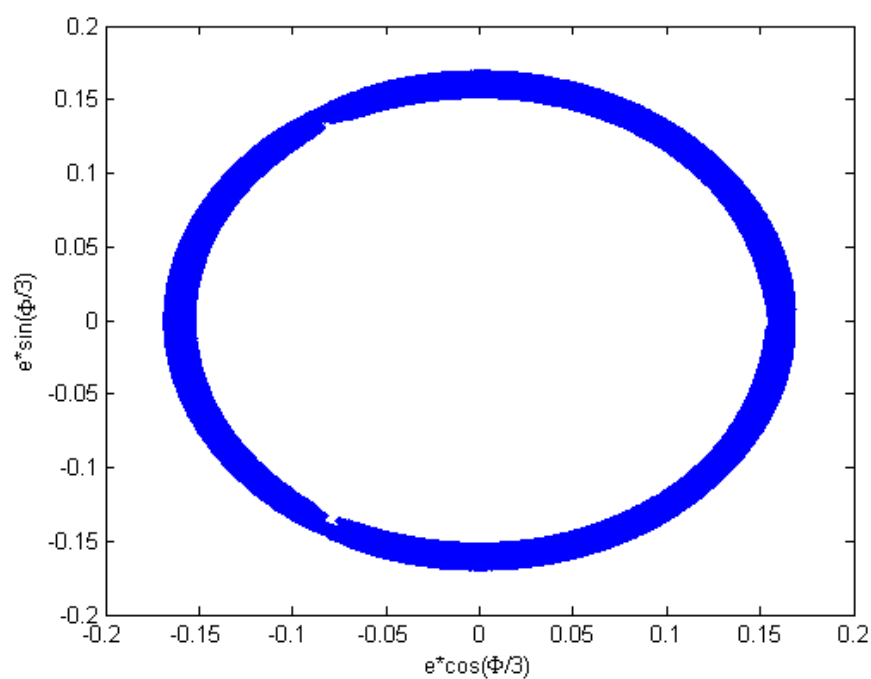
koordinátákat ábrázolva a három sziget jól láthatóan szétválik. Ez azonban csak a (135742) 2002 PB171 TNO esetében van így (9. ábra), a másik kettőnél a librációs amplitúdó nem sokkal kevesebb 180° -nál, így a különálló tartományok helyett leginkább csak elvékonyodó részeket vagy kisebb „hézagokat” fedezhetünk fel a pont-halmazban, melyek a szigetek határait utalnak (10. és 11. ábra).



9. ábra. Librációs szigetek a (135742) 2002 PB171 esetében a pozíciószögeken alapuló rezonanciaváltozó alapján. A librációs amplitúdó: 157.6° .

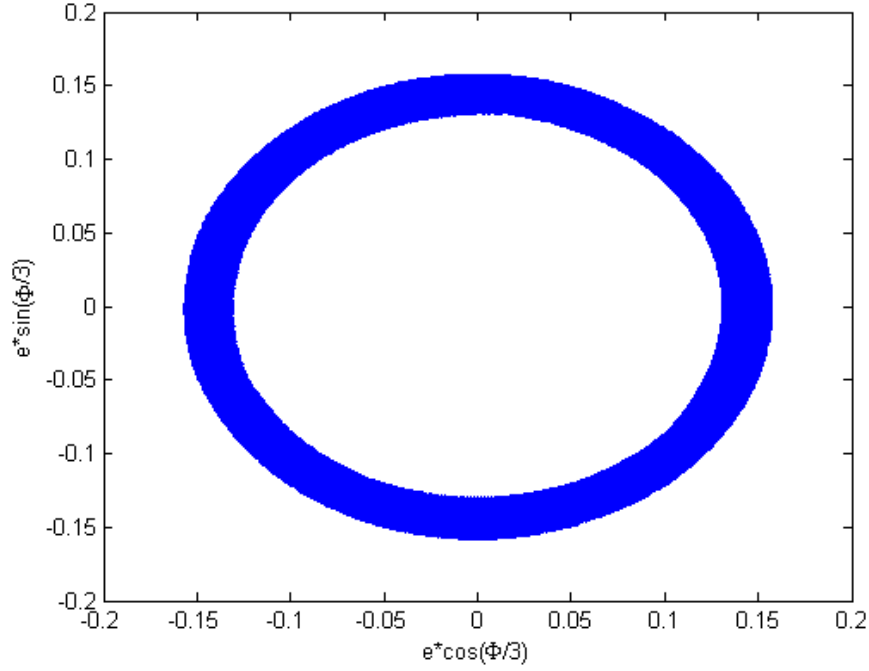


10. ábra. Librációs szigetek a (119066) 2001 KJ76 esetében a pozíciószögeken alapuló rezonanciaváltozó alapján. A librációs amplitúdó: 179.9° .



11. ábra. Librációs szigetek az 1999 HG12 esetében a pozíciószögeken alapuló rezonanciaváltozó alapján. A librációs amplitúdó: 173.6° .

Az összes többi objektumnál teljesen átfednek a tartományok (12. ábra), aminek döntő jelentősége van a rezonanciákra nézve, hiszen ez szemléletesen azt jelenti, hogy a TNO és Neptunusz közötti együttállás a TNO pályájának bármely pontján megtörténhet, azaz nincsenek kitüntetett tartományok.



12. ábra. A 2001 QE298 x, y koordinátáinak ábrázolása. A librációs szigetek átfedik egymást, a librációs amplitúdó: 194.9° . Hasonló a helyzet a rezonáns TNO-k többségénél.

Ami szembetűnő lehet még az ábrákat vizsgálva, hogy a derékszögű koordinátákat ábrázoló ponthalmazok nem egyforma vastagságúak: (25) figyelembevételével a librációs szigetek vastagságát az határozza meg, hogy az excentricitás milyen tartományban változik.

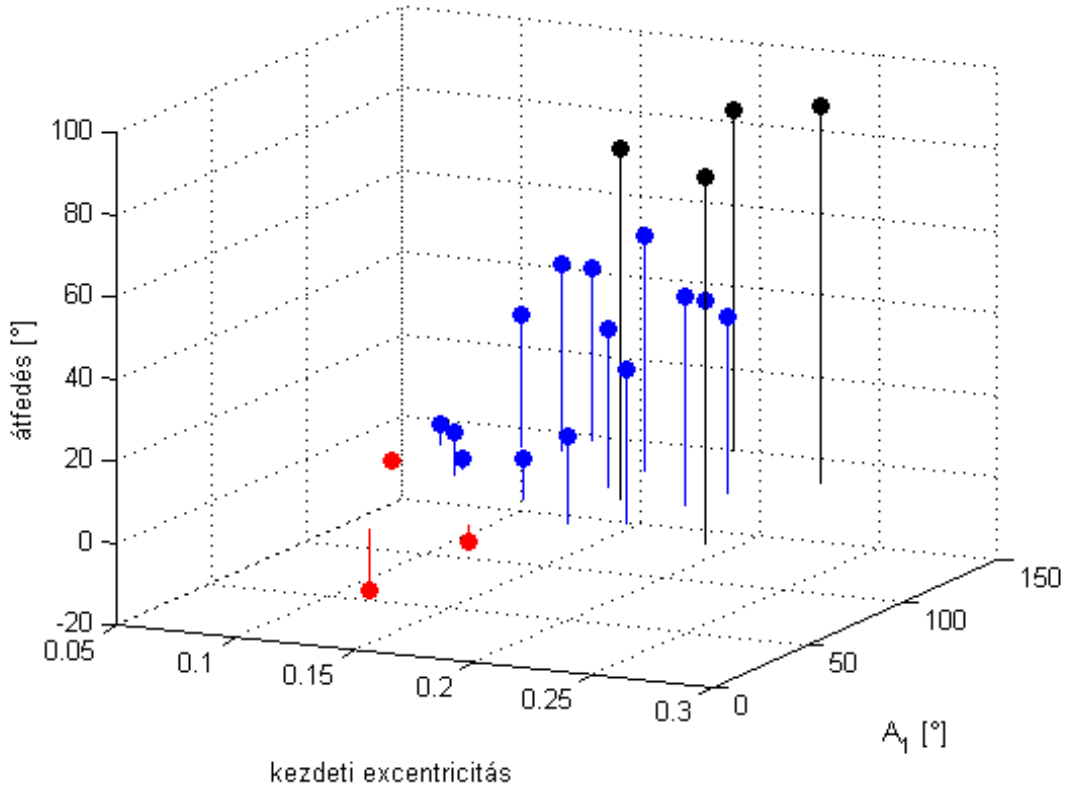
4.5. A TNO-k kategorizálása

A TNO-k kategorizálásánál érdemes azt figyelembe venni, hogy az egyes librációs tartományok milyen mértékben fedik át egymást. Ennek kiszámítására az alábbi képlet állítható fel:

$$h = \frac{2}{3}(A_1 + 14\frac{180^\circ}{\pi}e) - 120^\circ, \quad (26)$$

ahol A_1 a hagyományos rezonanciaváltozó librációs amplitúdója, e pedig a TNO kezdeti excentricitása. Ez a két változtatható paraméter tehát meghatározza a szigetek átfedését. Így a TNO-k 3 kategóriába sorolhatók:

1. A_1 és e is kicsi. A szigetek különválnak a pozíciószögeken alapuló rezonanciaváltozóval vizsgálva is.
2. A_1 és e is nagy. A tartományok átfedésének mértéke a legnagyobb.
3. A_1 kicsi és e nagy, A_1 nagy és e kicsi, vagy A_1 és e is közepes. Az átfedés mértéke is közepes.



13. ábra. A 21 TNO eloszlása a kezdeti excentricitás (e), a hagyományos rezonanciaváltozóval adódott librációs amplitúdók (A_1) és a librációs szigetek átfedése alapján.

A fenti kategorizálással három TNO sorolható az 1. kategóriába: a (119066) 2001 KJ76, a (135742) 2002 PB171 és az 1999 HG12 - ezeket a 13. ábrán pirossal kiemelttem. Ezek azok az égitestek, melyek viszonylag egzaktan elkülöníthetők, ha

a $h < 0^\circ$ kritériumot tekintjük az 1. kategória feltételének. A másik két kategóriába való besorolás már problémásabb. Ha a szélsőséges eseteket szeretnénk elkülöníteni, akkor négy TNO-t érdemes a 2. kategóriába sorolni: a (119067) 2001 KP76-ot, a 2003 QX91-et, a 2004 OK14-et és a 2005 SF278-at (ld.: a 13. ábra jobb felső részén feketével színezett értékek). A 3. kategória TNO-i (kék adatpontok) középtájt helyezkednek el az ábrán, és az előző hét kivételével az összes többi égitest ide tartozik.

Látszódik, hogy a bemutatott kategorizálás meglehetősen viszonylagos. Az egyes csoportokba tartozó transzneptun objektumok nem válnak el élesen az ábrán, így a határok megállapítása is önkényes. A lényeges eredmény azonban nem is az egyes TNO-k kategóriákba való besorolása, hanem annak megállapítása, hogy a legtöbb esetben a pálya mentén nincsenek kitüntetett és elváló tartományok, melyekben a kis égitest és a Neptunusz közötti együttállás megtörténik.

5. Összegzés

Munkám során Naprendszerünk egyik legérdekesebb dinamikai problémájával foglalkoztam: a középmozgás rezonanciával. A Naptól körülbelül 43.75 AU távolságban 21 olyan transzneptun objektum található, mely a Neptunusszal 7:4-es középmozgás rezonanciában áll, azaz a TNO és Neptunusz középmozgásainak aránya kis egész számok hányadosaként írható fel, valamint a Θ -val jelölt (hagyományos) rezonanciaváltozó librál. Azt tanulmányoztam, hogy a rezonancia jellemzésére bevezetett új, a pályaelemektől nem függő rezonanciaváltozóval (Φ) vizsgálva is megmarad-e a libráció ezen 21 rezonáns TNO esetében.

A kutatás során C-programok segítségével numerikusan integráltam a mozgásegyenleteket 1 millió évre, és a Θ és Φ rezonanciaváltozók időbeli viselkedését elemeztem. A hagyományos rezonanciaváltozó esetében a pályaelemek számításához a hattest-problémát kéttest-problémával kellett közelíteni, a pozíciószögeken alapuló rezonanciaváltozónál ezt a közelítést nem kellett elvégezni, így azt mondhatjuk, hogy utóbbi a valóságot jobban tükrözi.

Az adatok kiértékelésénél azt tapasztaltam, hogy a $T - \Phi$ görbékben a librációs jelleg megmaradt, illetve a TNO pályája mentén is kialakultak ugyan a librációs szigetek, viszont a libráció amplitúdója olyannyira megnövekedett a pozíciószögeken alapuló rezonanciaváltozóval számolva, hogy a 21 TNO közül 18 esetében a librációs tartományok jelentősen átfedtek. Ez pedig azt jelenti, hogy a TNO és Nep-

tunusz együttállása a kis égitest pályájának bármely pontján megtörténhet, nincsenek kitüntetett szigetek.

A címbeli paradoxon feloldására tehát elmondható, hogy található egy, a valósághoz közelebb álló olyan jellemzése a középmozgás rezonanciának, mellyel a 7:4-es rezonanciában álló transzneptun objektumok többsége nem librál.

Függelék

A 21 TNO adatait az 1. táblázat tartalmazza. Az első oszlopban a 250 TNO közül a librálók sorszáma, a 2. oszlopban ezek jelzése található. A 3. oszlop a kezdeti excentricitásértékeket, a 4. a hagyományos, az 5. pedig a pályaelemektől nem függő rezonanciaváltozóval kapott librációs amplitúdók értékét jelenti - baricentrikus ekliptikai koordinátarendszerben -, és az utolsó oszlopban tüntettem fel a librációs szigetek átfedésének mértékét. (Ezen oszlopban a negatív előjel arra utal, hogy nincs átfedés. Átfedés akkor lenne, ha az amplitúdó a megadott érték abszolút értékével nagyobb lenne.)

Sorszám	Jelzés	e	A_1 [°]	A_2 [°]	Átfedés [°]
TNO 16	2000 FD8	0.221	107.6	244.9	43.3
TNO 23	1999 HT11	0.114	132.5	228.4	32.3
TNO 24	2000 OY51	0.232	80.6	260.3	53.5
TNO 25	2001 KJ76	0.079	107.4	179.9	-0.1
TNO 26	2001 KP76	0.189	149.4	304.1	82.7
TNO 27	2001 KP77	0.175	101.8	238.2	38.8
TNO 28	2002 PA149	0.174	121.4	266.2	57.5
TNO 32	2001 KO76	0.111	105.0	184.0	2.6
TNO 33	2002 PB171	0.125	38.4	157.6	-14.9
TNO 41	1999 CO153	0.085	126.7	187.4	4.9
TNO 65	1999 HG12	0.156	52.7	173.6	-4.2
TNO 68	1999 KR18	0.209	69.3	236.5	37.7
TNO 93	2000 OP67	0.189	62.7	211.8	21.2
TNO 123	2001 QE298	0.155	82.0	194.9	9.9
TNO 164	2003 QX91	0.251	57.4	313.9	89.2
TNO 165	2003 QW111	0.113	98.4	195.6	10.4
TNO 196	2004 OK14	0.243	128.0	317.0	91.3
TNO 198	2004 PW107	0.131	132.3	248.6	45.8
TNO 205	2004 VU75	0.133	145.6	242.6	41.8
TNO 208	2004 VF131	0.214	92.3	256.3	50.9
TNO 225	2005 SF278	0.187	92.8	308.1	85.4

1. táblázat. TNO-k adatai

1. Függelék

TDK munkám során C nyelven írt programokkal, illetve MATLAB-bal dolgoztam. Témavezetőmtől azt a feladatot kaptam, hogy vizsgáljam meg, hogyan viselkedik a hagyományos és a pozíciószögeken alapuló rezonanciaváltozó az idő függvényében. Ehhez a következőket tettem meg:

- Először kisebb időintervallumokra futtatva a programokat, azt elemeztem, hogy milyen érzékenyen függenek az eredmények a bemenő adatoktól: elsősorban az excentricitástól és félnagy tengelytől (ezek vizsgálatához olykor extrém, fiktív értékeket is megadtam, hogy megnézzem, milyen küszöbértékek mellett fordul át a dolgozatban tárgyalt libráció cirkulációba). Majd ezen tulajdonságok feltérképezését követően egyre növeltem a numerikus integrálás T idejét: egészen egymillió évig - nem érdemes sokkal ezen érték fölé menni, hiszen az elvárt pontosság nagyságrendileg millió évig biztosítható.
- A mozgásegyenletek integrálását heliocentrikus és baricentrikus ekliptikai koordinátarendszerben egyaránt elvégeztem. Az ezekhez szükséges - megfelelő koordinátarendszerben vett - kezdeti, bemenő pályaelemeket a NASA JPL Horizons nevű honlapjáról kértem le.
- A végleges, TDK dolgozatban is közölt adatokat tehát úgy nyertem, hogy a 21, 7:4-es rezonanciában lévő TNO mozgásegyenleteit integráltam numerikusan egymillió évre ekliptikai koordinátarendszerekben, előbb a hagyományos, majd a pozíciószögeken alapuló rezonanciaváltozó időbeli viselkedését kiszámító C-programok segítségével.
- A kvantitatív elemzéshez a MATLAB-ban végeztem számításokat: vizsgáltam az egyes TNO-k esetében a rezonanciaváltozók különbözőségéből fakadó librációs amplitúdó növekedését, a librációs szigetek kiterjedését, illetve átfedésük mértékét (utóbbira - ismerve a megfelelő égi mechanikai és matematikai összefüggéseket - egy képletet is felállítottam).
- Az eredmények illusztrálásához felhasznált, dolgozatban található ábrákat is MATLAB-ban készítettem.

Hivatkozások

- Gladman, B., Lawler, S. M., Petit, J.-M., Kavelaars, J., Jones, R. L., Parker, J. W., Van Laerhoven, C., Nicholson, P., Rousselot, P., Bieryla, A., and Ashby, M. L. N.: 2012, The resonant trans-Neptunian populations, *The Astronomical Journal* **144**, 23
- Gladman, B., Marsden, B. G., and Vanlaerhoven, C.: 2008, *Nomenclature in the Outer Solar System*, pp 43–57
- Hahn, J. M. and Malhotra, R.: 2005, Neptune’s Migration into a Stirred-Up Kuiper Belt: A Detailed Comparison of Simulations to Observations, *The Astronomical Journal* **130**, 2392
- Henrard, J. and Lamaitre, A.: 1983, A second fundamental model for resonance, *Celestial Mechanics* **30**, 197
- Levison, H. F., Morbidelli, A., Van Laerhoven, C., Gomes, R., and Tsiganis, K.: 2008, Origin of the structure of the Kuiper belt during a dynamical instability in the orbits of Uranus and Neptune, *Icarus* **196**, 258
- Lykawka, P. S. and Mukai, T.: 2005, Exploring the 7:4 mean motion resonance I: Dynamical evolution of classical transneptunian objects, *Planetary and Space Science* **53**, 1175
- Murray, C. and Dermott, S.: 1999, *Solar system dynamics*, Cambridge University Press
- Érdi, B.: 2001, *A Naprendszer dinamikája*, ELTE Eötvös Kiadó
- Érdi, B.: 2011, Third order resonances in the second fundamental mode of resonance, *PADEU* **20**, 23
- Érdi, B., Rajnai, R., Sándor, Z., and Forgács-Dajka, E.: 2012, Stability of higher order resonances in the restricted three-body problem, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **113**, 95
- Yeh, L.-W. and Chang, H.-K.: 2009, Neptune migration model with one extra planet, *Icarus* **204**, 330