



Eötvös Loránd
Tudományegyetem
Tanító- és Óvóképző
Kar



Általános iskolai kombinatorikatanítás Magyarországon a komplex matematikatanítási kísérletről napjainkig

Tudományos Diákköri Dolgozat

Szerző:
Mezei Lilla Virág
tanító szak III/5.

Témavezető:
Szabóné Dr. Szitányi Judit
adjunktus

Budapest
2015

Tartalom

1. Bevezetés.....	2
1.1. A témaválasztás indoklása.....	2
1.2. Kutatási kérdéseim.....	3
1.3. Kutatási módszereim.....	3
1.4. Hipotézisem.....	4
2. A komplex matematikatanítási kísérlet és hatásai a mai matematikatanításra.....	5
2.1. Varga Tamás és a komplex matematikatanítási kísérlet.....	5
2.2. Kombinatorika a komplex matematikatanítási kísérletben.....	8
3. Kombinatorika az alsó tagozatos tananyagban.....	10
3.1. Kombinatorika a komplex kísérlet tantervi anyagában, az 1978-as tantervben és az 1987-es módosított tantervben.....	10
3.2. Kombinatorika a Nemzeti Alaptantervben és a kerettantervben. A kombinatorika, valószínűség és statisztika bekerülése a tantervekbe.....	11
3.3. A kombinatorika tanításának módszertana.....	14
4. Tankönyvelemzés.....	17
4.1. A tankönyvek feladatainak elemzési szempontjai.....	17
4.2. A komplex matematikatanítási kísérlet és az új matematika-tanterv idején érvényben lévő tankönyvek összehasonlítása a most érvényben lévő könyvekkel.....	30
4.3. A komplex matematikatanítási kísérlet előtti tankönyvek.....	37
5. Felvételi feladatsorok feladatainak elemzése.....	38
6. Összegzés.....	42
7. Irodalom.....	44
8. Mellékletek.....	49

1. Bevezetés

1.1. A témaválasztás indoklása

Azért választottam ezt a témát, mert mindig is szerettem kombinatorikai feladatokat megoldani. Úgy vettem észre, hogy ezeknek a feladatoknak a megoldásához másfajta gondolkodásmódra van szükség, mint a matematika egyéb területén fellelhető feladatok megoldásához. Úgy érzem, hogy ez egy sajátos területe a matematikának, ezért sajátos módszereket igényel a tanítása is. Fontosnak tartom a kombinatorikus gondolkodás fejlesztését már általános iskolától kezdve. Ha tanítóként fogok dolgozni, szeretnék kellően nagy hangsúlyt fektetni a matematikának erre a területére a matematikaórai feladatokban.

A kombinatorika tudományának fejlődéséhez számos magyar matematikus hozzájárult, például Erdős Pál, Gallai Tibor, Hajnal András, Katona Gyula, Lovász László, Pósa Lajos és Rényi Alfréd. Részben az ő munkásságuknak köszönhető, hogy a kombinatorikát „magyar tudománynak” is nevezik. Varga Tamás felismerte a téma jelentőségét és tanításának fejlesztő hatását, ezért beépítette a közoktatásba már kisgyermekkortól kezdve. A Varga Tamás által vezetett komplex matematikatanítási kísérlet pszichológiai vizsgálatát Klein Sándor végezte (Klein, 1980), de a kísérlet és hatásainak hiteles, átfogó vizsgálata nem történt meg.

A kutatómunka során kíváncsi voltam arra, hogy hol a helye ennek a témának a matematika tanításában, valamint tudni szerettem volna, hogy melyek a kombinatorika tanításának gyökerei. Az ELTE-TÓK Matematika Tanszékén lehetőséget kaptam arra, hogy megismerjem a kombinatorika tanításának kezdeti lépéseit, mivel a tanszéken hozzáférhetőek a komplex matematikatanítási kísérlet egyes dokumentumai. Ezek között olyan kéziratot is találtam, amely eddig még nem volt kiadva.

1.2. Kutatási kérdéseim

1. Hogyan kezdték a kombinatorika tanítását a magyar közoktatásban?
2. Történt-e változás az elmúlt években a közoktatásban a matematika területeinek egymáshoz viszonyított arányát tekintve? Változott-e a kombinatorika tanításának hangsúlya?
3. A kombinatorika önálló témakörként vagy a matematika más területeivel összekapcsolva jelenik meg a közoktatásban?
4. A kombinatorika nagyobb hangsúllyal jelenik-e meg a felvételi feladatsorokban, mint a tanórai keretek között?

1.3. Kutatási módszereim

A téma teljes körű feltérképezése a TDK dolgozat keretein túlmutatna, ezért vizsgálatomat a szakirodalom feldolgozására és a dokumentumok elemzésére szűkítettem.

Kérdéseim megválaszolásához a következő módszereket alkalmazom:

1.3.1. Szakirodalom feldolgozása

- Felkutatom és feldolgozom a Varga Tamás által vezetett komplex matematikatanítási kísérlet dokumentumait.
- Feldolgozom napjaink szakirodalmát a kombinatorika tanításának módszertanáról.

1.3.2. Dokumentumelemzés

- Tájékozódok a kombinatorika témakör tantervi szabályozásáról 1-6. évfolyamon.
- Áttekintem a komplex matematikatanítási kísérlet idején érvényben lévő kísérleti és átmeneti, és az új matematika tanterv után bevezetésre kerülő tankönyveket.
- Megvizsgálom a jelenleg érvényben lévő tankönyveket: a Hajdu-féle tankönyvcsaládot, az Apáczai Kiadó tankönyveit és az OFI által kidolgozott kísérleti tankönyvcsaládot.
- Összehasonlítom a komplex matematikatanítási kísérlet idején használt és a 2014/2015-ös tanévben használható tankönyveket a bennük található kombinatorikus feladatok szempontjából.

1.4. Hipotézisem

Az alsós tankönyveket olvasva sok kombinatorikai feladatot láttam, például zászlószínezést, ruhák kiválasztását. Az egyetemen is sokat foglalkozunk a kombinatorika tantárgy-pedagógiájával. A komplex matematikatanítási kísérlet idején kezdték el beépíteni a tananyagba a kombinatorikát a többi új témakörrel együtt.

Abból indultam ki, hogy Varga Tamás módszertani elveit a matematikatanítással kapcsolatban valószínűleg a legtöbb pedagógus már elfogadta. Azt is joggal feltételezhetem, hogy az elmúlt 30 évben a kombinatorika tanítása fejlődött, újfajta feladatokat találtak ki a pedagógusok és tankönyvszerzők, hiszen a matematika tudományán belül is nőtt a kombinatorika súlya. Ennek alapján a következő hipotézist fogalmaztam meg:

A kombinatorika tanításának hangsúlya nőtt a matematika tanításában a komplex matematikatanítási kísérlet óta. A kombinatorikus gondolatot igénylő feladatok számának aránya az összes feladat számához képest nőtt.

2. A komplex matematikatanítási kísérlet és hatásai a mai matematikatanításra

2.1. Varga Tamás és a komplex matematikatanítási kísérlet

Az 1960-as évektől kezdve Nyugat-Európában kezdeményezések indultak a matematikatanítás megújítására vonatkozóan az 1950-es évek végén kialakult "szputnyiksokk" hatására. Az első szovjet műhold fellövése után az Egyesült Államokban rádöbrentek, hogy természettudományos oktatásuk alacsony színvonalon áll, így reformmozgalom indult, főként a matematikatanításban. A reformtörekvések áttértek Nyugat-Európa országaira, majd Magyarországra is.

Fontosnak tartották a pszichológia új felfedezéseinek beépítését a matematika tanításába, így a főként Piaget kutatásaihoz kapcsolódó kisgyermekkori gondolkodás alakulását, a tevékenység gondolkodásfejlesztő hatását, és az egyéni fejlesztés, differenciálás fontosságát.

Az 1960-as évektől kezdve egyre több matematikatanár és tantárgypedagógus igyekezett változtatni módszerein, és tanítási kísérletek indultak több tantárgy keretein belül. 1962-ben Magyarországon rendezték meg az UNESCO-konferenciát. Varga Tamás matematika-didaktika kutató a konferencia előtt is érezte, hogy változtatásokra van szükség a matematikatanításban, viszont itt bizonyosodott meg arról, hogy sokan gondolkodnak hozzá hasonlóan. Így megindult a komplex matematikatanítási kísérlet az Országos Pedagógiai Intézet irányításával.

Varga Tamás és munkatársai dolgozták ki a komplex matematikatanítási kísérletet, melyhez tankönyvsorozat jelent meg, tanári kézikönyvekkel együtt. Emellett Varga Tamás, Radnainé Szendrei Julianna és C. Neményi Eszter, az Országos Pedagógiai Intézet munkatársai segédkönyveket írtak "Tantervi útmutató" címmel a tantervi anyag mélyebb megvilágítására.

Az 1963 szeptemberében indult komplex matematikatanítási kísérlet azért komplex, mert az elméleti tananyagot és a tanítási módszereket egymással párhuzamosan, egymást kiegészítve változtatták meg.

Az elméleti anyagot úgy módosították, hogy a régebbi számtan és mértan oktatása helyett „igazi matematikát” kezdtek tanítani a gyerekeknek 1. osztálytól, sőt, már az óvodától kezdve. Ennek fontos része volt, hogy újabb témákat vezettek be, melyeket addig

nem tanítottak, és az 1978-as új tanterv kiadása után is nehezen terjedtek el a matematikatanárok körében. Ezek közül azok a témák, melyek később a tantervbe is külön fejezetként kerültek be, a kombinatorika, valószínűség és a statisztika voltak. Ezek mellett több új témát bevezettek, például a halmazokat, a matematikai logikát és a számrendszereket (Pálfalvi, 2000).

Varga Tamás 1971-ben megjelent cikkének címe (*A kivételesek vannak többen*) is jelzi, hogy a matematika-didaktika kutató felismerte, hogy a gyerekek között nagy különbségek vannak értelmi, szellemi és lelki szempontból is, akár egyetlen évfolyamon belül is. Ezért nagyon fontos a differenciálás. A pedagógusnak mindenkivel az egyéni szintjén kell foglalkoznia, így tudja felzárkóztatni vagy fejleszteni a diákokat (C. Neményi, 2002).

A módszer legfontosabb szempontjai:

1. A valóságon alapuló, cselekvő, tevékenykedő tapasztalatszerzés.
2. A konkrétól fokozatosan, mindenkinek egyéni tempóban eljutni az absztrakthoz.
3. Hosszú érlelési idő biztosítása a fogalmak megértéséig, elvonatkoztatásáig.
4. A különféle képességek differenciált fejlesztése.
5. A gyerekek érdeklődésének felkeltése. Olyan feladatok adása, melyek érdeklik a gyerekeket, a matematika megszerettetése, élményszerűségének, szépségének megmutatása.
6. Valós matematikai problémák adása. Nem csak monoton számolás, hanem konkrét problémák megoldása, a számolás és mérés eszközként való felhasználása a cél eléréséhez. A matematika alkalmazhatóságának megmutatása a mindennapokban.
7. A munkaformák változatossága. Az eddigi kizárólagos frontális és egyéni munka helyett sok csoportmunka bevezetése (Cser - Varga, 1969).

1972-re az Országos Pedagógiai Intézetben elkészült az ideiglenes tanterv. 1974-ben a minisztérium megvizsgálta az összes folyamatban lévő matematikatanítási kísérletet, és a komplex matematikatanítási kísérletet választotta ki az új tanterv matematikai részének alapjául. Ennek eredményeképpen jött létre az 1978-as javított, átdolgozott matematika tanterv, melyet több lépcsőben vezettek be 1974 és 1978 között. 1978-ra már minden első osztályban ez volt érvényben.

A kísérleti időszakban a pedagógusok folyamatos és alapos felkészítésen vettek részt. A kísérletben való részvétel önkéntes volt. Amikor 1978-ban bevezették a tantervet, és már mindenkinek kötelező volt e szerint tanítani, a tanítók felkészítésére nem volt sem anyagi fedezet, sem elegendő idő. Varga Tamás szerint ez volt az egyik legfontosabb oka annak, hogy a módszer végül nem tudott úgy elterjedni, ahogyan szeretnék volna (C. Neményi, 2002).

Az 1978-ban bevezetett új, spirálisan felépülő tantervet felmenő rendszerben vezették be, és 1-8. osztályig tankönyvcsalád is készült a tanterv alapján. 1979-ben a középiskolai tankönyvsorozat is megjelent. A tanterv fejlesztésközpontú, a módszertani alapelvekben nagy hangsúlyt kap a komplexitás és a gyakorlatközpontúság. Sok megjelenik a tantervben Varga Tamás alapelvei közül, többek között a manuális tapasztalatszerzés, a fogalmak kialakítására hagyott hosszú érlelési idő és a matematika megszerettetése, az örömteli tanulás (Pálfalvi, 2000).

Az 1978-as tantervben az előző tantervektől eltérő módon külön jelent meg a törzsanyag és a kiegészítő anyag, a tantervi optimumot és minimumot is különválasztották, és megjelentek a fakultatív foglalkozások is.

1986-ra elkészült a tanterv korrekciója, a tanulói és tanítói segédletek átdolgozásával. A korrekció nagyban épült az elmúlt tanévek tapasztalataira, de az eredeti elképzelésekhez képest sok tekintetben visszalépést jelentett.

1995-ben megszületett a Nemzeti Alaptanterv, melynek tartalmában és szellemében érződik a komplex matematikatanítási kísérlet és az 1978-as tanterv hatása, hiszen sokan az eredeti csoport tagjai közül is részt vettek a tanterv kidolgozásában.

"A matematika alsó tagozatos tananyagában, felépülésében, a követelmények egymásra épülésében és módszertani ajánlásaiban a NAT egyenes folytatása az 1987-es korrigált tantervnek." (C. Neményi, 2002)

A fenti idézet a 2012-es NAT-ra szintén igaz, a Nemzeti Alaptanterv és a kerettantervek matematika fejezete még mindig nagyrészt a 1987-es tantervre, és annak elődeire épül.

2.2. Kombinatorika a komplex matematikatanítási kísérletben

A komplex matematikatanítási kísérlet során, majd az 1978-ban bevezetett tantervben a kombinatorika is bevezetésre került, mint új témakör. Ezelőtt a kombinatorikát nem tanították a közoktatásban, a gyerekek csak a számtani anyagban találkozhattak néhány egyszerűbb kombinatorikai feladattal. Többek között azért került be az oktatásba ez a témakör, mert a matematikatudomány fontos része, és a komplex matematikatanítási kísérlet „valódi matematikát” tanított. Másrészt a kombinatorika alapfokon nagyon jól építhető manuális tevékenységekre, tapasztalatokra, és rendkívül jól fejleszti a logikus, rendszeres gondolkodást.

A kísérlet során arra a megállapításra jutottak, hogy minél hamarabb érdemes elkezdni a kombinatorikus gondolkodás megalapozását a többi matematikai témakör mellett. Így megfelelő előkészítéssel és elegendő érési idő biztosításával a kombinatorikai gondolkodás megfelelő szintre juthat, mire például a valószínűség-számításban kell majd felhasználni eszközként.

A három új témakört (statisztika, kombinatorika, valószínűség) a matematikatanításra szánt idő egytizedében érdemes oktatni Varga Tamás szerint.

Varga Tamás *Valószínűség, kombinatorika és statisztika az általános iskolában* című kéziratában összefoglalta a **kombinatorikai gondolkodás fejlődésének szakaszait**:

1. Adott feltételeknek megfelelő konstrukció létrehozása.
2. Több különböző konstrukció, majd minél több különböző konstrukció létrehozása.
3. Összes lehetőség megtalálása, és annak belátása, hogy több eset nem lehetséges.
4. Áttekinthető rendszerezés.
5. A konstrukciók elkészítése helyett a figyelem az esetek számára irányul.
6. Absztrahálás. Azonos matematikai tartalmú feladatok ekvivalenciájának felismerése. (Ennek felismerését megkönnyítheti a fa-gráffal való szemléltetés.)
7. Általánosítás. Olyan feladatok rokonságának felismerése, melyek csak a matematikai változóknak különböznek.
8. Matematikai változók változtatásával kapott számadatok táblázatba rendezése.
9. Táblázatokban szabályosságok megfigyelése, magyarázat keresése.
10. Több táblázat közötti összefüggés keresése.
11. Több táblázat közötti összefüggés magyarázata.

Varga Tamás fontosnak tartotta a kombinatorika tanításakor ugyanúgy, mint más témakörök esetében azt, hogy a tanító igazodjon a gyerekek mindenkori fejlettségi szintjéhez, hogy aktívan bevonja őket az ismeretszerzésbe, és hogy az életkornak megfelelő módszerekkel, az életkornak megfelelő tananyagot tanítson a gyerekeknek.

A kombinatorika tanítását más témakörökhöz hasonlóan manipulációval, a problémák valós megépítésével érdemes kezdeni. A rendszerezés kialakítását is érdemes így megtapasztaltatni, hiszen az építőelemek vagy színes rudak könnyen átrendezhetők (Pálfy, 1974). Ezután következhet a rajzon, színezésben való megjelenítés. Majd a gondolati tevékenység, fa-gráf, szorzásszabály megtapasztalása. Ha a gyermek a fogalomépülés folyamatában magasabb szintre jut, az esetek többségében ő maga utasítja el az eszközt, mert érzi, hogy már nincs szüksége rá (Varga, É. n.).

3. Kombinatorika az alsó tagozatos tananyagban

3.1. Kombinatorika a komplex kísérlet tantervi anyagában, az 1978-as tantervben és az 1987-es módosított tantervben

Az új matematika tanterv bevezetését hosszú, 1963 óta folyó kísérleti munka készítette elő. Ez folytatódott 1974-ben egy ideiglenes tantervvel, melynek kombinatorikára vonatkozó része az *1. mellékletben* található. Az ideiglenes tanterv a tanítás anyagára, példákra, és a ciklus végén elérendő követelményekre bontja az évfolyamonkénti leírásokat. A tanterv a következő összefoglalást adja az általános iskolai kombinatorikatanítás tevékenységeiről: „Szokványos és nem szokványos kombinatorikai problémák tapasztalati úton való tanulmányozása, törvényszerűségek keresése.” 1978-ban az általános iskolák első osztályaiban az új tanterv szerint kezdődött el a matematika tanítása.

Az 1978-ban életbe lépett új tanterv felülvizsgálata nyomán elkészült egy új, korrigált tanterv, mely a *2. mellékletben* látható. Ebben igyekeztek kijavítani a tanterv tartalmi hibáit, mert sok témánál nem szerepelt információ a megalapozó részre és az előkészítő ismeretekre vonatkozóan. Az anyag mennyiségén is változtattak, a tantervben ez nem volt elég egyértelmű és áttekinthető. A taneszközök, tanítói segédanyagok táráat is bővítették. A gyakorlatban meg tapasztalt hibák, a pedagógusok visszajelzései adtak segítséget a korrekcióhoz. A korrigált tantervben még nagyobb hangsúlyt helyeztek arra, hogy a kombinatorika, valószínűség és statisztika témákban a közös élményszerzés a legfőbb teendő.

Az 1987 szeptemberétől életbe lépő korrigált tanterv tartalmában kis mértékben csökkentették a 4. osztályos anyagot (útdiagram használata, kombinatorikus esetek számának sorozatba rendezése, relatív gyakoriság). A grafikonok készítése mellett azonban táblázatok, grafikonok olvasását is a tananyagba illesztették (C. Neményi, 1986). Az átdolgozott tanterv a tanítási anyag és követelmények mellett a feldolgozás funkciója oszlopban módszertani útmutatást ad a pedagógusoknak, és magyarázza az átdolgozás szükségességének okát. Az 1978-as tanterv részletes kidolgozottsága a megelőző hosszú kísérletező munkának is köszönhető.

3.2. Kombinatorika a Nemzeti Alaptantervben és a kerettantervben. A kombinatorika, valószínűség és statisztika bekerülése a tantervekbe

A tananyagot és a tanítási módszereket jelenleg a NAT 2012 szabályozza a legfelső szinten. A NAT fogalmazásai általánosak, a fejlesztendő képességeket határozzák meg, nem pedig az ismeretek és képességek rendszerét. A NAT meghatározza, hogy a matematika műveltségterületet az egyes matematikai témakörök összeépülésével, összekapcsolódásával kell tanítani.

A NAT rendelkezéseit a kerettanterv pontosítja. Rendezi azokat a fejlesztendő képességeket és elsajátítandó ismereteket, fejlesztési és nevelési célokat, melyeket a 2 évfolyamos ciklusok során ideális esetben el kell sajátítaniuk a tanulóknak. A tantárgyak közötti kapcsolódási pontokhoz is segítséget nyújt, és a kulcsfogalmakat is felsorolja.

Régen ez a szabályozás eggyel kevesebb elemből állt, ezért a tantervnek kellett azokat az elemeket tartalmaznia, amelyeket jelenleg a NAT és a kerettanterv együttesen foglal magába.

A komplex matematikatanítás anyaga 5 fő témakörből tevődik össze 1-8. osztályban: *Halmazok, logika; Számtan, algebra; Függvények, sorozatok; Geometria, mérések; Kombinatorika, valószínűség, statisztika.*

A NAT 5 fő témaköre hasonló: *Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok; Számelmélet, algebra; Geometria; Függvények, az analízis elemei; Statisztika, valószínűség.*

A régi tantervben és az 1986-os korrigált tantervben a *Kombinatorika, valószínűség, statisztika* különálló fejezetet alkotott. Ezeknek a matematikai tudományágaknak a bekerülése az alsó tagozatos tantervbe mutatta, hogy a tantervalkotók másként gondolkodnak a matematikatanításról. Varga Tamás és társai úgy gondolták, hogy nemcsak a gyermek számolási és mérési készségét kell fejleszteni, hanem az igényes, problémákra érzékeny, rugalmas gondolkodását is.

Ennek a három témakörnek nem elméleti feldolgozását akarták elérni a tanterv szerkesztői. A szemléletformálás hatékony eszközei ezek a témák, mert segítenek meglátni azt, hogy egy feladatnak többféle megoldása is lehet, és ha a feltételeket változtatjuk, akkor ennek megfelelően változik az eredmény is.

A kombinatorikus gondolkodás fejlődésével a tanulók fantáziája, képzelőereje is fejlődik. A sokféle kombinatorikus feladat megoldása közben a gyerekek felismerhetik a kombinatorika törvényszerűségeit is, viszont ezeket még nem mondjuk ki, hanem tapasztalati szinten maradunk. Kombinatorikai problémákkal más témakörökben is találkozhatnak, például aritmetika, oszthatóság és geometria témakörökben.

A valószínűség témakörön belül felismerhetik a véletlen szerepét a valóságban, és azt, hogy a véletlen jelenségeket is valamiféle törvényszerűség irányítja.

A statisztika témakör egyrészt azért fontos, mert a feladatok megoldása közben sokféle adatot kell kezelniük a gyerekeknek. Ahhoz, hogy átlássák ezeket az anyagokat, rendezniük kell őket, különféle módszerekkel szemléletesebbé tenni, másként elrendezni, áttekinthetőbbé tenni. Így egyszerűbben mondhatnak róluk ítéleteket és vonhatnak le belőlük következtetéseket. Másrészt, a mindennapi életben gyakran találkozhatnak grafikonokkal, táblázatokkal, melyeket tudniuk kell értelmezni.

A NAT (már az 1997-ben megjelent is) új témaként tartalmazza a *Gondolkodási módszerek* témakört, melyet nem a matematika külön fejezeteként tanítanak, hanem minden korosztályban a tanév során folyamatosan, minden témakörben megjelenik a feladatmegoldások kapcsán.

A NAT-ban megtartották ezt a három témát, viszont a *Kombinatorikát* a *Gondolkodási módszerek* közé sorolták, míg a *Valószínűség és Statisztika* új fejezetet kapott, szűkített tartalommal és időkerettel. A NAT 2012-ben és a kerettantervekben a *Kombinatorika* tehát a *Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok* témakörön belül jelenik meg.

A 2012-es Nemzeti Alaptanterv *Közműveltségi tartalmai között* a következő található meg a kombinatorikáról: 1-4. évfolyam: Néhány elem sorba rendezése, az összes eset megtalálása (próbálgatással). 5-8. évfolyam: Sorbarendezeési és kiválasztási feladatok az összes eset megadásával.

A *Fejlesztési feladatok* közül több alpont is kapcsolódik a kombinatorikához, például a *Megismerés* alponton belül „adatok jegyzése, rendezése, esetsorolások szempontok változtatásával”, az *Alkotás* és kreativitás alpontban „objektumok alkotása adott feltételek szerint, elemek elrendezése, rendszerezést segítő eszközök használata, kombinatorikus gondolkodás”.

A 2013-as kerettantervben megadják azt az órakeretet is, melyben a *Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok* című témakört kell

feldolgozni. Ez az általános iskolai tantervekben 1-2. évfolyamon folyamatos formában, későbbi évfolyamokon pedig 5, 6 vagy 7 órában, és emellett a tanév során folyamatosan jelenik meg. Az egyes évfolyamok órakeretei a 3. *melléklet* táblázatában láthatóak. Ez alapján láthatjuk, hogy a kombinatorika témakörének folyamatos, ismétlődő és bővülő problémák formájában való feldolgozását írja elő a kerettanterv.

A 2013-as kerettanterv kombinatorikára vonatkozó része – melyet a 3. *melléklet* táblázatában foglaltam össze évfolyamonként - igen hasonló az átdolgozott tantervhez. A tananyag egy részét későbbi osztályokra tolták. A fa-diagram használata például az ideiglenes tantervben 3., az átdolgozott tantervben 4. osztályban jelentkezik, míg a 2013-as tantervben ez csak 7-8. évfolyamtól kezdve tananyag. A kiválasztások az átdolgozott tantervben tevékenység és rajz szintjén már 1. osztálytól kezdve tananyagként számítottak, míg a 2013-as kerettantervben csak 5-6. évfolyamon jelennek meg.

A kerettantervből nem meglepő módon kiderül, hogy a hat- és nyolcosztályos gimnáziumokban alsóbb évfolyamokon megjelennek olyan matematikai tartalmak, melyek általános iskolában még nem. Ilyen például a faktoriális és permutáció fogalma a hatosztályos gimnáziumok 7-8. osztályaiban.

Az ideiglenes tanterv és az átdolgozott tanterv óta a kombinatorika területén a gyerekeknek nyújtott ismeretek, feljuk támasztott követelmények nem sokat változtak. Viszont több olyan tananyag is van, amely felsőbb évfolyamokon jelenik meg a 2013-as kerettantervben.

3.3. A kombinatorika tanításának módszertana

A következőkben összefoglalom a kombinatorika tanításának módszertanáról szóló legfrissebb álláspontokat.

A kombinatorika elsősorban gondolkodási és megismerési módszerek alapozását szolgáló témakör, mely hozzásegíti a gyermekeket a kombinatorikus gondolkodásuk, az elemző-, rendszerező-, és ítélőképességük fejlődéséhez.

A matematikai ismeretszerzés alapozó szakaszában a tanulók gyakran maguktól teszik fel a kérdést: „Hogyan lehet még?”, „Hányféleképpen lehet összesen?”.

A kombinatorikus gondolkodás kialakításának fokozatai nem választhatók szét élesen egymástól évfolyamonként. Általában először a feltételeknek eleget tevő néhány lehetőség, majd minél több lehetőség, majd az összes eset előállítása a feladat, ezután következik az összes eset rendszerezett előállítása, majd összefüggések felfedeztetése az elemszám növelésével. Első osztályban megelégszünk néhány, egymástól különböző lehetőség előállításával. Második osztálytól már az lehet a cél, hogy minél több esetet előállítsanak, egyszerűbb eseteknél akár az összeset, és célszerű elkezdeni rávezetni a gyermekeket a rendszerezett lejegyzés igényére. A 3-4. osztályos feladatok többségében már meg kell találni az összes esetet. Ezt segíti a rendszerezett lejegyzés, melynek sémáit a tanítónak kell megismertetnie a gyerekekkel. Emellett a rendszerezett felírás átláthatósága biztosítja azt is, hogy ugyanazt az esetet nem fogják többször felírni a tanulók (dr. Török, 2009).

A kombinatorika tapasztalati úton való tanítását korán kell kezdeni, éppen azért, mert a tárgyakkal való manipuláció, a tevékenykedtetés az első lépés a fogalmak épüléséhez és a formális műveletek megértéséhez, melyekkel a későbbi tanulmányaik során találkozni fognak a gyerekek.

A matematika tudományágán belül „a kombinatorika speciális tulajdonságokkal rendelkező, általában véges halmazok tanulmányozásával foglalkozik”. Általános iskolában véges halmazok elemeinek összeszámlálását jelenti. Az általános iskolai kombinatorikatanítás két fő kérdése: „Különböző eseteket vettünk sorra?” „Minden lehetőséget összeszámoltunk?”.

A kombinatorikatanítás egymásra épülő szintjei (Pintér, 2013):

1. Az esetek megkülönböztetése

- A különféle esetek felsorolásának tanítását már óvodás korban el kell kezdeni, majd 1-2. osztályban fokozatosan eljuttatni a tanulókat az összes eset megtalálásáig, esetek lejátszásával (például útdiagram lesétálása, kézfogások), szemléltetéssel, tevékenykedtetéssel (matematikai eszközökkel, például színes rúdkészlet, szöges tábla), majd a kirakásokról történő színezéssel, rajzzal.
- A feladat leírásában pontosan meg kell adnunk, hogy milyen eseteket tekintünk különbözőeknek, ügyeljünk a félreértésre lehetőséget nem adó megfogalmazásra, vagy beszéljük meg a feladatot. Segítséget nyújthat, ha az eseteket szóban azonosítjuk, ezzel a rendezést is előkészíthetjük.

2. Az összes eset felsorolása

- Ezen a szinten még nem kell odafigyelni a lehetőségek rendszerezésére, így indokolni sem tudjuk, hogy az összes esetet megtaláltuk.
- A kombinatorikai feladatok megoldása során az egyes problémákhoz mindig visszatérünk, gyakran úgy, hogy ugyanaz a matematikai tartalom más formában jelenik meg a feladatban. Ezen a szinten is megtehetjük, hogy újra elővesszük azokat a problémákat, melyeknél eddig csak minél több eset megtalálása volt a cél, és megpróbáljuk az összes lehetőséget előállítani.

3. Esetek rendszeres felsorolása

- Összetettebb problémák esetén erre a tevékenységre csak a formális műveleti szakaszban képesek a gyerekek, de 1-2 változtatott szempont esetén már 2-3. osztálytól elkezdhetjük a rendszerezést. A leghatékonyabb stratégia a rendszerezés előkészítésére, megértetésére, ha egy dolgot rögzítünk, és csak a többi változót változtatjuk. Könnyítheti a megértést és az esetek összeszámlálását a fa-gráf használata (természetesen a konkrét tapasztalatok után).

4. Formális módszerek alkalmazása

- Ezt a fajta tevékenységet csak 7. osztálytól várjuk el a gyerekektől. Ide tartozik a gráfes és dobozos ábrázolás, az útvonalak összeadási módszere, esetek lépésekre bontása, kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, feltételnek nem eleget tevő esetek összeszámlálása és kivonása az összes esetből, következtetés kisebb elemszámból kiindulva.

5. Struktúrák felismerése

- A tanulók akkor ismerik fel az egyes típusokat, ha már sokféle szöveggörnyezetben találkoztak velük. A típusok: ismétléses és ismétlés nélküli permutáció, variáció és kombináció. Az egyes struktúrák felismerése az olyan feladatokban hasznos, melyekben már nagy elemszámokkal dolgozunk, és az összes eset felsorolására nincs lehetőség.

Kombinatorikai feladatok a felvételin (már a nyolcosztályos gimnáziumba szólón is), és az érettségien is megjelennek, fontos tehát, hogy felkészítsük a tanulókat változatos kombinatorikai feladatok megoldására. Akkor tanítjuk jól a kombinatorikát, ha a gyermekek feladat- és problémamegoldó képességét fejlesztjük, és ábrázolási módokat, stratégiákat mutatunk nekik a feladatok könnyebb megoldásához.

A kombinatorika széleskörűen fejleszti a képességeket, többek között a problémamegoldó képességet, problémaérzékenységet, szövegértést, rendszerező képességet, a konvertáló és prediktív képességet. (Pintér, 2013)

A kombinatorika tanításában (úgy, mint más matematikai területek tanításában) fontos a fokozatosság, a valós tapasztalatokra épülő elvonatkoztatás. Az órákon megjelenhetnek tipikusan kombinatorikai problémák, de fontos, hogy más témákba ágyazottan is találkozzanak vele a gyermekek a tanév során folyamatosan, hiszen ebben a témakörben elsősorban a különféle gondolkodási műveletek és képességek fejlesztése a cél.

A napjainkban érvényes szemlélet a kombinatorika tanításának módszertanáról nem sokat változott Varga Tamás kísérlete óta. Az alapelvek lényegében megegyeznek a komplex matematikatanítási kísérlet idején összefoglalt alapelvekkel.

4. Tankönyvelemzés

4.1. A tankönyvek feladatainak elemzési szempontjai

Ahhoz, hogy megvizsgáljam a kombinatorika arányának változását a matematikatanításban, az 1-6. osztályos tankönyvekben és feladatgyűjteményekben fellelhető feladatokat elemeztem.

A tankönyvelemzés során a következőket vizsgáltam kérdéseim megválaszolásához:

Mekkora a kombinatorikai feladatok aránya az 1-6. évfolyam tankönyveiben, munkafüzeteiben és feladatgyűjteményeiben?

Hány darab olyan ezek közül, amelyben a kombinatorikai tartalom a hangsúlyos? Hány feladatban jelenik meg a kombinatorika más témakörrel összekapcsolódva, de ugyanolyan fontos szerepet betöltve? Hány feladatban jelenik meg a kombinatorika kevésbé hangsúlyosan, egyéb területekhez kapcsolódva?

Az 1-6. évfolyam tankönyveit vizsgáltam, minden évfolyamon **hatféle könyvet**:

1. A komplex matematikatanítási kísérlet idején érvényben lévő kísérleti (5. és 6. osztály esetén átmeneti) munkalapok
 - A táblázatokban és diagramokon rövidítve: „Kísérleti”, „Átmeneti”.
2. Az 1978-as tanterv bevezetése után használatban lévő munkalapok
 - A táblázatokban és diagramokon rövidítve: „Munkalap”.
3. 1-4. osztályban a kísérlet idején érvényben lévő feladatgyűjtemények, 5-6. osztályban a kísérlet idején érvényben lévő tankönyvek („kockás könyvek”)
 - A táblázatokban és diagramokon rövidítve: „Feladatgyűjtemény”, „Kockás”.
4. A tankönyvlistáról választható tankönyvek (1-2. és 5-6. osztályban a kísérleti, 3-4. osztályban a Hajdu-féle tankönyv)
 - A táblázatokban és diagramokon rövidítve: „Új Tankönyv”, „Hajdu Tk.”.
5. A tankönyvlistáról választható munkafüzetek (1-2. és 5-6. osztályban a kísérleti munkafüzet, 3-4. osztályban a Hajdu-féle Gyakorló)
 - A táblázatokban és diagramokon rövidítve: „Új Munkafüzet”, „Hajdu Gyakorló”.
6. Az Apáczai Kiadó tankönyvei
 - A táblázatokban és diagramokon rövidítve: „Apáczai Tankönyv”.

A komplex matematikatanítási kísérlet idejéből évfolyamonként három könyvet vizsgáltam, és napjaink könyvei közül is hármat. Összesen 16 888 darab feladatot vizsgáltam. Évfolyamonként átlagosan a komplex kísérlet idejéből 1127 darab feladat, az új könyvekből pedig 1687 darab feladat közül választottam ki a kombinatorikai feladatokat.

Az 5. és 6. évfolyamon azért választottam a kísérleti helyett az átmeneti munkalapokat, mert a kísérleti munkalapból csak olyanhoz fértem hozzá, melyben kevés volt az összes feladat száma, és hiányoztak is oldalak, így nem lett volna kimutatható a kombinatorikai feladatok valós aránya.

A 3. és 4. évfolyamon azért nem a kísérleti tankönyvet vizsgáltam, mert az még nem elérhető. Helyette dr. Hajdu Sándor könyveit választottam, mert ez a könyv rajta van az általános iskolában használható könyvek listáján, és úgy gondolom, hogy igencsak elterjedt tankönyv, sok iskolában tanítanak belőle.

A továbbiakban a komplex matematikatanítási kísérlet idejéről, és az 1978-as tanterv alapján készült könyveket összefoglalva „régi könyveknek”, a Hajdu-féle, a 2014-es kísérleti, és az Apáczai-tankönyveket pedig „új könyveknek” fogom nevezni az egyszerűség kedvéért.

A tankönyvek feladatai közül kiválasztottam azokat, melyekben kombinatorikai tartalom található, és 7 csoportra osztottam ezeket. A 4. *melléklet* táblázatában található az egyes tankönyvek kombinatorikus feladatainak kategóriákba sorolása.

A **hét csoportba** tartozó feladatokat a következőképpen választottam ki:

1. Azok a feladatok, melyekben a *kombinatorikai tartalom a hangsúlyos*.
2. Azok a feladatok, melyek megoldásához kombinatorikus gondolat szükséges, viszont a matematika *más területe hangsúlyosabb* a feladatban. A kombinatorikához leggyakrabban társuló területek alapján 3 részre osztottam ezt a kategóriát:

2/1. *Alakzatok*

2/2. *Számok*

2/3. *Összefüggések*

3. Azok a feladatok, melyekben a kombinatorika és más matematikai terület *nagyjából egyforma arányban* jelenik meg. A kombinatorikához leggyakrabban társuló területek alapján 3 részre osztottam ezt a kategóriát:

3/1. *Alakzatok*

3/2. *Számok*

3/3. *Összefüggések*

Az *alakzatok* kategóriába soroltam a geometriai jellegű és rajzos feladatokat (például „Hányféleképpen rajzolhatod meg az ábrát a ceruzád felemelése nélkül?”).

A *számok* kategóriához tartozónak ítéltam a számfogalom építését, számok, számjegyek, helyiértékek megértését, műveletek gyakoroltatását segítő feladatokat.

Az *összefüggések* kategóriába főként összetettebb feladatokat, függvények, sorozatok, logika és halmazok témakörrel foglalkozó feladatokat soroltam.

4.1.1. Példák az egyes kategóriák feladataira:

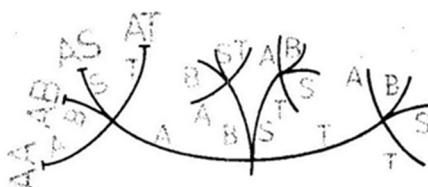
Az 1. (a kombinatorika hangsúlyos) kategóriába kerültek például az 1. ábrán, 2. ábrán és 3. ábrán látható feladatok:

17. a) Hány monogramot tudsz felírni az A, B, S, T betűkből?

Egy ilyen táblázatba az összes monogramot be tudod írni:

	A	B	S	T
A	AA	AB		
B				
S				
T				

Ilyen fára is elrendezheted őket:



b) Az E, M, K, J betűkből is írd fel az összes monogramot! Ehhez te készíts táblázatot! Készíts róla fát is!

c) Próbáld hasonló táblázat és fa segítségével felírni az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekkel képezhető összes kétjegyű számot!

18. Pisti piros és sárga golyókkal játszik. Mindig négyet rak egymás mellé, például így: piros piros piros piros
piros piros piros sárga
piros piros sárga piros
piros piros sárga sárga

Mindig új elrendezést próbál kirakni. Hány különböző elrendezést találhat?

1. ábra - Feladatgyűjtemény 4. o. 26/17-18.

9. Piros, sárga, zöld és kék színek felhasználásával rajzolj kétcsíkos zászlókat! Hányat lehet?
11. Az iskolából négy gyerek indult a kerületi futóversenyen: Ali, Béla, Csaba, Dani. Valaki azzal a hírrel jött, hogy az első három helyezett ebből az iskolából került ki, de a pontos sorrendet nem tudta. Milyen lehetőségek vannak?
12. Az A, Á, K, R betűket használhatod csak. Írj fel velük különböző betűkből álló hárombetűs „szavakat”: például AKR. Hányat találtál? Húzd alá közülük az értelmes szavakat!
13. Dallamot készítünk, csak a dó, mi, szó, lá hangokat használjuk.

2. ábra - Feladatgyűjtemény 4. o. 25/9-13.

Panni, Réka és Sári között kisorsolnak egy babát, egy macit és egy labdát. Hányféle eredménye lehet a sorsolásnak, ha minden gyerek egy játékot nyerhet?

P										
R										
S										

4

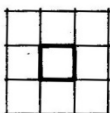
3. ábra – Hajdu Gyakorló 3. o. 183/4.

Azért soroltam a fenti feladatokat ebbe a kategóriába, mert a feladatok célja főként a kombinatorikus gondolkodás fejlesztése, az összes lehetőség keresése. Tantárgyi integráció is lehetséges néhány feladattal ezek közül, például ének-zene vagy magyar nyelv és irodalom területén. Ugyanakkor ezek azok a feladatok, melyek leginkább kapcsolódnak a hétköznapi élethez is. A 4. osztályos feladatgyűjtemény 17. feladatánál láthatjuk, hogy a megoldást többféle modell segítségével is szemlélteti a feladat. A gyerekeknek is azt a feladatot adja a B részben, hogy fa-gráfon és táblázatban is ábrázolják a lehetőségeket, így megtanulhatják az egyes rendszerezési módszereket.

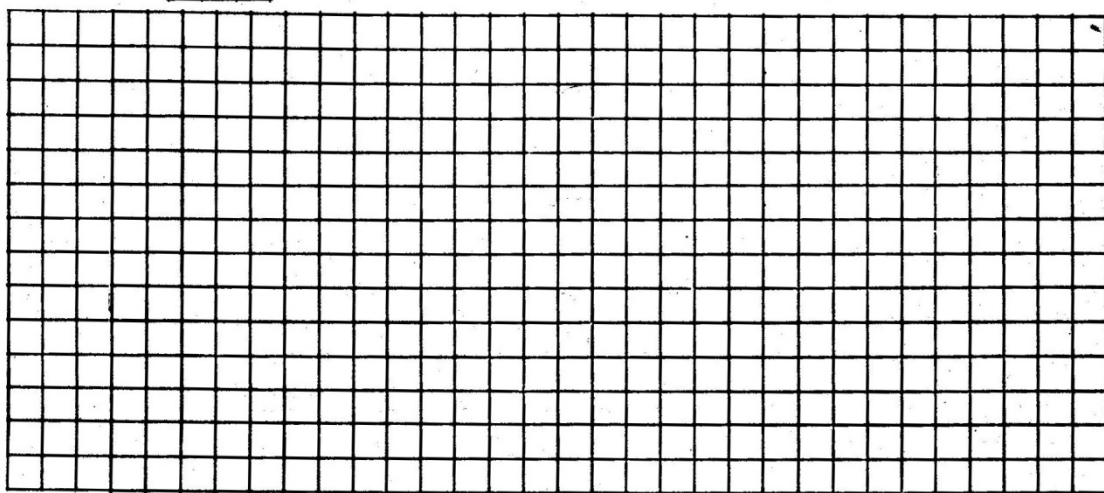
A 2/1. (kombinatorika az alakzatok témakörben) kategóriába került a 4. ábrán látható feladat:

2. Rajzolj 2, 4, 8 és 16 egységnyi területű téglalapokat, ha tudsz egyenlő oldalúakat is!

Ez az egység :



Rajzold be a tükörtengelyeiket is!



4. ábra – Munkalap 6. o. 72/2.

Ugyan többféle téglalapot is meg kell rajzolni, de a feladat nem kéri az összes lehetőség keresését. Az elsődleges cél inkább a téglalap és a terület fogalmának elmélyítése és néhány különböző eset megkeresése és vizsgálata. Emellett a tükörtengely keresése is megjelenik. Ugyanakkor, ha a tanító úgy ítéli meg, vagy az osztályban felmerül rá az igény, akkor az összes lehetőséget is megkereshetik a tanulók. Ebben az esetben a feladat kombinatorikussá válik.

2/2. (kombinatorika a számok témakörben) kategóriájának ítélték például az 5. ábrán látható feladatot:

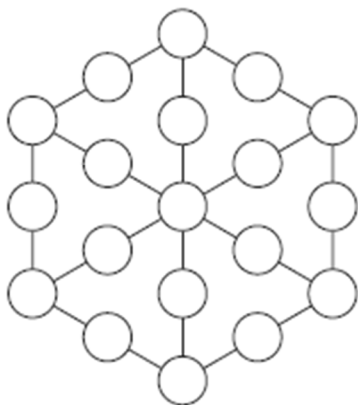
9. Bontsd tetszés szerinti számok összegére a 100-at!
Írd is le! Így: $100=50+50$; $100=80+10+10$; ...

5. ábra – Feladatgyűjtemény 3. o. 8/9.

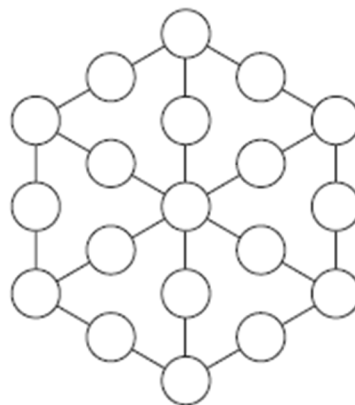
A cél a 100 bontásának és az összeadásnak a gyakoroltatása, viszont a feladat minél több lehetőség megkeresését kéri a gyerekektől. A tanulók versenyezhetnek, hogy ki talál többféle megoldást. Az esetek megkülönböztetése segíti a kombinatorikus gondolkodás fejlődését. Ha a tanító további feltételt ad meg, akkor az összes lehetőséget is felsorolhatják, például a két kerek tízesre bontásokat. Az elkezdett felsorolás alapján például az is lehet szempont, hogy csak olyan összegeket keressenek, melyekben két azonos szám található.

2/3.-as (kombinatorika az összefüggések témakörben) kategóriába soroltam például a 6. ábrán látható feladatot:

3. Az ábrán látható 19 körbe írd be 1-től 19-ig az egész számokat úgy, hogy a hat kis háromszög minden oldalán a három szám összege
a) 22;
b) 23 legyen!



b) 23 legyen!

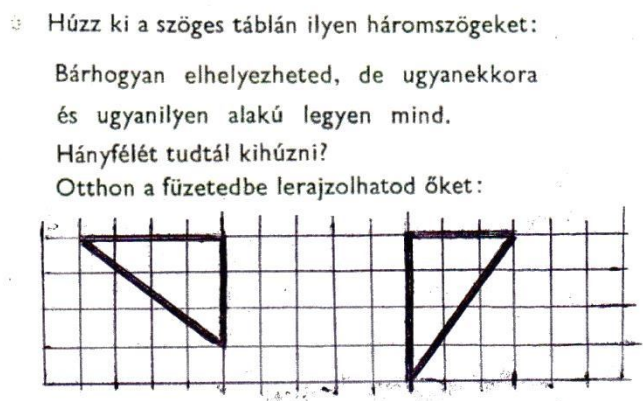


6. ábra – Új Munkafüzet 5. o. 104/3.

Ennek a feladatnak a megoldásához főként az összefüggések felismerése és logikus gondolkodás szükséges. Viszont a feladat fejleszti a kombinatorikus gondolkodást is. A gyerekeknek úgy kell elhelyezniük a számokat, hogy a megadott szempont (a három szám összege) minden kis háromszög minden oldalán érvényesüljön. Ehhez a gyerekeknek próbálgatniuk kell majd, míg végül el tudják helyezni az összes 1 és 19 közötti egész számot

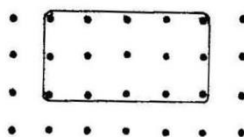
az ábrán. Egyrészt az is kombinatorikai gondolatot igényel, hogy a helyes változatot megtalálják. A feladat megoldásakor abból is ki lehet indulni, hogy a tanulók felírják a 19 három egész számra való bontásának összes lehetséges esetét. Ehhez is kombinatorikai gondolat szükséges. Ezután elkezdhetnek összefüggéseket keresni: mi az, ami biztosan szerepelni fog az ábrán, mi nem szerepelhet, mely számhármak lehetnek egymás mellett? Mely szám fordul elő legtöbbször? Középre például egy olyan számnak kell kerülni, mely legalább 6 bontásban szerepel. A számhármak közül melyik 12-t kell kiválasztanunk, melyeket be kell írunk a körökbe? A feladatnak több megoldása van, tehát az is feladat lehet, hogy más megoldást is keressenek. Azt is észrevehetik, hogy ha elforgatjuk az alakzatot, és így eljuthatunk a másik megoldáshoz, akkor tulajdonképpen nem egy újabb megoldást találtunk. Megfigyeltethetjük azt is, hogy az összeg változása esetén hogyan kell megváltoztatnunk a gondolatmenetet.

3/1.-es (kombinatorika és alakzatok témakör egyformán hangsúlyos) kategóriájúak a 7. ábrán és 8. ábrán látható feladatok:

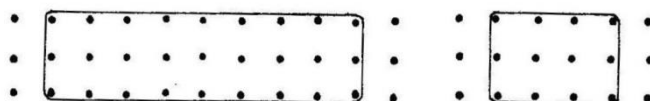


7. ábra – Feladatgyűjtemény 2. o. 92/6.

7. Húzz ki a szöges táblán ugyanilyen alakú téglalapokat!



El is fordíthatod, nagyobbra is tervezheted, de ne legyenek se soványabbak:

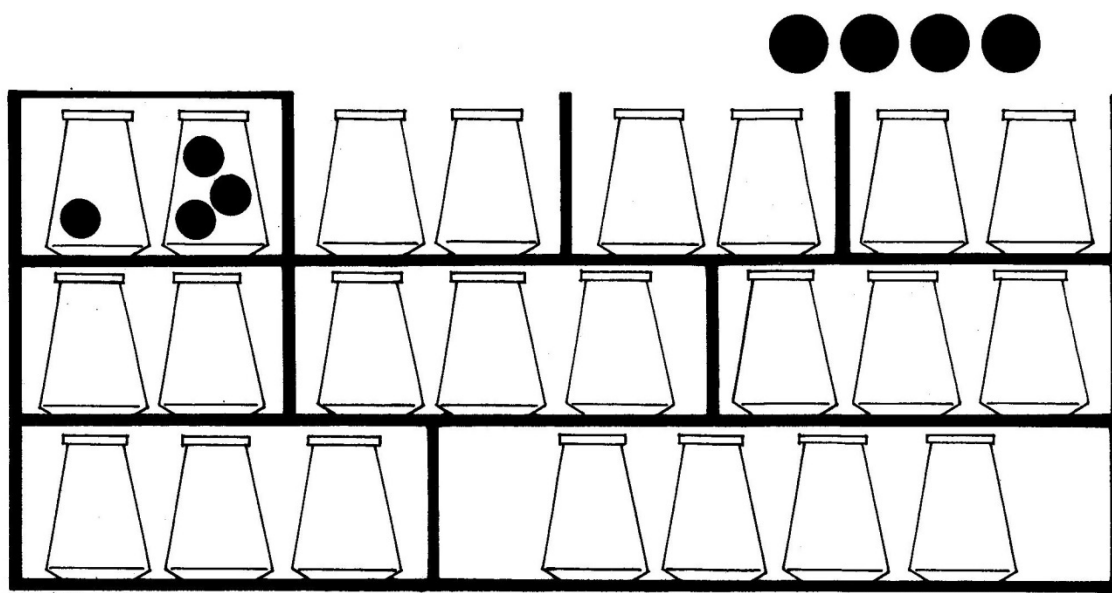


8. ábra – Feladatgyűjtemény 2. o. 93/7.

Ezeket a feladatokat azért soroltam ebbe a kategóriába, mert itt már azt is cél a geometria tartalom mellett, hogy az összes esetet megtaláljuk. Bizonyos szempontokat is megad a feladatíró, a 7. ábra feladatánál például azt, hogy milyen alakú és méretű háromszögekből kell az összes lehetséges esetet megtalálnia a tanulónak. A 8. ábra feladatánál a téglalap egyik oldalának hosszát köti meg a feladat. A halmaz végeességét a szöges tábla szélei jelentik.

3/2. (kombinatorika és számok egyformán hangsúlyos) kategóriába soroltam a 9. ábrán és a 10. ábrán látható feladatokat:

Helyezd a gyümölcsöket az üvegekbe!



9. ábra – Kísérleti 1. o. 10/1.

A számfogalom kialakítása, a számok bontása is megjelenik a feladatban. Viszont láthatjuk, hogy bár nem a gyerekeknek kell megtalálnia azt, hogy hány lehetőség van, hanem előre meg vannak adva a helyek, de meg kell keresnie az összes lehetőséget. Ha a feladat kombinatorikai tartalmát szeretnénk felhasználni, akkor azoknál a polcoknál, melyeken 2 üveg van, észre kell vetetnünk a tanulókkal, hogy több ábra szerepel a képen, mint ahány lehetőség van. Vagy ha az nem szempont, hogy minden üvegben legyen legalább egy gyümölcs, akkor a három- és négyüveges megoldásokból többet is meg tudunk adni.

2.Hányféleképpen tudod felírni az 5-öt három pozitív egész szám összegeként, ha a tagok sorrendje is számít?

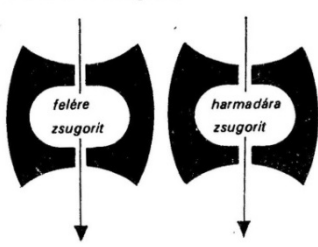
Hányféleképpen tudod felírni a 6-ot három pozitív egész szám összegeként, ha a tagok sorrendje is számít?

10. ábra – Munkalap 6. o. 92/2.

Ezt a feladatot azért ítéltém számokkal kapcsolatos, és egyben kombinatorikai feladatnak, mert a cél nem a bontás, összeadás gyakoroltatása, hanem az összes eset megtalálása, a feladat szövegében rá is kérdez: „Hányféleképpen?”. Viszont a kombinatorikai probléma a *számok* témakörrel összekapcsolva jelenik meg. A leírásban láthatjuk, hogy a tagok sorrendje is számít, az esetek keresésekor ezt is figyelembe kell venniük a tanulóknak.

A 3/3-as (kombinatorika és összefüggések egyformán hangsúlyos) csoporthoz tartozónak tekintettem a 11. ábrán látható feladatot:

2
Zsugorítógépek
 Két géped van. Az egyik minden zsineget a felére, a másik minden zsineget a harmadára zsugorít.



12 cm-es zsinegeid vannak.
 Hány centiméteres zsinegeket tudsz előállítani a zsugorítógépekkel? Írd le, melyiket hogyan kaptad!

Például a fél cm-et így:

12 $\xrightarrow{/3}$ 4 $\xrightarrow{/2}$ 2 $\xrightarrow{/2}$ 1 $\xrightarrow{/2}$ $\frac{1}{2}$

12 $\rightarrow$ _____

12 $\rightarrow$ _____

12 $\rightarrow$ _____

12 $\rightarrow$ _____

12 $\rightarrow$ _____

12 $\rightarrow$ _____

12 $\rightarrow$ _____

12 $\rightarrow$ _____

12 $\rightarrow$ _____

12 $\rightarrow$ _____

12 $\rightarrow$ _____

12 $\rightarrow$ _____

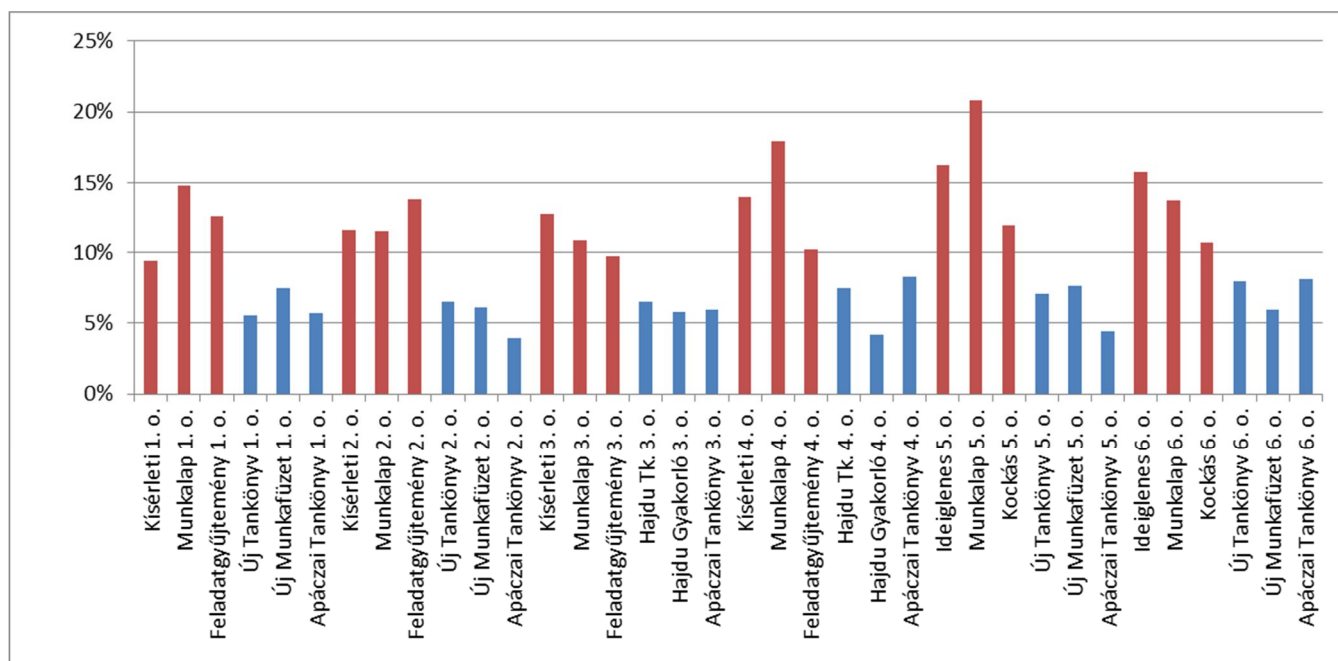
11. ábra – Munkalap 4. o. 72/2.

A feladatban megjelennek az összefüggések, hiszen a feladat egyben gépes játék is, és több gép működését kell összerendezni. A kombinatorikus tartalom is hangsúlyos, mivel sok esetet elő kell állítani. Az összes lehetőség megkeresését is kérhetjük, ha megadjuk, hogy hány lépéssel kell eljutni a végeredményhez. A feladatban megfigyeltethetjük a sorrend szerepét, és azt is, hogy minden lépésnél kétféle lehetőség közül választhatunk. Természetesen ennek segítségével az osztás műveletét, a törtek fogalmát és előállítását is gyakoroltatja a feladat.

Néhány esetben előfordult, hogy nem tudtam egyértelműen eldönteni, hogy melyik kategóriába soroljam a feladatot. Ilyen esetekben igyekeztem tapasztalataim alapján dönteni, és a régi és új tankönyvekben megtalálható hasonló jellegű feladatokat ugyanoda sorolni, ezzel biztosítottam a következetességet. Úgy gondolom, hogy ennek a bizonytalanságnak az aránya kismértékű. Ezért, és az egyforma elbírálás miatt ez nem fogja befolyásolni a kutatás eredményét.

4.2. A komplex matematikatanítási kísérlet és az új matematika-tanterv idején érvényben lévő tankönyvek összehasonlítása a most érvényben lévő könyvekkel

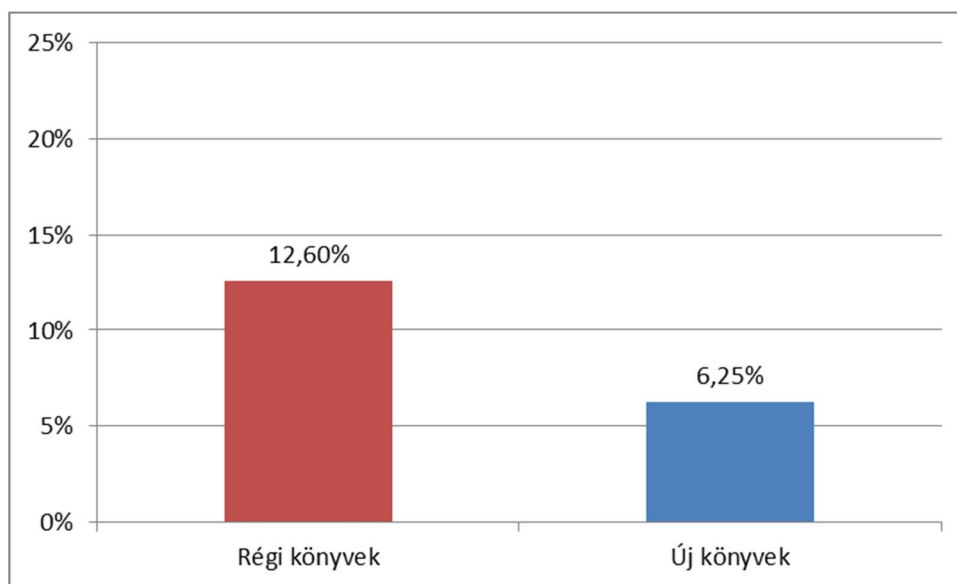
Hipotézisem alapján az volt a várakozásom, hogy napjaink tankönyveiben több kombinatorikai feladatot fogok találni, mint a régebbiekben. A vizsgálat során meglepő módon éppen ennek ellenkezője derült ki. A számadatok alapján, melyek az 5. mellékletben olvashatóak, az újabb könyvek nagyobb összes feladatszámuk ellenére kevesebb kombinatorikai jellegű feladatot tartalmaznak. Az 1. diagram mutatja a kombinatorikai jellegű feladatok arányszámát az összes feladathoz képest az egyes könyvekben. A piros oszlopok a „régí”, a kék oszlopok az „új” könyveket jelölik. Az egyes évfolyamok könyvei balról jobbra növekvő sorrendben szerepelnek a diagramon.



1. diagram

A diagram alapján látszik, hogy napjaink (a diagramon kék színnel jelölt) könyveiben számottevően kisebb a kombinatorikai feladatok aránya, mint a komplex matematikatanítási kísérlet idején érvényben lévő (a diagramon piros színnel jelölt) könyvekben.

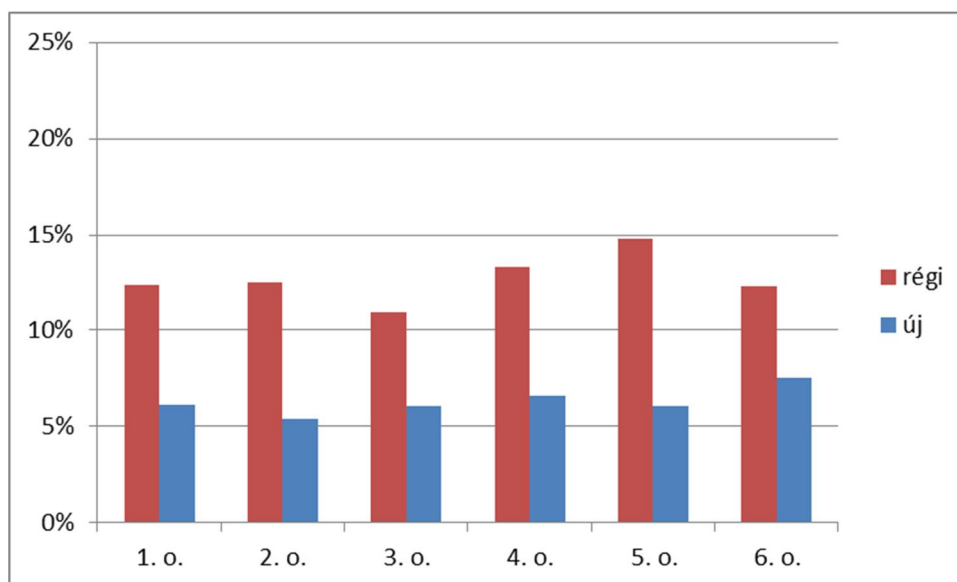
Összesítve a régi és az új könyvek kombinatorikai feladatainak aránya az összes feladathoz képest a 2. *diagramon* látható:



2. *diagram*

A régi könyvekben nagyjából kétszerannyi kombinatorikus tartalmú feladat volt, mint az újakban, ez jelentős eltérés.

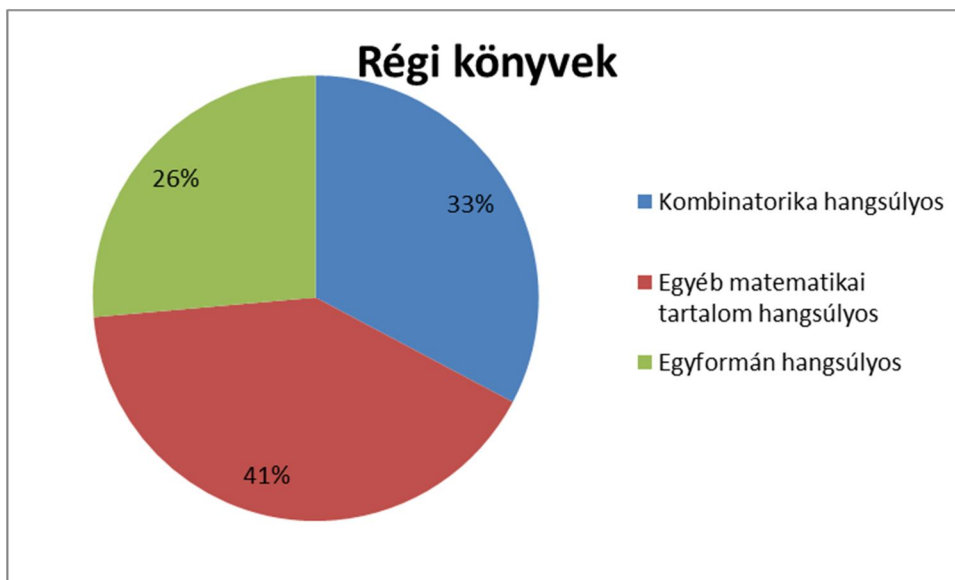
Az egyes évfolyamok „régi” és „új” könyveiben lévő kombinatorikus feladatok számának és az egyes évfolyamok régi és új könyveinek összes feladatszámának az arányát is megvizsgáltam. Szemléletesebb az ábra, ha egymás mellett tekintjük az egyes évfolyamok régi és új könyveinek átlagát – ezt a 3. *diagramon* láthatjuk:



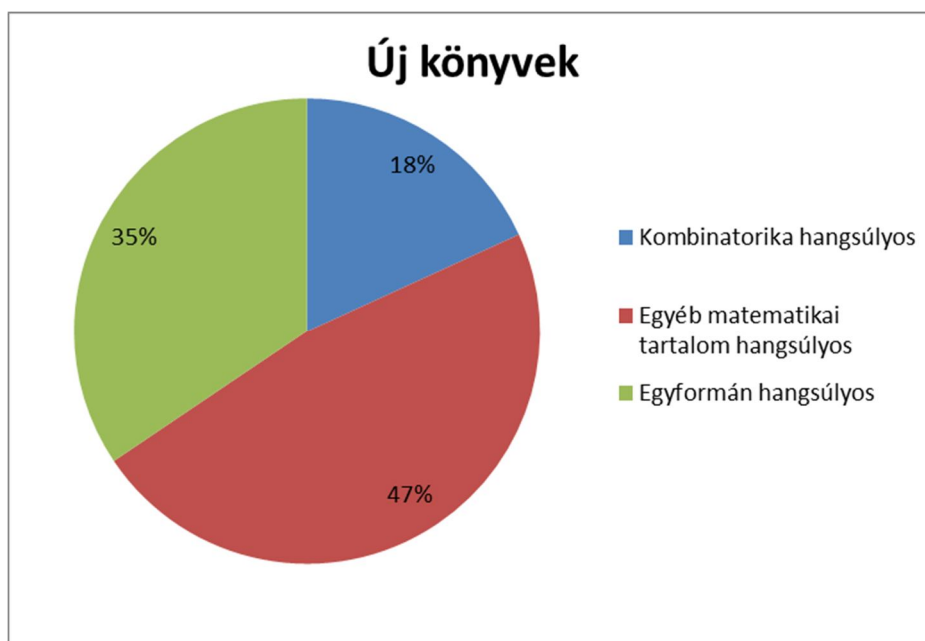
3. *diagram*

A diagram alapján látszik, hogy minden vizsgált évfolyamon $\frac{1}{3}$ és $\frac{2}{3}$ közötti az új könyvek kombinatorikai feladatszámának aránya a régi könyvek kombinatorikai feladatszámához. Ha külön a régi, és külön az új könyvek kombinatorikai feladatszámának arányát nézzük az egyes évfolyamokon, láthatjuk, hogy az adatok nagyságrendileg hasonlóak (a régi könyvek esetében 3%, az új könyvek esetében pedig 4% a legnagyobb eltérés).

A 4. diagramon és 5. diagramon szemléltetem a táblázatba besorolt, kombinatorikai feladatok megoszlását a 3 fő kategóriában, külön a régi és új tankönyvek esetében, az évfolyamokat és tankönyvtípusokat összesítve:



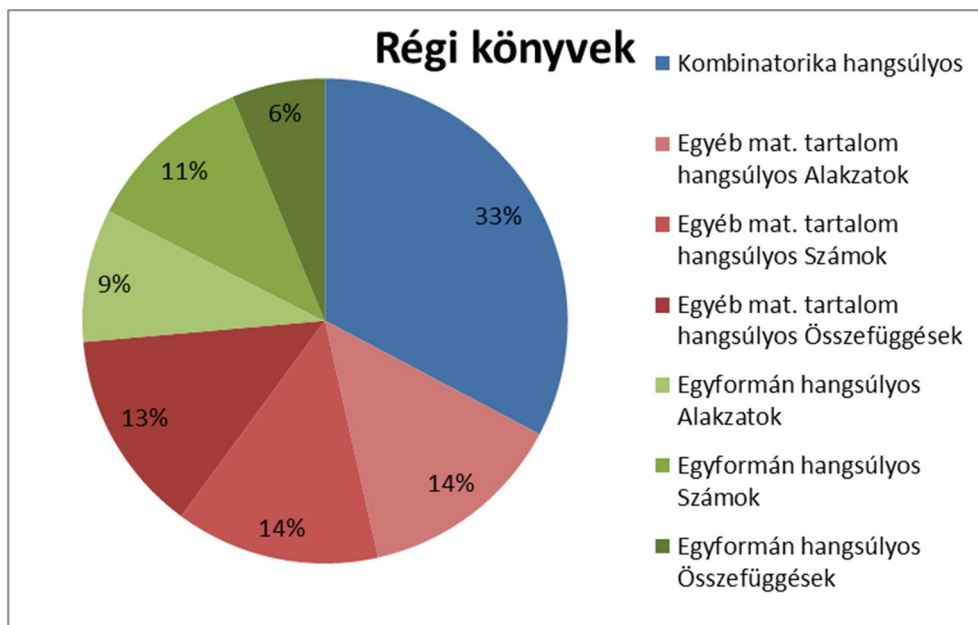
4. diagram



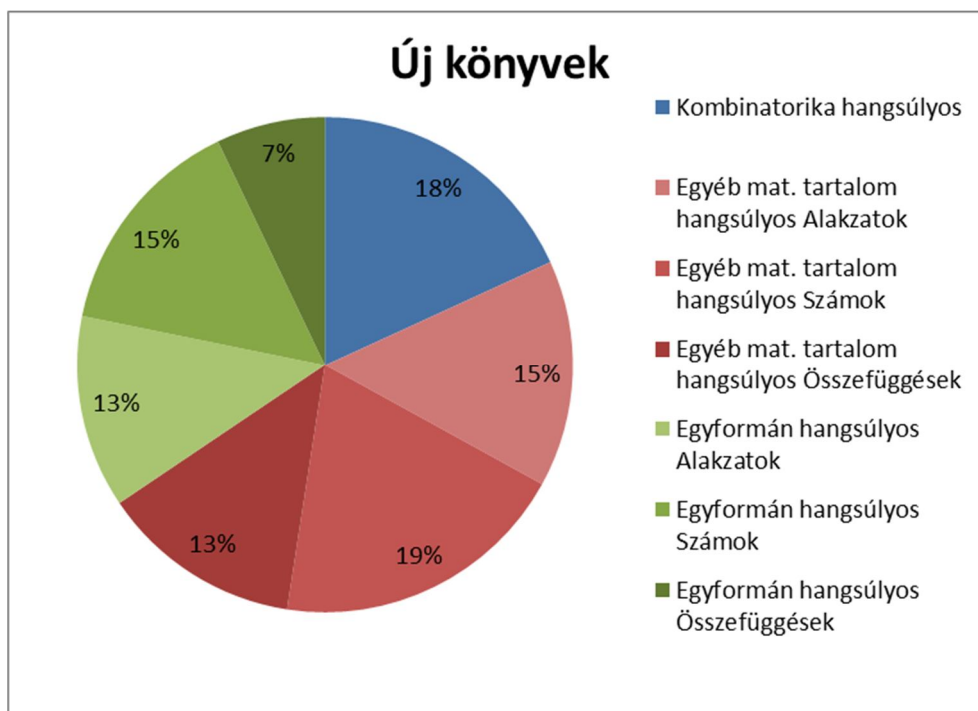
5. diagram

Az 4. *diagram* és 5. *diagram* alapján láthatjuk, hogy az új könyvek esetében a kombinatorikus feladatok között jóval kevesebb (feleannyi) az olyan feladat, melyben a kombinatorika önmagában jelenik meg. Az új könyvekben egyaránt nagyobb azoknak a feladatoknak az aránya, melyekben a kombinatorika önmagában, illetve melyekben más témakörrel együtt jelenik meg. Összességében, a régi és új könyvek esetében is a legtöbb kombinatorikai jellegű feladat az alapvetően más témájú, de kombinatorikai gondolatot is igénylő feladatok között található.

Arra is kíváncsi voltam, hogy a három fő kategórián belül van-e eltérés azoknak a témaköröknek az aránya között, melyekkel együtt jelenik meg a kombinatorika a feladatokban – az eredmény a 6. diagramon és 7. diagramon látható:



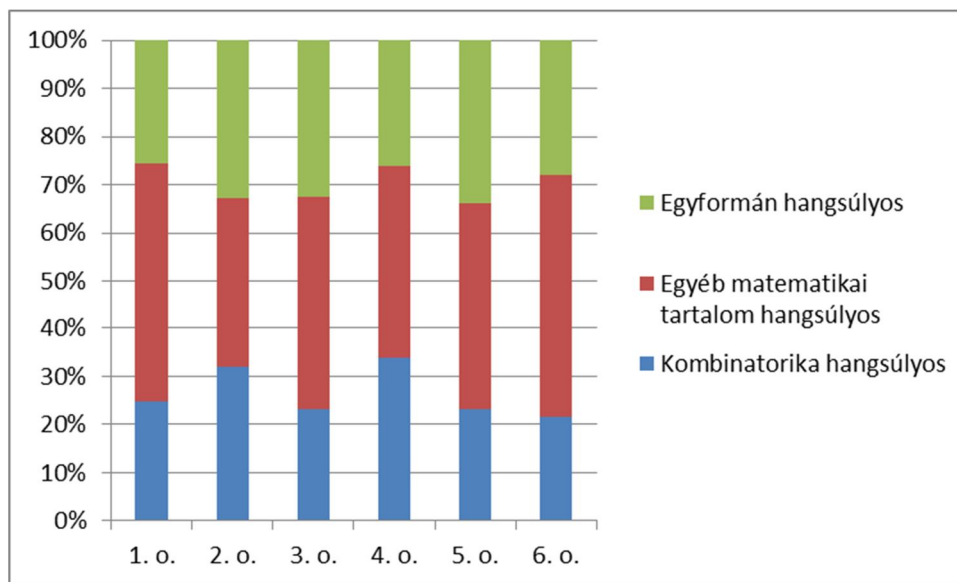
6. diagram



7. diagram

A három fő kategórián belüli arányok csak nagyon kis mértékben térnek el egymástól. Tehát az, hogy a kombinatorikai probléma milyen témakörhöz kapcsolódva jelenik meg a feladatokban, nem változott a komplex matematikatanítási kísérlet ideje óta.

A 8. diagram alapján láthatjuk a 3 fő kategória évfolyamonkénti arányát:



8. diagram

A diagramból kiderül, hogy az egyéb matematikai tartalmú feladat minden évfolyamon nagyobb arányban fordul elő a vizsgált tankönyvekben, mint a többi kategória feladatai. Az *egyformán hangsúlyos* kategóriájú, és a *kombinatorika hangsúlyos* kategóriájú feladatok változatosabb képet mutatnak.

A tankönyvelemzés során arra a megállapításra jutottam, hogy a vizsgált Hajdu-könyvekben, a 2014-es kísérleti könyvekben és az Apáczai-könyvekben lényegesen kevesebb (átlagosan feleannyi) a kombinatorikai feladat, mint az „új matematika tanterv” bevezetése idején.

Az újabb könyvekben a kombinatorikus feladatok között is kisebb (nagyjából feleannyi) azoknak a száma, melyeknek a kombinatorikai tartalma hangsúlyos.

4.3. A komplex matematikatanítási kísérlet előtti tankönyvek

Vizsgálatom nem terjedt ki a komplex matematikatanítási kísérlet előtti időkre. A módszertani irodalomból tudjuk, hogy a kombinatorikát ekkor még nem tanították (Szendrei, 2005). Viszont szerettem volna erről meggyőződni, és ennek érdekében megvizsgáltam néhány, a matematikatanítás reformja előtti tankönyvet és feladatlapot. A következő könyvek voltak számomra elérhetőek:

1. Csáki Imre – Géczy Etelka (1963): *Számolás - mérés 1.* Tankönyvkiadó, Budapest.
2. Gaál Géza – Váli Dezsőné (1963): *Számolás – mérés 4.* Tankönyvkiadó, Budapest
3. Jász Alajosné – Kelemen Jánosné – Lengyel Ferenc – Mosonyi Kálmán – Dr. Török Gyuláné (1964): *Feladatlapok a „Számtan – mértan 5.” könyvhöz,* Tankönyvkiadó, Budapest
4. Stanislav Kaderábek – Júlia Zilinková (ford. Kiss Gertrud, 1961): *Számtankönyv az alapfokú kilencéves iskolák 2. évfolyama számára*
5. Dr. Ungváry Gyula (1968): *Feladatlapok az általános iskola kísérleti negyedik osztályai számára.* Fővárosi Nyomdaipari Vállalat, Budapest.
6. Dr. Ungváry Gyula (1969): *Feladatlapok az általános iskola kísérleti ötödik osztályai számára.* Fővárosi Nyomdaipari Vállalat, Budapest.
7. Dr. Ungváry Gyula (1967): *Feladatlapok az általános iskola kísérleti 3. osztályú tanulói számára.* Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat, Budapest.

A lista első négy könyvének feladatait átnézve a többi tankönyv vizsgálatához kialakított hét kategóriám közül egyikhez sem találtam feladatot. Ez nem meglepő, hiszen ezeknek a könyveknek a használata idején még nem is volt tantervi anyag a kombinatorika, a legtöbb pedagógus valószínűleg nem is találkozott ezzel a témakörrel, hiszen a matematikatanításnak egy fiatal ágáról van szó.

Néhány olyan feladatot találtam, mely akár kombinatorikai feladattá is válhat, ha másként adjuk fel a feladatot. A *Számolás – mérés 1.* című könyvben a számok bontásához kapcsolódó feladatok lehetnek kombinatorikai gondolatot igénylők, például: képek alapján számok bontása kétféle színű korong segítségével, 1 Ft és 1 liter bontása táblázatosan (az egyik érték mindig meg van adva). A könyvekben egy olyan feladattípust találtam, amelyet besorolnék a kombinatorikus feladatok közé: „Hogyan lehet 100 Ft a kezében?” Ez is a

számok bontásához kapcsolódók, viszont itt a gyerekeknek kell előállítaniuk a lehetőségeket. Akár az összes esetet is megkereshetik, de ezt nem kéri a feladatíró.

Az átnézett feladatlapokban nem találtam kombinatorikához kapcsolható feladatot.

5. Felvételi feladatsorok feladatainak elemzése

A középiskolai központi írásbeli felvételi vizsgán a diákoknak magyar nyelvből és matematikából külön-külön 45 perc alatt kell megoldaniuk egy feladatsort. Mindkét tantárgy feladatsoránál a megszerezhető legmagasabb pontszám 50 pont. A matematika feladatsor 2003 óta 10 feladatból áll.

A feladatokat összeállító pedagógusok a Nemzeti Alaptanterv követelményei alapján dolgoznak, a forgalomban lévő tankönyvcsaládoktól függetlenül választják ki a feladatokat. Elsősorban az adott évfolyam előtti évfolyam tananyagát kéri számon az iskolánkénti eltérő haladási ütem miatt. A felvételi vizsga nem hagyományos tantárgyi teszt, célja a középiskolai továbbtanuláshoz szükséges alapvető készségek és képességek felmérése. A konkrét ismeretekről való számadás és begyakorolt eljárások alkalmazása mellett újszerű gondolkodást, problémamegoldást és kreativitást is igényelnek a feladatok. (Oktatási Hivatal).

Kíváncsi voltam arra, hogy milyen arányban jelennek meg a kombinatorikai feladatok a 4. osztályosoknak és 6. osztályosoknak szóló, hat- és nyolcosztályos gimnáziumba való felvételi feladatlapokon.

Azért érdekesek a felvételi feladatok, mert ezek mutatják az elvárásokat a gimnáziumban továbbtanulni szándékozó 4. és 6. osztályos tanulókkal szemben. Ezek által megtudhatjuk, hogy mit kellett volna már elsajátítania a diáknak ahhoz, milyen ismeretek és képességek birtokában kell lennie ahhoz, hogy felvegyék egy hat- vagy nyolcosztályos gimnáziumba.

Megvizsgáltam az Oktatási Hivatal honlapján megtalálható, 2001 és 2014 közötti felvételi feladatlapokat.

A felvételi feladatok közül azokat tekintetem kombinatorikusnak, melyekben hangsúlyos a kombinatorikai tartalom. Ez megjelenhet olyan módon, hogy az egész feladat jellege kombinatorikai, és más matematikai terület nem is igazán jelenik meg. De úgy is,

hogy más terület egyformán hangsúlyosan jelenik meg a kombinatorikával az adott feladatban. Ilyenek lehetnek például azok a feladatok, melyekben a számok tulajdonságainak figyelembevételével, esetleges szűkítéssel, kizárással kell megtalálni az összes esetet.

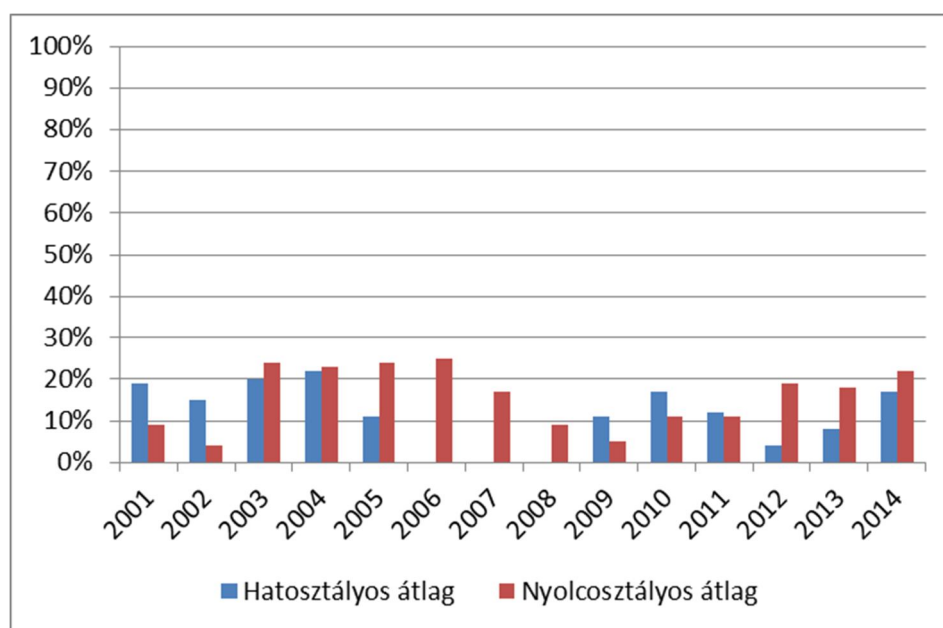
Előfordult, hogy egy feladatnak csak egy részfeladata volt kombinatorikai, ilyenkor csak ezt választottam ki. Olyan feladat is volt, mely a feladatlapon nem volt részfeladatokra bontva, viszont a javítókulcsban igen, és a részfeladatok alapján történt a pontozás. Itt megkerestem azt a részt, mely csak a feladat kombinatorikai részét pontozza.

A 6. mellékletben összefoglaltam, hogy az egyes feladatsorok mely feladatait tekintettem kombinatorikainak, és hogy ezek hány pontot értek. Az összesített számadatok a 7. mellékletben láthatóak.

Minden évből két hatosztályos és két nyolcosztályos gimnáziumba szóló felvételi feladatlapon vizsgáltam, ezek közül az egyik a pótfelvételi feladatlapja.

A felvételi feladatsorok összpontszáma minden esetben 50 pont volt.

A 9. diagram szemlélteti a 2001 és 2014 közötti felvételi feladatsorokban lévő kombinatorikai feladatok pontszámának arányát az összes feladat pontszámához viszonyítva. Kékkel jelöltem a hatosztályos, pirossal pedig a nyolcosztályos gimnáziumba szóló feladatlapok pontszámát. Az alap- és pótfeladatsorokat összevonva jelenítettem meg a diagramon.

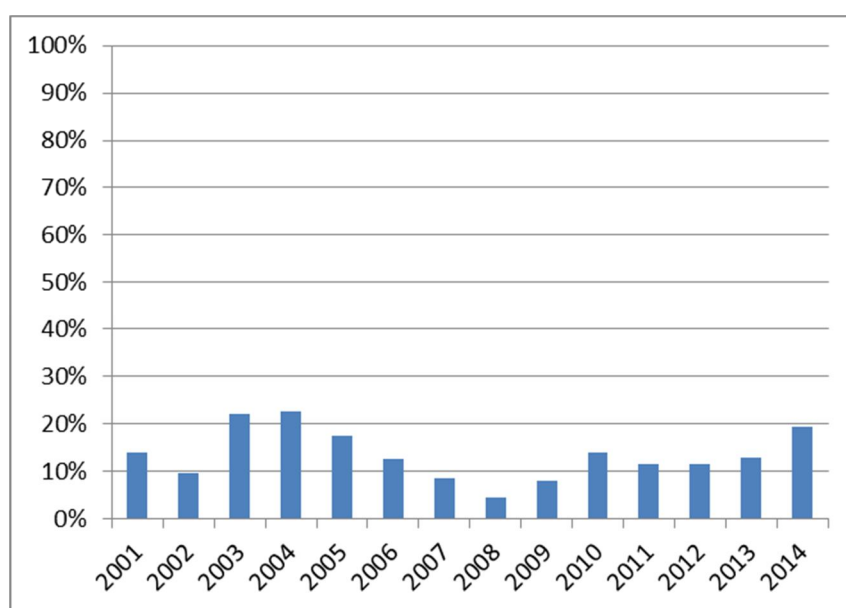


9. diagram

A diagramból látszik, hogy a felvételi feladatok kombinatorikai részében nem mutatható ki tendenciaszerű változás 2001 és 2014 között.

Annyi látható a diagramból, hogy 2006 és 2008 között egyáltalán nem szerepelt kombinatorikai tartalmú feladat a 6. osztályosoknak szóló felvételi feladatok között.

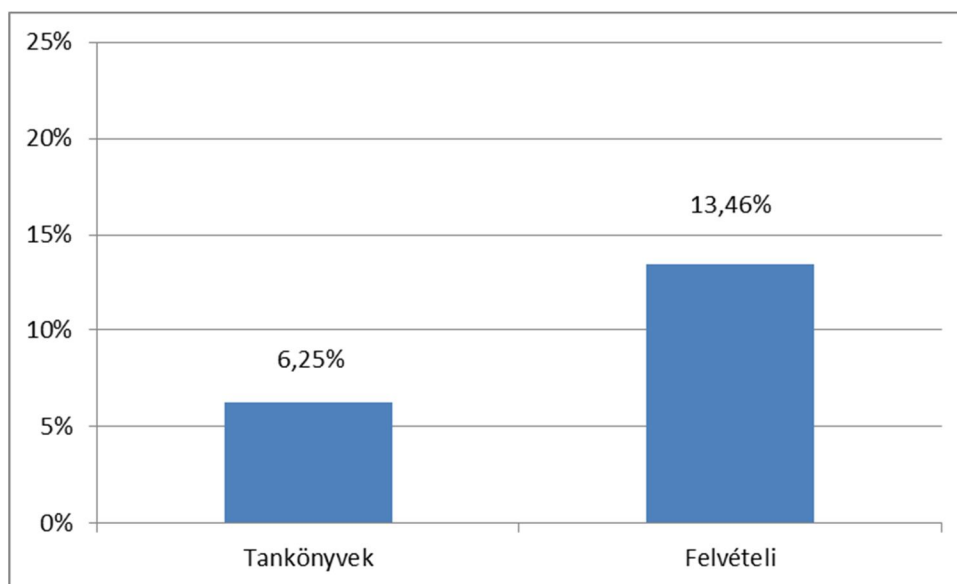
Évente is megnéztem a kombinatorikai feladatok pontszámának arányát az összes pontszámhoz viszonyítva, a hat- és nyolcosztályos gimnáziumba szóló feladatsorok pontszámát egyesítve – az eredmény a *10. diagramon* látható:



10. diagram

A diagramból az látszik, hogy 2003-ban és 2004-ben átlagosan több volt a kombinatorikai feladat, majd elkezdett csökkenni, és 2008-tól 2014 felé haladva ismét növekedésnek indult. Viszont a kiinduló adatok változatosságát tekintve ez a következtetés nem feltétlenül helytálló.

A 11. diagram azt mutatja, hogy hogyan viszonyul egymáshoz a kombinatorikus feladatok összes feladathoz (felvételi feladatsor esetében pontszámhoz) viszonyított százalékos aránya a vizsgált napjainkban használt tankönyvekben és a felvételi feladatsorokban:



11. diagram

A diagram alapján látható, hogy a felvételi feladatok között átlagosan nagyobb (több, mint kétszer akkora) a kombinatorikai feladatok aránya, mint a vizsgált tankönyvekben, munkafüzetekben és feladatgyűjteményekben. A kapott eredmény egyelőre csak találgatásokkal magyarázható.

Egyrészt, a kombinatorika témakörében jó lehetőség adódik játékos, rejtvénytűszerű és eredeti problémák megalkotására. Ahogyan az Oktatási Hivatal honlapján is olvasható, a felvételi feladatok újszerű gondolkodást, problémamegoldást és kreativitást is igényelnek.

Másrészt az lehet az ok, hogy a hat- és nyolcosztályos gimnáziumba felvételiző gyerekektől elvárják nehezebb feladatok megoldását is, melyek gyakran a kombinatorika témaköréből kerülnek ki.

Harmadrészt, a felvételire való felkészülés sok esetben a tanóra keretén kívül történik, ahol lehetőség nyílik a felvételi feladatsorok típusfeladatainak gyakorlására.

Én mégis úgy gondolom, hogy szerencsésebb lenne, ha az arányok közelebb kerülnének egymáshoz.

6. Összegzés

A számadatok vizsgálata során arra a megállapításra jutottam, hogy a tankönyvekben lévő kombinatorikai feladatok száma csökkent az 1978-as tanterv és az ahhoz kapcsolódó tankönyvek és feladatgyűjtemények óta. Minden évfolyamon ezt találtam, a százalékokban megmutatkozó eredmények nagyságrendileg közel állnak egymáshoz.

A felvételi feladatsorok feladatiban viszont nagyobb arányban jelenik meg a kombinatorika, bár az egyes évek feladatsorai eltérő képet mutatnak.

Tehát hipotézisemet, miszerint a kombinatorika tanításának hangsúlya nőtt a matematika tanításában a komplex matematikatanítási kísérlet óta és a kombinatorikus gondolatot igénylő feladatok aránya az összes feladat számához képest nőtt, el kellett vetnem.

Vajon mi lehet az oka annak, hogy hipotézisem megdőlt?

Egyrészt, lehet, hogy nem volt helytálló eredeti feltételezésem, miszerint a pedagógusok már elfogadták a Varga Tamás-féle szemléletet, a kombinatorika tanítására vonatkozó gondolataival együtt.

Az is meglehet, hogy a gyakorlatban kiderült, hogy a kombinatorika témakör problémáinak olyan mértékű feldolgozása, mint ahogyan az a kísérlet idején valósult meg, túl sok és túl bonyolult az alsó tagozatos és 5-6. osztályos gyermekeknek.

Az is lehetséges, hogy a tankönyvírók feleslegesnek tartják még több kombinatorikai feladat beépítését a könyvekbe, hiszen alsó tagozaton elsősorban a téma felé tapasztalati úton történő közelítésen van a hangsúly.

A tankönyvekben lévő kombinatorikai feladatok arányának változásának teljes körű vizsgálatához a köztes időszak, a komplex matematikatanítási kísérlet és a 2012-es NAT közötti időben használt tankönyveket is át kellene tekinteni. Amint elérhető lesz a 3. és 4. osztályos 2013-as kerettantervre alapozott kísérleti tankönyvcsalád, szeretném ezeket is bevenni a vizsgálatomba.

A későbbiekben szeretném óralátogatások során még jobban megismerni a kombinatorikatanítás helyzetét. A pedagógusokkal és leendő pedagógusokkal végzett kérdőívek és interjúk is megvilágíthatnák, hogy valójában milyen a pedagógusok

hozzállása a kombinatorika tanításához. Az is kiderülhetne ilyen módon, hogy a kis darabszámú tankönyvi példa ellenére a pedagógusok elegendő időt szánnak-e kombinatorikus feladatok megoldására, és érzik-e egyáltalán ennek szükségét.

Ezek kiderítése újabb kutatási irányokat jelölhet ki.

7. Irodalom

1. C. Neményi Eszter (1977): Az általános iskolák 1978-ban bevezetendő új matematika-tantervéről. *A matematika tanítása*, 1977/3. sz., 65-67.
2. C. Neményi Eszter (1986): *Útmutató az általános iskolai matematika tananyagának korrekciójához 1-4. osztály - Első rész*. Országos Pedagógiai Intézet, Budapest.
3. C. Neményi Eszter: (2002): Az alsó tagozatos matematika tantárgy helyzete és fejlesztési feladatai. *Új Pedagógiai Szemle*, 2002. december.
<http://epa.oszk.hu/00000/00035/00066/2002-12-hk-Nemenyi-Also.html> (Látogatás időpontja: 2014. október 22.)
4. Cervenakné Neményi Eszter – Dr. Göndöcs László – Merő Lászlóné – Varga Tamás (1974): *Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 1. osztályos anyagának tanításához*. Tankönyvkiadó, Budapest.
5. Cser Andor – Varga Tamás (1969): Tájékoztató a komplex matematikatanítási kísérletről. *Kapcsolat*, 8. sz., OPI, Budapest.
6. Dr. Szendrei János (1974): *Az általános iskolai matematika új tantervtervezete (Szegedi Módszertani Közl. 1974/1.)* In: Szemelvénygyűjtemény a matematika tanításához (szerk.: Dr. Vörös György, 1987). Tankönyvkiadó, Budapest.
7. Falus Iván - Ollé János (2000): *Statisztikai módszerek pedagógusok számára*. Okker Kiadó, Budapest.
8. Gordon Győri János - Halmos Mária - Munkácsy Katalin - Pálfalvi Józsefné (2007): *A matematikatanítás mestersége*. Gondolat Kiadó, Budapest.
9. Juhász Márta – Takács Ildikó (2007): *Pszichológia*. Typotex Kiadó, Budapest.
10. Klein Sándor (1980): A komplex matematikatanítási módszer pszichológiai hatásvizsgálata. Akadémiai Kiadó, Budapest
11. Köves Gabriella (2014): *A matematikatanítás változásai a XVI. századtól napjainkig*.
http://www.tani-tani.info/a_matematikatanitas_valtozasai (Látogatás időpontja: 2014. november 6.)
12. Oktatási Hivatal (2014): *Tájékoztató a középfokú beiskolázás egységes írásbeli felvételi vizsgáinak - matematika és magyar nyelvi – feladatlapjairól*.
http://www.oktatas.hu/koznevels/kozepfoku_felveteli_eljaras/2014_2015beiskolazas/i_rasbeli_vizsgak_feladatlapjairol (Látogatás időpontja: 2014. november 14.)

13. Oktatókutató és Fejlesztő Intézet (2012) *Matematika kerettanterv a gimnáziumok 5-12. évfolyama számára.*
14. Oktatókutató és Fejlesztő Intézet (2012): *Matematika kerettanterv a gimnáziumok 7-12. évfolyama számára.*
15. Oktatókutató és Fejlesztő Intézet (2012): *Matematika kerettanterv az általános iskola 1-4. évfolyamára.*
16. Oktatókutató és Fejlesztő Intézet (2012): *Matematika kerettanterv az általános iskola 5-8. évfolyamára.*
<http://kerettanterv.ofi.hu/> (Látogatás időpontja: 2014. október 20.)
17. Oktatókutató és Fejlesztő Intézet (2012): Nemzeti Alaptanterv 2012.
18. Országos Pedagógiai Intézet (1975): *Matematika - Ideiglenes tanterv az általános iskolák 1-4. osztályai számára, Tájékoztató tanterv az általános iskolák 5-8. osztályai számára.* OPI, Budapest.
19. Pálfalvi Józsefné (2000): *Matematika didaktikusan.* Typotex Kiadó, Budapest
20. Pálfalvi Józsefné (2007): A mestertanárok elbeszélései nyomán támadt gondolataim az elmúlt fél évszázad megújítási törekvéseim a magyar matematikatanításban. *A matematika tanítása*, XV. évf. 3. szám, 9-16.
21. Pálfi Sándor (1974): *A színesrúd-készlet felhasználása a matematikatanításban.* In.: Továbbképzési anyag matematikából I. A munkaeszközökről (szerk.: C. Neményi Eszter - Radnai Gyuláné). OPI, Budapest.
22. Pintér Klára (2013): *Kombinatorika.* In: A matematika tanítása alsó tagozaton (szerk.: Herendiné Kónya Eszter), Nemzedékek Tudása Kiadó, Budapest
23. Skemp, R. R. (1975): *A matematikatanulás pszichológiája.* Gondolat Kiadó, Budapest.
24. Szendrei Julianna (2005): Gondolod, hogy egyre megy? Dialógusok a matematikatanításról tanároknak, szülőknek és érdeklődőknek. Typotex Kiadó, Budapest.
25. Török Tamás (2009): *Kombinatorikus feladatok és tanításuk.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest
26. Varga Tamás (1971): A kivételesek vannak többen. *Köznevelés*, 1971/9.
27. Varga Tamás: *Az egyszeregy körül.* In.: Szendrei Julianna (2005): Gondolod, hogy egyre megy? Dialógusok a matematikatanításról tanároknak, szülőknek és érdeklődőknek. Typotex Kiadó, Budapest.
28. Varga Tamás (É. n.): *Valószínűség, kombinatorika és statisztika az általános iskolában.* Kézirat, ELTE-TÓK Matematika Tanszék

29. http://alsos.fazekas.hu/wiki/Matematika/Tanterv/Gondolkod%C3%A1si_m%C5%B1veletek/A_kombinatorika_az_als%C3%B3s_tananyagban (Látogatás időpontja: 2014. október 22.)
30. http://alsos.fazekas.hu/wiki/Matematika/Tanterv/Val%C3%B3sz%C3%ADn%C5%B1s%C3%A9g,_statisztika (Látogatás időpontja: 2014. október 22.)

Az áttekintett tankönyvek és feladatgyűjtemények:

1. Balassa Lászlóné - Csekné Szabó Katalin - Szilas Ádámné (2010): *Negyedik matematikakönyvem I. kötet*. Apáczai Kiadó, Celldömölk.
2. Balassa Lászlóné - Csekné Szabó Katalin - Szilas Ádámné (2011): *Harmadik matematikakönyvem*. Apáczai Kiadó, Celldömölk.
3. Balla Mária Magdolna - Gáspár Anikó - Harisné Lingli Beáta - Hubertné Dobor Mária - Jancsula Vincéné (2014): *Matematika 1. I-II. kötet*. OFI, Budapest.
4. Balla Mária Magdolna - Gáspár Anikó - Harisné Lingli Beáta - Hubertné Dobor Mária - Jancsula Vincéné (2014): *Matematika 1. munkafüzet I-II. kötet*. OFI, Budapest.
5. Balla Mária Magdolna - Gáspár Anikó - Harisné Lingli Beáta - Hubertné Dobor Mária - Jancsula Vincéné (2014): *Matematika 2. munkafüzet I-II. kötet*. OFI, Budapest.
6. Cervenakné Neményi Eszter – dr. Varga Tamás (1978): *Matematika munkalapok – Általános iskola 1. osztály*. Tankönyvkiadó, Budapest.
7. Cervenakné Neményi Eszter - dr. Varga Tamás (1986): *Matematika munkalapok – Általános iskola 2. osztály*. Tankönyvkiadó, Budapest.
8. Cervenakné Neményi Eszter - Halmos Istvánné - Radnai Gyuláné Szendrei Julianna - Varga Tamás (1985): *Matematika-munkalapok – általános iskola 4. osztály*. Tankönyvkiadó, Budapest.
9. Csahóczi Erzsébet – Csatár Katalin – Kovács Csongorné – Morvai Éva – Széplaki Györgyné – Szeredi Éva (2013): *Matematika 5.* Apáczai Kiadó, Celldömölk.
10. Csahóczi Erzsébet – Csatár Katalin – Kovács Csongorné – Morvai Éva – Széplaki Györgyné – Szeredi Éva (2013): *Matematika 6.* Apáczai Kiadó, Celldömölk.
11. Csahóczi Erzsébet - Halmos Istvánné - Radnai Gyuláné - Varga Katalin (1978): *Matematika-munkalapok – általános iskola 5. osztály*. Tankönyvkiadó, Budapest.

12. Csahóczi Erzsébet - Halmos Istvánné - Radnainé Szendrei Julianna - Varga Katalin: *Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 6. osztályos anyagának tanuláshoz – kísérleti változat*. Szombathely
13. Csahóczi Erzsébet - Halmos Istvánné - Radnainé Szendrei Julianna - Varga Katalin (1979): *Matematika-munkalapok – általános iskola 6. osztály*. Tankönyvkiadó, Budapest.
14. Csáki Imre – Géczy Etelka (1963): *Számolás - mérés I*. Tankönyvkiadó, Budapest.
15. dr. Andrásfai Béláné (szerk., 1985): *Matematika feladatgyűjtemény – általános iskola 3. osztály*. Tankönyvkiadó, Budapest.
16. dr. Andrásfai Béláné (szerk., 1985): *Matematika feladatgyűjtemény – általános iskola 4. osztály*. Tankönyvkiadó, Budapest.
17. Dr. Ungváry Gyula (1967): *Feladatlapok az általános iskola kísérleti 3. osztályú tanulói számára*. Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat, Budapest.
18. Dr. Ungváry Gyula (1968): *Feladatlapok az általános iskola kísérleti negyedik osztályai számára*. Fővárosi Nyomdaipari Vállalat, Budapest.
19. Dr. Ungváry Gyula (1969): *Feladatlapok az általános iskola kísérleti ötödik osztályai számára*. Fővárosi Nyomdaipari Vállalat, Budapest.
20. Eglesz Istvánné - Kovács Csongorné - Sztrókayné Földvári Vera (1978): *Matematika – általános iskola 5*. Tankönyvkiadó, Budapest.
21. Eglesz Istvánné - Kovács Csongorné - Sztrókayné Földvári Vera (1981): *Matematika – általános iskola 6*. Tankönyvkiadó, Budapest.
22. Erdész Edéné - dr. Kovács Vendelné (1985): *Matematika-munkalapok – általános iskola 3. osztály*. Tankönyvkiadó, Budapest.
23. Esztergályos Jenő (2013): *Az én matematikám 2*. Apáczai Kiadó, Celldömölk.
24. Gaál Géza – Váli Dezsőné (1963): *Számolás – mérés 4*. Tankönyvkiadó, Budapest.
25. Gedeon Veronika - Korom Pál József - Számadó László - Tóthné Szalontay Anna - dr. Wintsche Gergely (2014): *Matematika tankönyv 5*. OFI, Budapest.
26. Gedeon Veronika - Korom Pál József - Számadó László - Urbán Z. János - dr. Wintsche Gergely (2014): *Matematika tankönyv 6*. OFI, Budapest.
27. Halmos Istvánné, Neményi Eszter, Varga Tamás (1971): *Matematika feladatlapok az általános iskolák alsó tagozatának kísérleti 4. osztálya számára*. Tankönyvkiadó, Budapest.

28. Jász Alajosné – Kelemen Jánosné – Lengyel Ferenc – Mosonyi Kálmán – Dr. Török Gyuláné (1964): *Feladatlapok a „Számтан – mértan 5.” könyvhöz*. Tankönyvkiadó, Budapest.
29. Központi felvételi feladatsorok a 6 és 8 osztályos gimnáziumba 2001-2014, Oktatási Hivatal
http://www.oktatas.hu/koznevelas/kozepfoku_felveteli_eljaras/kozponti_feladatsorok
 (Látogatás időpontja: 2014. november 3.)
30. Kurucz né Borbély Márta (2013): *Az én matematikám I*. Apáczai Kiadó, Celldömölk.
31. *Matematika feladatlapok az általános iskolák alsó tagozatának kísérleti 3. osztálya számára*, 1974, Tankönyvkiadó, Budapest.
32. *Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 5. osztályos anyagának tanulásához*, 1974, Tankönyvkiadó, Budapest.
33. Oravecz Pálné (szerk., 1983): *Matematika feladatgyűjtemény – általános iskola 1. osztály*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1984
34. Oravecz Pálné (szerk., 1983): *Matematika feladatgyűjtemény – általános iskola 2. osztály*. Tankönyvkiadó, Budapest.
35. Scherlein Márta - Czakó Anita - dr. Hajdu Sándor - Novák Lászlóné (2009): *Matematika 3*. Műszaki Kiadó, Budapest.
36. Scherlein Márta - Czakó Anita - dr. Hajdu Sándor - Novák Lászlóné (2009): *Matematika 3. Gyakorló*. Műszaki Kiadó, Budapest.
37. Scherlein Márta - Czakó Anita - dr. Hajdu Sándor - Novák Lászlóné (2011): *Matematika 4*. Műszaki Kiadó, Budapest.
38. Scherlein Márta - Czakó Anita - dr. Hajdu Sándor - Novák Lászlóné (2011): *Matematika 4. Gyakorló*. Műszaki Kiadó, Budapest
39. Somfalvi Eszter Dóra, Leszák Melinda (2014): *Matematika 2. I-II. kötet*. OFI, Budapest.
40. Stanislav Kaderábek – Júlia Zilinková (ford. Kiss Gertrud, 1961): *Számтankönyv az alapfokú kilencéves iskolák 2. évfolyama számára*.
41. Számadó László - Gedeon Veronika - Korom Pál József - Tóthné Szalontay Anna - dr. Wintsche Gergely (2014): *Matematika munkafüzet 5*. OFI, Budapest.
42. Számadó László - Gedeon Veronika - Korom Pál József - Urbán Z. János - dr. Wintsche Gergely (2014): *Matematika munkafüzet 6*. OFI, Budapest.
43. Varga Tamás (1972): *2. osztályos kísérleti munkalapok*. Tankönyvkiadó, Budapest.
44. Varga Tamás (1974): *1. osztályos kísérleti munkalapok*. Tankönyvkiadó, Budapest.

8. Mellékletek