



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR
MŰSZAKI MECHANIKAI TANSZÉK

MIHÁLYI LEVENTE

TDK DOLGOZAT

Összetett járműszerelvény tolatásának szabályozása időkésés
figyelembevételével

Konzulens:

Vörös Illés

doktorandusz

Témavezető:

Dr. Takács Dénes

egyetemi docens

BUDAPEST, 2021.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
1.1. Ipari áttekintés	1
1.2. Korábbi eredmények	2
1.3. Célkitűzés	4
2. Mechanikai modell	5
2.1. Kerékmodell kiválasztása	5
2.2. Járműszerelvény	6
2.3. Mozgásegyenletek	8
2.4. Kormánymű dinamikája	9
2.5. Linearizált állapotter reprezentáció	10
2.6. Numerikus értékek	12
3. Szabályozás	13
3.1. Irányíthatóság, megfigyelhetőség	13
3.2. Időkésés	15
3.2.1. Folytonos szabályozás	15
3.2.2. Digitális szabályozás	18
3.3. Szimuláció	19
4. Pályakövető funkció	21
4.1. Klotoid görbe	21
4.2. Pályakövető szabályozás időkéséssel	22
4.3. Körpályán haladás stabilitása	26
5. Konklúzió	28
Irodalomjegyzék	29

Absztrakt

Napjaink egyik legmeghatározóbb és legérdekesebb, egyúttal legnagyobb kihívást jelentő témája a járműmérnöki kutatásokban az önvezető járművek alkalmazásának bevezetése, elterjedése. Ez igazolja jelen dolgozat relevanciáját is, melyben egy összetett, vonóháromszöggel kapcsolt, kéttengelyű vontatmányt tartalmazó járműszerelvény tolatását, illetve annak szabályozását vizsgáljuk. A mai számítástechnikai háttér lehetővé teszi a bonyolult – esetenként csak numerikusan elvégezhető – matematikai műveletek kiértékelését, ezáltal teret nyitva a biztonságosan közlekedő autonóm járművek világa felé.

A dolgozat fő célja az említett járműszerelvény egyenes vonalú, egyenletes sebességgel hátrafelé haladó mozgásának biztosítása. A vizsgálatot a járműszerelvény kinematikai, merevkerekes modelljének segítségével végezzük el. A modellt kiegészítjük a kormánymű dinamikájának mint egy PD szabályozóval jellemzett szervomotornak integrálásával. Az így kapott rendszert vizsgáljuk irányíthatósági- és megfigyelhetőségi szempontból, majd a járműszerelvény viselkedésének megismerését követően előírunk egy lineáris, arányos tagokat tartalmazó szabályozó algoritmust. Az eredmények későbbi felhasználhatóságának fontos részét képezi a szabályozási körben fellépő időkésés hatásának vizsgálata, melyre külön hangsúlyt fektetünk a kutatás során. Az elvégzett számítások kiértékelését síkbeli stabilitásdiagramok ábrázolásával szemléltetjük. A kapott eredményeket szimulációkkal verifikáljuk. A különböző kezdeti feltételek mellett indított futtatások egyértelműen láthatóvá teszik a mozgás stabil, avagy instabil voltát, ezzel irányítottan ellenőrizve az elméleti számítások által alkalmasnak bizonyult erősítési tényezők értékét. Továbbá a szimulációk eredményeként kapott mozgást grafikusán is megjelenítjük animáció formájában. A dolgozat részét képezi a pályakövető funkció vizsgálatának kezdetleges lépései is, azaz az egyenesvonalú pálya helyett bonyolultabb íven történő haladás biztosítása, amely lehetővé tenné a felhasználó által tetszőlegesen, érintési pontokkal kijelölt, összetett, kellően sima útvonal bejárását.

Budapest, 2021. november 12.

Mihályi Levente

Abstract

One of the most defining and interesting but also the most challenging topics in vehicle engineering research is the development of self-driving vehicles. This fact proves the relevance of this paper in which we examine the reverse motion of a truck-full trailer. With the development of computer technology, it becomes possible to evaluate more complex mathematical operations, thereby opening up space for a world of widely spread autonomous vehicles.

The main purpose of this paper is to create a control algorithm which can ensure the rectilinear reverse motion for the truck-full trailer combination. The system is analyzed using the kinematic, rigid wheel model. Dynamics of the steering mechanism is also considered as a servomotor characterized by a PD controller. As the equations of motion are obtained, we check the controllability and observability of the vehicle system. After learning the behavior of the truck, a linear feedback control algorithm with proportional members is designed and applied. It is important for the later usability of the results to consider the time delay of the controller, therefore, we put emphasis on that during the research. The evaluation of the calculations is displayed on stability charts in the plane of the control gains. Finally, the obtained results are verified via numerical simulations. Furthermore, the motion provided by the simulation is also displayed graphically as an animation. This paper also includes the first steps to realize the path-following of the vehicle system in order to extend the straight-line motion to more complicated ones.

Budapest, 12 November 2021

Levente Mihályi

1. Bevezetés

A 2020-as évek gépészmérnökségének fontos részét képezi az önvezető járművek megalkotása, illetve biztonságos üzemeltetése felé irányuló kutatások folytatása. Ez a folyamat valószínűleg teljesen megváltoztatja, átalakítja a közlekedésről alkotott képünket. A fejlesztések legfontosabb, egyben legnehezebben elérhető motivációja a biztonságosabb közlekedés, aminek az emberi teljesítőképesség mindig egy felső határt fog szabni, amíg teljesen ki nem zárjuk azt (Goh Jonathan et al. 2019). Ezenkívül további gazdasági és társadalmi előnyökkel járna az önvezető járművekkel történő közlekedés, mint a felhasználói kényelem, üzemanyag-fogyasztás optimalizálása, gyorsabb közlekedés; csak néhány fontos lehetőséget kiemelve.

Ugyan a közúti járművek közül elsőként a személyautók körében indultak kutatások és tesztelések önvezető funkciókkal kapcsolatban, az ipar már nagyjából az előző évtized közepe óta a teherautók fejlesztésével is komolyabban foglalkozik (Darling et al. 2009). Jelen dolgozat is egy, a teherszállításban fontos szerepet betöltő tehergépkocsi-típussal foglalkozik, tehát a továbbiakban az önvezető teherautókról lesz szó. A vontatmányok stabilitási problémái könnyen vezetnek balesetekhez, amik nagy része elkerülhető a jármű pontos dinamikájának ismeretében beavatkozó szabályozással. Rossz súlyelosztás, vagy a kritikus sebesség túllépése értelemszerűen instabilitást okoz, azonban tolatáskor önmagában fellép ez probléma, amelynek stabilizálása tehát minden esetben szabályozást igényel (Tilbury et al. 1995).

1.1. Ipari áttekintés

A kialakult versenyhelyzet miatt az ipari fejlesztések titkosak. Emiatt azok folyamatáról részletes információt nem szerezhethünk, csupán a közölt eredményekről, illetve a tervezett célokról tájékozódhatunk. Ezzel kapcsolatban néhány, talán legfontosabb ipari szereplőként érdemes említeni a *Daimler*, a *Waymo*, a *Tesla*, és az *Embark* fejlesztőit (ATBS 2021).

A Daimler már 2014 óta foglalkozik tesztelésekkel ezen a területen, a Waymo pedig már alkalmaz önvezető kamionokat a különböző raktárai közötti teherszállításra – ugyan egyelőre csak emberi vezetővel a fedélzeten, aki az esetleges vészhelyzetek esetén avatkozik be. A Tesla, az egyébként egyre kifinomultabban működő, autóknál használt önvezető szoftverek teherautókba történő átültetésével próbálkozik. Az Embark fejlesztői elsősorban a kamionsofőrök monoton, figyelemigényes vezetési idejét csökkentené hasonló eszközökkel.

Az önvezető funkciók alkalmazásának első fázisaként mindegyik fejlesztő az autópályán

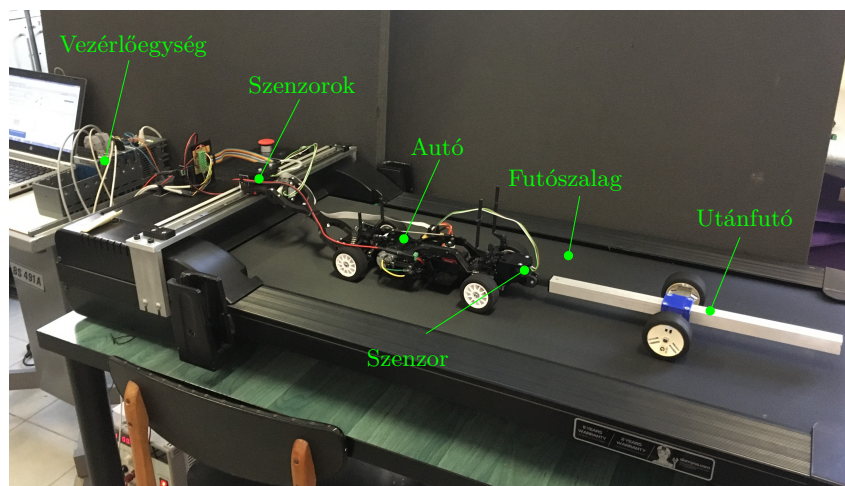
történő haladást tartja reálisnak és tűzi ki célul, hiszen azt tartják a legideálisabb-, legkönnyebben kiszámítható közlekedésnek. Jelentős gazdasági és környezetvédelmi előnnyel járna a konvojban közlekedő tehergépkocsik elterjedése. Az említett fejlesztők ezt úgy valósítanák meg, hogy elegendő legyen csupán a konvojsor elején haladó jármű volánjánál ülnie emberi sofőrnek.

1.2. Korábbi eredmények

Jelen dolgozat korábbi kutatási eredményekre is épít (Mihályi 2019), ez az alfejezet ezen eredmények ide kapcsolódó elemeit mutatja be. Az előtanulmány során egy személyautó mögé kapcsolt utánfutó alkotta rendszer szabályozásával foglalkoztunk, ami mechanikai szempontból a mostanihoz hasonló, de egyszerűbb járműszerelvényt jelent.

Legfontosabb eredményként említendő, hogy az alap szabályozási módszer alkalmasnak bizonyult ilyen összetett járművek tolatásának stabilizálására. Ez az eredmény adott motivációt a problémakör továbbgondolásához, kiegészítéséhez annak érdekében, hogy egy, a valósághoz közelebb leírást kaphassunk az önvezető járművek tolatásáról.

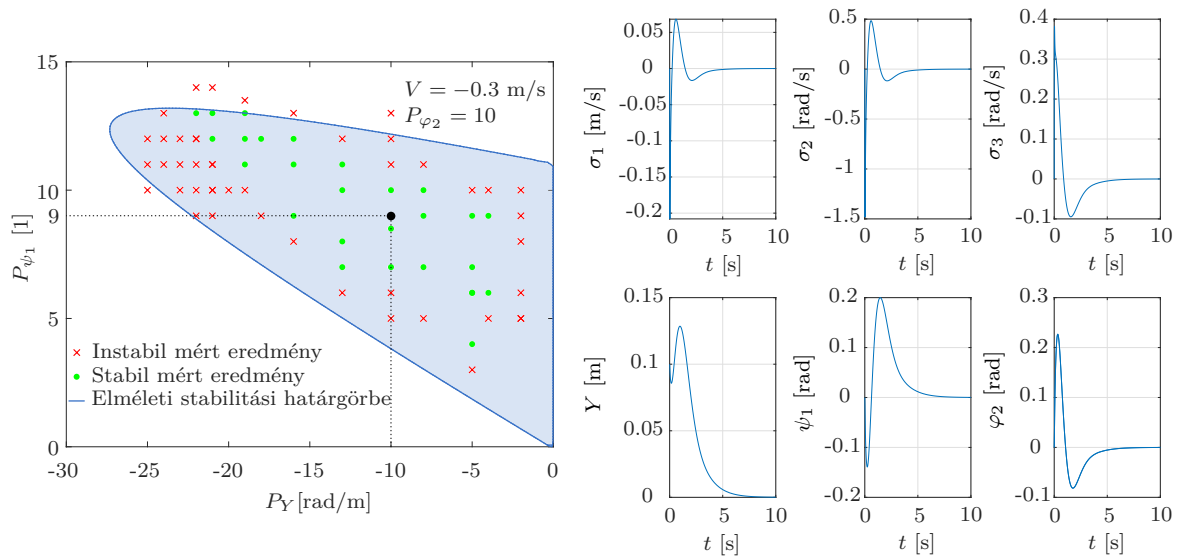
A szabályozási algoritmus három állapotváltozó visszacsatolása alapján számolja a beavatkozó kormányzó értékét. A számításokat numerikusan, egy kis skálájú kísérleti berendezéshez tartozó paraméterértékek mellett végeztük. Ennek oka az eredmények validálhatósága volt, hiszen a tanulmány során kísérleti tesztek is végeztünk a laboratóriumban rendelkezésre álló berendezésen (Vörös et al. 2021), a szükséges kiegészítések és átalakítások elvégzése után (Turányi 2019). A mérési összeállítás az 1.1. ábrán látható.



1.1. ábra. Korábbi kísérleti méréshez használt berendezés

A módszer eredményeként az 1.2. ábrán található grafikonokhoz hasonlókat kaptunk. Bal oldalt egy stabilitástérkép látható, amely a szabályozás két erősítési tényezőjének

függvényében – a harmadik értékét pedig rögzítve – jeleníti meg a stabil tartományt, amit kék színnel ábrázoltunk. Ezenkívül a kísérleti teszt eredménye is felkerült a grafikonra: a zöld pontokhoz tartozó értékekkel elvégzett futtatások adtak stabil mozgást, míg a piros kereszttel jelöltek instabilnak bizonyultak. Jobb oldalt az egyes grafikonokon az állapotváltozók változása van ábrázolva az idő függvényében, ami egy szimuláció eredménye. Az erősítési tényező értékei a stabil tartomány közepéről lettek kiválasztva, számszerűen $P_Y = -10$ rad/m, $P_{\psi_1} = 9$ és $P_{\varphi_2} = 10$; ezt a stabilitástérképen a fekete pont jelöli. A számításokhoz $V = -0.3$ m/s sebesség tartozik, ahol a negatív előjel a hátrafelé haladó mozgásra utal. A jelölések megegyeznek a két grafikonon, σ_1 a vontató jármű oldalirányú sebessége, σ_2 a legyezési szögsebessége, σ_3 a vontatmány legyezési szögsebessége, Y az autó oldalirányú pozíciója, ψ_1 a legyezési szöge, φ_2 pedig az utánfutó relatív szöge. Ezenkívül az erősítési tényezőket P jelöli, alsó indexükben hivatkozva, hogy melyik állapotváltozóhoz tartoznak. Az állapotváltozók és paraméterek részletesebb ismertetése megtalálható a Mihályi (2019) dolgozatban.



1.2. ábra. Korábbi kutatás eredményei: stabilitástérkép (bal oldal) és szimuláció (jobb oldal)

A fentieket összefoglalva elmondható, hogy mivel a kísérleti eredmények alátámasztják az elméletben számoltakat, így sikerült a célnak megfelelő, hasznosítható szabályozást alkotni. Továbbá megemlítenő, hogy bonyolultabb, a valóságban is gyakran előforduló helyzetek modellezéséhez kiegészítő módszerek is szükségesek, hogy ne csak egy ilyen ideális konfigurációból eredő problémákat legyünk képesek megoldani. Jelen dolgozat is emiatt jöhetett létre, a problémakör vizsgálatának folytatását ez képezi.

1.3. Célkitűzés

A dolgozat fő célja egy vontató jármű és egy vonóháromszöggel kapcsolódó, kéttengelyű vontatmány alkotta járműszerelvény tolatásának vizsgálata és szabályozása (Jae & Woojin 2011). A vontatmány fontos tulajdonsága, hogy első tengelye képes elfordulni a függőleges körül. Ez a pótkocsi-kivitel elérhető egy félpótkocsi plusz kapcsolóelemmel történő csatlakoztatásával is, erre láthatunk példát az 1.3. ábrán. Egy ilyen összeállítással történő



1.3. ábra. Áttekintő kép a vizsgált járműszerelvényről (bal oldal); és a köztes, félpótkocsi a vontató teherautóhoz csatlakoztató elem funkciójának szemléltetése (jobb oldal) (Ljungqvist 2019)

tolatás még egy egyenes mentén is komoly kihívást jelent akár egy tapasztalt sofőrnek is, így egy alkalmas szabályozási módszerrel látványos eredményt kaphatunk (Olsson & Skönvall 2018). A dolgozat első felében egyenesen történő tolatással foglalkozunk, míg a második felében áttérünk a körpálya vizsgálatára.

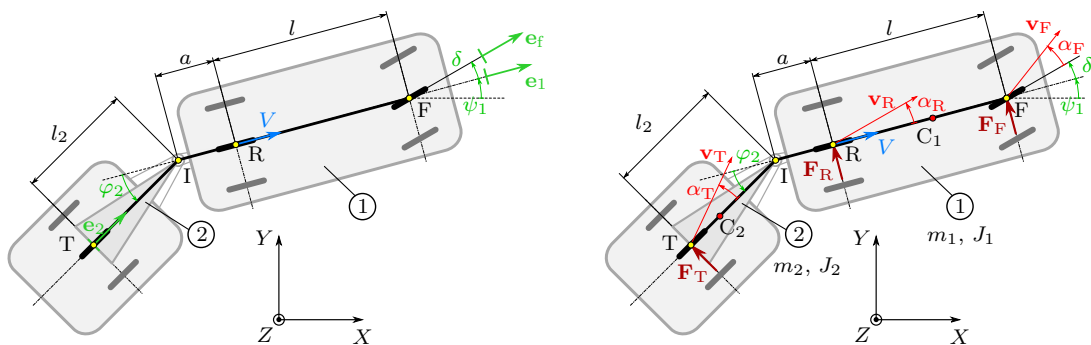
A rendszert kinematikai, merevkerekes modell segítségével elemezzük, melynek alkalmazhatóságát a korábbi eredményekre hivatkozva támasztjuk alá. Az egyenes mentén haladás modelljében figyelembe vesszük a kormánymű dinamikáját is. Cél egy szabályozási algoritmus kidolgozása, amely biztosítja a tolatás stabilitását. Ezt egy lineáris, arányos tagokat tartalmazó szabályozóval érjük el. A valósághoz közelebbi leírás érdekében figyelembe vesszük a szabályozási körben fellépő időkéésés jelenségét. Az eredmények megjelenítése síkbeli stabilitásdiagramokkal történik, hitelességüket pedig szimulációkkal verifikáljuk.

2. Mechanikai modell

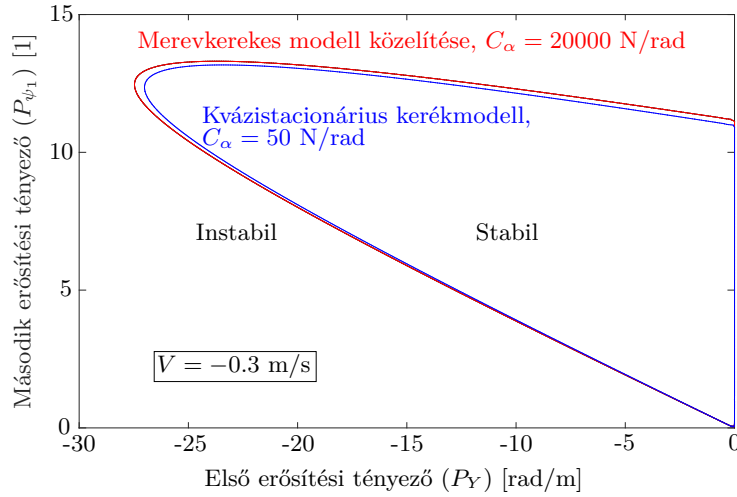
A vizsgálat során a járművek modellezésére igen elterjedt, ún. *bicikli modellt* használjuk (Pacejka 2002). Ennek értelmében elhanyagoljuk a jármű szélességét, a bonyolult karosszériát egyszerű, merev rúdelemekkel helyettesítjük. A modellalkotás másik meghatározó eleme a megfelelő kerékmodell megválasztása, hiszen a jármű viselkedését nagy mértékben befolyásolják a talajról átadódó erők és a kerekek deformációja (Szabó 2014). A szakirodalomban rengeteg – többnyire empirikus – modell áll rendelkezésre a gumibroncs megfelelő figyelembevételére. Feladatunk az adott konfigurációhoz (jármű típusa és geometriája, haladás sebessége és pályája, stb.) optimális, elegendően pontos, viszont nem túlzottan bonyolult módszer megválasztása.

2.1. Kerékmodell kiválasztása

Jelen kutatás során a járműszerelvény kinematikai, merevkerekes modelljét alkalmazzuk; ez a szakirodalomban megtalálható lehető legegyszerűbb modell. A már említett, alapul szolgáló kutatás során (egy darab utánfutó esete) az ún. kvázistacionárius kerékmodellt használtuk. Ennek a járműszerelvénynek a kétféle mechanikai modellje közti különbség a 2.1. ábrán látható. A két modell összehasonlításából kiderül, hogy kis sebességgel, egyenes mentén történő tolatás esetében elegendően pontosnak bizonyul az egyszerűbb, kinematikai modell is. Ennek szemléltetését mutatja a 2.2. ábra, ahol a kis sebességű tolatás ($V = -0.3$ m/s) stabilitásvizsgálat eredményét láthatjuk a gumira jellemző C_α oldalirányú merevség két különböző értéke mellett: $C_\alpha = 50$ N/rad a tényleges merevség becsült értéke, $C_\alpha = 20000$ N/rad pedig a merevkerekes modell közelítése. A két modell geometriai paraméterei megegyeznek, amik egy 1:10-es méretarányú kis skálájú modellhez tartoznak. A határvonalak közti elhanyagolható különbség igazolja a kinematikai modell alkalmazhatóságát.



2.1. ábra. Egy utánfutót tartalmazó járműszerelvény kinematikai (bal oldal) és kvázistacionárius kerékmodellt (jobb oldal) feltételezett mechanikai modellje



2.2. ábra. Kerékmodellek összehasonlítása kis sebességgel ($V = -0.3$ m/s) történő tolatás mellett

A grafikon tengelyein a szabályozást jellemző erősítési tényezők szerepelnek, a görbék által határolt terület jelenti a tolatásra vonatkozó stabil tartományt adott geometriai paraméterek mellett. A kék görbe jelenti a bonyolultabb kerékmodellel kapott eredményt, amikor a modell paramétereként (oldalirányú merevség, C_α) a kísérlethez használt gumira jellemző értéket használtuk. Kellően nagy oldalirányú merevség esetén az eredmény a merevkerekes modellhez közelít, ezt mutatja a piros görbe. A különbség minimális voltára hivatkozva elmondható, hogy jelen dolgozatban elegendő a merevkerekes modell alkalmazása.

2.2. Járműszerelvény

Ebben az alfejezetben a már korábban említett összetett járműszerelvény bemutatása következik, amely a dolgozat tárgyát képezi. A vontató jármű egy egyszerű teherautó, melynek első tengelye kormányozható; egyébként ez képezi az egyetlen beavatkozószervet a rendszerben. A vontatott pótkocsi olyan kialakítású, hogy teljes súlya a saját tengelyeire (illetve jelen esetben a csatlakoztató kiskocsira) támaszkodik, valamint az első tengelye képes elfordulni a függőleges körül, mely elfordulást a vontató helyzete befolyásolja.

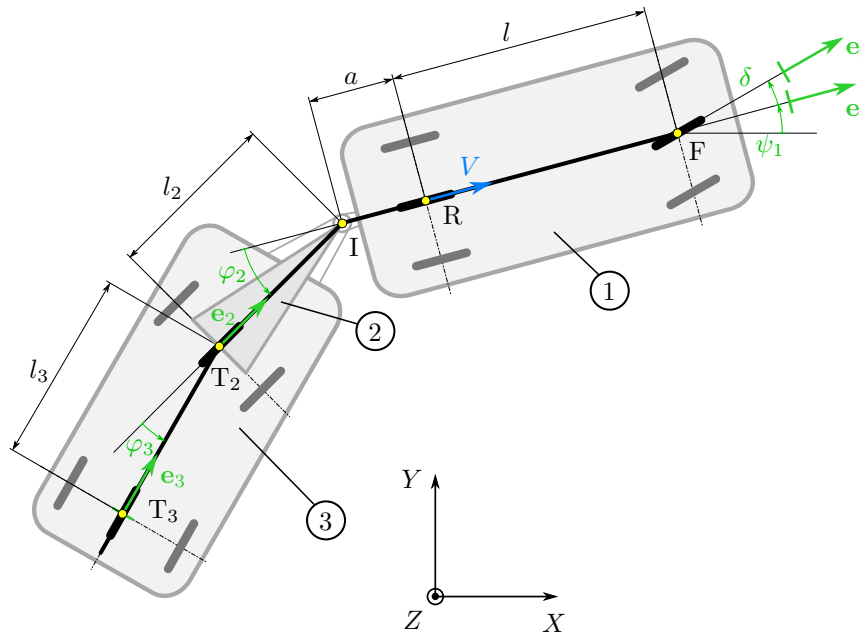
Az összetett járműszerelvényhez tartozó kinematikai modellt a 2.3. ábra mutatja. A bicikli modellt a rendszer hossz tengelye mentén húzódó fekete rudak jelentik, a szürke váz csupán az átláthatóbb megjelenést szolgálja. Három részre bontható a szerkezet, ezeket jelölik a bekarikázott számok:

- 1. vontató jármű,
- 2. vonóháromszöges csatlakoztató kiskocsi, amely biztosítja a függőleges körüli el-

fordulást,

- 3. vontatmány.

A rendszert a talajhoz rögzített (X, Y, Z) koordinátarendszerben vizsgáljuk, a mozgás pedig az (X, Y) síkban történik. Az F és R pontok a vontató jármű kerekeit jelölik, a T_2 és T_3 pontok a vontatmány kerekeit, I pedig a csatlakoztatási pontot. A teherautó hátsó tengelyének longitudinális, azaz hosszirányú sebességét jelölje V , amiről feltételezzük, hogy a mozgás során konstans. Zöld színnel vannak jelölve a mozgás leírásához szükséges szögek: δ a kormányzási szög, ψ_1 a vontató jármű legyezési szöge az X tengelyhez képest, φ_2 és φ_3 rendre a 2. és 3. járműszegmens relatív szögei az előző elemhez képest. A feltüntetett egységvektorok közül $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ és $\mathbf{e}_3$ tartoznak az egyes részszerkezetekhez, $\mathbf{e}_f$ pedig a vontató első kerekeinek állását mutatja. A járműszerelvény geometriai méretei pedig: l a vontató jármű tengelytávolsága, a a hátsó tengely és a csatlakoztatási pont távolsága, l_2 a vonóháromszög hossza, l_3 pedig a vontatmány tengelyeinek távolsága. A bemutatásra került rendszer mozgásának leírása öt általános koordináta segítségével



2.3. ábra. Vonóháromszöggel kapcsolt, kéttengelyű vontatmánnyal rendelkező járműszerelvény kinematikai modellje

végezhető el, így az általános koordináták vektora:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} X & Y & \psi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{bmatrix}^T, \quad (2.1)$$

ahol az első két koordináta a vontató jármű hátsó tengelyének (R) hossz- és keresztirányú elmozdulását méri a kiindulási referenciához képest.

2.3. Mozgásegyenletek

A rendszer mozgását leíró differenciálegyenletek – a kinematikai modellnek megfelelően – az egyes kerekek sebességének irányára vonatkozó kényszerekből, illetve a már említett, vontató jármű hátsó kerekének feltételezett konstans V sebességére vonatkozó kinematikai kényszerből adódnak.

Utóbbi a

$$\mathbf{v}_R \cdot \mathbf{e}_1 = V \quad (2.2)$$

feltétellel fogalmazhatjuk meg, ahol

$$\mathbf{v}_R = [\dot{X} \quad \dot{Y} \quad 0]^T, \quad \mathbf{e}_1 = [\cos \psi_1 \quad \sin \psi_1 \quad 0]^T. \quad (2.3)$$

Elvégezve a műveletet pedig az

$$\dot{X} \cos \psi_1 + \dot{Y} \sin \psi_1 = V \quad (2.4)$$

egyenlet adódik, ahol a jelölések megegyeznek a 2.3. ábrán megadottakkal. A sebességek irányára vonatkozó kényszerek a következőképpen fejezhetők ki egyenletekkel:

$$\mathbf{v}_F \parallel \mathbf{e}_F : \quad \mathbf{v}_F \times \mathbf{e}_F = \mathbf{0}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{v}_{T_2} \parallel \mathbf{e}_2 : \quad \mathbf{v}_{T_2} \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{0}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{v}_{T_3} \parallel \mathbf{e}_3 : \quad \mathbf{v}_{T_3} \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}. \quad (2.7)$$

Az egyes kerekek sebességét az általános sebességredukciós képlet (Csernák 2018) alkalmazásával állítjuk elő, a szükséges egységvektorok pedig a bevezetésre került szögek segítségével felírhatók. Elvégezve a műveleteket, illetve a kapott egyenletekből kifejezve az általános koordináták deriváltjait adódnak a nemlineáris mozgásegyenletek:

$$\dot{X} = V \cos \psi_1, \quad (2.8)$$

$$\dot{Y} = V \sin \psi_1, \quad (2.9)$$

$$\dot{\psi}_1 = \frac{V}{l} \tan \delta, \quad (2.10)$$

$$\dot{\varphi}_2 = -\frac{V}{ll_2} (l \sin \varphi_2 + (l_2 + a \cos \varphi_2) \tan \delta), \quad (2.11)$$

$$\dot{\varphi}_3 = -\frac{1}{l_3} \left(V \sin(\varphi_2 + \varphi_3) + a\dot{\psi}_1 \cos(\varphi_2 + \varphi_3) + l_2(\dot{\psi}_1 + \dot{\varphi}_2) \cos \varphi_2 \right) - (\dot{\psi}_1 + \dot{\varphi}_2). \quad (2.12)$$

2.4. Kormánymű dinamikája

A modell pontosítása érdekében vegyük figyelembe a kormánymű dinamikáját mint egy PD szabályozóval jellemzett szervomotort. Ezt az alacsony szintű szabályozást a szervomotorra felírt, forgómozgásra vonatkozó dinamika alaptételével modellezhetjük, azaz

$$J \cdot \ddot{\delta} = -k_p (\delta - \delta_{\text{kívánt}}) - k_d \dot{\delta}, \quad (2.13)$$

ahol J a szervomotor tehetetlenségi nyomatéka, $\delta_{\text{kívánt}}$ a szabályozás kimeneteként megkívánt kormányyszög, δ az aktuális kormányyszög. A k_p és k_d értékek pedig a szervomotor belső szabályozására jellemző erősítési tényezők, k_p az arányos-, k_d pedig a differenciáló taghoz tartozó.

Vezessük be az

$$\omega := \dot{\delta} \quad (2.14)$$

jelölést, így a kormánydinamikával kiegészítve a modellt az alábbi plusz differenciálegyenletek adódnak az eddigi mozgásegyenletek mellé:

$$\dot{\delta} = \omega, \quad (2.15)$$

$$\dot{\omega} = -\frac{k_p}{J}\delta - \frac{k_d}{J}\omega + \frac{k_p}{J}\delta_{\text{kívánt}}. \quad (2.16)$$

Az arányos taghoz tartozó k_p erősítési tényező értékét önkényesen választjuk meg (vagy az adott szervomotor gyártója által előírt értékhez igazodunk). Viszont k_d értékét érdemes úgy megválasztani, hogy a kormánymű mint egy egyszabadságfokú dinamikai rendszer kritikus csillapítású legyen, így ne jöjjön létre rezgés, ezzel optimális esetnek tekintve (Csernák & Stépán 2019). A kritikus csillapításhoz $\zeta = 1$ relatív csillapítási tényező tartozik, ennek biztosításához először alakítsuk át a (2.16) egyenletet, illetve válasszuk le a megkívánt kormányyszöget tartalmazó tagot:

$$\ddot{\delta} + \frac{k_d}{J}\dot{\delta} + \frac{k_p}{J}\delta = 0. \quad (2.17)$$

Az egyszabadságfokú rendszer mozgásegyenletének általános alakja

$$\ddot{\delta} + 2\zeta\omega_n\dot{\delta} + \omega_n^2\delta = 0, \quad (2.18)$$

ahol ζ a már említett dimenziótlan relatív csillapítási tényező, ω_n pedig a rendszer csillapítatlan sajátkörfrekvenciája. Megfeleltetve egymásnak a (2.17) és (2.18) egyenleteket, a

differentiáló taghoz tartozó erősítési tényezőre adódik, hogy

$$k_d = 2\zeta \sqrt{\frac{k_p}{J}} J. \quad (2.19)$$

Végignézve a mozgásegyenleteket látható, hogy azok függetlenek a vontató jármű hátsó kerekének hosszirányú pozíciójától (X koordináta). Emiatt a (2.8) egyenletet le is választjuk a mozgásegyenletekről, a továbbiakban ezzel nem foglalkozunk. Látszólag ugyanaz igaz a laterális pozícióra is (Y koordináta), azonban ez később, a szabályozás során megjelenik a megkívánt kormányszögön keresztül, hiszen ehhez képest szeretnénk majd beállítani az egyenest, amin haladnia kell a járműnek. Így végül az állapotváltozók vektora a következőképpen alakul:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} Y & \psi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \delta & \omega \end{bmatrix}^T. \quad (2.20)$$

Jelöljük a (2.9)–(2.12) és a (2.15)–(2.16) mozgásegyenleteket rendre f_1 – f_6 elnevezéssel, melyeket összefoglalva tartalmazza az $\mathbf{f}$ oszlopvektor, azaz

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (2.21)$$

2.5. Linearizált állapottér reprezentáció

Lineáris stabilitásvizsgálathoz szükséges a mozgásegyenletek linearizálása, majd mátrixos formában történő felírása. Ehhez használjuk a rendszer linearizált állapottér reprezentációját az

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t) \quad (2.22)$$

alakban, ahol $\mathbf{A}$ a rendszermátrix, $\mathbf{B}$ a bemeneti mátrix, $\mathbf{x}(t)$ az állapotváltozók vektora, és $\mathbf{u}(t)$ a bemenőjelek vektora (Miquel 2021).

A linearizált egyenletek $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixait megkapjuk, ha vesszük a mozgásegyenletek alkotta egyenletrendszer Jacobi-mátrixát rendre az állapotváltozók vektora ($\mathbf{x}$) és a bemenőjelek vektora ($\mathbf{u}$) szerint, kiértékelve abban az egyensúlyi pontban, ami körül a linearizálást szeretnénk elvégezni. Azaz esetünkben az egyenes vonalú mozgáshoz tartozó állapotban. Ez a módszer a Taylor-sorral való közelítésen alapszik, nézzük meg részletebben.

Egyensúlyi pont alatt azt az $(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e)$ konstans értékeket értjük, melyekre igaz, hogy

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e) = \mathbf{0}. \quad (2.23)$$

Fejtsük Taylor-sorba az $\mathbf{f}$ vektormezőt az egyensúlyi pont körül, és a linearizálásnak megfelelően hanyagoljuk el a másod- és annál magasabb rendű tagokat. Az aktuális, egyensúlyi helyzettől kitérített állapotot jelölje

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_e + \delta\mathbf{u}(t), \quad (2.24)$$

ahol δ a kis kitérésekre utal. Ekkor a

$$\frac{d}{dt}(x_{ei} + \delta x_i) = f_i(\mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}, \mathbf{u}_e + \delta\mathbf{u}) \quad (2.25)$$

kifejezés első fokig Taylor-sorba fejtett alakja:

$$\approx f_i(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e) + \left. \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e} \delta\mathbf{x} + \left. \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e} \delta\mathbf{u}, \quad (2.26)$$

ahol az i index az i -edik elemre utal, a parciális deriváltak pedig a Jacobi-mátrixokat adják rendre $\mathbf{x}$ és $\mathbf{u}$ szerint. Mivel

$$\frac{d}{dt}(x_{ei}) = f_i(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e), \quad (2.27)$$

a linearizálás végső alakja

$$\frac{d}{dt}(\delta x_i) \approx \left. \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e} \delta\mathbf{x} + \left. \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e} \delta\mathbf{u}. \quad (2.28)$$

Itt már beazonosíthatók a (2.22) egyenletben említett mátrixok, azaz

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e} \delta\mathbf{x}, \quad \mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e} \delta\mathbf{u}. \quad (2.29)$$

A jelen dolgozatban vizsgált rendszer linearizált állapotter modelljéhez tartozó mátrixok

a következőképpen alakulnak:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & V & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{V}{l} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{V}{l_2} & 0 & -\frac{V}{ll_2}(l_2 + a) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{V^2}{l_2} & -\frac{V}{l_3} & \frac{Va}{ll_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{k_p}{J} & -\frac{k_d}{J} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_p}{J} \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

ahol tehát – a korábban említett $\dot{X}$ -hoz tartozó egyenlet leválaszthatósága miatt – az állapotváltozók vektora és a bemenőjelek vektora:

$$\mathbf{x} = [Y \quad \psi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3 \quad \delta \quad \omega]^T, \quad \mathbf{u} = [\delta_{\text{kívánt}}]. \quad (2.31)$$

2.6. Numerikus értékek

A számítások komplexitása miatt azokat numerikusan fogjuk elvégezni. Használjunk egy kísérleti modelljárműre jellemző adatokat annak érdekében, hogy a későbbiekben akár kísérletekkel is alá tudjuk támasztani a kapott eredményeket. Ezeket a méreteket a 2.1. táblázat tartalmazza, a jelölések pedig megegyeznek a fentebb bemutatott modell jelölésével (2.3. ábra). Ismét megjegyzendő, hogy a V sebesség negatív értéke jelenti a hátrafelé haladó mozgást. Megjegyzendő, hogy a kormányműre jellemző k_d értéke a (2.19) összefüggésnek megfelelően úgy lett megválasztva, hogy a ζ relatív csillapítási tényező értéke pontosan 1 legyen.

2.1. táblázat. Számításokhoz használt numerikus értékek

Jelölés	Érték	Mértékegység
V	-0.3	m/s
a	0.05	m
l	0.24	m
l_2	0.2	m
l_3	0.25	m
J	10^{-6}	kgm ²
k_p	$3 \cdot 10^{-4}$	kgm ² /s ²
k_d	$3.4641 \cdot 10^{-5}$	kgm ² /s

3. Szabályozás

A stabilizáláshoz használandó szabályozási algoritmus megalkotásához válasszuk az egyszerű, azonban a járműszabályozásoknál elterjedten alkalmazott állapot-visszacsatolós szabályozást (Altafini et al. 2001). Ennek lényege, hogy a beavatkozás nagyságát mindig az állapotváltozók aktuális értékének függvényében határozzuk meg. Legegyszerűbb esetben a beavatkozás az adott állapotváltozó kívánt értéktől való eltéréseivel arányosan történik. Jelen dolgozatban is egy ilyen szabályozó tervezése kerül bemutatásra azzal a kiegészítéssel, hogy több állapotváltozót is visszacsatolunk a beavatkozó kormányászóg kiszámításakor, illetve figyelembe vesszük a visszacsatolt mennyiségeket terhelő, jelfeldolgozásból származó időkésést. Ebben a fejezetben áttekintjük és ellenőrizzük a rendszer irányíthatóság, megalkotjuk a szabályozási algoritmust, illetve ennek megfelelően módosítjuk, kiegészítjük a mechanikai modellt.

Első lépésként alakítsuk át a (2.22) állapottér reprezentációt – az alkalmazandó szabályozásnak megfelelően – az

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (3.1)$$

alakra, ahol $\mathbf{K}$ az erősítési tényezők vektora, hiszen a bemenőjel az állapotváltozók függvénye lesz. A beavatkozó kívánt kormányászóg három állapotváltozó visszacsatolásával áll elő, melyek a vontató jármű Y oldalirányú pozíciója, ψ_1 legyezési szöge, illetve a hátsó vontatmány φ_3 relatív szöge. Ez a

$$\delta_{\text{kívánt}}(t) = -P_Y Y(t) - P_{\psi_1} \psi_1(t) - P_{\varphi_3} \varphi_3(t) \quad (3.2)$$

alakban írható, így tehát az erősítési tényezők vektora

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -P_Y & -P_{\psi_1} & 0 & -P_{\varphi_3} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

3.1. Irányíthatóság, megfigyelhetőség

Az állapot-visszacsatolás megvalósítása előtt érdemes vizsgálni és ellenőrizni, hogy az állapotváltozók az általunk választott bemenőjellel befolyásolhatók, irányíthatók-e. Ezenkívül arra is kitérünk, hogy a bemenő- és kimenőjelek feldolgozásával az állapotváltozók meghatározhatók-e. Előbbi jelenti az irányíthatóságot, utóbbi pedig a megfigyelhetőséget (Szilágyi & Juhász 2012/5).

A dinamikus folyamat irányítható, ha a bemenőjel segítségével az állapotváltozók vek-

tora egy kezdeti állapotból véges idő alatt egy tetszőlegesen előírt állapotba átvihető. Ennek matematikai feltétele, hogy az állapottér modell $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixaiból összeállított $\mathbf{C}_0$ irányíthatósági hipermátrix rangja megegyezzen az állapottér dimenziójával, azaz

$$\text{rang}\{\mathbf{C}_0(\mathbf{A}, \mathbf{B})\} = n, \quad (3.4)$$

ahol

$$\mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

és n az állapottér dimenziója.

A dinamikus folyamat megfigyelhető, ha a bemenő- és kimenőjel mérési eredményeinek feldolgozásából az állapotvektor kezdeti értéke meghatározható, azaz ha bármely állapotváltozó megváltozása előbb-utóbb megjelenik a kimeneten. Matematikai feltétele, hogy az $\mathbf{O}_b$ megfigyelhetőségi hipermátrix rangja megegyezzen az állapottér dimenziójával, azaz

$$\text{rang}\{\mathbf{O}_b(\mathbf{C}, \mathbf{A})\} = n, \quad (3.6)$$

ahol

$$\mathbf{O}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T & \dots & (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{C}^T \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Itt $\mathbf{C}$ az állapottér modell kimeneti mátrixa, ami megadja, hogy mely állapotváltozókat mérjük a mozgás során. A fent bemutatott rangfeltételek kidolgozása *Kálmán* nevéhez fűződik.

Az aktuális rendszerhez tartozó vizsgálatot a *Matlab* erre vonatkozó beépített függvényeivel végezzük el, melyhez numerikus értékekre van szükség. Tehát az irányíthatóság- és megfigyelhetőség ellenőrzését a 2.1. táblázat adatait felhasználva számítjuk. Ennek eredményeként elmondható, hogy a rendszer irányítható, hiszen teljesül a (3.4) feltétel. A megfigyelhetőség esetében érdemes különböző $\mathbf{C}$ kimeneti mátrixok esetén vizsgálni. Végeredményként azt kaptuk, hogy a megfigyelhetőség biztosítása érdekében a minimális számú állapotváltozók, amiket ismernünk kell a kimeneten, azok az Y laterális elmozdulás, illetve a φ_3 vontatott jármű relatív legyezési szög, hiszen ezekkel már teljesül a (3.6) feltétel.

3.2. Időkésés

Általában időkésésről akkor beszélünk egy folyamat során, ha a bemenőjelre adott kimeneti válaszreakció nem azonnal történik meg a kivezérlést követően. Ez jellemző a legtöbb dinamikai rendszerre is, még hozzá főként destabilizáló hatással van rájuk. Állapot-visszacsatolásos szabályozásnál ezt a jelenséget olyan megközelítésben vehetjük figyelembe, hogy a beavatkozójel aktuális értéke nem a pillanatnyi-, hanem egy korábbi állapot visszacsatolásával kerül kiszámításra, ahol a két állapot között eltelt idő maga az időkésés. Csökkentésének határt szab az adatok feldolgozásának számításigénye és a beavatkozó-szerv mechanikai tehetetlensége. Így a végső eredmények pontosítása érdekében jelen kutatás során is foglalkozunk ennek a jelenségnek a leírásával, figyelembevételével.

Matematikai leírásban a (3.1) állapotter modell az

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}(t - \tau) \quad (3.8)$$

alakra módosul, ahol τ jelöli az időkésést. A fenti egyenlet egy végtelen-dimenziós problémára vezet az időkésésnek köszönhetően. Az időkésést figyelembe véve a (3.2) szabályozási törvény a következőre módosul:

$$\delta_{\text{kívánt}}(t) = -P_Y Y(t - \tau) - P_{\psi_1} \psi_1(t - \tau) - P_{\varphi_3} \varphi_3(t - \tau). \quad (3.9)$$

A kutatás során kétféle modellt vizsgálunk a késleltetett rendszer vizsgálatára: folytonos időkésést, illetve digitális (diszkrét) időkésést feltételezve.

3.2.1. Folytonos szabályozás

Az időkéséssel terhelt folytonos rendszer stabilitásvizsgálatát a D-szeparáció módszerével oldjuk meg. Ehhez a (3.8) karakterisztikus egyenletére van szükség. Keressük a késleltetett differenciálegyenlet megoldását az $\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}e^{\lambda t}$ exponenciális alakban (ahol $\mathbf{c}$ egy konstansvektor), ami a

$$\lambda \mathbf{c}e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{c}e^{\lambda t} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{c}e^{\lambda(t-\tau)} \quad (3.10)$$

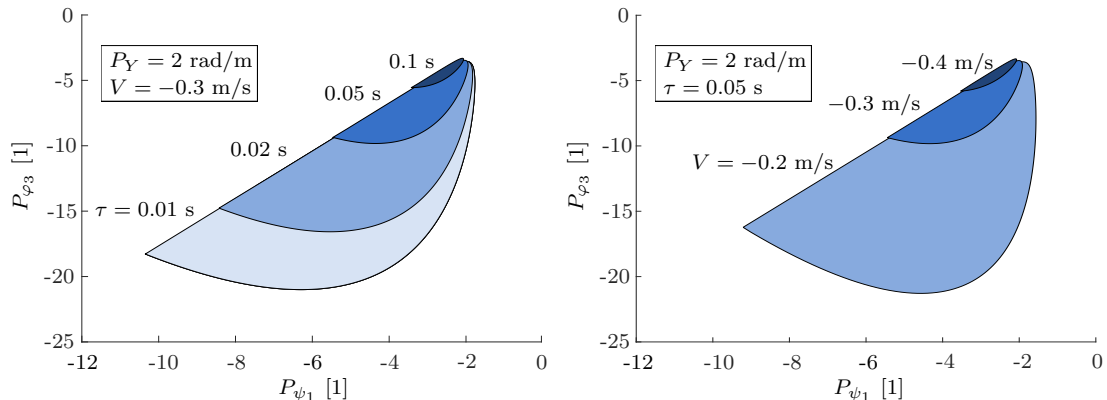
egyenletre vezet. Egyszerűsítve $\mathbf{c}e^{\lambda t} \neq \mathbf{0}$ -val a rendszer karakterisztikus egyenlete:

$$D(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}e^{-\lambda\tau}) = 0, \quad (3.11)$$

ami λ -ra nézve egy transzcendens egyenlet. A számítás komplexitása miatt inntől csak numerikusan haladunk tovább, a paraméterek értékeit a 2.1. táblázat alapján választjuk meg. A műveletek elvégzését *Matlab* segítségével oldjuk meg.

A statikus stabilitásvesztés határát a $D(\lambda = 0) = 0$ karakterisztikus egyenletből határozhatjuk meg (λ helyére zérust helyettesítve). Esetünkben ennek nem lesz megoldása, mivel a $\lambda = 0$ behelyettesítéssel a $\det(-\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ értéke zérustól eltérő konstans lesz. A dinamikus stabilitásvesztés határának meghatározása érdekében D-szeparáció módszernek megfelelően a $D(\lambda) = 0$ karakterisztikus egyenletbe behelyettesítjük a $\lambda = i\omega$, $\omega > 0$ kifejezést, ahol $\omega \in \mathbb{R}^+$ a stabilitásvesztés okozta rezgés körfrekvenciáját jelöli. Ezt követően a karakterisztikus egyenletet szétbontjuk valós- és képzetes részre, majd az így kapott két egyenletből alkotott egyenletrendszerből kifejezzük a D-görbék paraméteres egyenletét a $(P_{\psi_1}, P_{\varphi_3})$ erősítési tényezők síkján. Az ω frekvencia két tetszőleges érték közötti futtatása mellett kiértékelve az egyenleteket, megkapjuk a stabilitás határához tartozó görbét a síkon.

A fenti módszert alkalmazva, valamint a $P_Y = 2$ rad/m oldalirányú pozícióhoz tartozó erősítési tényező értékét rögzítve, ábrázoljuk a rendszer stabilitástérképeit a τ időkésés és a V konstans tolatási sebesség különböző értékei mellett, a másik kettő erősítési tényező $(P_{\psi_1}, P_{\varphi_3})$ függvényében. Ennek eredményeként adódnak a 3.1. ábrán látható grafikonok, ahol a bal oldali mutatja az időkésés-, a jobb oldali pedig a sebesség hatását a stabilitásra. A különböző árnyalatú területek jelölik a lineárisan stabil tartományokat. Ezek alapján megfigyelhető, hogy mindkét mennyiség jelentős hatással van a rendszer stabilitására. Továbbá, míg viszonylag nagy időkésés jelenléte mellett is stabilizálható az összetett járműszerelvény tolatása, addig a sebesség kismértékű növelése is lehetetlenné teheti a stabil mozgást az adott időkésés esetén.



3.1. ábra. Stabilitástérképek a P_{ψ_1} és P_{φ_3} erősítési tényezők síkjában a τ időkésés (bal oldal) és a V tolatási sebesség (jobb oldal) hatásának vizsgálatára

Megjegyzendő, hogy a fenti fekete görbék csupán határvonalakat jelentenek. Azt tud-

jük, hogy ezeket keresztezve egy karakterisztikus gyök, vagy egy komplex konjugált gyök-pár átlépi a képzetes tengelyt, azonban ettől még ezzel a módszerrel nem határozható meg, hogy melyik oldal milyen jellegnek felel meg. Viszont ezt megsejthetjük, illetve a későbbiekben bemutatásra kerülő módszerek (digitális szabályozás szemidiszkretizációval, numerikus szimuláció) segítségével beazonosíthatjuk.

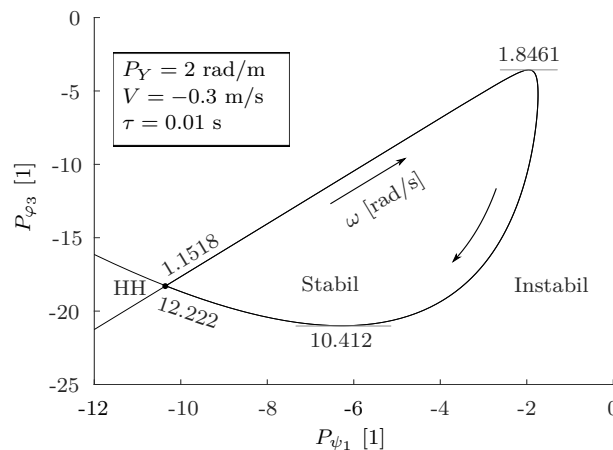
A módszer azonban alkalmas annak meghatározására, hogy a stabilitási határgörbét adott helyen átlépve milyen ω frekvenciájú lengések mellett válik instabillá a rendszer, ezt szemlélteti a 3.2. ábra. A vízszintes érintőkhöz (szürke szakasszal jelölve) tartozó frekvenciák meghatározhatók a

$$\frac{\partial P_{\varphi_3}}{\partial P_{\psi_1}} = 0 \quad (3.12)$$

összefüggésből, ami a láncszabályt alkalmazva előáll a D-görbék paraméteres egyenleteiből:

$$\frac{\partial P_{\varphi_3}}{\partial P_{\psi_1}} = \frac{\partial P_{\varphi_3}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial P_{\psi_1}}. \quad (3.13)$$

A HH-val jelölt metszésponthoz két frekvencia is tartozik, azaz ez az egyensúlyi pont két tisztán képzetes sajátértékpárral rendelkezik, amit dupla-Hopf bifurkációnak nevezünk. Ezen a ponton áthaladva nagy bonyolultságú, több frekvenciaösszetevőjű rezgések alakulhatnak ki, melyeknek frekvenciáját esetünkben kizárólag numerikus úton tudtuk meghatározni.



3.2. ábra. Stabilitási határgörbe különböző pontjaira jellemző stabilitásvesztéskor kialakuló ω rezgési frekvenciák

3.2.2. Digitális szabályozás

A korábban említett, időkésés okozta végtelen-dimenziós problémához vezető feladatot megoldjuk diszkretizációs módszerrel is, ezzel egy digitális, diszkrét rendszerként modellezve azt. A hatékonyságbeli előnye miatt kézenfekvőbb a szemidiszkretizáció alkalmazása a teljes-diszkretizációval szemben (Inspurger & Stépán 2011).

A rendszert leíró (3.8) lineáris állapottér reprezentációt írjuk át a

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}\mathbf{v}(t_{i-r}), \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad (3.14)$$

$$\mathbf{v}(t_i) = \mathbf{K}\mathbf{y}(t_i) \quad (3.15)$$

szemidiszkretizált alakra. Vezessük be a $\mathbf{y}_i := \mathbf{y}(t_i)$ és $\mathbf{v}_i := \mathbf{v}(t_i)$ egyszerűsítéseket minden $i \in \mathbb{Z}$ esetre. Ekkor a konstans variációs módszer értelmében (3.14) megoldása $t = t_{i+1}$ időpillanatban:

$$\mathbf{y}_{i+1} = \underbrace{e^{\mathbf{A}h}}_{:=\mathbf{P}} \mathbf{y}_i + \underbrace{\int_0^h e^{\mathbf{A}(h-s)} ds \mathbf{B}}_{:=\mathbf{R}} \mathbf{v}_{i-r}, \quad (3.16)$$

ahol h a diszkretizációs lépésköz, r pedig az időkésés felbontása, és $h = \tau/(r + 1/2)$. A (3.16) és (3.15) egyenletek felírhatók az

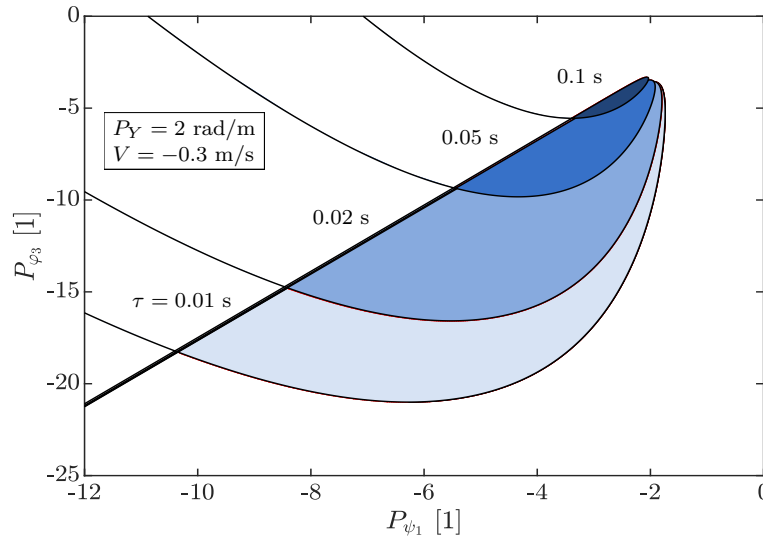
$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}_{i+1} \\ \mathbf{v}_i \\ \mathbf{v}_{i-1} \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{i-r+1} \end{bmatrix}}_{(r+4) \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{R} \\ \mathbf{K} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{G} \left((r+4) \times (r+4) \right)} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}_i \\ \mathbf{v}_{i-1} \\ \mathbf{v}_{i-2} \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{i-r} \end{bmatrix}}_{(r+4) \times 1} \quad (3.17)$$

alakban, ahol $\mathbf{I}$ az egyelemű egységmátrixot jelöli. Az egyes mátrixok alatt azok mérete lett feltüntetve.

A (3.17) leképezéssel jellemzett rendszer aszimptotikusan stabil, ha a $\mathbf{G}$ hipermátrix összes sajátértéke a komplex egységkörön belül helyezkedik el. Diszkrét rendszerek esetén az időkésés periodikus fűrészfog-függvénnyel írható le. Ha $r \rightarrow \infty$ (és $h \rightarrow 0$), akkor ez a periodikus időkésés tart a folytonos rendszer τ időkéséhez. Tekintsük az $r = 1$ esetet, ekkor az időkésés értéke h és $2h$ között változik lineárisan minden lépésközben.

A szemidiszkretizáció tehát képes a határvonal megtalálásán felül a stabil jelleg eldön-

tésére is. A két módszer eredményeként adódó stabilitástérképet mutatja a 3.3. ábra, ahol a kék területek jelentik a szemidiszkrétizáció szerinti stabil tartományokat, a fekete körvonalak pedig a D-szeparációs módszerrel kapott stabilitási határgörbékét különböző τ időközökkel feltételezve. Az ábra alapján kijelenthető, hogy a kétféle számítás jó közelítéssel megegyező eredményt adott. Azonban az ellenőrzésen felül is érdemes volt elvégezni a vizsgálatot mindkét módszerrel a már említett sajátosságai miatt: a D-szeparáció módszere lehetővé teszi a kialakuló rezgések sajátfrekvenciáinak elemzését; míg a szemidiszkrétizációval képesek vagyunk eldönteni a stabilitás jellegét, továbbá egy mérőszámmal jellemezhetjük a stabilitás milyenségét.



3.3. ábra. Összehasonlító stabilitástérkép a P_{ψ_1} és P_{φ_3} erősítési tényezők síkjában különböző τ időközök mellett. A szemidiszkrétizáció (digitális késés) stabil tartományait kék területtel jelölve, a D-szeparáció módszerrel (folytonos időközök) kapott stabilitási határgörbék pedig fekete körvonallal rajzolva

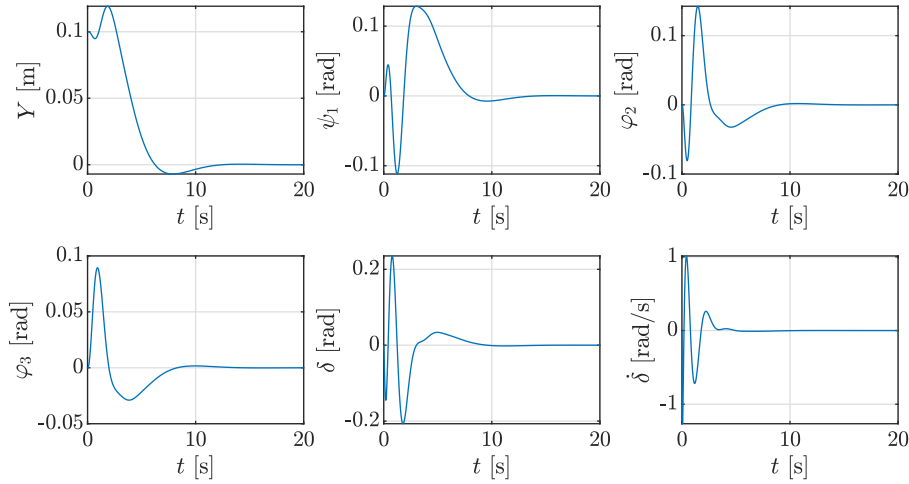
3.3. Szimuláció

Szimulációkkal nem csak az elméleti stabilitásdiagram ellenőrizhető, hanem elképzelhetővé válik maga a mozgás, hiszen grafikonon látjuk az állapotváltozók időbeli alakulását. Ha pedig ezeket – megfelelően sűrű felbontásban – minden időpillanatban ismerjük, egyszerű animációt is készíthetünk a tényleges grafikai megjelenítés érdekében. Ezenkívül ez is egy lehetséges eljárás a D-szeparáció módszerével kapott tartományok stabilitási jellegének eldöntésére, valamint a stabilitásvesztés során kialakuló lengési frekvencia közelítő értéke is becsülhető, ellenőrizhető.

A szimulációk futtatása alatt a rendszer mozgását leíró késleltetett differenciálegyenletek, azaz a (2.8)–(2.12) és (2.15)–(2.16) nemlineáris egyenletek alkotta egyenletrendszer

megoldását értjük adott kezdeti feltételekkel indítva. Ezt a *Matlab* beépített, késleltetett differenciálegyenlet-megoldójával végezzük el, ahol az egyenletrendszerben $\delta_{\text{kívánt}}$ kormánysszög a (3.9) szabályozási törvénynek megfelelő.

A szabályozás, azaz a stabilizálás jóságának egy lehetséges mérőszáma lehet a legveszélyesebb sajátérték kritikus értéktől való eltérése. A digitális szabályozás esetében ez azt jelenti, hogy a szabályozás annál jobb, minél kisebb a legnagyobb abszolút értékű sajátérték, ugyanis akkor stabil a rendszer, ha minden sajátértékének abszolút értéke 1-nél kisebb. Ennek a módszernek megfelelően a $V = -0.3$ m/s sebességű legstabilabb tolatáshoz, $\tau = 0.01$ s időkésést feltételezve, $P_{\psi_1} = -2.449$ és $P_{\varphi_3} = -5.612$ erősítési tényezők tartoznak ($P_Y = 2$ rad/m rögzített értéke mellett). Ezzel a konfigurációval futtatott szimuláció eredményét mutatja a 3.4. ábra, amin látható, hogy a járműszerelvény nagyjából 10 s alatt képes visszaállni a referenciaegyenesre.



3.4. ábra. Legstabilabb ponthoz tartozó szimuláció eredménye, $Y = 0.1$ m kezdeti perturbációval

Annak ellenére, hogy a lineáris stabilitásvizsgálat szerint viszonylag nagy erősítési tényezők mellett is stabilizálható a rendszer, érdemes ezeket elkerülni, ugyanis ezekben az esetekben már megjelenhetnek a nemlinearitásból eredő stabilitási problémák. Illetve előfordulhat, hogy olyan nagy- és gyorsan váltakozó kormánysszöget kellene kivezérelni a beavatkozó felé, ami fizikailag nem valósítható meg.

4. Pályakövető funkció

Ugyan az ember számára bonyolult lehet már az egyenes vonalú tolatás is egy több vonatmányból álló járműszerelvénnyel, ez a feladat a valós szituációk igen kis részében fordul elő. Fontos előrelépést jelentene a kutatásban, ha ez az ideális pálya helyett képesek lennénk biztosítani a stabil mozgást egy bonyolultabb íven végighaladva is. Ez lehetővé tenné a felhasználó számára, hogy az általa érintési pontokkal kijelölt útvonalon mozogjon a járműszerelvény. Célunk ennek a pályakövető funkciónak a megalkotása, tesztelése. Ebben a fejezetben ezt a lehetőséget készítjük elő a későbbi vizsgálatokra. Bemutatásra kerül egy ideális síkgörbe, azonban ezt csak későbbi kutatásaink során tervezzük felhasználni. Ebben a dolgozatban egyelőre körpályán tolatásra egyszerűsítjük vizsgálatainkat.

4.1. Klotoid görbe

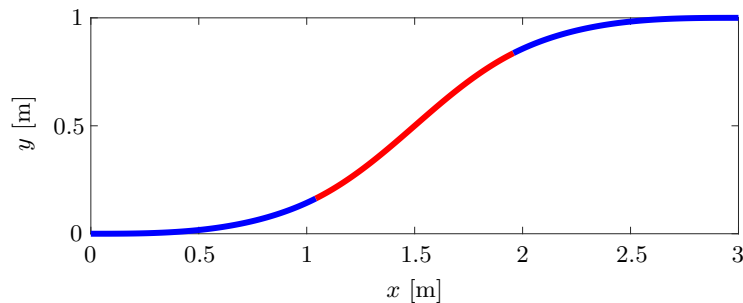
Pályakövető szabályozás tervezésekor első lépésként tehát a tervezett érintési pontokat összekötő görbét kell legenerálni, amin később végighalad a jármű. A síkgörbe számunkra legfontosabb tulajdonsága a görbület változásának sebessége, illetve a különböző ívelemek csatlakozásának finomsága. Ezek megfelelő megválasztásával elkerülhető a beavatkozó kormányoszög hirtelen rángása, illetve az ütésszerű oldalirányú gyorsulások kialakulása.

A fenti kritériumoknak eleget tevő megoldást nyújt a klotoid görbe, más néven Euler-féle spirál. Ez egy olyan síkgörbe, amelynek görbülete lineáris függvénye az ívhossznak, azaz a két mennyiség között egyenes arányosság van a görbe minden pontjában. Járművek esetén ez a pálya úgy követhető, ha a kormányt egyenletesen (állandó szögsebességgel) forgatjuk el a mozgás során. A klotoid görbe matematikailag a Fresnel-integrálok segítségével írható le. Az említett pozitív tulajdonságai miatt rengeteg területen használják ezt a síkgörbét; például vasúti pályáknál, hullámvasutaknál, számítógépes grafikában, megmunkáló berendezéseknél, illetve az orvostudományban.

A klotoid megalkotása nem egyértelmű, matematikai nehézségekbe ütközik. Azonban egy megfelelő, szakirodalomban megtalálható algoritmus tulajdonában már könnyedén generálható bármilyen kezdeti- és végfeltételeket kielégítő görbe (Bertolazzi & Frego 2018). Ebből eredő további hasznos tulajdonsága (az önvezető járművek világában különösen), hogy nem szükséges pontonként tárolni a görbe adatait, ami rengeteg memóriát lefoglalna, hanem elegendő csupán ismerni az algoritmust, illetve megadni a kezdeti- és végponthoz tartozó adatokat.

Átmeneti görbeként is hivatkoznak a klotoid görbére, ugyanis tipikus alkalmazása egy egyenes és egy körív összekapcsolása kellően sima csatlakozás biztosítása mellett. Azon-

ban az, hogy a görbe elején és végén is tetszőlegesen megadott görbület legyen, nem valósítható meg egy darab klotoid-ív segítségével, ehhez már három ív szükséges. Erre tehát a korábban említett, szakirodalomból merített algoritmust használjuk a továbbiakban. Ez a *Matlabban* megírt, rendkívül optimalizált program rövid időn belül generál egy három ívből álló klotoid görbét a bemeneti adatokból. Ezek a kezdeti- (0 indexelésű) és végponthoz (1 indexelésű) tartozó x, y koordináták, Θ érintők szöghelyzetei, illetve a κ görbületek (azaz összesen 8 adat). Egy ilyen klotoid-ívekből álló görbét mutat a 4.1. ábra, ami például egy sávváltásra alkalmas pályát jelent. A három ív a színeknek köszönhetően elkülönül: az első és a harmadik kék, a köztes pedig piros színnel van ábrázolva. A rajzoláson kívül a program képes az egyes ívek kezdeti- és végpontokhoz tartozó x, y koordinátáin, Θ szöghelyzetein és κ görbületein felül a κ' görbület változása és az L teljes ívhossz listázására is.



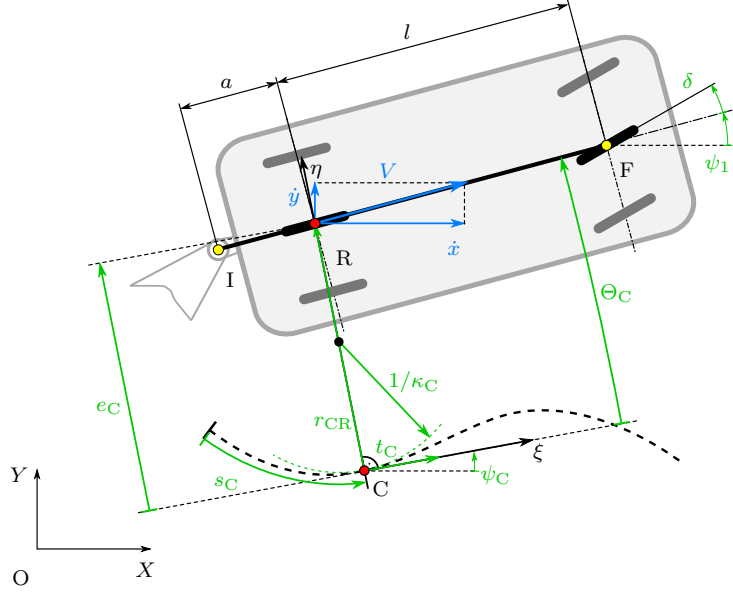
4.1. ábra. Sávváltásra alkalmas, három ívből álló klotoid görbe. Paraméterek: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $\Theta_0 = 0$, $\kappa_0 = 0$, $x_1 = 3$ m, $y_1 = 1$ m, $\Theta_1 = 0$, $\kappa_1 = 0$

4.2. Pályakövető szabályozás időkéséssel

Tetszőleges klotoidon történő haladás előírásához térjünk át új koordinátákra. A pályakövetési funkcióhoz tartozó mechanikai modellt a 4.2. ábrán láthatjuk, feltüntetve az új koordináták jelentéseit. Tekintsük a vontató jármű R hátsó tengelyét mint előírt pontot, aminek végig kell haladnia a pályán; azonban a későbbiekben érdekes lehet a járműszerelvénymás pontjára előírt pálya vizsgálata is. C jelöli a megkívánt pályagörbe R-hez legközelebb eső pontját. Az új koordináták az s_C pályaiív-hossz, az e_C laterális eltérés és a $\Theta_C = \psi_1 - \psi_C$ relatív legyezési szöghiba, ahol ψ_C a megkívánt pálya érintőjének szöge a C pontban. A pályától való laterális eltérés

$$e_C = (\mathbf{t}_C \times \mathbf{r}_{CR}) \cdot \mathbf{k} \quad (4.1)$$

szerint definiálható, ahol $\mathbf{t}_C$ a pálya tangenciális irányú egységvektora a C pontban, $\mathbf{r}_{CR}$ pedig az arra merőleges, C-ből R-be mutató vektor. Az e_C laterális eltérés pozitív/negatív,



4.2. ábra. Pályakövető szabályozás mechanikai modellje, az új koordináták bevezetése

amikor az R pont a pálya bal/jobbs oldalán van.

Az új koordinátákra való áttérés érdekében végezzük el a földhöz rögzített- (X, Y) és a pályához rögzített koordinátarendszerek (ξ, η) közötti transzformációt (Snider 2009). Ennek eredményeként az

$$\dot{s}_C = \frac{\dot{X}_R \cos \psi_C + \dot{Y}_R \sin \psi_C}{1 - \kappa_C e_C}, \quad (4.2)$$

$$\dot{e}_C = -\dot{X}_R \sin \psi_C + \dot{Y}_R \cos \psi_C, \quad (4.3)$$

$$\dot{\Theta}_C = \dot{\psi}_1 - \frac{\kappa_C (\dot{X}_R \cos \psi_C + \dot{Y}_R \sin \psi_C)}{1 - \kappa_C e_C} \quad (4.4)$$

összefüggések adódnak, melyekbe behelyettesítve a (2.8)–(2.10) egyenleteket, megkapjuk a transzformált egyenletek végső alakját. Ezeket kiegészítve a (2.11)–(2.12) relatív szögkitérésekhez tartozó differenciálegyenletekkel, illetve leválasztva a kormánymű dinamikájához tartozó egyenleteket (egyszerűsítés miatt) adódnak az új mozgásegyenletek:

$$\dot{s}_C = \frac{V \cos \Theta_C}{1 - e_C \kappa_C}, \quad (4.5)$$

$$\dot{e}_C = V \sin \Theta_C, \quad (4.6)$$

$$\dot{\Theta}_C = \underbrace{\frac{V}{l} \tan \delta}_{\psi_1} - \frac{V \kappa_C \cos \Theta_C}{1 - e_C \kappa_C}, \quad (4.7)$$

$$\dot{\varphi}_2 = -\frac{V}{ll_2} (l \sin \varphi_2 + \tan \delta (l_2 + a \cos \varphi_2)), \quad (4.8)$$

$$\dot{\varphi}_3 = -\frac{1}{l_3} \left(V \sin(\varphi_2 + \varphi_3) + a\dot{\psi}_1 \cos(\varphi_2 + \varphi_3) + l_2(\dot{\psi}_1 + \dot{\varphi}_2) \cos \varphi_2 \right) - (\dot{\psi}_1 + \dot{\varphi}_2), \quad (4.9)$$

ahol κ_C a pálya görbülete a C pontban. Tehát az állapotváltozók vektora:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} s_C & e_C & \Theta_C & \varphi_2 & \varphi_3 \end{bmatrix}^T. \quad (4.10)$$

A mozgásegyenletek ismeretében kövessük a 2.5. alfejezetben ismertetett, egyenes mentén való haladásnál alkalmazott lépéseket a lineáris állapottér modell felírásához. Zérustól eltérő görbületű (nem egyenes) pályán haladáshoz szükséges egy pályakövető kormányyszög (jelölje δ_{ff}) előírása. Ennek meghatározásához vizsgáljuk az

$$\dot{e}_C \equiv 0 \quad \text{és} \quad \dot{\Theta}_C \equiv 0 \quad (4.11)$$

feltételeket. Ezeket, valamint $\delta = \delta_{\text{ff}}$ -t behelyettesítve a (4.5)–(4.7) egyenletekbe:

$$\delta_{\text{ff}} = \text{atan}(l\kappa_C) \quad (4.12)$$

pályakövető kormányyszöget szükséges előírni. Egyszerűsítésként tekintsük a κ_C görbületet konstansnak, ami egy körpályán való mozgást eredményez. Ebben az esetben válasszuk le az ívhossz változásához tartozó (4.5) egyenletet a mozgásegyenletekről, mivel κ_C és a többi, (4.6)–(4.9) mozgásegyenletek is függetlenek az s_C ívhossztól. Így az állapotváltozók vektora

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} e_C & \Theta_C & \varphi_2 & \varphi_3 \end{bmatrix}^T. \quad (4.13)$$

Az egyensúlyi pont megtalálásához feltételezzük, hogy $e_C = 0$ és $\Theta_C = 0$. Az adott körpályához tartozó φ_2 és φ_3 egyensúlyi értékeinek meghatározásához pedig oldjuk meg a

$$\dot{\varphi}_2 \equiv 0 \quad \text{és} \quad \dot{\varphi}_3 \equiv 0 \quad (4.14)$$

feltételeket a pályakövető kormányyszög ($\tan \delta_{\text{ff}} = l\kappa_C$), illetve a $\varphi_2 = \varphi_2^*$ és $\varphi_3 = \varphi_3^*$ konstans értékeinek behelyettesítésével. Az így kapott transzcendens egyenletek numerikus megoldását követően már felírható az egyensúlyi helyzethez tartozó $\mathbf{x}_e$ állapotváltozók vektora és $\mathbf{u}_e$ bemenőjelek vektora:

$$\mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varphi_2^* & \varphi_3^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_e = \begin{bmatrix} \delta_{\text{ff}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{atan}(l\kappa_C) \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Továbbhaladva a 2.5 alfejezet lépésein, a körpályán való mozgás linearizált állapottér

reprezentációjához tartozó $\mathbf{A}$ rendszermátrix és $\mathbf{B}$ bemeneti mátrix az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & V & 0 & 0 \\ -V\kappa_C^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{V}{ll_2}(l \cos \varphi_2^* - al\kappa_C \sin \varphi_2^*) & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{V}{l}((l\kappa_C)^2 + 1) \\ -\frac{V}{ll_2}(l_2 + a \cos \varphi_2^*)((l\kappa_C)^2 + 1) \\ \frac{Va}{2ll_2l_3 \cos^2(l\kappa_C)}(l_2 - 2l_2 \cos(\varphi_2^* + \varphi_3^*) + 2l_3 \cos \varphi_2^* + l_2 \cos(2\varphi_2^*)) \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

alakban írhatók fel, ahol

$$a_{43} = -\frac{V}{ll_2l_3} \left(ll_3 \cos \varphi_2^* + ll_2 \cos(2\varphi_2^*) - ll_2 \cos(\varphi_2^* + \varphi_3^*) - al_2 \sin(2\varphi_2^*)l\kappa_C \right. \\ \left. + al_2 \sin(\varphi_2^* + \varphi_3^*)l\kappa_C - al_3l\kappa_C \sin(\varphi_2^*) \right), \quad (4.18)$$

$$a_{44} = -\frac{V}{ll_3} (l \cos(\varphi_2^* + \varphi_3^*) - a \sin(\varphi_2^* + \varphi_3^*)l\kappa_C). \quad (4.19)$$

Mivel az $\mathbf{u}_e$ egyensúlyi helyzethez tartozó bemenőjelek vektora független az állapotváltozóktól, így ez a csak konstansokat tartalmazó $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixokban jelenik meg.

Körpályán történő tolatás – az egyeneshez hasonlóan – instabil, emiatt a δ beavatkozó kormányzóg számításakor a δ_{ff} pályakövető kormányzógön felül egy visszacsatolós szabályozást is figyelembe kell venni, ezt jelölje δ_{fb} . Ez hasonló a 3. fejezetben bemutatott δ kormányzóghez. Most is elvégeztük az irányíthatóságra és megfigyelhetőségre vonatkozó vizsgálatokat a 3.1 alfejezetben bemutatott módszer alapján. Ennek eredményeként adódik, hogy míg a hátsó tengelyhez tartozó φ_3 relatív szög visszacsatolása elengedhetetlen, addig a köztes vonóháromszöges csatlakozáshoz tartozó φ_2 relatív szög visszacsatolása nélkül is irányítható és megfigyelhető a rendszer. Továbbá kiderül, hogy az e_C laterális eltérés és a Θ_C relatív szöghiba közül elméletben elegendő lenne csupán az egyiket visszacsatolni, azonban a szabályozó megfelelő működése érdekében jelen kutatás során mindkettő állapotváltozó felhasználásra kerül a szabályozás során. Megjegyzendő, hogy itt a φ_3 relatív legyezési szög eltérését nem a zérustól mérjük, hanem az adott κ_C görbülethez előírt egyensúlyi φ_3^* értékétől. A szabályozásban ismét figyelembe vesszük a

rendszerben megjelenő időkést, ezeknek megfelelően a szabályozási törvény a

$$\delta_{\text{fb}}(t) = -P_e e_C(t - \tau) - P_\Theta \Theta_C(t - \tau) - P_{\varphi_3} (\varphi_3(t - \tau) - \varphi_3^*) \quad (4.20)$$

alakban írható. Így az erősítési tényezők vektora:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -P_e & -P_\Theta & 0 & -P_{\varphi_3} \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

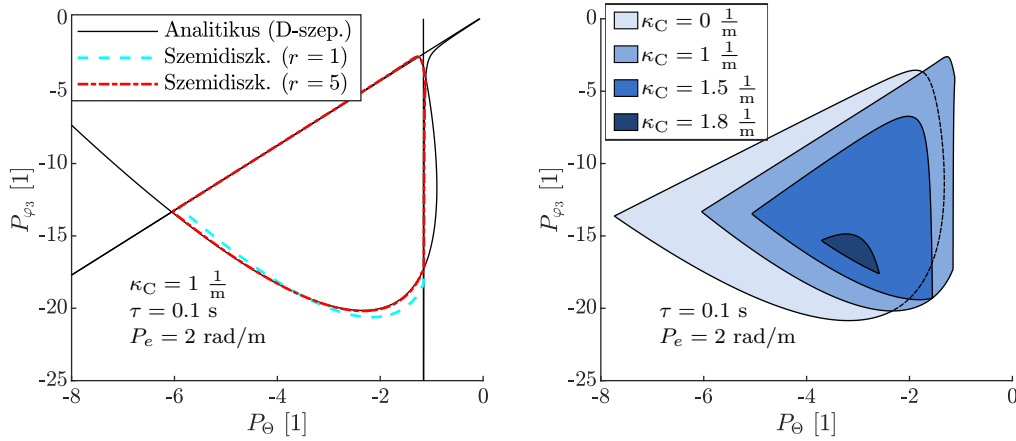
4.3. Körpályán haladás stabilitása

Körpálya esetén ugyanúgy történik a stabilitásvizsgálat, mint az egyenesvonalú mozgásnál. Alkalmazzuk a D-szeeparáció módszerét (3.2.1. szakasz), illetve végezzük el a szemidiskretizáció (3.2.2. szakasz) lépéseit a körpályán haladó mozgást leíró állapottér modellre, ami a 4.2. alfejezetben került levezetésre. A felhasznált modell geometriai paraméterei megegyeznek a 2.1. táblázatban lévő értékekkel (a kormánymű dinamikáját elhanyagolva).

Vizsgáljuk meg a szemidiskretizációt jellemző r időkést felbontásának hatását a konvergálásra az analitikus, azaz a D-szeeparáció módszerrel kapott eredményt alapul véve. Ezt a 4.3. ábra bal oldali grafikonja szemlélteti, ahol az analitikus határgörbét (fekete folytonos vonal), illetve két különböző felbontásértékre ($r = 1$ ciánkék szaggatott vonal és $r = 5$ piros pontvonal) elvégzett szemidiskretizáció stabilitási görbéjét jelenítettük meg. Az elemzést $\kappa_C = 1 \frac{1}{\text{m}}$, $\tau = 0.1$ s, $P_e = 2$ rad/m rögzített értékek mellett végeztük. Mivel már az $r = 5$ -ös felbontás is elegendően pontosnak bizonyul a grafikon alapján, így a későbbiekben ezt alkalmazzuk. Nagyobb érték feleslegesen növelné meg a számításigényt, mert az eredmény pontossága csekély mértékben növekedne.

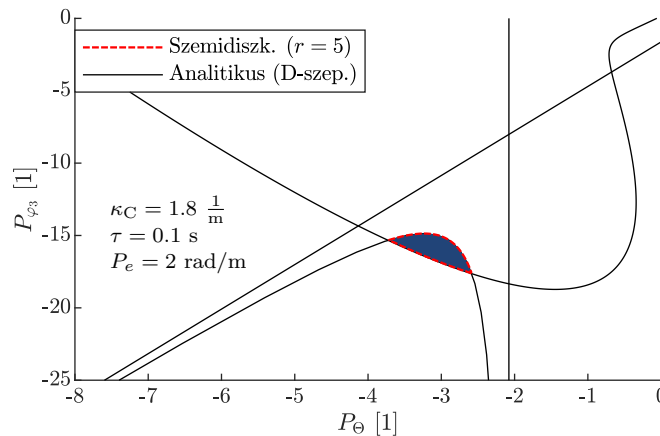
A 4.3. ábra jobb oldali grafikonja a körpálya κ_C görbületének stabilitásra vett hatását illusztrálja. A számításokat ez esetben is $\tau = 0.1$ s, $P_e = 2$ rad/m rögzített értékek mellett végeztük. Mivel megbizonyosodtunk arról, hogy a szemidiskretizáció módszere $r = 5$ felbontás mellett elegendően megközelíti az analitikus eredményt, így a görbéket csak a diskretizációs módszerrel rajzoltuk ki. A stabil tartományok a kék különböző árnyalataival vannak jelölve, a hozzájuk tartozó görbületértékeket a jelmagyarázat mutatja. Megfigyelhető, hogy a görbület növelésével eleinte a stabil tartomány alakja és mérete kis mértékben változik csak, viszont eltolódik. Tovább növelve a görbület értékét, $\kappa_C = 1 \frac{1}{\text{m}}$ körül pedig jelentősen csökkenni kezd a mérete, nem tolódik el, hanem rázsugorodik a stabil tartomány egy pontjára; $\kappa_C = 1.824 \frac{1}{\text{m}}$ körül gyakorlatilag vonalszerűvé válik a stabil terület. Megjegyzendő, hogy ugyan a leghalványabb terület a $\kappa_C = 0$, azaz az egyenes vonalú pályához tartozik, ettől még nem összehasonlítható a dolgozat első felében tárgyalt

esettel, mivel most elhanyagoltuk a kormánymű dinamikáját.



4.3. ábra. Az r szemidiszkrétizációs időkézés felbontásának hatása a konvergenciára (bal oldal), és a κ_C görbület hatása a stabil tartomány változására

A szemidiszkrétizáció előnyét – a D-szeparáció módszerrel szemben – láthatjuk a 4.4. ábrán, ahol a fekete folytonos vonal jelöli az analitikus megoldás eredményét, a piros szaggatott körvonalú sötétkék terület pedig a szemidiszkrétizáció szerinti stabil területet adott konfiguráció mellett. Az analitikus megoldás azokat a görbeseregeket adja ki, amelyek mentén áthaladva egy karakterisztikus gyök (vagy komplex konjugált gyökpár) átlépi a képzetes tengelyt. Ez azonban nem elégséges-, csak szükséges feltétele annak, hogy ténylegesen egy stabil tartományt határoljon. Az ábrán ez jól látható, hiszen a rengeteg, bonyolult analitikus görbe alapján igen nehéz lenne megmondani, hogy melyik közbezárt terület jelöl stabil tartományt, viszont a szemidiszkrétizációs eljárás egyértelműen kijelöli azt.



4.4. ábra. Az analitikus stabilitási határ és szemidiszkrétizációval meghatározott stabil tartomány összehasonlítása kis sugarú köríven való tolatás esetén

5. Konklúzió

A dolgozat fő célja egy vontató járműből és egy hozzá vonóháromszöggel kapcsolt, kétten-gelyű vontatmányból álló járműszerelvénnyel (melynek első tengelye képes elfordulni a füg-gőleges körül) tolatásának vizsgálata, illetve szabályozása. A projekt első felében egyenes mentén történő tolatással foglalkoztunk, azonban a második felében ezt kiterjesztettük körpálya vizsgálatára.

Először egy korábbi kutatás releváns eredményei kerültek bemutatásra, amik alapul szolgáltak ennek a dolgozatnak a megírásakor, illetve az elvégzett munka tervezésekor. Legfőbb hozadéka a mechanikai modell felállításával kapcsolatban volt, így került kivá-lasztásra a kinematikai, merevkerekes modell a vizsgálandó összetett járműszerelvényre. Az egyenes mentén haladás modelljét kiegészítettük egy, a kormánymű dinamikájának figyelembevételére alkalmas modellel, majd a kapott nemlineáris mozgásegyenleteket fel-használva felírtuk a rendszer linearizált állapotterét reprezentációját. A tolatási feladat végrehajtásához egy egyszerű arányos szabályozási algoritmust használtunk, három ál-lapotváltozó felhasználásával. A szabályozási feladat megoldásaként stabilitástérképeket ábrázoltunk az erősítési tényezők síkjában, a rendszerben megjelenő időkésés figyelembe-vételével. Az ezáltal okozott végtelen-dimenziós matematikai probléma stabilitásvizsgálá-tához kétféle módszert is alkalmaztunk: D-szeparáció, illetve szemidiszkretizáció. A kuta-tás során figyeltük az időkésés nagyságának-, a tolatás sebességének-, valamint a körpálya görbületének hatását a stabilitásra. Ezenkívül összehasonlítottuk a két módszer ered-ményeit, és mérlegeltük az előnyeiket, hátrányaikat. A stabilitástérképek szimulációkkal történő verifikációját is elvégeztük. Bemutattuk, hogy a pálya görbületének jelentős hatá-sa van a szabályozási paraméterek stabil tartományának nagyságára és helyzetére. Tehát, a szabályozó behangolásánál nem lehet eltekinteni a pálya görbületétől. Az eredmények feltehetően jól hasznosíthatók egy esetleges adaptív szabályozó algoritmus tervezésénél, amely a görbület függvényében módosítja a szabályozás erősítési tényezőit.

A jövőben tervezzük az eredmények alátámasztását kísérleti úton is, kis skálájú model-len elvégezve a méréseket. Ehhez a dolgozat elején bemutatott berendezés átalakítása, fejlesztése szükséges. A pályakövető szabályozás fejlesztése szintén kitűzött cél, ugyanis szeretnénk tetszőleges klotoid pályán végighaladni a járműszerelvénnel. Ez a konstans görbület feltételezésének feloldásával jár. A pályakövetés minőségét feltehetően javíta-ná, ha a járműszerelvénnyel jelenleg vizsgált, vontató jármű hátsó kerekeinek tengelyétől eltérő pontjának írnánk elő a pályáját. Ezek a fejlesztési lehetőségek mind bonyolítják a problémakör matematikai számításait és a mérnöki feladatait, azonban valószínűsíthetően izgalmas kihívásokat tartogatnak.

Irodalomjegyzék

- Altafini, C., Speranzon, A. & Wahlberg, B. (2001), ‘A feedback control scheme for reversing a truck and trailer vehicle’, *IEEE Transactions on Robotics and Automation* **17**(6), 915–922.
URL: <https://doi.org/10.1109/70.976025>
- ATBS (2021), Self-driving trucks: Are truck drivers out of a job?,
<https://www.atbs.com/post/self-driving-trucks-are-truck-drivers-out-of-a-jo>. Megnyitva: 2021.10.20.
- Bertolazzi, E. & Frego, M. (2018), ‘On the G2 hermite interpolation problem with clothoids’, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **341**, 99–116.
URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042718301924>
- Csernák, G. (2018), *Dinamika*, Akadémiai Kiadó.
URL: <https://mersz.hu/kiadvany/351>
- Csernák, G. & Stépán, G. (2019), *Rezgésstan*, Akadémiai Kiadó.
URL: <https://mersz.hu/kiadvany/593>
- Darling, J., Tilley, D. & Gao, B. (2009), ‘An experimental investigation of car—trailer high-speed stability’, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering* **223**(4), 471–484.
URL: <https://doi.org/10.1243/09544070JAUTO981>
- Goh Jonathan, Y., Goel, T. & Christian Gerdes, J. (2019), ‘Toward Automated Vehicle Control Beyond the Stability Limits: Drifting Along a General Path’, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* **142**(2). 021004.
URL: <https://doi.org/10.1115/1.4045320>
- Inesperger, T. & Stépán, G. (2011), *Semi-discretization for time-delay systems — Stability and engineering applications*, Springer-Verlag New York, USA.
URL: <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-0335-7>
- Jae, R. & Woojin, C. (2011), ‘Reversing control of a car with a trailer using the driver assistance system’, *International Journal of Advanced Robotic Systems* **8**(2), 23.
URL: <https://doi.org/10.5772/10578>
- Ljungqvist, O. (2019), *On motion planning and control for truck and trailer systems*.
URL: <https://doi.org/10.3384/lic-diva-153892>

- Mihályi, L. (2019), ‘Kétkerekű vontatmányok egyenes vonalú mozgásának lineáris stabilitása’. Szakdolgozat, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Műszaki Mechanikai Tanszék.
- Miquel, T. (2021), State Space Modelling. Lecture.
URL: <https://cel.archives-ouvertes.fr/hal-02987750>
- Olsson, E. & Skönnvall, H. (2018), Dolly with hinged drawbar.
URL: <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1330112/FULLTEXT01.pdf>
- Pacejka, H. B. (2002), *Tyre and Vehicle Dynamics*, Elsevier Butterworth–Heinemann, Oxford.
- Snider, J. M. (2009), Automatic steering methods for autonomous automobile path tracking. Tech. rep., Robotics Institute, Carnegie Mellon University. CMURI-TR-09-08.
- Szabó, B. (2014), Gumiabroncsos járművek kissebességű pályamozgásának és a gumiabroncs deformációjának kapcsolata’. Doktori Értekezés, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem.
- Szilágyi, B. & Juhász, F. (2012/5), ‘Állapotirányítás, állapotirányítás megfi gyelővel, optimális (lqr) irányítás – 2.’. Szabályozástechnika 32., Magyar Elektronika.
URL: <https://magyar-elektronika.hu/szabalyozastechnika/820-szabalyozastechnika-cikksorozat-korabbi-reszei>
- Tilbury, D., Murray, R. & Shankar Sastry, S. (1995), Trajectory generation for the n-trailer problem using goursat normal form’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **40**(5), 802–819.
URL: <https://doi.org/10.1109/9.384215>
- Turányi, L. (2019), Sávtartó szabályozások futópados tesztelése’. Diplomamunka, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Műszaki Mechanikai Tanszék.
- Vörös, I., Turányi, L., Várszegi, B. & Takács, D. (2021), Small-scale experimental test rig for lateral vehicle control’, *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering* **65**(2), 163–170.
URL: <https://pp.bme.hu/me/article/view/17269>