



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR
MŰSZAKI MECHANIKAI TANSZÉK

MIHÁLYI LEVENTE

SZAKDOLGOZAT

Kétkerekű vontatmányok egyenes vonalú mozgásának lineáris stabilitása

Témavezető:

Dr. Takács Dénes
egyetemi docens

Budapest, 2019

NYILATKOZATOK

Elfogadási nyilatkozat

Ezen szakdolgozat a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kara által a Diplomatervezési és Szakdolgozat feladatokra előírt valamennyi tartalmi és formai követelménynek, továbbá a feladatkiírásban előírtaknak maradéktalanul eleget tesz. E szakdolgozatot a nyilvános bírálatra és nyilvános előadásra alkalmasnak tartom.

A beadás időpontja:

témavezető

Nyilatkozat az önálló munkáról

Alulírott, *Mihályi Levente* (YOJ959), a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem hallgatója, büntetőjogi és fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem és sajátkezű aláírással igazolom, hogy ezt a szakdolgozatot meg nem engedett segítség nélkül, saját magam készítettem, és dolgozatomban csak a megadott forrásokat használtam fel. Minden olyan részt, melyet szó szerint vagy azonos értelemben, de átfogalmazva más forrásból átvettem, egyértelműen, a hatályos előírásoknak megfelelően, a forrás megadásával megjelöltem.

Budapest, 2019. december 13.

szigorló hallgató

TARTALOMJEGYZÉK

Absztrakt	1
Abstract	2
1. Bevezetés	3
2. Mechanikai modell	4
2.1. A modell ismertetése	4
2.2. Mozgásegyenletek	5
2.2.1. Általános Kane-egyenletek merev testekre	5
2.2.2. Vontató-vontatmány rendszerre felírt egyenletek	6
2.2.3. Mozgásegyenletek levezetése	7
2.3. Kerékmodell	11
3. Stabilitásvizsgálat	14
3.1. Linearizálás	14
3.2. Mátrix alak	15
3.3. A rendszer stabilitása	16
3.4. Szimuláció a stabilitás ellenőrzésére	17
3.4.1. Stabil tartomány	18
3.4.2. Instabil tartomány	18
4. Szabályozás	21
4.1. Szöghelyzet visszacsatolása	21
4.2. Szöghelyzet és pozíció visszacsatolása	23
4.3. Két szöghelyzet és egy pozíció visszacsatolása	25
4.4. Szabályozási módszerek összegzése	27
5. Eredmények kísérleti tesztelése	28
5.1. Tesztpad ismertetése	28
5.1.1. Útfelület	29
5.1.2. Modellautó, -utánfutó	29
5.1.3. Szenzorok	30
5.1.4. Jelek feldolgozása, szervomotor vezérlése	30
5.2. Teszt leírása	31
5.3. Eredmény, összehasonlítás	32
6. Konklúzió	34
Irodalomjegyzék	35

ABSZTRAKT

Jelen dolgozat célja egy olyan szabályozási algoritmus megalkotása volt, amely képes egy személyautó-utánfutó kombináció egyenletes sebességgel történő haladását biztosítani, azaz stabillá tenni, az általunk megadott egyenes mentén. A fő hangsúlyt a tolatásra helyeztük, de vizsgáltuk az előremenetet is.

Először meg kellett ismernünk, hogy hogyan viselkedik egy ilyen rendszer mindenféle beavatkozás nélkül. Ezt egy egyszerű mechanikai modell felállításával értük el, amit linearizálva, egy ismert matematikai kritériummal vizsgáltunk a stabilitására vonatkozóan. Így megtudtuk, hogy amíg különböző sebesség-súlyelosztás kombinációk mellett találunk stabil tartományt az előremenetet tekintve, addig a tolatás bármilyen paraméterérték mellett is instabilnak bizonyult.

A mozgás stabilizálására három lehetséges szabályozási konfigurációt néztünk. Mind-egyik esetben a beavatkozás a vontató jármű első kerekének kormányzásán keresztül történt, csak a beállítandó szög kiszámolási módjában tértek el egymástól. A tolatást véve fő feladatnak sikerült találni egy algoritmust, ami képes stabilan tartani az adott egyenes menti egyenletes haladást. A másik kettőt elvetettük, ugyanis az egyik konfigurációnál nem adható meg, hogy milyen irányba haladjon a jármű, a másik pedig nem képes a tolatás stabilizálására.

A kapott eredményeket szimulációk futtatásával is alátámasztottuk. Ezenkívül a *Műszaki Mechanikai Tanszék* laboratóriumában rendelkezésre álló tesztpados mérőberendezést úgy átalakítva, hogy az utánfutóval kiegészített rendszert is kezelni tudjuk, tesztméréseket is végeztünk valós környezetben a tolatás szabályozására vonatkozóan. Ezzel a módszerrel egy, az elméletihez hasonló alakú, de kicsinyített stabil tartományt találtunk. Annak tudatában, hogy a számításaink egy ideális, egyszerűsítésekkel teli mechanikai modellre épülnek, a kettő közti eltérés a kezdeti elképzeléseinknek megfelel, ugyanis a valóságban elkerülhetetlen nemlineáris tényezők, az időkézés és a pontatlan mérési lehetőségeink általában rontják a stabilitást.

Van lehetőség az eredmények további pontosítására mind az elméleti-, mind a kísérleti modell esetén. Előbbire nézve érdemes lehet egy összetettebb, nemlineáris kerékmodellt alkalmazni, valamint időkézést bevezetni. A mérést illetően pedig elsősorban a modellautó kormányművének kotyogását lehetne kiküszöbölni, ezzel egy élethűbb helyzetet létrehozva.

Budapest, 2019. december 13.

Mihályi Levente

ABSTRACT

The purpose of this thesis was to create a control algorithm which can provide the rectilinear motion for a car-trailer combination. We put emphasis on reversing but we also examined when the system goes forward.

First we had to figure out how a system like this works without any active control. We achieved this by analyzing a linearized mechanical model, utilizing a known stability criterion on it. From this we learned that while the drive mode can be stable with different velocity-weight distribution combinations, no matter what parameters we used, reversing proved to be unstable.

To stabilize the motion, we introduced three possible control configurations. In every case the actuation is achieved by the steering of the front wheels of the towing vehicle, the only difference was the method of calculating the steering angle. We managed to find an algorithm that can keep the rectilinear motion of the system stable at a constant velocity while in reverse. The other two got discarded because while one configuration could keep the car-trailer combination straight, we could not specify its direction, and the other is not capable of stabilizing in reverse at all.

We confirmed our results by running simulations. Furthermore we configured the treadmill gauging equipment in the laboratory of the *Department of Applied Mechanics* so that we can test the vehicle reversing while equipped with a trailer in a real environment. With this method, we found a stable domain similar in shape, but smaller than the one we calculated during our theoretical investigation. Knowing that the calculations are built upon an ideal and simple mechanical model, the deviation between the two graphs were expected. It is mostly caused by nonlinear factors, time delay and inaccurate gaugings.

There are possibilities to increase the accuracy of the results further in both the theoretical and experimental cases. For the former we could use a more complex, nonlinear tyre model and add time delay. For the testing, eliminating the clucking of the steering-gear could create a more realistic situation.

Keywords: *car-trailer combination, rectilinear reversing, linear control, laboratory testing*

Budapest, 13 December 2019

Levente Mihályi

1. BEVEZETÉS

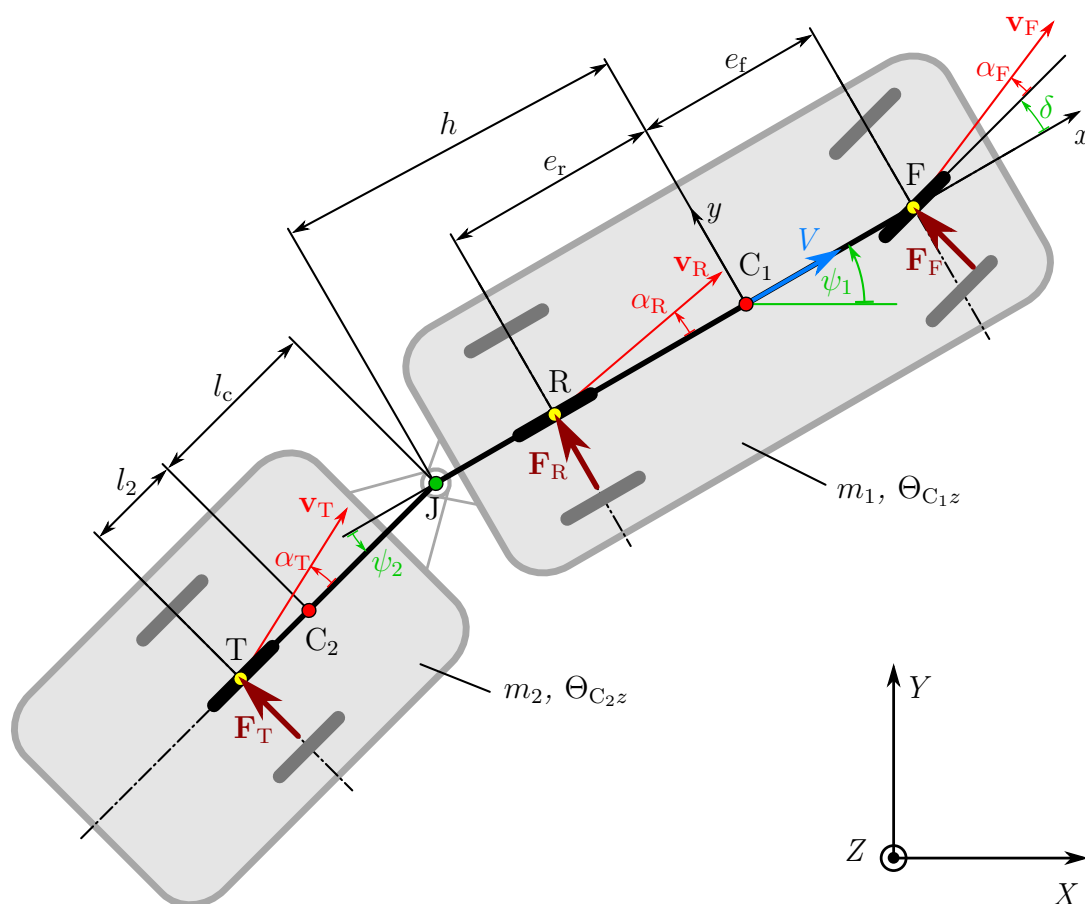
Az önvezető járművek korszakához egyre közelebb kerülünk a műszaki tudományok fejlődésével. A vezető autógyártók közötti versenynek köszönhetően napjainkban ez a téma az egyik legtöbb mérnököt foglalkoztató probléma, ami teljesen átalakítja a közúti közlekedésről alkotott képünket. A fejlesztések fő céljai a felhasználói kényelem mellett a környezetvédelem (üzemanyag-fogyasztás optimalizálása), a közlekedés gyorsítása és mindenekelőtt a biztonság, ami megmagyarázza a rengeteg energiaráfordítás szükségességét.

Jelen dolgozatban egy személyautó-utánfutó kombináció egyenes vonalú egyenletes mozgásának lineáris stabilitásával és annak szabályozásával foglalkozunk. Minden járműre jellemző egy kritikus sebességérték, ami a stabil mozgás határát jelenti. Személyautók esetében ez viszonylag nagy érték, így normál közlekedési helyzetekben nem igényel különösebb figyelmet, azonban egy vontatmánnyal kiegészülve drasztikusan csökken ez a határérték, könnyen instabillá válhat a mozgás hétköznapi közlekedés mellett is. Ennél még izgalmasabb eset a hátramenet, a rendszer egyenes vonalon tartása az ember számára már kis sebességnél is nehézkes az instabilitás miatt, azonban az önvezető járművekbe építhető vezetéstámogató rendszereknek ez nem jelenthet problémát. Vizsgálatunk során erre az esetre helyezünk nagyobb hangsúlyt. Néhány autógyártó esetében – mint a *Volkswagen* – már elérhető extra felszereltségként az úgynevezett *Trailer Assist* (Volkswagen, 2019), ami átveszi a vezetőtől a kormányzási szög bonyolult beállításának feladatát vontatmánnyal történő tolatáskor. Elegendő az utánfutó kívánt haladási irányát megadni egy állítókapcsoló segítségével, a rendszer kiszámolja az ehhez szükséges kormányelfordulás-szöveget, ezzel megkönnyítve az adott helyre tolatás manőverét.

Először tehát felállítunk egy alkalmas mechanikai modellt, amit ezután vizsgálni tudunk stabilitási szempontból. Ezt követően kiegészítjük a rendszert különböző szabályozó algoritmusokkal, ami a vontató jármű kormányzott kerekein keresztül avatkozik be a megfelelően megválasztott állapotváltozók visszacsatolása révén, és vizsgáljuk ezek stabilitásra gyakorolt hatását. A vizsgálatot a tolatás valós környezetben történő tesztelésével folytatjuk. Ismertetjük a meglévő tanszéki futópados, modellautós kísérleti állomást, valamint kiegészítjük és átalakítjuk, hogy alkalmas legyen az adott feladatra. A mérések elvégzését követően a két módszerrel kapott eredményt összehasonlítjuk, végül pedig egy összegzéssel zárul a dolgozat.

2. MECHANIKAI MODELL

Alkalmazzuk a szakirodalomban gyakran használt, úgynevezett *bicikli modellt* (Pacejka, 2002) a személyautóból és utánfutóból álló összetett rendszerre. A modell alapötlete az, hogy eltekint a jármű szélességétől – innen ered az elnevezés is –, egyszerű merev rúd-elemekkel helyettesíti a karosszériát. Ez a 2–1. ábrán látható, ahol a szürke váz mutatja a valóságos rendszert, a fekete rúdszerkezet pedig az egyszerűsített modellt. Az ábrán feltüntetjük a számításokhoz szükséges mennyiségeket is, ezeket a következő alfejezetben részletezzük.



2-1. *ábra.* Mechanikai modell

2.1. A modell ismertetése

A rendszert az (X, Y, Z) talajhoz rögzített koordináta-rendszerben vizsgáljuk. Járművünk az (X, Y) síkban végez mozgást. Emellett definiálunk egy (x, y, z) lokális koordináta-rendszert, ami a vontató jármű súlypontjához (C_1 pont) van rögzítve.

A személygépjárművet és vontatmányt jelképező két merev testet egy csuklóval (J pont) kapcsoljuk össze. A számunkra fontos geometriai méretek, ahogy a 2–1. ábra is mutatja: e_f és e_r rendre a személyautó súlypontjának és az első-, valamint a hátsó tengelyének távolsága; h a súlypont és a kapcsolódási pont távolsága; l_c és l_2 pedig rendre az utánfutó súlypontjának (C_2 pont) a csatlakozási ponttól-, valamint a tengelyétől mért távolsága. Az autó tömegét m_1 , a súlypontjában értelmezett Z tengely körüli tehetetlenségi nyomatékát Θ_{C_1z} jelöli, ugyanezek az értékek az utánfutóra vonatkozóan m_2 és Θ_{C_2z} . További kiemelt pontjaink az F, R, T pontok, melyek az egyes kerekek középpontjait jelölik.

Mivel a mozgást kinetikailag szeretnénk vizsgálni, ezért felvettük a talajról átadódó oldalirányú erőket ($\mathbf{F}_F$, $\mathbf{F}_R$, $\mathbf{F}_T$), illetve az ezekkel szoros összefüggésben lévő kúszási szögeket (α_F , α_R , α_T) is. Ezek határozzák meg a kontaktpontok sebességeinek ($\mathbf{v}_F$, $\mathbf{v}_R$, $\mathbf{v}_T$) irányát.

A fent bemutatott rendszer mozgását négy általános koordinátával írhatjuk le, ezek a vontató jármű súlypontjának X és Y irányú pozíciója, a vontató jármű ψ_1 legyezési szöge, valamint a vontatmány relatív ψ_2 szöge. Tehát az általános koordináták vektora:

$$\mathbf{q} = [X \ Y \ \psi_1 \ \psi_2]^T. \quad (2.1)$$

A mozgásba az autó első kerekén keresztüli kormányzással tudunk beavatkozni. Az első kerék kormányzási szögét jelölje δ . Végezetül bevezetünk egy egyszerűsítést: tegyük fel, hogy a C_1 pont hosszirányú V sebessége konstans.

2.2. Mozgásegyenletek

A jármű hosszirányú sebességére alkalmazott feltételt kinematikai kényszer formájában adjuk meg (Erdei, 2018):

$$\dot{X} \cos \psi_1 + \dot{Y} \sin \psi_1 = V. \quad (2.2)$$

A sebességre vonatkozó kényszer miatt anholonom rendszerről beszélünk. Az ilyen rendszerek mozgásegyenleteinek meghatározására több módszer is elterjedt a szakirodalomban, mint az Appel–Gibbs-egyenletek (Gantmacher, 1975), a Routh–Voss-egyenletek, illetve a dinamika alaptétele. Jelen dokumentumban a Kane-egyenletek (Kane és Levinson, 1985) segítségével vezetjük le a mozgást leíró egyenleteket.

2.2.1. ÁLTALÁNOS KANE-EGYENLETEK MEREV TESTEKRE

A módszer használatához be kell vezetnünk jól megválasztott, úgynevezett pszeudosebességeket, ezeket jelölje σ_s , ahol s a rendszer sebességállapotának leírásához szükséges skalár változók száma, azaz az általános koordináták és a kinematikai kényszerek számának különbsége. A kinematikai kényszerek és a pszeudosebességek definíciói az alábbi alakban írhatók fel:

$$\begin{cases} \mathbf{A}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{A}_0 = \mathbf{0}, \\ \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}_0 := \boldsymbol{\sigma}, \end{cases} \quad (2.3)$$

átalakítva pedig az

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_0 \\ \boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{B}_0) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

alakban, ahol a $\mathbf{B}_0$ kivonása azért van zárójelbe téve, mert legtöbbször – ahogy a mi esetünkben is – zérus. A fenti egyenletekben $\mathbf{A}$ -hoz tartoznak a kinematikai kényszerek, $\mathbf{B}$ -hez pedig a bevezetett sebességek definíciói. Utóbbit úgy kell megválasztanunk, hogy a belőlük képzett mátrix invertálható legyen.

A Kane-egyenletek N db merev testre általánosítva:

$$F_s + F_s^* = 0, \quad (2.5)$$

ahol

$$F_s = \sum_{i=1}^N \left(\mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_{C_i}}{\partial \sigma_s} + \mathbf{M}_{C_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \sigma_s} \right) \quad (2.6)$$

a rendszerre működő erőkből származó pszeudoerők (az erők képe a pszeudosebességek terében), $[\mathbf{F}_i, \mathbf{M}_{C_i}]$ az aktív külső erőrendszer súlyponti redukáltja,

$$F_s^* = - \sum_{i=1}^N \left(m_i \mathbf{a}_{C_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_{C_i}}{\partial \sigma_s} + (\boldsymbol{\Theta}_{C_i} \boldsymbol{\epsilon}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\Theta}_{C_i} \boldsymbol{\omega}_i)) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \sigma_s} \right) \quad (2.7)$$

pedig a d’Alambert-elv alapján képzett dinamikai hatások képe a pszeudosebességek terében. A C_i index az i -edik merev test súlypontját jelöli.

2.2.2. VONTATÓ-VONTATMÁNY RENDSZERRE FELÍRT EGYENLETEK

Visszatérve a vizsgálandó rendszerhez, esetünkben $s = 3$, mivel négy általános koordinátával írható a rendszer pozíciója, illetve egy kinematikai kényszert írtunk elő. Tehát az általunk választott pszeudosebességek:

$$\sigma_1 := -\dot{X} \sin \psi_1 + \dot{Y} \cos \psi_1, \quad (2.8)$$

$$\sigma_2 := \dot{\psi}_1, \quad (2.9)$$

$$\sigma_3 := \dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 \quad (2.10)$$

rendre a vontató jármű oldalirányú sebessége, a vontató jármű legyezési szögsebessége és a vontatmány legyezési szögsebessége. Így a (2.4) egyenlet:

$$\begin{bmatrix} \cos \psi_1 & \sin \psi_1 & 0 & 0 \\ -\sin \psi_1 & \cos \psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Esetünkben két merev testből áll a rendszer, ezért a Kane-egyenletekben (2.5) szereplő kifejezések:

$$F_s = \left(\mathbf{F}_{\text{autó}} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_{C_1}}{\partial \sigma_s} + \mathbf{M}_{C_{\text{autó}}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_1}{\partial \sigma_s} \right) + \left(\mathbf{F}_{\text{utánfutó}} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_{C_2}}{\partial \sigma_s} + \mathbf{M}_{C_{\text{utánfutó}}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_2}{\partial \sigma_s} \right), \quad (2.12)$$

$$F_s^* = \left(-m_1 \mathbf{a}_{C_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_{C_1}}{\partial \sigma_s} - \boldsymbol{\Theta}_{C_1} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_1}{\partial \sigma_s} \right) + \left(-m_2 \mathbf{a}_{C_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_{C_2}}{\partial \sigma_s} - \boldsymbol{\Theta}_{C_2} \boldsymbol{\varepsilon}_2 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_2}{\partial \sigma_s} \right), \quad (2.13)$$

ahol a két testre felírt vektorkettős:

$$[\mathbf{F}_{\text{autó}}, \mathbf{M}_{C_{\text{autó}}}] = [(\mathbf{F}_F + \mathbf{F}_R), (\mathbf{r}_{C_1 F} \times \mathbf{F}_F + \mathbf{r}_{C_1 R} \times \mathbf{F}_R)], \quad (2.14)$$

$$[\mathbf{F}_{\text{utánfutó}}, \mathbf{M}_{C_{\text{utánfutó}}}] = [\mathbf{F}_T, \mathbf{r}_{C_2 T} \times \mathbf{F}_T]. \quad (2.15)$$

A kifejtés során alkalmaztuk a síkmozgáskor használható

$$\boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\Theta}_{C_i} \boldsymbol{\omega}_i) = 0 \quad (2.16)$$

egyszerűsítést (Csernák, 2018).

2.2.3. MOZGÁSEGyenletek levezetése

A levezetés során a (2.5) egyenletben szereplő két mennyiséget külön-külön kifejezzük, majd behelyettesítjük azokat a

$$-F_s^* = F_s \quad (2.17)$$

átrendezett alakba.

Az egyenlet jobb oldalával kezdve, a parciális deriváltak elvégzéséhez előállítjuk a megfelelő pontok sebességét a

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} \quad (2.18)$$

sebességredukciós képlet (Csernák, 2018) többszöri alkalmazásával a C_1 pontból kiindulva, hiszen annak a pontnak a sebessége ismert:

$$\mathbf{v}_{C_1} = \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \cos \psi_1 - \sigma_1 \sin \psi_1 \\ V \sin \psi_1 + \sigma_1 \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Az utánfutó súlypontjának (C_2) sebessége nem számítható közvetlenül, először az autó és az utánfutó közös pontjának (J) sebességét kell felírnunk, tehát:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_J &= \mathbf{v}_{C_1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{C_1J} = \mathbf{v}_{C_1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -h \cos \psi_1 \\ -h \sin \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} V \cos \psi_1 - \sigma_1 \sin \psi_1 + \sigma_2 h \sin \psi_1 \\ V \sin \psi_1 + \sigma_1 \cos \psi_1 - \sigma_2 h \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix},\end{aligned}\quad (2.20)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{C_2} &= \mathbf{v}_J + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{JC_2} = \mathbf{v}_J + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -l_c \cos(\psi_1 + \psi_2) \\ -l_c \sin(\psi_1 + \psi_2) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} V \cos \psi_1 - \sigma_1 \sin \psi_1 + \sigma_2 h \sin \psi_1 + \sigma_3 l_c \sin(\psi_1 + \psi_2) \\ V \sin \psi_1 + \sigma_1 \cos \psi_1 - \sigma_2 h \cos \psi_1 - \sigma_3 l_c \cos(\psi_1 + \psi_2) \\ 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (2.21)$$

Következő lépésként fejezzük ki a testek súlypontjára vonatkozó redukált erőt és redukált nyomatékot. Megjegyzendő, hogy itt megjelenik a δ kormányzási szög, ami a rendszer stabilizálása és a manőverek elvégzése érdekében történő beavatkozást jelenti, azonban ez nem ad plusz általános koordinátát, mivel a szabályozásban azt a meglévők lineáris kombinációjaként fogjuk előállni. Némi trigonometrikus átalakítással az erőrendszer redukáltjai tehát:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\text{autó}} &= \mathbf{F}_F + \mathbf{F}_R = \begin{bmatrix} -F_F \sin(\psi_1 + \delta) \\ F_F \cos(\psi_1 + \delta) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -F_R \sin \psi_1 \\ F_R \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -F_F \sin(\psi_1 + \delta) - F_R \sin \psi_1 \\ F_F \cos(\psi_1 + \delta) + F_R \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix},\end{aligned}\quad (2.22)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{C_{\text{autó}}} &= \mathbf{r}_{C_1F} \times \mathbf{F}_F + \mathbf{r}_{C_1R} \times \mathbf{F}_R \\ &= \begin{bmatrix} e_f \cos \psi_1 \\ e_f \sin \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -F_F \sin(\psi_1 + \delta) \\ F_F \cos(\psi_1 + \delta) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -e_r \cos \psi_1 \\ -e_r \sin \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -F_R \sin \psi_1 \\ F_R \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_F e_f \cos \delta - F_R e_r \end{bmatrix},\end{aligned}\quad (2.23)$$

$$\mathbf{F}_{\text{utánfutó}} = \mathbf{F}_T = \begin{bmatrix} -F_T \sin(\psi_1 + \psi_2) \\ F_T \cos(\psi_1 + \psi_2) \\ 0 \end{bmatrix},\quad (2.24)$$

$$\mathbf{M}_{C_{\text{utánfutó}}} = \mathbf{r}_{C_2T} \times \mathbf{F}_T = \begin{bmatrix} -l_2 \cos(\psi_1 + \psi_2) \\ -l_2 \sin(\psi_1 + \psi_2) \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -F_T \sin(\psi_1 + \psi_2) \\ F_T \cos(\psi_1 + \psi_2) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_T l_2 \end{bmatrix}.\quad (2.25)$$

A parciális deriválásokat elvégezve:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{C_1}}{\partial \sigma_1} = \begin{bmatrix} -\sin \psi_1 \\ \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}_{C_1}}{\partial \sigma_2} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}_{C_1}}{\partial \sigma_3} = \mathbf{0}, \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{C_2}}{\partial \sigma_1} = \begin{bmatrix} -\sin \psi_1 \\ \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}_{C_2}}{\partial \sigma_2} = \begin{bmatrix} h \sin \psi_1 \\ -h \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}_{C_2}}{\partial \sigma_3} = \begin{bmatrix} l_c \sin(\psi_1 + \psi_2) \\ -l_c \cos(\psi_1 + \psi_2) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_1}{\partial \sigma_1} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_1}{\partial \sigma_3} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_1}{\partial \sigma_2} = [0 \ 0 \ 1]^T, \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_2}{\partial \sigma_1} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_2}{\partial \sigma_2} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_2}{\partial \sigma_3} = [0 \ 0 \ 1]^T. \quad (2.29)$$

Az utolsó kettő pszeudosebességet úgy definiáltuk, hogy a vontató- és a vontatmány szögsebességét adják, ezért írhatók ilyen egyszerű alakban azok parciális deriváltjai. A Kane-egyenletek jobb oldalának felírásához minden rendelkezésre áll, már csak vissza kell helyettesíteni a (2.12) egyenletbe, és elvégezni a műveleteket, hogy megkapjuk az erőket:

$$\begin{aligned} F_1 &= \begin{bmatrix} -F_F \sin(\psi_1 + \delta) - F_R \sin \psi_1 \\ F_F \cos(\psi_1 + \delta) + F_R \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin \psi_1 \\ \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_F e_f \cos \delta - F_R e_r \end{bmatrix} \cdot \mathbf{0} \\ &+ \begin{bmatrix} -F_T \sin(\psi_1 + \psi_2) \\ F_T \cos(\psi_1 + \psi_2) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin \psi_1 \\ \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_T l_2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{0} \\ &= F_F \cos \delta + F_R + F_T \cos \psi_2, \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} F_2 &= \begin{bmatrix} -F_F \sin(\psi_1 + \delta) - F_R \sin \psi_1 \\ F_F \cos(\psi_1 + \delta) + F_R \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{0} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_F e_f \cos \delta - F_R e_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -F_T \sin(\psi_1 + \psi_2) \\ F_T \cos(\psi_1 + \psi_2) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h \sin \psi_1 \\ -h \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_T l_2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{0} \\ &= F_F e_f \cos \delta - F_T h \cos \psi_2 - F_R e_r, \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} F_3 &= \begin{bmatrix} -F_F \sin(\psi_1 + \delta) - F_R \sin \psi_1 \\ F_F \cos(\psi_1 + \delta) + F_R \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{0} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_F e_f \cos \delta - F_R e_r \end{bmatrix} \cdot \mathbf{0} \\ &+ \begin{bmatrix} -F_T \sin(\psi_1 + \psi_2) \\ F_T \cos(\psi_1 + \psi_2) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_c \sin(\psi_1 + \psi_2) \\ -l_c \cos(\psi_1 + \psi_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_T l_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= -F_T (l_2 + l_c). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Áttérünk a (2.17) egyenlet bal oldalára. A tömegközéppontok gyorsulását a sebességük idő szerinti deriválásával állítjuk elő, azaz

$$\mathbf{a}_{C_1} = \frac{d\mathbf{v}_{C_1}}{dt} = \begin{bmatrix} -V\dot{\psi}_1 \sin \psi_1 - \dot{\sigma}_1 \sin \psi_1 - \sigma_1 \dot{\psi}_1 \cos \psi_1 \\ V\dot{\psi}_1 \cos \psi_1 + \dot{\sigma}_1 \cos \psi_1 - \sigma_1 \dot{\psi}_1 \sin \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{C_2} &= \frac{d\mathbf{v}_{C_2}}{dt} = \mathbf{a}_{C_1} \\ &+ \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_2 h \sin \psi_1 + \sigma_2 h \dot{\psi}_1 \cos \psi_1 + \dot{\sigma}_3 l_c \sin(\psi_1 + \psi_2) + \sigma_3 l_c (\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2) \cos(\psi_1 + \psi_2) \\ -\dot{\sigma}_2 h \cos \psi_1 + \sigma_2 h \dot{\psi}_1 \sin \psi_1 - \dot{\sigma}_3 l_c \cos(\psi_1 + \psi_2) + \sigma_3 l_c (\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2) \sin(\psi_1 + \psi_2) \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

A deriválások miatt megjegyezzük, hogy mivel V hosszirányú sebességet konstansnak tételeztük fel a vizsgálat során, így az nem függ az időtől. A szöggyorsulások a gyorsulásokhoz hasonlóan, idő szerinti deriválással határozhatók meg:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\sigma}_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\sigma}_3 \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

Ezek ismeretében nincs szükségünk a teljes tehetetlenségi nyomatéki tenzorra egyik test esetében sem, hiszen elvégezve a (2.13) egyenletben szereplő műveleteket csak a $\Theta_{C_1 z}$ és a $\Theta_{C_2 z}$ elemek szerepelnek nemzérus helyen, azaz

$$\Theta_{C_1} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_1}{\partial \sigma_2} = \Theta_{C_1 z} \dot{\sigma}_2, \quad \Theta_{C_2} \boldsymbol{\varepsilon}_2 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_1}{\partial \sigma_3} = \Theta_{C_2 z} \dot{\sigma}_3. \quad (2.36)$$

Minden szorzótényezőt előállítottunk, a műveleteket elvégezve

$$\mathbf{a}_{C_1} \frac{\partial \mathbf{v}_{C_1}}{\partial \sigma_1} = V \sigma_2 + \dot{\sigma}_1, \quad (2.37)$$

$$\mathbf{a}_{C_2} \frac{\partial \mathbf{v}_{C_2}}{\partial \sigma_1} = V \sigma_2 + \dot{\sigma}_1 - \dot{\sigma}_2 h - \dot{\sigma}_3 l_c \cos \psi_2 + l_c \sigma_3^2 \sin \psi_2 \quad (2.38)$$

adódik, ezeket felhasználva

$$F_1^* = -(m_1 + m_2)(V \sigma_2 + \dot{\sigma}_1) - m_2(-\dot{\sigma}_2 h - \dot{\sigma}_3 l_c \cos \psi_2 + l_c \sigma_3^2 \sin \psi_2). \quad (2.39)$$

Hasonlóan:

$$\mathbf{a}_{C_1} \frac{\partial \mathbf{v}_{C_1}}{\partial \sigma_2} = 0, \quad (2.40)$$

$$\mathbf{a}_{C_2} \frac{\partial \mathbf{v}_{C_2}}{\partial \sigma_2} = h(-V \sigma_2 - \dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2 h + \dot{\sigma}_3 l_c \cos \psi_2 - \sigma_3^2 l_c h \sin \psi_2), \quad (2.41)$$

$$F_2^* = -m_2 h(-V \sigma_2 - \dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2 h + \dot{\sigma}_3 l_c \cos \psi_2 - \sigma_3^2 l_c \sin \psi_2) - \Theta_{C_1 z} \dot{\sigma}_2, \quad (2.42)$$

$$\mathbf{a}_{C_1} \frac{\partial \mathbf{v}_{C_2}}{\partial \sigma_3} = 0, \quad (2.43)$$

$$\mathbf{a}_{C_2} \frac{\partial \mathbf{v}_{C_2}}{\partial \sigma_3} = l_c (-V\sigma_2 \cos \psi_2 - \dot{\sigma}_1 \cos \psi_2 - \sigma_1 \sigma_2 \sin \psi_2 + \dot{\sigma}_2 h \cos \psi_2 + \sigma_2^2 h \sin \psi_2 + l_c \dot{\sigma}_3), \quad (2.44)$$

$$F_3^* = -m_2 l_c [\cos \psi_2 (-V\sigma_2 - \dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2 h) + \sin \psi_2 (-\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 h) + l_c \dot{\sigma}_3] - \Theta_{C_2 z} \dot{\sigma}_3. \quad (2.45)$$

Végül felírjuk a mozgásegyenlet-rendszert, ami a (2.17) egyenletbe visszahelyettesítve kapott három Kane-egyenletből, és a négy általános koordinátasebességre felírt egyenletből áll:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)(V\sigma_2 + \dot{\sigma}_1) + m_2(-\dot{\sigma}_2 h - \dot{\sigma}_3 l_c \cos \psi_2 + l_c \sigma_3^2 \sin \psi_2) \\ = F_F \cos \delta + F_R + F_T \cos \psi_2, \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{C_1 z} \dot{\sigma}_2 + m_2 h (-V\sigma_2 - \dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2 h + \dot{\sigma}_3 l_c \cos \psi_2 - \sigma_3^2 l_c \sin \psi_2) \\ = F_F e_f \cos \delta - F_R e_r - F_T h \cos \psi_2, \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{C_2 z} \dot{\sigma}_3 + m_2 l_c (-V\sigma_2 \cos \psi_2 - \dot{\sigma}_1 \cos \psi_2 - \sigma_1 \sigma_2 \sin \psi_2 + \dot{\sigma}_2 h \cos \psi_2 + \sigma_2^2 h \sin \psi_2 + l_c \dot{\sigma}_3) \\ = -F_T (l_2 + l_c), \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\dot{X} = V \cos \psi_1 - \sigma_1 \sin \psi_1, \quad (2.49)$$

$$\dot{Y} = V \sin \psi_1 + \sigma_1 \cos \psi_1, \quad (2.50)$$

$$\dot{\psi}_1 = \sigma_2, \quad (2.51)$$

$$\dot{\psi}_2 = \sigma_3 - \sigma_2, \quad (2.52)$$

ahol az F_F , F_R és F_T mennyiségek az alkalmazott kerékmodellről függenek, ezeket a következő alfejezetben definiáljuk. A rendszer vizsgálatakor a mozgásegyenletek közül leválaszthatjuk a (2.49), (2.50) és (2.51) egyenleteket, ugyanis a többi független az X és Y pozícióktól, valamint a ψ_1 szöghelyzettől; ezek csak később, a szabályozásban játszanak szerepet. Ez azért tehető meg, mert az egyenes vonalú stabilitás nem függ attól, hogy melyik egyenes mentén halad a jármű.

2.3. Kerékmodell

A járműmodellek egyik legfontosabb kérdése, hogy hogyan modellezzük a gumiabroncsokat, hiszen azok létesítik a kapcsolatot a talaj és a jármű között. Több fontos feladatot is ellát egy abroncs a haladás során: átadja a gyorsításhoz és fékezéshez szükséges erőt (biztosítja a megfelelő tapadást); deformálódik, ezáltal mindig fenntartja az érintkezést a talajjal; csillapítja az egyenetlen útfelületről átadódó gerjesztéseket. Ezek modellezésére olyan jellemző tulajdonságokat kell figyelembe vennünk, mint a súrlódási viszonyok, a rugalmasság és a csillapítás (Szabó, 2014); ezekre a merev, pontszerűen érintkező kerék nem képes.

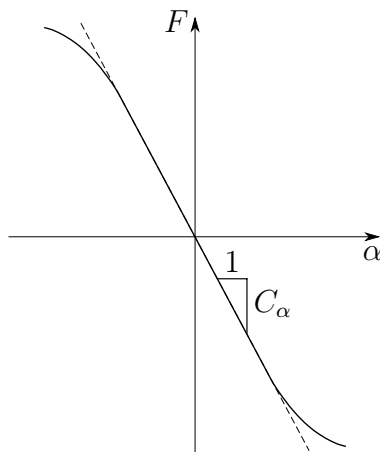
A szakirodalomban rengeteg különböző bonyolultságú (számításiigényű) és pontosságú rugalmas kerékmodell megtalálható. Mint minden modell felállításánál, a választáshoz

mérlegelni kell, hogy milyen mozgást szeretnénk vizsgálni, milyen információkat szeretnénk megtudni, mennyire pontos eredményt várunk, és milyen számítást segítő rendszerek állnak rendelkezésünkre. Egy lehetséges csoportosítása a gumimodelleknek (Pacejka, 2002):

- kizárólag mérési adatokon alapuló modell,
- hasonlóságon alapuló modell,
- egyszerű fizikai modell,
- komplex fizikai modell.

A legismertebb modellek közé tartozik az úgynevezett *Magic Formula* (Pacejka, 2002; Uil, 2007), ami mérési pontokra illesztett formafüggvényekkel közelíti az erőkarakterisztikát és az úgynevezett *Kefe-modell* (Pacejka, 2002; Beregi, Takács és Stépán, 2015), ami egy merev felnire szerelt, egymástól függetlenül deformálódó lineáris rugóelemekből áll. Utóbbi már képes modellezni a kerékszítálást is.

Az általunk megoldandó feladat az, hogy a vontató-vontatmány rendszerünket vizsgáljuk stabilitási szempontból, illetve szabályozás segítségével egyenes vonalú egyenletes tolatást tudjunk végrehajtani. Ehhez válasszuk a viszonylag egyszerű, úgynevezett *Kvázistacionárius kerékmodellt* (Pacejka, 2002; Takács, Várszegi és Beregi, 2018). A 2–2. ábrán láthatjuk a jellegre helyes erőkarakterisztikát, ahol α az első kerék oldalirányú kúszási szöge (a kerék állása és a pillanatnyi sebességének iránya közti szög), C_α a gumikerékre jellemző oldalirányú merevség, F pedig a talajról az első kerékre átadódó oldalirányú erő. Általánosan a modell tartalmaz z irányú nyomatékot is, azonban az egyszerűség kedvéért



2–2. ábra. Kvázistacionárius kerékmodell

ezt elhanyagoljuk. Mivel kis α kúszási szögekkel dolgozunk, a laterális erők számításához használhatjuk a linearizált

$$F_F = -C_{\alpha F} \cdot \alpha_F, \quad (2.53)$$

$$F_R = -C_{\alpha R} \cdot \alpha_R, \quad (2.54)$$

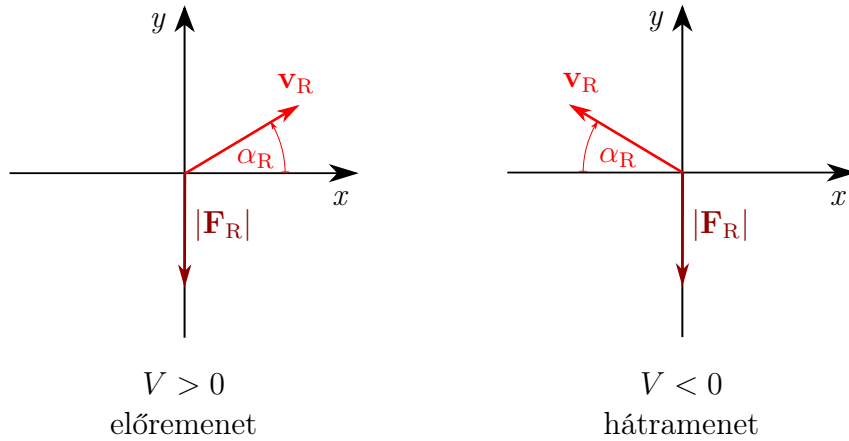
$$F_T = -C_{\alpha T} \cdot \alpha_T \quad (2.55)$$

összefüggéseket. A negatív előjel azt veszi figyelembe, hogy a 2–1. ábrán pozitív szög értelmében felvett pozitív y irányú erő a valóságban ellentétes értelemben hat.

A kerek kúszási szögének tangense megegyezik az adott pontbeli sebesség y és x irányú komponensének hányadosával, ezeket célszerűen a lokális koordináta-rendszerekben írjuk fel. Az első kerék esetében ez a szög a δ kormánysszöggel, az utánfutó kerekénél pedig annak ψ_2 szöghelyzetével egészül ki. Példaként vegyünk a vontató jármű hátsó kerekét. Először meghatározzuk a sebességét a

$$\mathbf{v}_R = \mathbf{v}_{C_1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{C_1 R} = \begin{bmatrix} V \\ \sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -e_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ \sigma_1 - e_r \sigma_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

alakban, hogy az irányoknak megfelelő komponensek megjelenjenek. A tolatást úgy tudjuk modellezni, hogy a V hosszirányú sebesség helyére negatív előjellel helyettesítjük be a kívánt sebességet. Azonban vigyáznunk kell, mert ebben az esetben az $\arctan$ függvény negatív kúszási szöget adna (pozitív számláló és negatív nevező miatt), viszont a keresztirányú erő értelme nem változik a haladási irány megváltozásától! A helyes irányokat a 2–3. ábra szemlélteti. Előremenetkor (bal oldal) a (2.54) egyenletnek megfelelően a pozitív kúszási szöghöz negatív erő tartozik. Hátramenetkor (jobb oldal) azonban a szög előjele megváltozik, ezzel pozitív erőt eredményezne, ami viszont nem igaz.



2–3. ábra. Kúszási szög számításának problémája

A probléma kezelésére *előjelfüggvényt* alkalmazunk, így a hátsó kerék kúszási szöge a következő alakban írható fel:

$$\alpha_R = \arctan \left(\frac{\sigma_1 - e_r \sigma_2}{V} \right) \operatorname{sgn} V. \quad (2.57)$$

Hasonló megfontolást követve adódik az első kerék- és a vontatmány kerekének kúszási szöge:

$$\alpha_F = \left(\arctan \left(\frac{v_{Fy}}{v_{Fx}} \right) - \delta \right) \operatorname{sgn} V = \left(\arctan \left(\frac{\sigma_1 + e_f \sigma_2}{V} \right) - \delta \right) \operatorname{sgn} V, \quad (2.58)$$

$$\alpha_T = \left(\arctan \left(\frac{\sigma_1 - h\sigma_2 - (l_2 + l_c)\sigma_3 \cos \psi_2}{V + (l_2 + l_c)\sigma_3 \sin \psi_2} \right) - \psi_2 \right) \operatorname{sgn} (V + (l_2 + l_c)\sigma_3 \sin \psi_2). \quad (2.59)$$

3. STABILITÁSVIZSGÁLAT

Dinamikai rendszerek mozgásának stabilitásvizsgálatához a mozgást leíró egyenleteket érdemes átalakítani

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{D}\mathbf{z} \quad (3.1)$$

alakúra. Ezt követően már csak a rendszert jellemző $\mathbf{D}$ mátrixszal kell foglalkoznunk, ennek elemzésére több módszer, feltétel közül is választhatunk. Előállítva a karakterisztikus egyenletet lehetne a Routh–Hurwitz-kritériumot alkalmazni, viszont esetünkben ez feleslegesen sok számítást igényelne, ezért helyette a mátrix sajátértékeinek vizsgálatát választjuk.

Ebben a fejezetben csak a rendszer tulajdonságait elemezzük, mindenféle beavatkozás nélkül. Emiatt a δ kormányzóget zérusnak tekintjük, így az egyenleteinkben nem jelenik meg.

3.1. Linearizálás

Egyenes vonalú egyenletes mozgással foglalkozunk, a mozgásegyenleteket linearizáljuk e mozgás körül. Ez jó közelítést jelent kis mértékű zavarások és beavatkozások esetében, jelen esetben a zavarást például az egyenetlen úton történő haladás, a beavatkozást pedig az egyenes pályára visszatérítő kormányzási szög jelenti.

A linearizálás során a szokásos

$$\sin \square \approx \square, \quad \cos \square \approx 1 \quad (3.2)$$

egyszerűsítéseket alkalmazzuk, azaz, hogy a $\sin$ függvényt az argumentumával, a $\cos$ függvényt pedig 1-gyel helyettesítjük, továbbá a legalább másodrendben kicsiny mennyiségeket teljesen elhanyagoljuk. Az előző fejezetben említettek alapján a rendszer stabilitásvizsgálatához szükséges linearizált egyenletek tehát:

$$(m_1 + m_2)(\dot{\sigma}_1 + V\sigma_2) - m_2(\dot{\sigma}_2 h + \dot{\sigma}_3 l_c) = F_F + F_R + F_T, \quad (3.3)$$

$$\Theta_{C_1 z} \dot{\sigma}_2 - m_2 h (V + \sigma_2 + \dot{\sigma}_1 - \dot{\sigma}_2 h - \dot{\sigma}_3 l_c) = F_F e_f - F_R e_r - F_T h, \quad (3.4)$$

$$\Theta_{C_2 z} \dot{\sigma}_3 - m_2 l_c (V\sigma_2 + \dot{\sigma}_1 - \dot{\sigma}_2 h - \dot{\sigma}_3 l_c) = -F_T (l_2 + l_c), \quad (3.5)$$

$$\dot{\psi}_2 = \sigma_3 - \sigma_2, \quad (3.6)$$

ahol

$$F_F = -C_{\alpha F} \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 e_f}{V} - \delta \right) \operatorname{sgn} V, \quad (3.7)$$

$$F_R = -C_{\alpha R} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2 e_r}{V} \right) \operatorname{sgn} V, \quad (3.8)$$

$$F_T = -C_{\alpha T} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2 h - (l_2 + l_c) \sigma_3}{V} - \psi_2 \right) \operatorname{sgn} V, \quad (3.9)$$

és a leválasztott egyenletek pedig:

$$\dot{X} = V - \sigma_1 \psi_1, \quad (3.10)$$

$$\dot{Y} = V \psi_1 + \sigma_1, \quad (3.11)$$

$$\dot{\psi}_1 = \sigma_2. \quad (3.12)$$

3.2. Mátrix alak

Célunk az egyenletek mátrixos formában történő felírása, ennek érdekében először bevezetünk egy $\mathbf{M}$ mátrixot, ami az általános koordináták deriváltjainak együtthatóit tartalmazza. A felírásakor az előző alfejezetben említett független (3.10)–(3.12) mozgásegyenletek leválasztását is végezzük el, azaz

$$\mathbf{z} = [\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \psi_2]^T, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & -m_2 h & -m_2 l_c & 0 \\ -m_2 h & \Theta_{C_1 z} + m_2 h^2 & m_2 h l_c & 0 \\ -m_2 l_c & m_2 h l_c & \Theta_{C_2 z} + m_2 l_c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Alakítsuk át a (3.1) mátrixegyenletet:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{C}\mathbf{z}. \quad (3.15)$$

Végül rendezzük $\dot{\mathbf{z}}$ -ra:

$$\dot{\mathbf{z}} = (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C})\mathbf{z} = \mathbf{D}\mathbf{z}, \quad (3.16)$$

ahol

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{-C_{\alpha F} - C_{\alpha R} - C_{\alpha T}}{V} \operatorname{sgn} V & c_{12} & \frac{C_{\alpha T} (l_2 + l_c)}{V} \operatorname{sgn} V & C_{\alpha T} \\ \frac{-C_{\alpha F} e_f + C_{\alpha R} e_r + C_{\alpha T} h}{V} \operatorname{sgn} V & c_{22} & \frac{-C_{\alpha T} (l_2 + l_c) h}{V} \operatorname{sgn} V & -C_{\alpha T} h \\ \frac{C_{\alpha T} (l_2 + l_c)}{V} \operatorname{sgn} V & c_{32} & \frac{-C_{\alpha T} (l_2 + l_c)^2}{V} \operatorname{sgn} V & -C_{\alpha T} (l_2 + l_c) \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

$$c_{12} = \frac{(-C_{\alpha F} e_f + C_{\alpha R} e_r + C_{\alpha T} h) \operatorname{sgn} V - (m_1 + m_2) V^2}{V}, \quad (3.18)$$

$$c_{22} = \frac{(-C_{\alpha F} e_f^2 - C_{\alpha R} e_r^2 - C_{\alpha T} h^2) \operatorname{sgn} V + V^2 m_2 h}{V}, \quad (3.19)$$

$$c_{32} = \frac{-C_{\alpha T} h (l_2 + l_c) \operatorname{sgn} V + V^2 m_2 l_c}{V}. \quad (3.20)$$

A $\mathbf{C}$ mátrixot balról megszorozva az $\mathbf{M}$ mátrix inverzével (ez lesz a $\mathbf{D}$) egy bonyolult mátrixot eredményez, ezért ezt nem végezzük el szimbolikusan, helyette a későbbiekben konkrét numerikus értékekkel behelyettesítve számolunk tovább.

3.3. A rendszer stabilitása

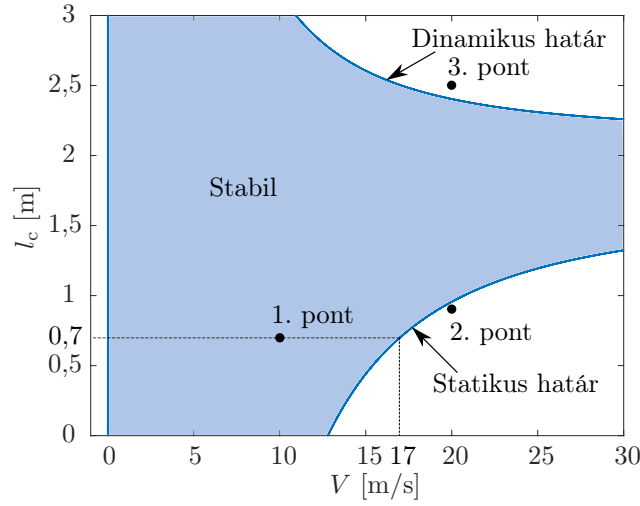
Ebben a részben az előző alfejezetben meghatározott $\mathbf{D}$ mátrix stabilitásának vizsgálatával foglalkozunk a már említett sajátértékek módszerével. Az erre vonatkozó kritérium szerint stabil a rendszer, ha az azt jellemző mátrix összes sajátértékének valós része negatív (Bálint et al., 2011).

A korábban említettek szerint a számításokat konkrét numerikus értékekkel végezzük, a stabilitástérképeket ennek megfelelően rajzoljuk fel. Ehhez a 3–1. táblázatban ismertett mennyiségeket használjuk, ami egy általános személyautó-utánfutó kombináció adatainak felel meg, a jelölések pedig megegyeznek a 2–1. ábrán feltüntetettekkel. A rendszer stabilitásvizsgálata során a V sebességet és az l_c utánfutó súlypontjának helyzetét paraméterként változtatjuk, így ezek értékeit nem rögzítjük. Az l_2 távolság helyett az $l_c + l_2$ távolságot vesszük konstansnak, ugyanis a tengelytávolság nagyon ritkán változik meg, ellenben a súlypont helyzetével, így ez valóságosabb esethez vezet.

Jelölés	Érték	Mértékegység
m_1	1300	kg
m_2	400	kg
Θ_{C_1z}	1500	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
Θ_{C_2z}	160	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
e_f	1,4	m
e_r	1,6	m
h	1,8	m
$l_2 + l_c$	2	m
$C_{\alpha F}$	20000	N/rad
$C_{\alpha R}$	20000	N/rad
$C_{\alpha T}$	20000	N/rad

3–1. táblázat. Numerikus adatok a stabilitásvizsgálathoz

Vizsgáljuk a $\mathbf{D}$ mátrix sajátértékeit, pontosabban azok közül a legnagyobb valós részűt, hiszen a kritériumnak megfelelően annak is negatívnak kell lennie. A sajátértékek folytonosan változnak, ezért válasszuk a numerikus gyökkereséshez használatos *felező módszert* (Bachrathy és Stépán, 2012) azon pontok megtalálására, ahol előjelet vált a legnagyobb valós részű sajátérték. Ezek a pontok jelentik a stabil-instabil tartományok határvonalát. A 3–1. ábra mutatja a stabilitástérképet, ahol a keresett határt vastag vonallal rajzoltuk meg, és a stabil tartományt kitöltöttük. Látható, hogy a tolatás – azaz negatív sebességgel haladás – minden esetben instabil, ezen kívül két határgörbét találunk: az alsó a statikus-, a felső pedig a dinamikus stabilitásvesztés határa, utóbbit *Hopf-bifurkációnak* nevezzük.



3-1. ábra. Stabilitástérkép

3.4. Szimuláció a stabilitás ellenőrzésére

A stabilitástérkép adott pontjaira (azaz adott (V, l_c) koordinátákra) végezzünk szimulációt a kapott eredményeink ellenőrzésére, azaz oldjuk meg a (2.46)–(2.52) nemlineáris mozgásegyenleteket nemzérus kezdeti feltétellel, és ábrázoljuk az általános koordináták változását az idő függvényében. Az egyenleteket a következő alakban vizsgáljuk:

$$\dot{\mathbf{z}}_{sz} = \mathbf{f}(t, \mathbf{z}_{sz}), \quad (3.21)$$

ahol

$$\mathbf{f} = \mathbf{M}_{sz}^{-1} \mathbf{C}_{sz}, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{z}_{sz} = [\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad X \quad Y \quad \psi_1 \quad \psi_2]^T, \quad (3.23)$$

$$\mathbf{M}_{sz} = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & -m_2 h & -m_2 l_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_2 h & \Theta_{C_1 z} + m_2 h^2 & m_2 h l_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_2 l_c & m_2 h l_c & \Theta_{C_2 z} + m_2 l_c^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{C}_{sz} = \begin{bmatrix} F_F \cos \delta + F_R + F_T \cos \psi_2 - (m_1 + m_2) V \sigma_2 - m_2 l_c \sigma_3^2 \sin \psi_2 \\ F_F e_f \cos \delta - F_R e_r - F_T h \cos \psi_2 + m_2 h V \sigma_2 + m_2 h \sigma_3^2 l_c \sin \psi_2 \\ -F_T (l_2 + l_c) + m_2 l_c V \sigma_2 \cos \psi_2 + m_2 l_c \sigma_1 \sigma_2 \sin \psi_2 - m_2 l_c \sigma_2^2 h \sin \psi_2 \\ V \cos \psi_1 - \sigma_1 \sin \psi_1 \\ V \sin \psi_1 + \sigma_1 \cos \psi_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 - \sigma_2 \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Az F_F , F_R és F_T erők ugyanúgy számítandók, mint a (2.53)–(2.55) egyenletekben. A kezdeti feltételben zavarásként $\sigma_1 = 0,1$ m/s oldalirányú sebességet veszünk figyelembe, míg

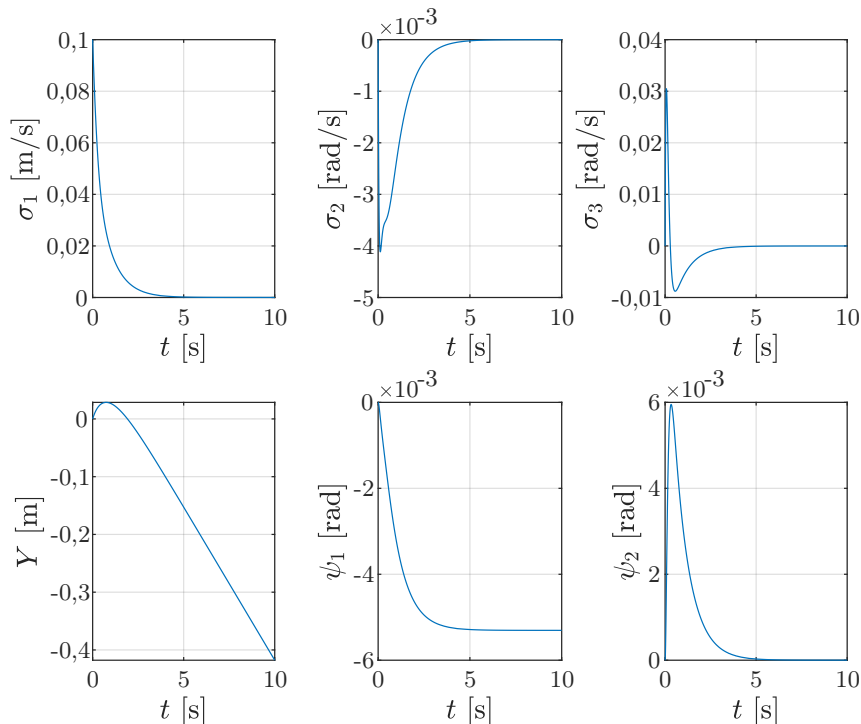
a többi állapotváltozó értékét zérusnak választjuk meg. A fenti egyenletrendszer megoldását egy másodrendű *Runge–Kutta* alapú módszerrel keressük. Erre a *Matlab: ODE23* függvényt használjuk azzal a módosítással, hogy az adaptív lépésköz helyett fix időlépést alkalmazunk, méghozzá 0,001 s-ot. A szimulációt három pontra végezzük el, ezek adatait a 3-2. táblázat tartalmazza.

Sorszám	V [m/s]	l_c [m]	Mozgás jellege
1	10	0,7	Stabil
2	20	0,9	Instabil – statikusan
3	20	2,5	Instabil – dinamikusan

3-2. táblázat. Pontok adatai a szimulációkhoz

3.4.1. STABIL TARTOMÁNY

Az első pont a stabil tartományon belül van, a szimuláció eredményét a 3-2. ábra mutatja. Valóban stabil, ugyanis a koordináták tartanak egy értékhez, kivéve az Y , ami lineárisan változik. Ez annyit jelent, hogy ugyan nem a kijelölt X egyenes mentén, de egyenesen halad a jármű. Az X pozíció ábrázolása nem adna használható információt: a V sebesség konstans, tehát nagyjából egy lineáris egyenest láthatnánk az idő függvényében.

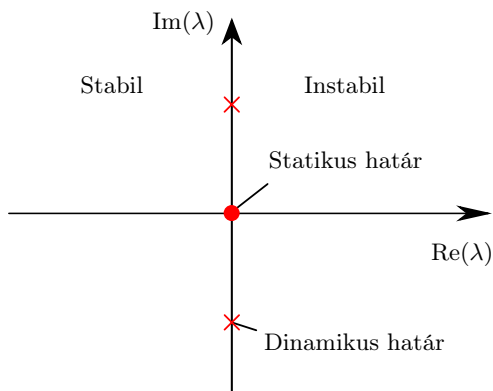


3-2. ábra. Stabil mozgás – szimuláció

3.4.2. INSTABIL TARTOMÁNY

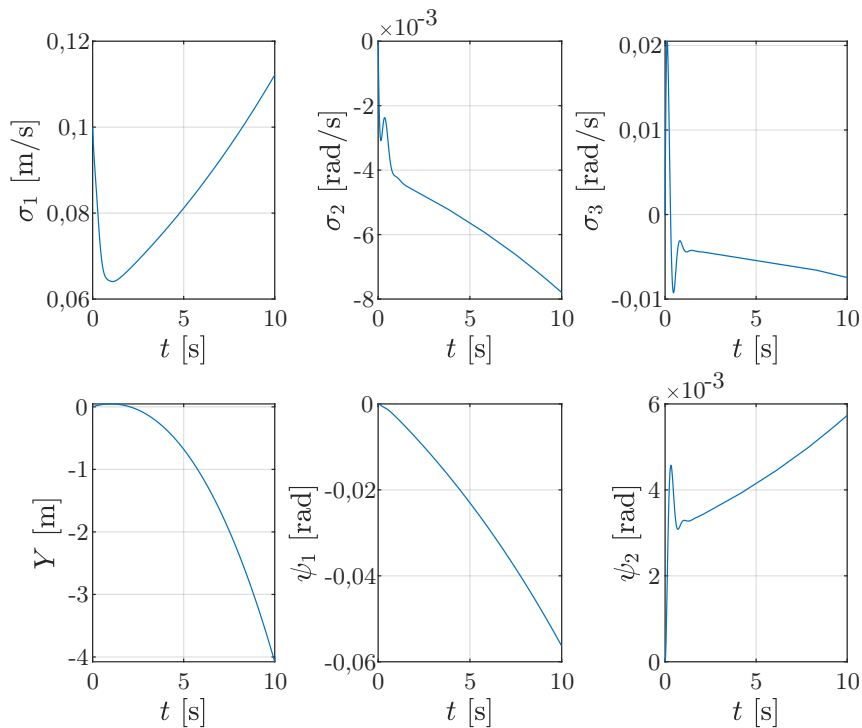
A stabilitás határhelyzetéhez érünk, amikor a sajátérték valós része zérus, azonban a képzetes rész értékétől függően megkülönböztetünk két esetet: statikus a stabilitásvesztés,

ha a képzetes rész is zérus; és dinamikus, ha van képzetes része. Utóbbi mindig egy komplex konjugált számpárként fordul elő. Ehhez grafikus magyarázatot a 3–3. ábra ad, ahol a komplex síkon van ábrázolva a határhelyzet általános esetben, a sajátértéket λ jelöli.



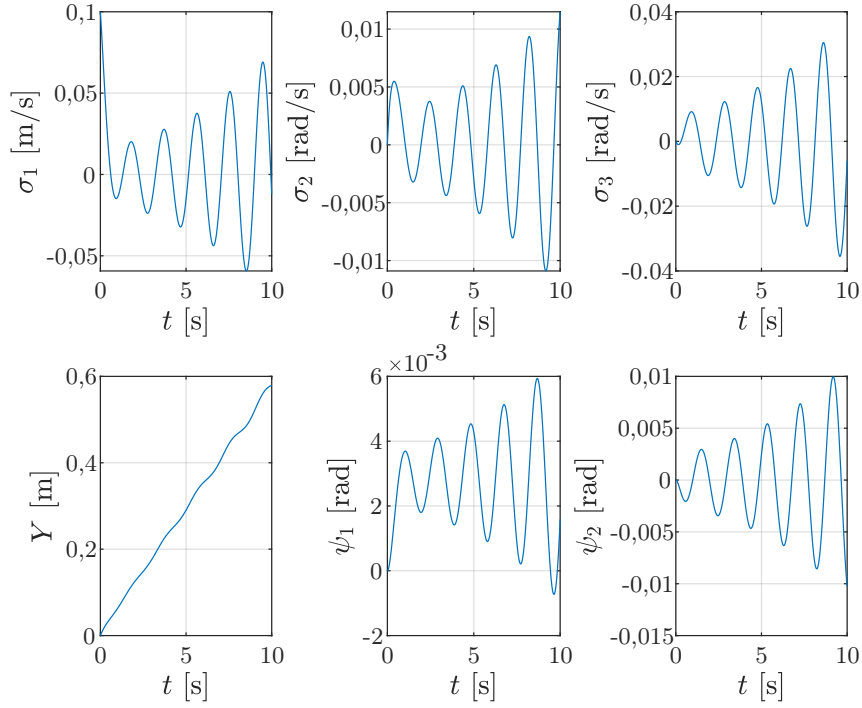
3–3. ábra. Stabilitásvesztés esetei

Statikus instabilitáskor a rendszer lengések nélkül veszti el stabilitását, az általános koordináták egy idő után szigorúan monoton módon elszállnak a végtelenbe. Ez jól látható a 3–4. ábrán, ami a második pont adataihoz tartozó szimuláció eredményeit mutatja be.



3–4. ábra. Statikus instabilitás – szimuláció

Dinamikus stabilitási határon a sajátérték $\lambda = \pm i\omega$ alakú, ahol ω az úgynevezett *be-rezgési frekvencia*. A stabilitásvesztés egyre nagyobb amplitúdójú lengések következtében történik, ezt mutatja a 3–5. ábra is, ami a harmadik pont adataihoz tartozik.



3–5. ábra. Dinamikus instabilitás – szimuláció

4. SZABÁLYOZÁS

Ebben a fejezetben a rendszer egyenes vonalú egyenletes mozgásának szabályozását tárgyaljuk. Elsősorban a stabilitástérképen (lásd 3–1. ábra) lévő stabil tartományt szeretnénk kibővíteni, azaz az önmagában instabil tartományban is biztosítani haladást. Ez irányulhat a nagy sebességű mozgásra, a nem megfelelő súlyelosztásra (az utánfutó súlypontjának túl nagy-, vagy túl kicsi távolsága a csatlakozási ponttól), vagy a hátramenetre. Szabályozásunk fő célja a tolatás lesz, ugyanis hátramenetben mehetünk bármilyen kicsi sebességgel, mindenképpen instabil lesz a mozgás, tehát elkerülhetetlen az emberi-, vagy szabályozón keresztüli beavatkozás. Előbbi tehetséget és gyakorlottságot kíván a vezetőtől, ezért az elektronikus támogatás fontos alkalmazást jelent.

A legegyszerűbb szabályozási módszer az arányos – úgynevezett P szabályozóval történő – szabályozás. Alapelve az, hogy az általunk kiválasztott mennyiség kívánt értéktől való eltéréseivel (ezt nevezzük hibának) arányosan avatkozunk be. Feladatunk a visszacsatolandó mennyiség kiválasztása, valamint az arányossági-, vagy más néven erősítési tényező (P) meghatározása. A következőkben a mechanikai modell segítségével vizsgáljuk a különböző konfigurációkat, majd a megfelelő módszert teszteljük kísérleti úton, melynek eredményeit a következő fejezetben ismertetjük.

4.1. Szöghelyzet visszacsatolása

Kezdjük egy olyan arányos szabályozással, aminek az a feladata, hogy az utánfutó ψ_2 relatív szöghelyzetének hibáját csökkentse. A beavatkozásra vonatkozó egyenlet ekkor:

$$\delta = -P_{\psi_2}\psi_2. \quad (4.1)$$

Ezzel legfeljebb azt érhetjük el, hogy a mechanikai rendszer egyenes vonalon haladjon, azonban az egyenes helyzetét nem tudjuk megadni, így ez a megoldás ipari alkalmazásra nem alkalmas, kísérleti tesztelése sem feltétlenül kivitelezhető.

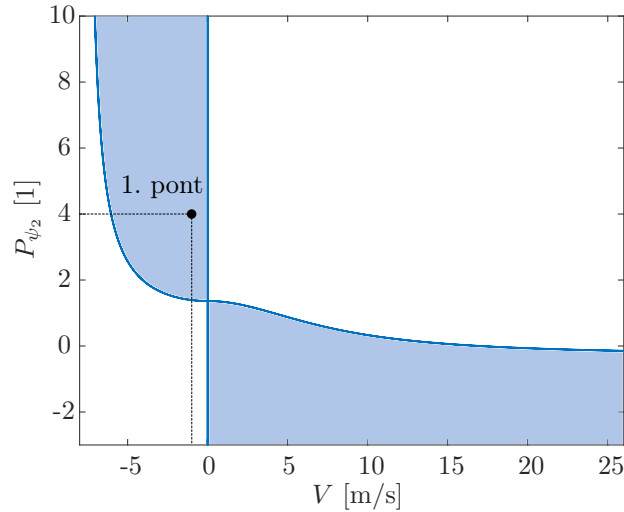
A stabilitásvizsgálat elvégzése és a szimulációk futtatása az előző fejezetben tárgyaltakhoz hasonlóan történik, azzal a kiegészítéssel, hogy a (2.46) és a (2.47) mozgásegyenletekbe visszahelyettesítjük a δ kormánysszöveget a (4.1) egyenletben felírt alakban. Ezáltal az egyenes vonalú mozgás körül linearizált egyenleteinket tartalmazó $\mathbf{C}$ mátrix módosul, ezt jelöljük $\mathbf{C}_P$ -vel:

$$\mathbf{C}_P = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & C_{\alpha T} - C_{\alpha F}P_{\psi_2} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & -C_{\alpha T}h - C_{\alpha F}P_{\psi_2}e_f \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

ahol a nem kifejtett mennyiségek az eredeti $\mathbf{C}$ mátrix megfelelő elemeivel egyeznek meg.

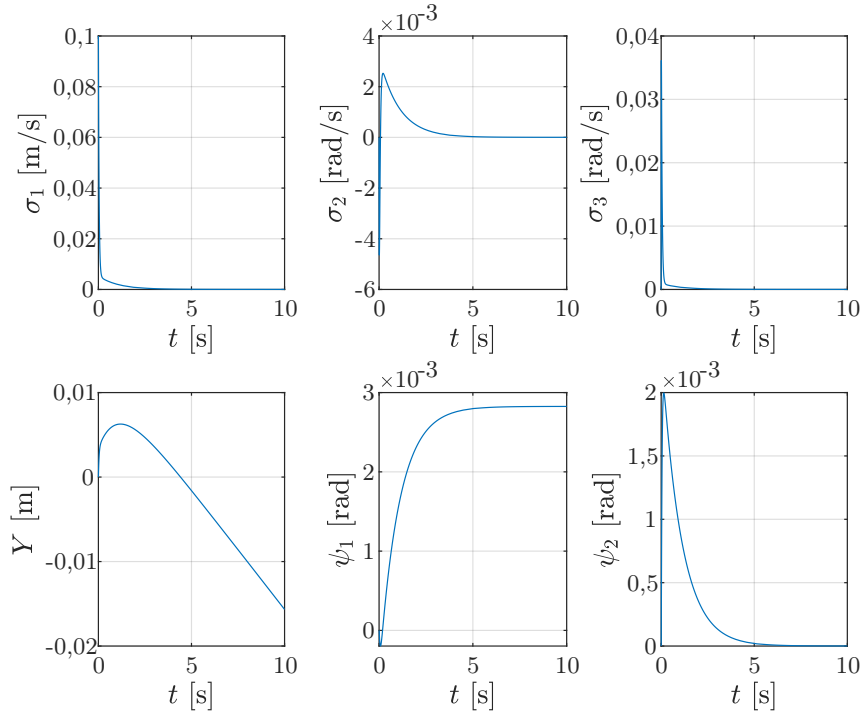
Most is két dimenzióban szeretnénk megjeleníteni az eredményeinket, így az arányossági tényező mint paraméter változtatásának érdekében rögzítsük az l_c távolságot 0,7 m-re,

a V sebességet pedig vizsgáljuk továbbra is paraméterként. A sajátértékek vizsgálatának eredményét a 4–1. ábra mutatja. Láthatjuk, hogy míg a szabályozás nélküli esetben, lásd 3–1. ábra, már $V = 17$ m/s felett elveszti stabilitását a rendszer, ezzel az egyszerű szabályozással még 25 m/s sebesség mellett is lehet stabil. Számunkra fontosabb eredményt értünk el a negatív sebesség tartományában, ugyanis találtunk olyan erősítési tényezőt, amivel bizonyos sebességig sikerült stabilizálni az egyenes vonalú egyenletes tolatást.



4–1. ábra. Szabályozás ψ_2 visszacsatolásával

Az ehhez tartozó 1. pont adataira vonatkozó szimuláció eredményét a 4–2. ábra mutatja, ahol $V = -1$ m/s, $P_{\psi_2} = 4$, a többi feltétel pedig az előző fejezetben alkalmazottakkal megegyező. A zérusra beállt értékek mutatják a stabil jelleget, az Y oldalirányú pozíció abszolút értékben vett növekedése és a ψ_1 szöghelyzet konstanshoz tartása pedig az $Y = 0$ -tól eltérő egyenesen való mozgást jelenti.



4-2. ábra. Stabil tolatás szimulációja

4.2. Szöghelyzet és pozíció visszacsatolása

Az előző megoldás hátrányai miatt további eseteket vizsgálunk, ebben az alfejezetben visszacsatoljuk az utánfutó szöghelyzete mellett az Y oldalirányú pozíciót is, hiszen azt szeretnénk, hogy ennek eltérése zérus legyen egy adott referenciától mérve, azaz az $Y = 0$ egyenes mentén haladjunk. Ekkor a δ kormányszöget a

$$\delta = -P_{\psi_2}\psi_2 - P_Y Y \quad (4.3)$$

alakban írjuk vissza a mozgásegyenletekbe. Mivel a szabályozáshoz felhasználjuk az autó oldalirányú helyzetét, innentől kezdve már nem választhatjuk le a (2.50) és (2.51) egyenleteket, ugyanis az Y -ra szükségünk van, az pedig függ ψ_1 -től. Ezzel a (3.16) mátrixegyenlet alakja módosul:

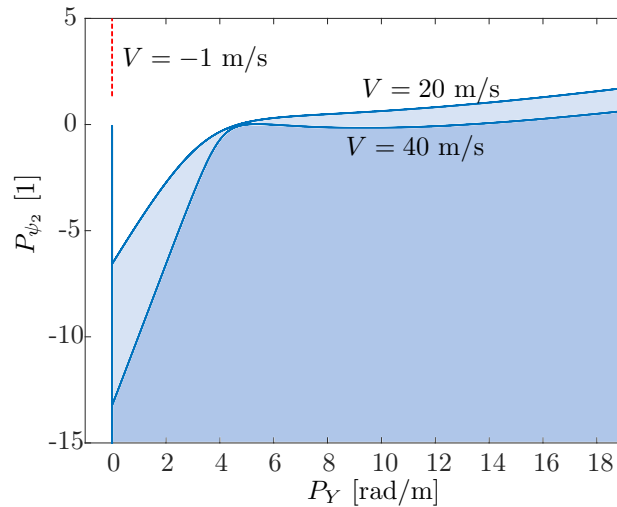
$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma}_1 \\ \dot{\sigma}_2 \\ \dot{\sigma}_3 \\ \dot{Y} \\ \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{M}_{PP}^{-1} \mathbf{C}_{PP}] \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ Y \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{M}_{PP} = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & -m_2 h & -m_2 l_c & 0 & 0 & 0 \\ -m_2 h & \Theta_{C_1 z} + m_2 h^2 & m_2 h l_c & 0 & 0 & 0 \\ -m_2 l_c & m_2 h l_c & \Theta_{C_2 z} + m_2 l_c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{C}_{PP} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & -C_{\alpha F} P_Y & 0 & -C_{\alpha F} P_{\psi_2} + C_{\alpha T} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & -C_{\alpha F e_f} P_Y & 0 & -C_{\alpha F e_f} P_{\psi_2} - C_{\alpha T} h \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & -C_{\alpha T} (l_2 + l_c) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & V & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

ahol az elnevezésükkel helyettesített elemek továbbra is az eredeti $\mathbf{C}$ mátrix megfelelő elemei.

Az átlátható ábrázolás érdekében paraméterként változtassuk a két erősítési tényezőt, az összes többi mennyiséget rögzítsük le. A geometriai adatokat válasszuk ugyanazoknak, mint az előző esetben, a futtatást így végezzük el különböző V sebességekre, majd ezek eredményeit rajzoljuk ki egy közös grafikonra, ezt mutatja a 4-3. ábra. A sebességekhez tartozó stabil tartományokat más-más árnyalattal különböztetjük meg, a határvonalakra ráírva az adott értéket. Értelemszerűen a kisebb sebességhez tartozó stabil rész magában foglalja a nagyobb sebességhez tartozó pontpárokat is, nem csak a két határvonal közötti rész felel meg a feltételünknek. A $P_Y = 0$ -hoz tartozó függőleges határvonalak a 4-1. ábra egy-egy sebességéhez tartozó pontszerű stabil tartományát jelentik, tehát ez annak az esetnek felel meg, amikor csak az utánfutó szöghelyzetét csatoljuk vissza, azaz ezeken a vonalakon továbbra sem megoldott az adott egyenes mentén történő haladás. Ezért emeltük ki a $V = -1$ m/s-hoz tartozó egyenest szaggatott piros vonallal, ez nem ad használható eredményt.



4-3. ábra. Szabályozás Y és ψ_2 visszacsatolásával

Összegezve ez a módszer tehát alkalmas nagy sebességgel adott egyenes mentén történő előremenet stabilizálására, viszont a tolatás továbbra sem megoldott, más algoritmust kell keresnünk.

4.3. Két szöghelyzet és egy pozíció visszacsatolása

A következő konfigurációban csatoljuk vissza az eddigiek – utánfutó szöghelyzete és autó oldalirányú pozíciója – mellett a vontató jármű szöghelyzetét is. A beavatkozás ekkor a

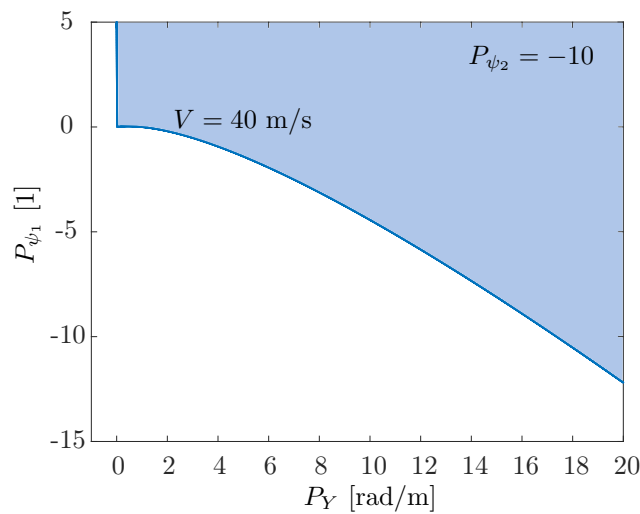
$$\delta = -P_{\psi_2}\psi_2 - P_Y Y - P_{\psi_1}\psi_1 \quad (4.7)$$

alakban állítható elő, ez az előzőekhez hasonlóan módosítja a vizsgálandó mátrixunkat:

$$\mathbf{C}_{PPP} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & -C_{\alpha F}P_Y & -C_{\alpha F}P_{\psi_1} & -C_{\alpha F}P_{\psi_2} + C_{\alpha T} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & -C_{\alpha F}e_f P_Y & -C_{\alpha F}e_f P_{\psi_1} & -C_{\alpha F}e_f P_{\psi_2} - C_{\alpha T}h \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & -C_{\alpha T}(l_2 + l_c) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & V & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

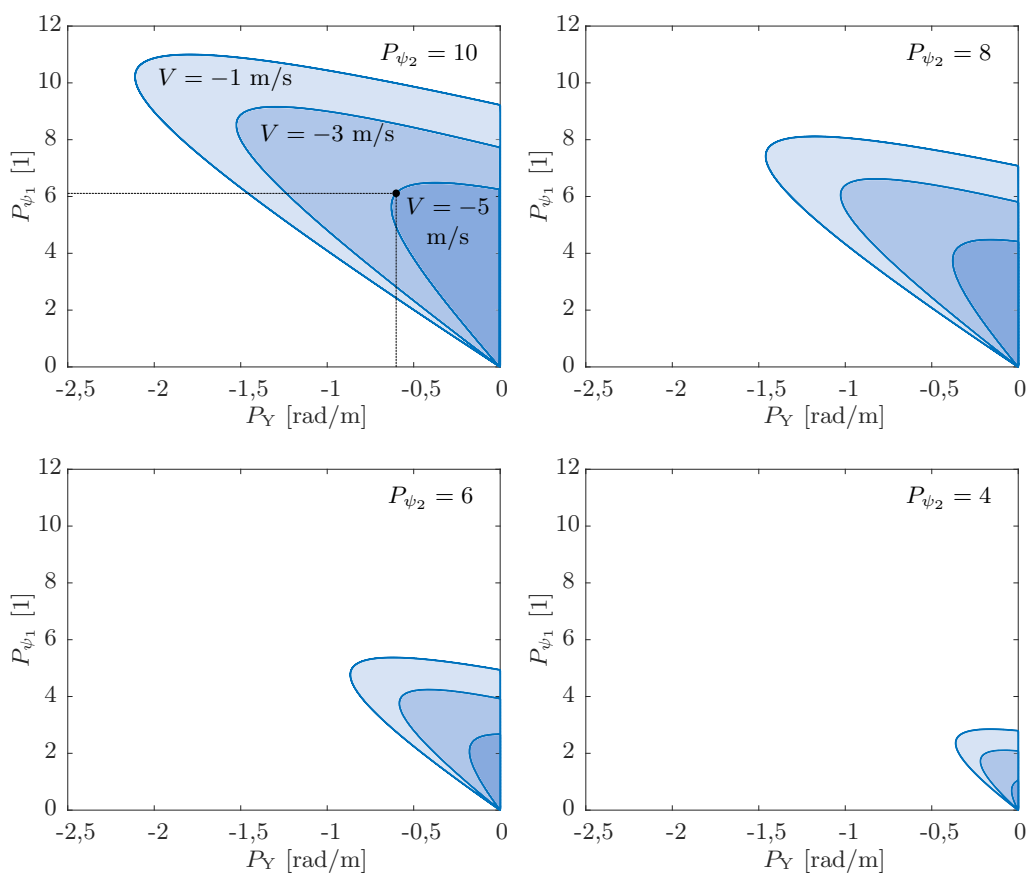
viszont az $\mathbf{M}$ mátrix megegyezik a (4.6) egyenletben szereplővel. A sajátértékek vizsgálatakor a két változtatható paraméterünk legyen a P_Y és a P_{ψ_1} erősítések, ez azt jelenti, hogy a hosszirányú sebességet és az utánfutó szöghelyzetéhez tartozó arányossági tényezőt is rögzítenünk kell.

Ellenőrizzük, hogy a nagy sebességgel történő haladás stabilizálható-e ezzel a módszerrel, vagyis, hogy nem rontja-e el a plusz szabályozott mennyiség visszacsatolása az eddig elért eredményt. Erre a kérdésre a 4-4. ábra grafikonja alapján egyértelműen az a válasz, hogy ez a módszer szintén alkalmazható nagy sebességű előremenet esetén. A vizsgálat során a hosszirányú sebességet $V = 40$ m/s, a ψ_2 -höz tartozó erősítést pedig $P_{\psi_2} = -10$ dimenziótlan értékre rögzítettük.



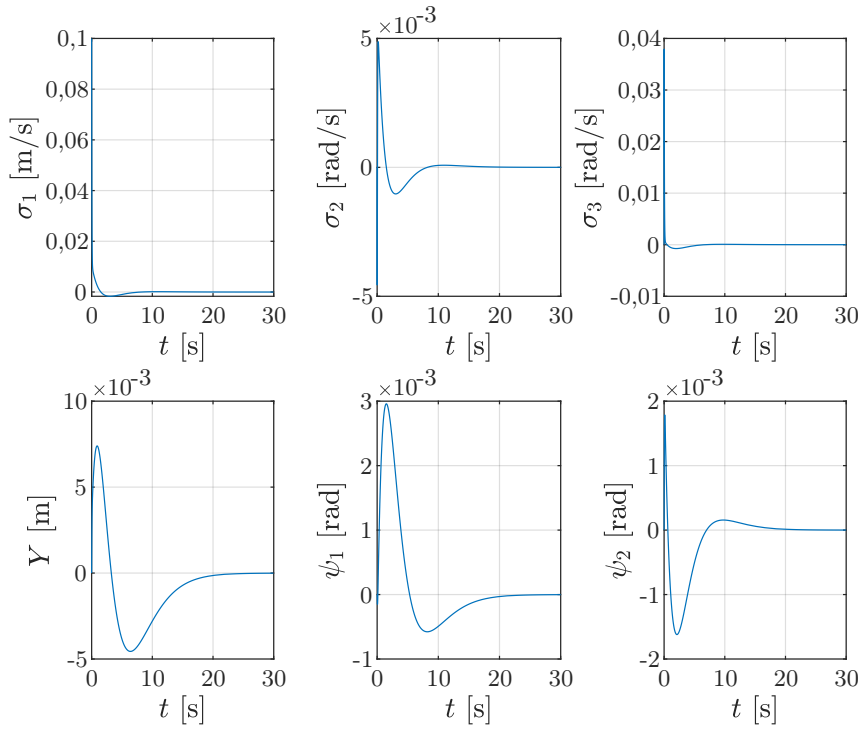
4-4. ábra. Előremenet szabályozása három mennyiség visszacsatolásával

Ezt követően vizsgáljuk meg tüzetesebben, hogy mi történik tolatáskor. A stabilitás-vizsgálatot végezzük el különböző sebességekre, ezek határait rajzoljuk ki – a korábbihoz hasonló módon – közös grafikonon, majd ismételjük meg különböző P_{ψ_2} erősítések esetén, ezek megoldásait pedig jelenítsük meg külön-külön. A végeredményt a 4–5. ábra mutatja. Az első grafikonon feltüntetett sebességek érvényesek a többi esetben is, az átláthatóság érdekében azokat a határvonalakat nem címkéztük. A tartományok megjelenítésére itt is igaz, hogy az abszolút értékben kisebb sebességek tartalmazzák a nagyobb sebességek pontjait is. A grafikonok azt mutatják, hogy ezzel a módszerrel stabilizálható a kis sebességű tolatás is adott egyenes mentén, és az is látható, hogy a P_{ψ_2} erősítés értékét érdemes minél nagyobbra vennünk.



4–5. ábra. Tolatás szabályozása három visszacsatolt mennyiséggel

A szabályozás jóságának egy lehetséges mérőszáma a legnagyobb valós részű sajátérték nagysága, ugyanis ez minél kisebb érték (abszolút értékben minél nagyobb), annál stabilabb a vizsgált rendszer. A szimulációval történő ellenőrzéshez vegyük a $P_{\psi_2} = 10$ és $V = -1$ m/s esetét, a sajátértékek alapján pedig válasszuk ki a legstabilabb pontot a térképről. Ezt nevezzük *1. pontnak*, a hozzá tartozó értékek: $P_Y \approx -0,6$ rad/m, $P_{\psi_1} \approx 6,1$. A futási időt növeljük meg $t = 30$ s-ra. Az így kapott eredményeket a 4–6. ábra mutatja, amin látható, hogy az adott paraméterek mellett valóban stabil a tolatás az $Y = 0$ egyenes mentén.



4-6. ábra. Szabályozott tolatás szimulációja, $V = -1$ m/s

4.4. Szabályozási módszerek összegzése

Az eredményeket látva elmondhatjuk, hogy a sajátértékek vizsgálatának módszerével sikerült olyan szabályozást alkotnunk, amely teljesíti a kitűzött feladatot, tehát képes a személyautó-utánfutó kombináció egyenletes haladását egy általunk megadott egyenes mentén stabilan tartani mind tolatás, mind nagy sebességű előremenet esetén. Ezen kívül bemutattunk két, a célkitűzéseknek nem megfelelő algoritmust. Az egyik a stabilizálásra képes, azonban ezzel nem tudjuk megszabni, hogy merre menjen a járművünk, a másik pedig nem alkalmas tolatás támogatására. Ezen felül a kapott eredményeinket szimulációval is alátámasztottuk. A következő fejezetben kísérleti úton vizsgáljuk a problémát, valamint összevetjük a két módszert.

5. EREDMÉNYEK KÍSÉRLETI TESZTELÉSE

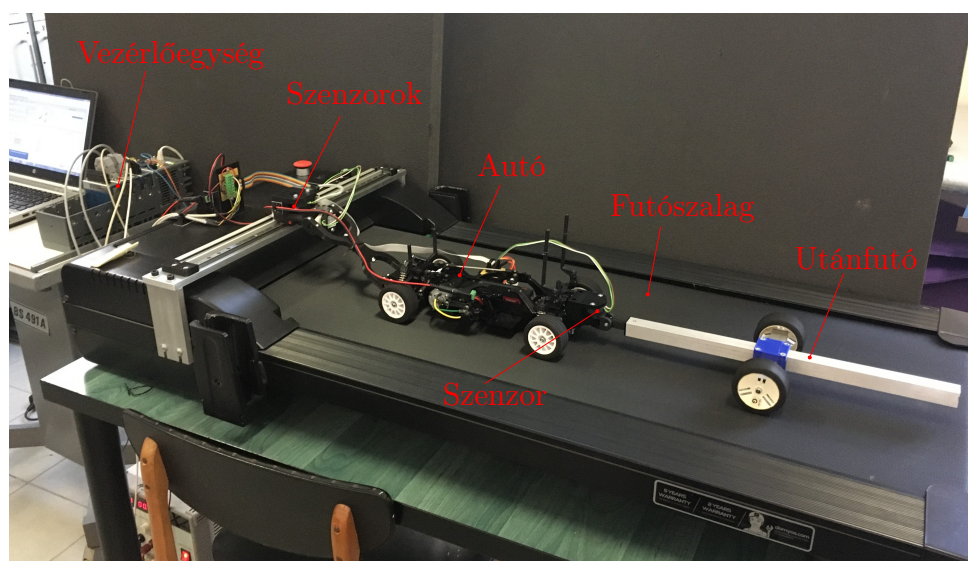
Legtöbb esetben a mechanikai rendszerek vizsgálatának fontos részét képezik az elméleti modell helyességét igazoló mérések elvégzése, a kapott eredmények kísérleti úton történő tesztelése. Ez azért elengedhetetlen, mert minden modell felállításakor egyszerűsítéseket, közelítéseket alkalmazunk, amelyek kisebb-nagyobb eltérésekhez vezetnek a valósághoz képest. A végső eredményeinkről úgy bizonyosodhatunk meg, hogy az igényeinknek megfelelő mértékben pontosak-e, és úgy használhatjuk fel további célokra, ha azokat kipróbáltuk valós környezetben is.

A dolgozat ezen fejezetében a korábbiakban matematikai úton megalkotott, valamint szimulációval alátámasztott szabályozási algoritmusunkat teszteljük tesztpados mérésekkel. Erre a *Műszaki Mechanikai Tanszék* laboratóriumában található futópados, modellautós kísérleti berendezést használjuk a céloknak megfelelő átalakításokkal.

5.1. Tesztpad ismertetése

Rendelkezésünkre áll egy korábban megépített, személyautó vontatmány nélküli sávtartó szabályozási módszereinek tesztelésére alkalmas mérési összeállítás. Ebben az alfejezetben az erről készült dokumentáció (Turányi, 2019) alapján bemutatjuk a berendezést, összefoglaljuk a tulajdonságait, majd ismertetjük az elvégzett kiegészítéseket és átalakításokat.

A megépített koncepció HIL (*hardware in the loop*), azaz környezetszimulációs tesztek elvégzésére alkalmas, amely a valós idejű rendszertesztek legfelsőbb szintje (Fodor és Speiser, 2014). Az 5-1. ábrán a mérési összeállításról készült összefoglaló képet láthatjuk, a következő szakaszokban ezek elemeit mutatjuk be.



5-1. ábra. Mérési összeállítás

5.1.1. ÚTFELÜLET

A legjobb módszer az útfelület megfelelő modellezésére futószalag használata, mivel ez térben végtelenített vizsgálatot tesz lehetővé, valamint homogén felületi minőséget biztosít a gumiabroncs és az útfelület között.

Ennek megfelelően a választott eszköz egy *DOMYOS: Walk by Domyos* típusú sétálópad. A futófelület mérete $40\text{ cm} \times 100\text{ cm}$, eredeti elérhető maximális sebessége 8 km/h , viszont későbbi átalakításokkal ez nagyjából 20 km/h -ra lett növelve.

5.1.2. MODELLAUTÓ, -UTÁNFUTÓ

Az autó modelljének fontos paramétere a méretarány, hiszen ez határozza meg a modell sebességéből következtetett valós sebességet (például a 8 km/h -s szalagsebesség $1 : 10$ méretarányú modellnél 80 km/h -s valós sebességnek felel meg). Ettől függ a csapágyazások minősége és a kotyogások mértéke is. Végül, de nem utolsó sorban a futószalag mérete is korlátozza a választható modell méretét. A pontosabb eredmények érdekében érdemes rugózott kerékfelfüggesztést használni. Külön hajtásra nincs szükségünk, hiszen a futópádon keresztüli vontatással tudjuk elérni a kívánt hosszirányú sebességet. Az autó kormányzása szervomotoron keresztül történik. A kritériumokat figyelembe véve a szintén kereskedelmi forgalomban lévő *Tamiya M-05* típusú modellel dolgozunk, a következő átalakításokkal élve:

- a hajtást biztosító elektromotort kikötöttük, azonban a plusz tömeg miatt nem távolítottuk el,
- az eredeti szervomotort egy jobb minőségű, *Power HD LF-20MG* típusúra cseréltük a pontosabb működés érdekében.

Továbbá a vontatmánnyal történő haladás vizsgálata miatt a modellautó mögé csoltunk egy kétkerekű, állítható tengelytávú fémrúddal modellezett utánfutót. Természetesen a súlypontjának helyzete is könnyen változtatható, ha a megfelelő helyre teszünk plusz súlyt. Az autó oly módon van rögzítve a vontatást biztosító sínhez, hogy a hosszirányú mozgását kivéve (ez biztosítja a vontatást) mind az öt szabadságfoka meg van hagyva, tehát képes keresztirányban és függőlegesen elmozdulni, valamint a mérni kívánt z irányú elforduláson felül szabadon dőlni és bólintani is. Az utánfutó csatlakozási pontjának csak a három elfordulása engedélyezett (gömbcsukló), az autóhoz képesti elmozdulása gátolva van minden irányban. A mérésekhez szükségünk van a modell adataira, ezeket az 5–1. táblázat tartalmazza, ahol a jelölések megegyeznek a 2–1. ábrán találhatóakkal. A tehetetlenségi nyomatékokat és a gumira jellemző merevségeket becsléssel határoztuk meg.

Jelölés	Érték	Mértékegység
m_1	0,92	kg
m_2	0,4	kg
Θ_{C_1z}	$9 \cdot 10^{-3}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
Θ_{C_2z}	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
e_f	0,1	m
e_r	0,14	m
h	0,19	m
l_2	0,02	m
l_c	0,2	m
$C_{\alpha F,R,T}$	2000	N/rad

5-1. táblázat. Tesztmodell adatai

5.1.3. SENZOROK

A szabályozásaink megvalósításához a 4.3. alfejezet alapján minden időpillanatban szükségünk van az autó szöghelyzetére és keresztirányú pozíciójára a futószalagon, valamint az utánfutó autóhoz képesti szöghelyzetére. Ennek megfelelően fel kellett szerelnünk két szögmérésre- és egy távolságmérésre alkalmas szenzort. A már meglévő *TMLS-25B* típusú mágneses lineáris enkóder és a *Novotechnik RFD-4021-606-211-401* típusú érintkezésmentes szögszenzor mellett egy ugyanilyen típusú szenzorral szereltük fel az utánfutó modelljét. A távolságmérő egy nullázott referenciaértékhez viszonyított pozíciót képes mérni 0,025 mm felbontással, maximum 1 m/s oldalirányú sebességig. A ψ_1 -et mérő szögszenzor nagyjából 0,015° pontosságra képes 60°-os tartományban, a ψ_2 mérése pedig egy hasonló pontosságú, azonban 120°-os tartományú szenzorral történik.

5.1.4. JELEK FELDOLGOZÁSA, SZERVOMOTOR VEZÉRLÉSE

A szenzorok és a szervomotor számítógéppel való kommunikációját egy *National Instruments: CompactRIO* vezérlőeszköz biztosítja *LabVIEW* grafikus programozási környezetben megírt programon keresztül. Az adatgyűjtés és -feldolgozás, valamint a beavatkozás is itt történik, ezt az eszközt az 5-2. ábrán láthatjuk.



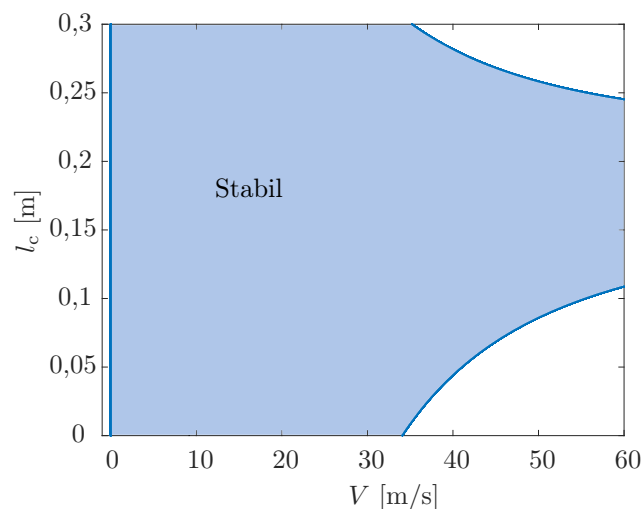
5-2. ábra. Vezérlőeszköz

Az utánfutót is figyelembe vevő átalakított programkód feladata, hogy a szenzorokból begyűjtött adatokat feldolgozva számítson egy beavatkozó kormányászóget a szabályozási algoritmusnak megfelelően, majd előállítsa a szervomotor szabványos PWM (impulzusszélesség moduláció) típusú vezérlését, mindezt valós időben. A szabályozáshoz felhasznált Y pozíciót nem mérjük közvetlenül, tehát a programkódon belül kell előállítanunk ezt az értéket az enkóder jeléből koordináta-transzformációk segítségével. A vezérlőeszköz alaprendszere a következő bővítőmodulokkal lett testreszabva:

- NI 9201 8 csatornás, 12 bit felbontású analóg input modul – szögszenzorok olvasásához,
- NI 9401 8 csatornás, digitális bemeneti/kimeneti modul – lineáris enkóder olvasásához,
- NI 9401 8 csatornás, digitális bemeneti/kimeneti modul – szervomotor PWM vezérléséhez.

5.2. Teszt leírása

Mindenekelőtt ábrázoljuk a modell adataival (5–1. táblázat) lefuttatott sajátértékvizsgálat eredményét beavatkozás nélkül, hogy lássuk a rendszer tulajdonságait. Ezt mutatja az 5–3. ábra. A két változtatható paraméter itt is a sebesség és a súlypont távolsága, a tengelytávot pedig 0,22 m-re rögzítettük. Láthatjuk, hogy a stabil tartomány alakja hasonlít a korábbihoz (3–1. ábra), csak a tengelyek skálázódtak át. Ez nem meglepő, hiszen csak a szerkezet paraméterei változtak, maga a rendszer és a mozgás nem. A tesztek során nem tudjuk megközelíteni az elméleti stabilitás határát. Ennek oka egyrészt az, hogy a rendelkezésre álló futószalag nem képes ekkora sebességre, másrészt, hogy nagyon nehéz teljesen egyenesbe állítani a kerekeket, így a rendszer hamar letérhet a szalagról, még ha stabil is a mozgás. Emiatt a nagy sebességű előremenettel nem foglalkozunk.



5–3. ábra. Stabilitástérkép a kísérleti modell esetén

A teszt során tehát a tolatás sikeres szabályozási algoritmusát szeretnénk tesztelni és összehasonlítani az elméleti alapokra támasztott eredményeinkkel, amit a 4.3. alfejezetben

tárgyaltunk. Ehhez a beállított paraméterek mellett vizsgáljuk, hogy a mozgás instabil, avagy stabil (ennek mértékét nem mérjük). A korábbiakhoz hasonlóan fel kell rajzolnunk a stabil tartományt a kísérleti modell adataival, majd egy közös ábrára az összehasonlítás szempontjából releváns pontokban felvesszük a mérési eredményeket, megkülönböztetve a két lehetséges esetet. A mérési összeállítást kiegészítettük egy játékkonzolokhoz használható kormányval is, így végezetül kipróbáljuk, hogy mennyire tudunk megbirkózni a feladattal, ha a szabályozást mi magunk végezzük.

A mérést $V \approx 0,3$ m/s szalagsebesség mellett végezzük el, ami a valóságban $3 \text{ m/s} = 10,8 \text{ km/h}$ -nak felel meg. Ez közelítő érték, ugyanis jelenleg a sebességet egy potencióméter forgatógombon állítjuk be, majd az ismert hosszúságú szalag körbefordulása alatt eltelt idő mérésével határozzuk meg annak értékét. A lineáris megoldásunk alapján találnánk stabil tartományt ennél sokkal nagyobb sebesség mellett is, azonban a kísérletek nem ezt mutatták. Ennek okait később összefoglalóan ismertetjük, a nagy sebesség miatt ezek túlságosan elrontják az egyszerűsítő feltevéseinket. Legyen rögzítve a $P_{\psi_2} = 10$ -re, így a két paraméterünk P_Y és P_{ψ_1} .

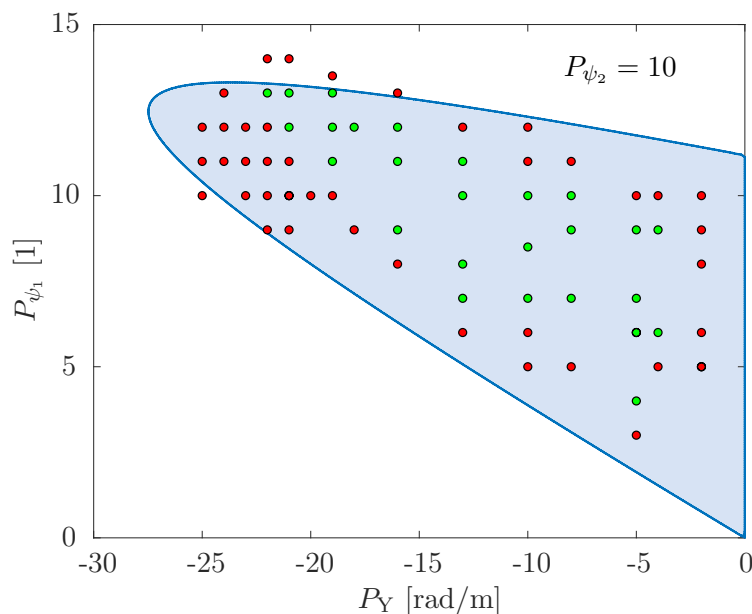
5.3. Eredmény, összehasonlítás

A teszt során videókat is készítettük a különböző esetekről, ezek hivatkozásait az 5–2. táblázat tartalmazza. Először a játékkormányon keresztüli beavatkozással próbáltuk stabilizálni a rendszert, a szabályozási algoritmust kikapcsolva. Ezt mutatja az első videó, amin látható, hogy kis sebesség mellett is bizonytalan és koncentrációigényes ez a módszer. Ezután áttérünk az elektronikus szabályozás tesztelésére. A második videón stabil paramétereket beállítva öt másodperc után egy hirtelen sávváltás történik, a szabályozás egy másik, 5 cm-rel arrébb lévő referenciaegyenesre állítja át a rendszert. A harmadik videón eleinte stabilan halad a jármű, majd megváltoztatjuk az egyik erősítést, és láthatóan instabillá válik a mozgás. A negyedik felvételen szintén stabil erősítések mellett történik sávváltás, a kisebb sebességnek köszönhetően sokkal nyugodtabb a manőver, mint a második videó esetében. Az első és az utolsó felvétel közti különbség jól mutatja az elektronikus szabályozás létjogosultságát.

Sorszám	Mozgás jellege	Szabályozási paraméterek	Hivatkozás
1.	Instabil	emberi kormányzás	Link (Videók: 1, 2019)
2.	Stabil	$P_Y = 10 \text{ rad/m}$; $P_{\psi_1} = 8,5$; $P_{\psi_2} = 10$	Link (Videók: 2, 2019)
3.	Instabil	$P_Y = 10 \text{ rad/m}$; $P_{\psi_1} = 12$; $P_{\psi_2} = 10$	Link (Videók: 3, 2019)
4.	Stabil (lassú)	$P_Y = 10 \text{ rad/m}$; $P_{\psi_1} = 8,5$; $P_{\psi_2} = 10$	Link (Videók: 4, 2019)

5–2. táblázat. A teszt során készült videók

Az elméleti és gyakorlati eredmények összehasonlítását az 5-4. ábra mutatja, ahol a zöld pontok a mért stabil-, a piros pontok pedig a mért instabil tolatást jelentik. Az elméleti határgörbe közelében legtöbbször instabil pontokat találunk, viszont a tartomány közepe felé haladva vannak stabil esetek. Tehát a teszt során egy kicsinyített, de az elméletihez hasonló határgörbét határoztunk meg.



5-4. ábra. Elmélet és kísérlet összehasonlítása, $V = -0,3$ m/s

Az eltérést többek között a következő tényezők okozzák:

- minden valóságos rendszerben van időkéscés, azonban a mechanikai modellünk ezt nem veszi figyelembe,
- a modellautó kormányművének pontatlansága miatt jelentős kotyogás tapasztalható, ez ront a szervomotor működésén, nehezíti a hirtelen, pontos beállást,
- az elméleti modell egy meglehetősen egyszerű, lineáris kerékmodellt tartalmaz, aminek a paraméterét ráadásul nem mértük a kísérleti autó és -utánfutó esetében, csak becsültük,
- a szenzorok pontosságát rontják a közelben lévő elektronikai berendezések keltette zavarások, mint például a futópadé; ennek csökkentésére *exponenciális simítást* (Brown, 1956) alkalmaztunk,
- a mérési nulla referenciahelyzetet minden tesztelés előtt be kell állítanunk, viszont nehézkes a tényleges zérus szöghelyzet megtalálása; ennek egy megoldása, hogy stabil előremenetben indítjuk a rendszert, hagyjuk beállni, és ezt követően nullázzuk az értékeket.

6. KONKLÚZIÓ

Az utolsó fejezethez érve összefoglaljuk a dolgozatban elvégzett feladatokat és a kapott eredményeket, levonjuk a következtetéseket.

Először bemutattunk egy, a szakirodalomban elterjedten használt mechanikai modellt a vontató-vontatmány kombinációra. Ezután a levezetett mozgásegyenletek segítségével vizsgáltuk a rendszer tulajdonságait stabilitási szempontból különböző paraméterek mellett. A kitűzött feladat a kis sebességű tolatás szabályozása volt – ami egyébként instabillnak bizonyult a modell alapján –, ezért a következő részben különböző algoritmusokat mutattunk be ennek megoldására. Végül sikerült egy alkalmas konfigurációt alkotni, ez egy három arányos tagból álló szabályozás lett, amivel tehát a megfelelő erősítési értékek mellett stabilizálni tudtuk az egyenes vonalú tolatást. Az eredmény megerősítése érdekében az utolsó hosszabb fejezetben kísérleti teszteléssel foglalkoztunk. Készítettünk egy grafikont a két módszer összehasonlítására, ami azt mutatja, hogy a teszt egy hasonló alakú, de szűkebb stabil tartományt adott az elméleti esethez képest. Ebből arra következtettünk, hogy a felállított modell alkalmas a probléma vizsgálatára és a számításunk is helyes. Utóbbi a nemlineáris szimulációk is alátámasztják, ugyanis az eredmények nagy hasonlóságot mutattak a stabilitástérképen tapasztaltakkal még a stabilitási határok közelében is.

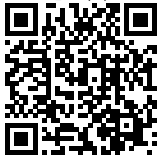
Összetettebb mechanikai modellt alkalmazva természetesen ennél pontosabb eredményeket is elérhetnénk, a legfontosabb kiegészítéseket az időkésés bevezetése és egy bonyolultabb kerékmodell használata jelentené. Ugyanez érvényes a tesztpad fejlesztését illetően is, különböző átalakításokkal közelebb kerülhetnénk a valósághoz, itt a kormánymű kötyogását érdemes említeni fő problémának.

IRODALOMJEGYZÉK

- Bachrathy, D. és Stépán, G. (2012). Bisection method in higher dimensions and the efficiency number, *Periodica Polytechnica – Mechanical Engineering* 56:(2): 81–86.
- Beregi, S., Takács, D. és Stépán, G. (2015). Tyre induced vibrations of the car–trailer system, *Journal of Sound and Vibration* 362.
- Brown, R. G. (1956). *Exponential smoothing for predicting demand*, Arthur D. Little, Inc., Cambridge 42, Massachusetts, USA.
- Bálint, P., Garay, B., Kiss, M., Lóczi, L., Nagy, K. és Nágel, Á. (2011). *Gépészkarai Matematika MSC*, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem. Jegyzet.
- Csernák, G. (2018). *Dinamika*, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Műszaki Mechanikai Tanszék. Jegyzet.
- Erdei, Á. (2018). *Több pótkocsival rendelkező járműszerelvény szabályozása*, Szakdolgozat, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Műszaki Mechanikai Tanszék, Budapest.
- Fodor, D. és Speiser, F. (2014). *Autóipari beágyazott rendszerek*, Pannon Egyetem. Tantárgyi jegyzet.
- Gantmacher, F. (1975). *Lectures in Analytical Mechanics*, MIR Publisher, Moscow.
- Kane, T. R. és Levinson, D. A. (1985). *Dynamics: Theory and Applications*, McGraw-Hill Book Company, New York, USA.
- Pacejka, H. B. (2002). *Tyre and Vehicle Dynamics*, Elsevier Butterworth–Heinemann, Oxford.
- Szabó, B. (2014). *Gumiabroncsos járművek kissebességű pályamozgásának és a gumiabroncs deformációjának kapcsolata*, Doktori Értekezés, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Budapest.
- Takács, D., Várszegi, B. és Beregi, S. (2018). *Gördülés dinamikája–Stabilitás és önvezetés*, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Műszaki Mechanikai Tanszék. Tantárgyi jegyzet.
- Turányi, L. (2019). *Sávtartó szabályozások futópados tesztelése*, Diplomaterv, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Műszaki Mechanikai Tanszék, Budapest.
- Uil, i. R. (2007). *Tyre models for steady-state vehicle handling analysis*, Master’s thesis, Eindhoven University of Technology, Eindhoven.

Videók: 1 (2019). Beavatkozás játékkormányon keresztül,

<http://www.mm.bme.hu/~takacs/letoltes/MLtolatas/kormanyzas.mp4>.



Videók: 2 (2019). Stabil tolatás sávváltással,

<http://www.mm.bme.hu/~takacs/letoltes/MLtolatas/stabil.mp4>.



Videók: 3 (2019). Instabil tolatás,

<http://www.mm.bme.hu/~takacs/letoltes/MLtolatas/instabil.mp4>.



Videók: 4 (2019). Stabil lassú tolatás sávváltással,

http://www.mm.bme.hu/~takacs/letoltes/MLtolatas/stabil_lassu.mp4.



Volkswagen (2019). Trailer assist,

<https://www.volkswagen.hu/tiguan/trailer-assist-vontatmany-asszisztens>. Megnyitva: 2019.11.29.

