



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

HOSSZÚ ÉLETTARTAMÚ GERJESZTÉSEK KÖLCSÖNHATÓ TÉRELMÉLETEKBEN

OTDK dolgozat

Nagy Botond

Témavezető: Dr. Takács Gábor
Egyetemi Tanár
BME Elméleti Fizika Tanszék

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Budapest

2022.

Köszönetnyilvánítás

Köszönetemet szeretném kifejezni témavezetőmnek, Takács Gábornak, aki fáradságot nem kímélve segíti munkámat. Az Ő meglátásai, tanácsai és motiváló lelkesedése hatalmas segítséget jelentenek tanulmányaim és kutatómunkám során.

Köszönöm családomnak, és barátnőmnek, Edinának, hogy a dolgozattal kapcsolatos munka elvégzése során bízottak és támogattak.

Köszönöm továbbá középiskolai fizika tanáromnak, Pálovics Róbertnek, aki megismertette velem a fizika szépségeit, és tanácsaival egyengette utam.

Az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-21-2 kódszámú Új Nemzetiségi Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.



Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Klasszikus térelmélet	5
2.1. Elméleti összefoglaló	5
2.1.1. A klasszikus sine-Gordon modell	8
2.1.2. A nemlinearitás szerepe	9
2.1.3. Oszcillonok	11
2.1.4. Kvázilélegzők	14
2.2. Numerikus módszerek	15
2.3. Eredmények	18
2.3.1. A hirtelen bomlás eltűnése alacsony dimenziószám esetén	18
2.3.2. A staccato bomlás eltűnése magasabb dimenziószám esetén . . .	22
2.4. Konklúzió	23
3. Kvantumtérelmélet	27
3.1. Elméleti összefoglaló	27
3.1.1. S-mátrix elmélet	29
3.1.2. Form faktorok	30
3.1.3. A kvantum sine-Gordon modell	31
3.1.4. Form faktor perturbációszámítás (FFPT)	32
3.2. Szemiklasszikus közelítés	34
3.3. Eredmények	37
3.3.1. Az FFPT bomlási ráta szemiklasszikus limesze	38
3.3.2. Hertzberg módszere a kétfrekvenciás sine-Gordon modellben . .	41
3.4. Konklúzió	47
4. Összefoglalás	48
A. Időfejlesztés	49
B. Kvázilélegző energia	51
C. A sine-Gordon lélegző form faktorok	52
D. A WKB módszer	54

1. fejezet

Bevezetés

Az utóbbi évek elméleti fizikai kutatási programjainak egy jelentős része kvantumrendszerek nemegyensúlyi dinamikájának megértésére tesz erőfeszítéseket. A jelen dolgozat célja hozzájárulni az ezen a területen zajló kutatásokhoz. A kvantumrendszerek vizsgálatához érdemes először a megfelelő klasszikus rendszerek viselkedését is megérteni, ezért a dolgozat első felét ennek szenteljük, majd rátérünk a nemrég elkezdett kvantumos vizsgálataink bemutatására.

A nemegyensúlyi időfejlődésben érdekes viselkedésre vezet, ha a rendszer dinamikája megenged hosszú élettartamú gerjesztéseket. Egy fontos osztályt képeznek az ún. integrálható modellek, melyek jellemzője, hogy a rendszer szabadsági fokaival megegyező számú megmaradó töltéssel rendelkeznek, és ezek a töltések jelentősen korlátozzák a lehetséges időfejlődést, végtelen élettartamú (stabil) kvázirészecske gerjesztésekhez vezetnek, amelyek jelentősen befolyásolják a rendszer relaxációját. Ezek a modellek az elméleti fizikában kiemelt jelentőségűek mint ún. "toy" modellek, ugyanakkor a közelmúltban kísérleti relevanciájuk is előtérbe került [1–4].

Ha megsértjük az integrálhatóságot, azt várjuk, hogy a korábban stabil gerjesztések élettartama véges lesz, azaz bomlani fognak. Ugyanakkor meglepő módon még erősen nem integrálható rendszerekben is megfigyelhetőek anomálian hosszú élettartamú gerjesztések. Ilyenek az ún. oszcillonok, amelyeket először klasszikus kölcsönható skalár-elméletekben azonosítottak [5–8]. A dolgozat első fele ezek részletes vizsgálatával foglalkozik, ahol bemutatjuk az oszcillonok dinamikájával kapcsolatos korábbi, az irodalomban fellelhető eredményeket, különös hangsúlyt fektetve bomlási mechanizmusaikra, majd részletesen ismertetjük az ezzel kapcsolatos saját vizsgálataink eredményeit.

A dolgozat második felében a kvantumelméletben elkezdett vizsgálatainkat tárgyaljuk, ahol az oszcillonok kvantumos megfelelőinek bomlási rátájának vizsgálatával foglalkozunk. Az ezzel kapcsolatos munkánk jelenleg is folyamatban van, a dolgozatban az eddig elért eredményeket foglaljuk össze. Távlati célunk, hogy az oszcillonok kvantumos viselkedésének a kvantumtérelméletek nemegyensúlyi dinamikájára vonatkozó következményeit feltárjuk.

A dolgozatom közvetlen előzménye egy korábbi TDK munkám [9], mely elsősorban az oszcillonok időfejlődésének numerikus szimulációjára, illetve a módszer ellenőrzésére koncentrált. A jelen dolgozat részben épít az ott elért eredményekre, azonban az itt bemutatott eredmények a korábbiakat jelentősen meghaladják. Az előző dolgozat óta befejeztük klasszikus vizsgálatainkat, és elkezdtünk foglalkozni a kvantumoszillonok dinamikájával is, melyek az előző dolgozatban egyáltalán nem szerepeltek. Ahol a korábbi munkában felhasznált eredményekre építünk, azt explicit hivatkozással jelezzük, egyes technikai jellegű részeket a függelékben tárgyalunk.

2. fejezet

Klasszikus térelmélet

A dolgozat első részében ismertetjük a klasszikus modelleken végzett vizsgálataink eredményét. Ehhez a 2.1. fejezetben bemutatjuk a klasszikus térelmélet alapvető összefüggéseit, és az általunk vizsgált modellt, a sine-Gordon modellt, majd rátérünk az ún. oszcillonokra, melyek vizsgálata a dolgozat fő irányvonala. A 2.2. fejezetben bemutatjuk a vizsgálatokhoz használt numerikus módszerünket, a 2.3. fejezetben pedig ismertetjük eredményeinket. Az ezekről készült publikációnk a Physical Review D folyóiratban került közlésre [10].

2.1. Elméleti összefoglaló

A térelmélet végtelen szabadsági fokú rendszerek vizsgálatával foglalkozik, ahol a szabadsági fokok egy ún. mező értékei a tér pontjaiban. A dolgozatban $d = D + 1$ dimenziós skalármezők relativisztikus dinamikáját vizsgáljuk (D a térszerű dimenziók száma) Minkowski téridőben, ahol a metrika szignatúrája $(+, -, -, \dots)$, továbbá a $c = \hbar = 1$ konvenciót követjük.¹ A mező dinamikáját a hatásfunkcionál segítségével definiálhatjuk

$$S = \int d^d x \mathcal{L} , \quad (2.1)$$

ahol $\mathcal{L}$ az elmélet Lagrange-sűrűsége. Skalármező esetén ennek szokásos alakja

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) = \frac{1}{2} (\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - V(\phi) , \quad (2.2)$$

ahol $\phi(x)$ jelöli a mezőt a téridő pontjaiban, $V(\phi)$ pedig a mező kölcsönhatásait leíró potenciálfüggvény. A továbbiakban feltételezzük, hogy a potenciálnak minimuma van $\phi = 0$ -ban, és a minimum értéke 0, továbbá bevezetjük az $m^2 = V''(0)$ jelölést, mivel

¹Ekkor minden mennyiség dimenzióját energiadimenziókban adjuk meg. Pl. $[t] = [x] = [E]^{-1}$.

– ahogy a 2.1.2. fejezetben látni fogjuk – $V''(0)$ a mező elemi gerjesztéseinek tömegével kapcsolatos. A $V(\phi)$ függvény minimumhelyeit vákuumoknak hívjuk.

A mező mozgásegyenletének levezetéséhez szükségünk lesz a funkcionális deriváltra, amely a szokásos derivált általánosítása

$$\frac{\partial}{\partial A_x} \sum_y J_y A_y = J_x \longleftrightarrow \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \int d^d y J(y) \phi(y) = J(x) , \quad (2.3)$$

továbbá

$$\frac{\delta}{\delta \phi(x)} \int d^d y J(y) \frac{\partial \phi(y)}{\partial y^\mu} = -\frac{\partial J(x)}{\partial x^\mu} , \quad (2.4)$$

amely parciális integrálás után (és feltételezve, hogy a határfelületen, azaz a végtelenben a fizikai mennyiségek eltűnnek) következik az előző egyenletből. A klasszikus dinamikát az a feltétel határozza meg, hogy a fizikailag megvalósuló esetben a hatás extrémális, azaz

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0 . \quad (2.5)$$

Ez az ún. Euler-Lagrange mozgásegyenlet. Esetünkben

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = -V'(\phi) \implies \partial_t^2 \phi - \nabla^2 \phi = -V'(\phi) . \quad (2.6)$$

A dolgozatban csak gömbszimmetrikus mezőkonfigurációkat vizsgálunk, ekkor a mozgásegyenlet a következő alakra egyszerűsödik

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{D-1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = -V'(\phi) , \quad (2.7)$$

ahol $r = |\mathbf{x}|$. Noether tétele szerint a fizikában egy rendszer szimmetriáihoz kontinuitási egyenletek tartoznak. A

$$\delta \phi = \epsilon X(\phi) \quad (2.8)$$

transzformáció a modell folytonos szimmetriája (ϵ infinitezimális paraméter), ha ez a Lagrange-sűrűséget legfeljebb egy teljes deriválttal változtatja meg

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta \mathcal{L} = \mathcal{L} + \epsilon \partial_\mu F^\mu , \quad (2.9)$$

ez ugyanis nem változtatja meg a hatást, és ezáltal a dinamikát sem. A $\delta \phi$ transzformáció hatására a Lagrange-sűrűség megváltozása:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) = \\ &= \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) . \end{aligned} \quad (2.10)$$

Az első tag a (2.5) egyenlet miatt eltűnik, így

$$\delta\mathcal{L} = \epsilon\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} X(\phi) \right) = \epsilon\partial_\mu F^\mu(\phi) \implies \epsilon\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} X(\phi) - F^\mu(\phi) \right) = 0, \quad (2.11)$$

tetszőleges ϵ paraméter esetén, azaz

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \text{ ahol } j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} X(\phi) - F^\mu(\phi). \quad (2.12)$$

A j^0 mennyiség tehát az $X(\phi)$ szimmetriatranszformációhoz tartozó megmaradó mennyiség sűrűsége, j^i ($i = 1, \dots, D$) pedig a hozzá tartozó áramsűrűség.

Különösen fontos megmaradásó mennyiség a téridőbeli translációs szimmetriához tartozó energia-impulzus tenzor. A téridő infinitezimális transzformációja

$$x^\nu \mapsto x'^\nu - a^\nu \quad (2.13)$$

ekvivalens a mező és a Lagrange-sűrűség következő transzformációjával

$$\begin{aligned} \phi(x) &\mapsto \phi'(x) = \phi(x) + a^\nu \partial_\nu \phi(x), \\ \mathcal{L}(x) &\mapsto \mathcal{L}'(x) = \mathcal{L} + a^\nu \partial_\nu \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(x) + a^\nu \partial_\mu (\delta^\mu_\nu \mathcal{L}(x)). \end{aligned} \quad (2.14)$$

A (2.11) ekkor a következő alakú

$$a^\nu \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\nu \phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \right) = 0, \quad (2.15)$$

tetszőleges infinitezimális a^ν esetén. Ezért a következőképp definiáljuk az energia-impulzus tenzort

$$T^\mu_\nu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\nu \phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}. \quad (2.16)$$

A fentiekből következően T^μ_ν ($\nu = 0, 1, \dots, D$) megmaradó mennyiségek sűrűségei, T^i_ν a hozzájuk tartozó áramsűrűségek. Ezek közül a T^0_0 mennyiség adja meg egy adott mező-konfiguráció energiasűrűségét

$$T^0_0 = \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi). \quad (2.17)$$

Gömbszimmetrikus esetben az energiasűrűség, és egy R sugarú gömbön belül a mező-konfigurációban tárolt energia

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial r} \right)^2 + V(\phi), \quad E_R = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \int_0^R dr r^{D-1} \mathcal{E}. \quad (2.18)$$

Definiáljuk továbbá egy mezőkonfiguráció effektív sugarát

$$R_{eff} = \frac{\int_0^\infty dr r^D \mathcal{E}}{\int_0^\infty dr r^{D-1} \mathcal{E}}, \quad (2.19)$$

amely az energiasűrűség térbeli eloszlását karakterizálja.

2.1.1. A klasszikus sine-Gordon modell

A klasszikus sine-Gordon modellt a következő hatás definiálja

$$S = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \mu (\cos(\beta\phi) - 1) \right\} , \quad (2.20)$$

azaz $V(\phi) = \mu(1 - \cos(\beta\phi))$, így az elemi gerjesztések tömege $m = \sqrt{\mu}\beta$. Az is látható, hogy a modellnek végtelen sok vákuuma van a

$$\phi_v^{(n)} = \frac{2\pi}{\beta} n \quad (2.21)$$

helyeken. A modell mozgásegyenlete az ún. sine-Gordon egyenlet

$$\partial_t^2 \phi - \partial_x^2 \phi = -\mu\beta \sin(\beta\phi) , \quad (2.22)$$

amely tetszőleges $\phi(t=0, x)$ kezdeti feltétel esetén megoldható analitikusan, csak lineáris egyenleteket megoldva az ún. inverz szórás módszer segítségével [11, 12]. A módszer segítségével a hatás a diszkrét mechanikából ismert hatás-szög változókhoz hasonló változókkal is kifejezhető [13]. Ennek előnye, hogy a hatás-szög változóknak kifejezett Hamilton-függvényből a modell spektruma, azaz részecsketartalma könnyedén leolvasható. A részecskéket klasszikus esetben térben lokalizált mezőkonfigurációknak feleltetjük meg. A sine-Gordon modell spektrumát az m tömegű elemi gerjesztés, egy ún. szoliton-antiszoliton pár, és egy folytonos paraméterrel jellemezhető ún. lélegzők alkotják.

A sine-Gordon modell fent említett, analitikusan jól kezelhető tulajdonságai a modell integrálhatóságából származnak. A megmaradó töltések következménye a spektrumban található részecskék stabilitása, szórással szembeni stabilitása (azaz szórás után a kimenő részecskék legfeljebb időbeli eltolódást szenvednek, de alakjuk nem változik), és a részecskék faktorizált szórása (azaz több részecske szórás esetén elég csak kétrészecske szórásokat vizsgálni, és ezekből felépíteni a több részecske szórást). Az integrálhatóság ezen aspektusaira a kvantumos esetben a 3.1.1. fejezetben visszatérünk.

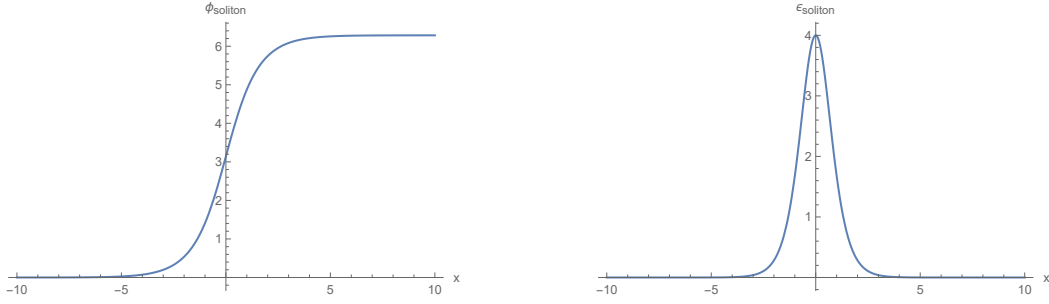
A szoliton (S) és antiszoliton ($\bar{S}$) megoldások alakja a tömegközépponti rendszerükben²

$$\phi_{S,\bar{S}}(t, x) = \pm \frac{4}{\beta} \arctan(\exp(\sqrt{\mu}\beta x)) , \quad (2.23)$$

melyek tömege

$$M_S = \frac{8\sqrt{\mu}}{\beta} . \quad (2.24)$$

²Mivel a hatás Lorentz-invariáns alakban van felírva, ezért a mozgó megoldásokat Lorentz-transzformációval kaphatjuk az álló megoldásokból. Hasonlóan a lélegzők esetében is.



2.1. ábra. A szoliton mezőkonfiguráció alakja, és energiasűrűsége. Az energiasűrűség lokalizált, így jogosan hívhatjuk részecskéknek a szolitonokat.

A 2.1. ábrán látható, hogy a szoliton az $n = 0$ és $n = 1$ vákuumok között interpolál (hasonlóan felírható az n és $n + 1$ vákuumok között interpoláló szoliton). Ezt a tulajdonságot ragadja meg az ún. topologikus töltés

$$j^\mu = \frac{\beta}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \implies Q = \frac{\beta}{2\pi} \int dx j^0 = \frac{\beta}{2\pi} \int dx \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\beta}{2\pi} \left[\phi(x \rightarrow \infty) - \phi(x \rightarrow -\infty) \right], \quad (2.25)$$

amelyről könnyen látható, hogy megmaradó mennyiség: $\partial_\mu j^\mu = 0$. A szoliton/antiszoliton topologikus töltése ± 1 , míg a vákuumé 0. A topologikus töltés megmaradása ezért megtiltja a szoliton/antiszoliton bomlását.

A lélegzők egy folytonos ϵ amplitúdóparaméterrel jellemezhető $\Omega = m\omega$ frekvenciával oszcilláló megoldások

$$\phi_B(t, x) = \frac{4}{\beta} \arctan \left(\frac{\epsilon \cos(m\omega t)}{\omega \cosh(m\epsilon x)} \right), \quad (2.26)$$

ahol $\epsilon^2 + \omega^2 = 1$. A lélegzők tömege

$$M_B(\epsilon) = \frac{16\epsilon\sqrt{\mu}}{\beta}, \quad (2.27)$$

azaz, mivel $\epsilon \in (0, 1)$ folytonos paraméter, a klasszikus elméletben a lélegzők folytonos spektrumot alkotnak. Topologikus töltésük 0, de a modell integrálhatósága miatt stabilak, nem bomlanak.

2.1.2. A nemlinearitás szerepe

Az előző fejezetben látott integrálható modell után felmerül a kérdés, hogy mi a helyzet, mikor a modell nem integrálható. Ilyenkor megmaradó töltések hiányában azt váránk,

hogy egy kezdetben lokalizált mezőkonfiguráció energiáját szétsugározva delokalizálódik. A következő fejezetekben [9] segítségével ismertetjük az oszcillonok dinamikájának megértéséhez szükséges alapokat. Tekintsük először a következő potenciált

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (2.28)$$

Ekkor a mozgásegyenlet az ún. Klein-Gordon egyenlet

$$(\square + m^2)\phi = 0, \quad (2.29)$$

amely lineáris, így megoldásait kereshetjük Fourier térben

$$\phi(t, x) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \phi_\omega(x) e^{-i\omega t}. \quad (2.30)$$

Ezzel az egyes módusokra a következő egyenlet adódik:

$$-(\nabla^2 + k^2)\phi_\omega(x) = 0, \text{ ahol } k^2 = \omega^2 - m^2. \quad (2.31)$$

Két dolgot látunk. Először is a diszperziós reláció $\omega^2 = k^2 + m^2$ éppen a relativisztikus diszperziós reláció, azaz m -et az elemi gerjesztések tömegével azonosíthatjuk. A második, hogy k^2 előjelétől függően ϕ_ω térben $|k|$ hullámszámmal oszcilláló függvény ($k^2 > 0$ első- vagy másodfajú Bessel függvények), vagy térben lecsengő ($k^2 < 0$ másodfajú módosított Bessel-függvények). A térben oszcilláló módusok a (2.30) időfüggéssel térben haladó hullámot, azaz sugárzást írnak le, míg a térben lecsengő módusok adják a mezőkonfiguráció időben oszcilláló "magrészét". Emiatt m -et tömeg küszöbértéknek ("mass threshold") nevezi az irodalom. Lineáris esetben, azaz, ha a potenciál nem tartalmaz ϕ^2 -nél magasabb rendű tagokat, a lokalizált konfigurációk élettartama $t \sim \mathcal{O}(1) \cdot m^{-1}$ [14].

A hosszú élettartamú konfigurációk létrejöttéhez a potenciálban magasabbrendű tagok is szükségesek, melyek a mozgásegyenletet nemlinárisá teszik. A potenciálban figyelembe véve a negyedrendű tagot

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4, \quad (2.32)$$

a mozgásegyenlet

$$(\square + m^2)\phi = -\frac{\lambda}{6}\phi^3. \quad (2.33)$$

Ismét Fourier térben keresve a megoldást, a megoldandó egyenlet most

$$\begin{aligned} \int \frac{d\omega}{2\pi} (-\omega^2 - \nabla^2 + m^2) \phi_\omega e^{-i\omega t} = \\ = -\frac{\lambda}{6} \int \frac{d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3}{(2\pi)^3} \phi_{\omega_1}(x) \phi_{\omega_2}(x) \phi_{\omega_3}(x) e^{-i(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)t}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

majd mindkét oldalt inverz Fourier transzformálva a következőt kapjuk

$$\begin{aligned} (-\Omega^2 - \nabla^2 + m^2)\phi_\Omega(x) = \\ = -\frac{\lambda}{6} \int \frac{d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3}{(2\pi)^3} (2\pi)\delta(\Omega - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \phi_{\omega_1}(x) \phi_{\omega_2}(x) \phi_{\omega_3}(x) . \end{aligned} \quad (2.35)$$

Azaz most is (2.31) alakú egyenletet kapunk, de az egyenlet már forrásos, és a forrás függ a többi módustól. Azt látjuk, hogy a potenciál magasabb rendű, nemlineáris tagjai összecsatolják az egyes módusokat. A numerikus tapasztalat azt mutatja, hogy ez az összecsatolódás hosszú élettartamú lokalizált konfigurációt eredményezhet, amely azonban – mivel a sugárzási módusok a csatolás révén energiát szállítanak el a magrésztől – sugárzással folyamatosan energiát veszít.

A fenti (2.32) potenciál által leírt ϕ^4 elméletben azonban nincsenek hosszú élettartamú gerjesztések, mivel a kölcsönhatás taszító (az egyes mezőkonfigurációk energiája csak akkor korlátos alulról, ha λ pozitív). A spontán szimmetriasértett esetben azonban $m^2 < 0$, és a sértett vákuum körüli fluktuációk kölcsönhatásában megjelenik egy ϕ^3 kölcsönhatás, ez pedig vonzó kölcsönhatást eredményez az elemi részecskék között. Ekkor már létrejönnek hosszú élettartamú lokalizált konfigurációk, ha a kezdeti feltétel elegendő (és elegendően lokalizált) energiát tartalmaz.

2.1.3. Oszcillonok

Az ilyen, hosszú élettartamú konfigurációk oszcillon néven terjedtek el az irodalomban. Ezek térben lokalizált, időben koherensen oszcilláló, lassan sugárzó részecskeszerű objektumok. A hosszú élettartam a vizsgált modell karakterisztikus időskálájához, m^{-1} -hez képest értendő. Míg egy lokalizált konfiguráció oszcillációinak periódusideje m^{-1} egységekben $\mathcal{O}(1)$, addig a numerikus tapasztalat szerint az oszcillonok élettartama $D = 3$ esetén $\mathcal{O}(10^3)$ [14], $D = 2$ esetén $\mathcal{O}(10^7)$ is lehet [15, 16]. Az élettartam nő a dimenziószám csökkenésével [17], $D = 1$ esetben akár végtelen is lehet, ha az elmélet integrálható (pl. a sine-Gordon modell). A kvantumfluktuációk hatását is figyelembe véve az az oszcillonok élettartama valamelyest csökken [18–20].

Az oszcillonok vizsgálatát motiválja, hogy modellfüggetlenül³ attraktorok a konfigurációk terében [14, 21–25], továbbá stabilak kicsiny perturbációkkal szemben [26]. Ezért ha egy kezdeti konfigurációnak elegendő (és elegendően lokalizált) az energiája, akkor a konfiguráció oszcillonná alakul az időfejlődése során. Ennek megfelelően oszcillonok létrejöhetnek szoliton-antiszolon ütközésekben [27], vagy fázisátalakulást leíró modellekben szubkritikus buborékok időfejlődése során [26].

A numerikus vizsgálatok során kezdeti profilnak általában valamilyen buborékprofil szokás választani (Gauss, tangens hiperbolicus, vagy a már említett sine-Gordon lélegző). Ekkor az időfejlődés kezdeti szakaszában a konfiguráció kisugározza a legközelebbi

³Feltéve, hogy a modellben vonzó az önkölcsönhatás.

oszcillon állapothoz képesti többlet energiáját, majd "csapdába esik" ebben az állapotban. Az oszcillon azonban nem stabil konfiguráció, a magrészt folyamatosan energiát veszít a sugárzási módusokkal való energiacsere révén. Az energia csökkenése azonban az adott fizikai rendszerre jellemző időskálához (az oszcilláció periódusidejéhez) képest nagyon lassan történik, ezáltal a rendszer relaxációja jelentősen lelassul. Az oszcillonok csak kváziperiodikus konfigurációk: az energia csökkenése miatt az oszcillációk amplitúdója is folyamatosan csökken, ami a frekvencia növekedésével is jár. Ez megmutatható az ún. kisamplitúdós sorfejtéssel ("small amplitude expansion") [28, 29]. Mivel a frekvencia csak lassan változik időben, az oszcillonok jó közelítéssel Fourier sorba fejthetők. Gömbszimmetriát feltételezve:

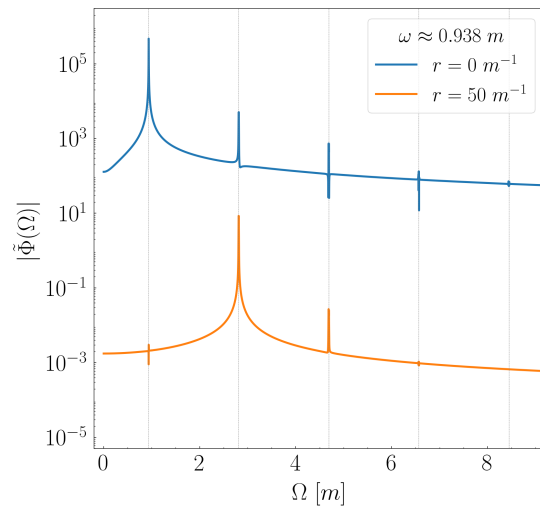
$$\phi(t, r) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r, t) \cos(n\omega t), \quad (2.36)$$

ahol az f_n módusok adiabatikusan lassan változnak időben. Ezt a próbafüggvényt használva a mozgásegyenletben [15, 17, 25, 28], az f_n módusamplitúdókra csatolt differenciálegyenletrendszer kapunk, melyekből kiderül, hogy az f_1 alapharmónus a tömegküszöb alatt van, a magrészt a magasabb harmonikusok révén csatolódnak a tömegküszöb feletti sugárzó módusokhoz. A fentieket támasztja alá a 2.2. ábra, ahol egy numerikusan szimulált oszcillon magrészt és távolterét frekvenciatartalmát látjuk. A magrészt alapharmónusa egy éles csúcs $\omega < m$ -ben, és megjelenik néhány éles felharmonikus is, de már jóval kisebb amplitúdóval. A konfiguráció a távolterben pedig 3ω frekvencián sugároz legerősebben.⁴ A sugárzás miatti energiacsökkenés D térdimenzió esetén kis amplitúdójú konfigurációkra [28, 30, 31]:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{A_D}{\epsilon^{D-1}} \exp\left(-\frac{B_D}{\epsilon}\right), \quad (2.37)$$

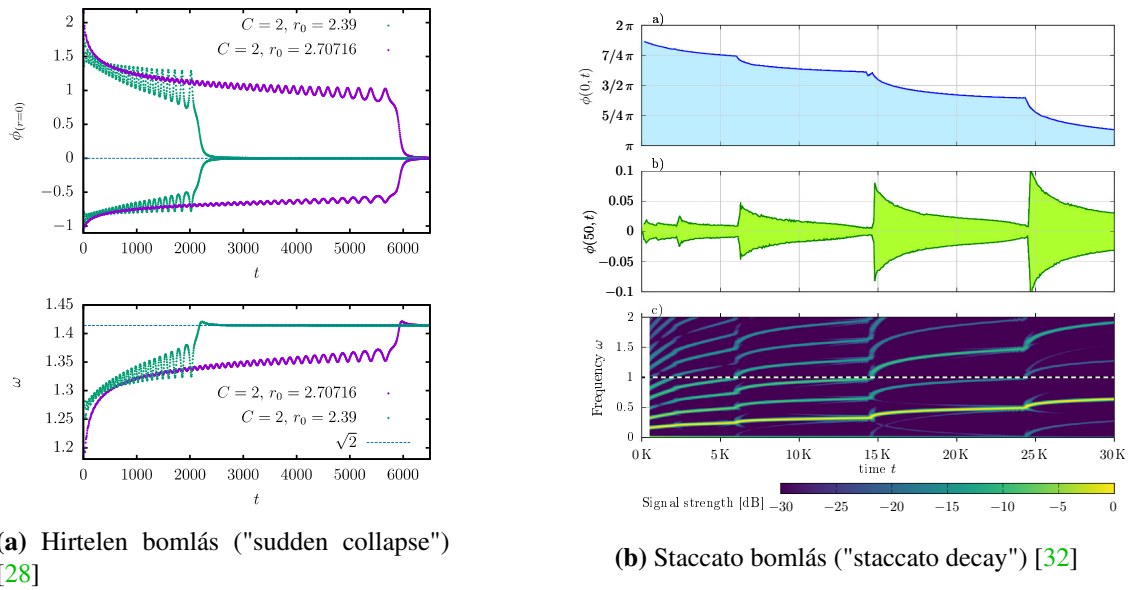
ahol A_D és B_D a dimenziószámtól, és vizsgált modelltől függő konstansok. Látható, hogy az amplitúdó csökkenésével a sugárzás exponenciálisan csökken. Ez felelős az oszcillonok anomálisan hosszú élettartamáért. A kifejezés ϵ -ban nem-analitikus, ez mutatja a perturbatív módszerek alkalmazhatóságának nehézségét.

⁴Belátható, hogy ez a potenciál szimmetriatulajdonságainak következménye. Szimmetrikus potenciálban 3ω frekvencián domináns a sugárzás, aszimmetrikus potenciál esetén a konfiguráció a 2ω frekvencián sugároz legerősebben [25, 28].



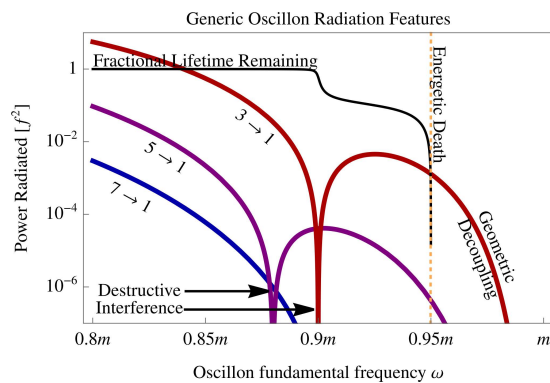
2.2. ábra. A magrészt ($r = 0 \text{ m}^{-1}$) és a távolterét ($r = 50 \text{ m}^{-1}$) Fourier-transzformáltjai [25].

Egy lokalizált állapot alapharmonikusának frekvenciája tehát bár lassan, de növekszik az időfejlődés során. A korábban leírtak alapján ez a frekvencia nem lehet akármekkora, ha az alapharmonikus frekvenciája elérné az $\omega = m$ küszöbértéket, a megoldás természete kénytelen lokalizáltról hullámszerűre változni, ennek következményeként pedig a magrész elbomlik. A bomlás részletei azonban nagyban függenek attól, hogy hány térdimenzióban vizsgálódunk. Kétféle bomlási mechanizmus ismert, a hirtelen bomlás, és a "staccato" bomlás, melyeket a 2.3. ábra szemléltet.



2.3. ábra. A bomlási mechanizmusok, melyek vizsgálataink témáját képezik.

A 2.3a. ábrán látható egy oszcillon $x = 0$ -beli burkolójának, és az oszcillon frekvenciájának időfejlődése. Az időfejlődés kezdeti szakaszában az amplitúdó gyorsan csökken, míg a kezdeti konfiguráció megtalálja a legközelebbi oszcillon konfigurációt. Ezután az amplitúdó már csak lassan változik, de az amplitúdón lassú oszcilláció, ún. alakmódus ("shape-mode" [34]) ül, mely abból származik, hogy kezdetben nem az oszcillon konfigurációból indultunk. Az időfejlődés során a frekvencia lassan növekszik, míg elér egy kritikus értéket, ami a tömegküszöbnél (az ábrán $m = \sqrt{2}$) kisebb érték. A kritikus frekven-



2.4. ábra. Az oszcillon élettartamát befolyásoló mechanizmusok [33]. A $3 \rightarrow 1$, $5 \rightarrow 1$, $7 \rightarrow 1$ görbék az $n = 3, 5, 7$ felharmonikusok által kisugárzott energia.

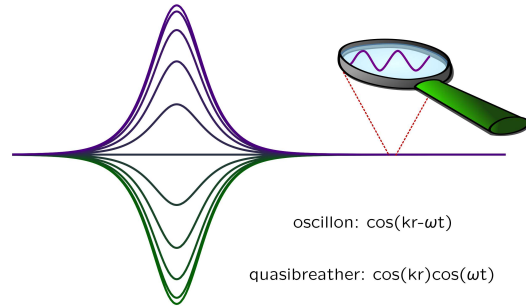
cia elérése után a frekvencia a tömegközöb értékére ugrik, az amplitúdó pedig hirtelen nullára csökken, az oszcillon kisugározza a teljes energiáját, azaz elbomlik.

A 2.3b. ábrán egy alacsony frekvenciájú oszcillon origóbeli, és sugárzási térbeli amplitúdója, és frekvenciatartalma látható. A staccato bomlás során, mikor az oszcilláció alapharmonikusa eléri az m/n értéket (n egész), akkor az n -edik felharmonikus eléri a tömegközöböt. Ekkor ez a felharmonikus lokalizáltról sugárzásszerűre változik, ez pedig az amplitúdó hirtelen csökkenésében, és a sugárzás robbanásszerű megugrásában jelentkezik. Továbbá a frekvenciában is láthatók a "törések", mikor egy-egy staccato lépés történik. A hirtelen bomlást és a staccato bomlást a 2.3. fejezetben tovább vizsgáljuk.

A 2.4. ábrán látható az oszcillon dinamika szempontjából két további fontos mechanizmus (az "energetic death" a feljebb hirtelen bomlásként bemutatott mechanizmus). A destruktív interferencia során a sugárzó módusok úgy csatolódnak, hogy bizonyos frekvencián egy-egy módus amplitúdója exponenciálisan lecsökken, ezt látjuk az ábrán mély minimumokként. Ekkor a magasabb felharmonikusok sugároznak, amelyek kevésbé effektívek az energia elszállításában, így a destruktív interferencia fellépésekor az oszcillon élettartama jelentősen megnőhet [25, 33, 35]. A geometriai szétcsatolódás akkor valósul meg, amikor az oszcillon mérete jóval nagyobb, mint a sugárzás hullámhossza [33]. Belátható, hogy ez éppen a kis amplitúdós határeset, ahol a sugárzás exponenciális elnyomását már említettük a (2.37) egyenletnél.

2.1.4. Kvázilélegzők

Az oszcillon sugárzási amplitúdója általában a magrész oszcillációinak amplitúdójához képest nagyságrendekkel kisebb, amit a 2.5. ábra szemléltet. A magrésztől távoli tartományt, ahol már csak a sugárzás van jelen, farokrésznek ("tail") nevezzük. Az oszcillonok farokrésze a magrész (a potenciál szimmetriatulajdonságaitól függően az első vagy a második) felharmonikusával oszcilláló kifutó hullámokat tartalmaz. Azonban, ha a sugárzás által elvitt energiát egy befelé futó, a sugárzással azonos amplitúdójú hullámmal kompenzáljuk, akkor a konfiguráció energiája időben állandó marad. Az ilyen konfigurációk farokrésze állóhullám, mely a ki- és befutó hullámok szuperpozíciójaként áll elő. Egy ilyen állapot nem írhatnak le valódi fizikai rendszereket, ugyanis energiája az állóhullám farokrész energiája miatt végtelen, azonban a farokrész energiasűrűsége nagyságrendekkel kisebb a magrészbéli energiasűrűségnél, így "kvázi" lokalizáltak, ezért *kvázilélegző*nek nevezzük őket. A kvázilélegzők rendkívül hasznosak az oszcillonok bomlási mechanizmusának megértésében, mivel numerikusan és analiti-



2.5. ábra. A magrész és a farokrész [28]

kusan is könnyebben kezelhetők, másrészt a kvázilélegző profil jól közelíti az oszcillon profilt [36].

Az oszcillon magrészének energiája és frekvenciája változik időben, míg a kvázilélegző magrésze állandó energiájú és frekvenciájú. Hogy értjük tehát, hogy egy kvázilélegző jól közelít egy oszcillont? Egyrészt a kvázilélegző profil tetszőleges ω -ra megtalálható, és ennek magrésze jól közelíti az adott frekvenciájú oszcillon magrészét, a kvázilélegző farokrészének amplitúdója pedig éppen *kétszerese* az oszcillon sugárzási amplitúdójának, hiszen a kvázilélegző farokrésze az oszcillon sugárzási amplitúdójával egyező amplitúdójú ki- és befutó hullámok szuperpozíciója. Másrészt, ha egy numerikus szimuláció kezdeti feltétele egy kvázilélegző konfiguráció (úgy, hogy a farokrészt valahol nullává tesszük, hogy véges energiájú rendszert kapjunk), az jól követi a megfelelő frekvenciájú oszcillon időfejlődését [17, 28, 36]. Úgy is fogalmazhatunk, hogy az oszcillon adiabatikusan időfejlődik kvázilélegző állapotokon keresztül.

2.2. Numerikus módszerek

Az oszcillonok vizsgálatára két numerikus módszert fejlesztettem ki. Az elsőt korábbi TDK munkában [9] az oszcillonok időfejlesztésére alkalmaztuk, és az A. függelékben foglaljuk össze röviden. A második a kvázilélegzők konstrukciójához szükséges, újonnan kifejlesztett eljárás, amit az alábbiakban mutatok be.

A módszer célja megtalálni tetszőleges ω frekvenciájú kvázilélegző profilt D dimenzióban, bemutatásához [10]-et követem. A konkrét számításokat a következő potenciál esetére végezzük⁵ ([32] által motiválva)

$$V(\phi) = (1 - \lambda)(1 - \cos \phi) + \frac{\lambda}{8\pi^2} \phi^2 (\phi - 2\pi)^2. \quad (2.38)$$

Ez a potenciál $D = 1$ és $\lambda = 0$ esetén a sine-Gordon modellt adja $\mu = 1 = \beta$ paraméterekkel, azaz $m = 1$. Ekkor a lélegző alakja (lásd a (2.26) egyenletet)

$$\phi^{sG}(t, x) = 4 \arctan \left(\frac{\epsilon \cos(\omega t)}{\omega \cosh(\epsilon x)} \right), \quad (2.39)$$

melyet egy stabil (nem sugárzó) oszcillonnak tekinthetünk. A gömbszimmetria miatt a mozgásegyenlet

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{D-1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = -V'(\phi). \quad (2.40)$$

A következőkben kihasználjuk, hogy az egyenlet szempontjából D csupán paraméter, nem szükségszerűen egész szám, hanem tetszőleges valós szám lehet.

⁵Ekkor $m = 1$, tetszőleges λ esetén. Ez a klasszikus elméletben mindig elérhető a távolság- és időegység átskálázásával.

A kvázilélegző megtalálásához a [37]-ben javasolt módszert módosítottuk saját céljainknak megfelelően. Mivel a kvázilélegző egzaktul periodikus konfiguráció, mely a $\phi = 0$ vákuum körül oszcillál, a megoldást a következő alakban keressük

$$\phi(t, r) = \sum_{m=1}^N \phi_m(r) \cos(m\omega t) , \quad (2.41)$$

ahol N a figyelembevett harmonikusok száma. Ezt a (2.40) egyenletbe helyettesítve

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N \left(m^2 \omega^2 + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{D-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \phi_m(r) \cos(m\omega t) = \\ = V' \left(\sum_{m=1}^N \phi_m(r) \cos(m\omega t) \right) , \end{aligned} \quad (2.42)$$

amely Fourier-transzformáció után a következő alakra hozható

$$\begin{aligned} \left(n^2 \omega^2 + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{D-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \phi_n(r) = \\ = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} V' \left(\sum_{m=1}^N \phi_m(r) \cos(m\omega t) \right) \cos(n\omega t) , \end{aligned} \quad (2.43)$$

ahol $n = 1, 2, \dots, N$. Ez egy csatolt differenciálegyenlet-rendszer, amely megoldható numerikusan, ha specifikáljuk a határfeltételeket. A megoldás nemszinguláris az $r = 0$ -ban, és térben lokalizált, ezért a határfeltételek a következők

$$\left. \frac{d}{dr} \phi_n(r) \right|_{r=0} , \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \phi_n(r) = 0 . \quad (2.44)$$

Az aszimptotikus tartományban a (2.41) egyenlet módusai kicsik, így elhanyagolhatjuk közöttük a magasabb rendekből származó nemlineáris csatolást. Ezért az egyes módusok aszimptotikája a (2.40) egyenletből következően

$$\begin{aligned} \phi_n(r) \sim r^{\frac{1-D}{2}} \exp\left(-\sqrt{1-n^2\omega^2}\right) , \quad \text{ha } n\omega < 1, \text{ lokalizált módusok,} \\ \phi_n(r) \sim r^{\frac{1-D}{2}} \sin\left(\sqrt{n^2\omega^2-1} + \varphi_n\right) , \quad \text{ha } n\omega > 1, \text{ sugárzó módusok .} \end{aligned} \quad (2.45)$$

A megoldás megkonstruálásához meg kell találnunk a megfelelő $\phi_n(r=0)$ "kezdeti feltételeket" az origóban, úgy, hogy a deriváltra kirótt feltétellel együtt a megoldás teljesíti az $r \rightarrow \infty$ aszimptotikát. Azokban esetekben, melyeket vizsgálni fogunk $\lambda \ll 1$, ezért $D = 1$ esetén jó kiindulópontot adnak a sine-Gordon lélegző módusai

$$\phi_n(0) \approx \phi_n^{sG}(0) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt \cos(n\omega t) \phi^{sG}(t, 0) . \quad (2.46)$$

A következő lépés, hogy megtaláljuk azt a $\phi_1(0)$ -t, amelyre $\phi_1(r)$ – amely mindig lecsengő a vizsgált frekvenciatartományban, azaz a tömeg küszöb alatt – eleget tesz a (2.45) egyenletnek, míg a többi $\phi_n(0)$ -t ($n > 1$) fixen tartjuk. Véletlenszerű $\phi_1(0)$ -t választva ϕ_1 általában egy fix negatív vagy pozitív értékhez tart az $r \rightarrow \infty$ -ben [37], de az a $\phi_1(0)$, melyre a (2.45) egyenlet teljesül az intervallumfelező módszerrel ("bisection method") gyorsan megtalálható. A következő lépés megtalálni $\phi_2(0)$ -t, amely azonban $\phi_1(0)$ újrhangolásával is jár. Elméletileg tehát lehetséges egyre több módust használni, de a megfelelő kezdeti feltételek megtalálásához szükséges idő exponenciálisan nő a módusok számával. Ezért a szimulációinkban mindig legfeljebb két vagy három módust használunk.

A $\lambda = 0$ esetben a potenciál páros, emiatt a (2.41) egyenletben a páros módusok mind nullák [25, 28], így ezeket nem kell figyelembe vennünk, amely nagyban lecsökkenti a számítási időt. Továbbá a $\lambda \ll 1$ esetben általában elég csak a páratlan módusokat figyelembe venni (mivel a párosak elhanyagolhatóan kis járulékot adnak), hogy elegendően jó közelítést kapjunk a kvázilélegzőre. [37]-ben megmutatták, hogy a sugárzó módusok mindig a $\phi = 0$ körül oszcillálnak a (2.45) egyenletnek megfelelően, de a kvázilélegző megoldás közelítése sok esetben tovább javítható, ha a sugárzó módusok $\phi_n(0)$ kezdeti feltételeit úgy állítjuk be, hogy a módusok amplitúdója minimális legyen. Ez a már említett okok miatt időigényes feladat.

Ha megtaláltuk az ω frekvenciájú kvázilélegzőt D dimenzióban, az ugyanilyen frekvenciájú kvázilélegzőt egy kicsivel magasabb⁶, $D + \delta D$ dimenzióban is megtalálhatjuk, ha az alacsonyabb dimenziós kvázilélegző kezdeti feltételéből indulunk

$$\phi_n^{D+\delta D}(0) = \phi_n^D(0) , \quad (2.47)$$

majd ezeket az értékeket a fent részletezett módon beállítjuk.

Az utolsó apróság, hogy a kvázilélegzőket valamilyen térbeli koordinátánál csonkolunk is kell, hogy véges energiájú, lokalizált kezdeti konfigurációt kapjunk az oszcillonok időfejlődésének numerikus vizsgálatához. A lokalizált módusok elég gyorsan lecsengnek ahhoz, hogy ez ne jelentsen problémát, de a sugárzó módusoknál exponenciális lecsengést írunk elő az aszimptotikus tartományban (a sugárzás hullámszámának megfelelő skálával), azaz a kapott kvázilélegzők sugárzó módusainak aszimptotikus részét megszorozzuk a következő faktorról

$$\exp\left(-\sqrt{n^2\omega^2 - 1} \cdot (r - r_0)\right) , \quad (2.48)$$

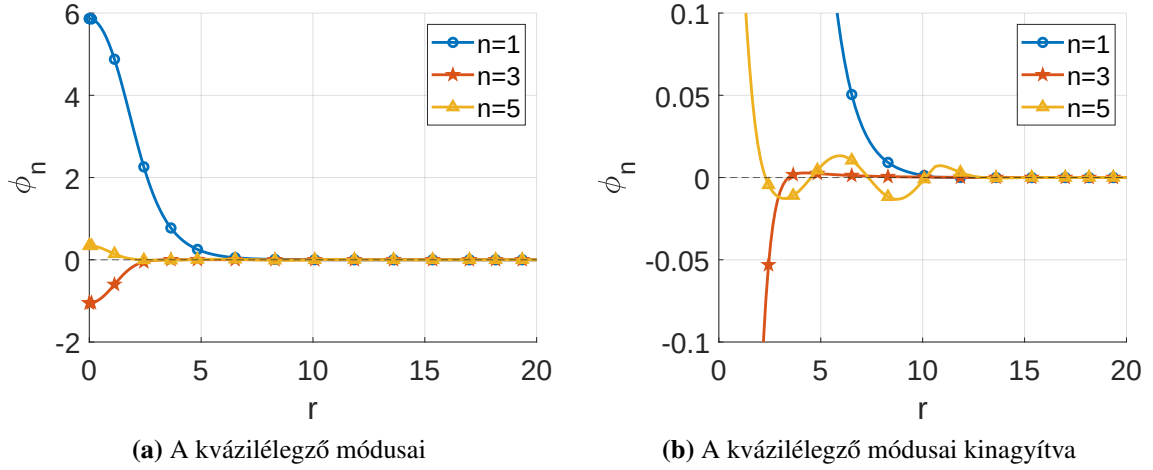
ahol r_0 tetszőlegesen választható csonkoló koordináta a kvázilélegző magrészén kívül. A numerikus vizsgálataink azt mutatják, hogy r_0 választása nincs észlelhető hatással az adott kvázilélegzőből elindított oszcillon dinamikájára.

A vizsgálatainkhoz szükséges volt, hogy szabályozni tudjuk, hogy az oszcillon milyen frekvenciával kezdi az időfejlődést. A fent leírt módszerrel előállított kvázilélegzők jó

⁶Itt használjuk ki, hogy D folytonosan változtatható paraméter a (2.40) egyenletben

minősége így az időfejlődés során azzal is igazolható, ha az időfejlődés a kvázilélegző megkonstruálására kiválasztott frekvenciához megfelelően közeli frekvenciával indul.

A 2.6. ábrán látható egy példa fent részletezett módszerrel előállított kvázilélegző profilra.



2.6. ábra. Kvázilélegző $\omega = 0.3$, $D = 1$, $\lambda = 0$, $N = 5$ paraméterekkel. Látható a (2.48) egyenletnek megfelelő exponenciális elnyomás az $r_0 = 10/\sqrt{1 - \omega^2}$ koordinátánál. (A páros módusok a paritás miatt mind nullák.)

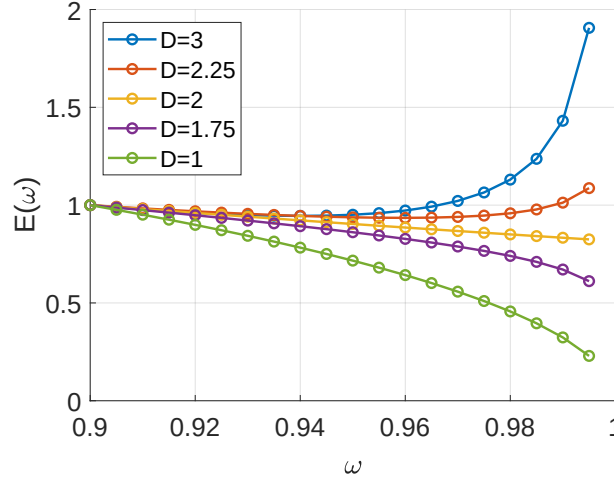
2.3. Eredmények

Ebben a fejezetben az [10] publikációnkban közölt eredményeinket ismertetjük. Először a tömeg küszöbhöz közeli frekvenciájú oszcillonokat, és a hirtelen bomlást, majd az alacsony frekvenciájú kvázilélegzők segítségével a staccato mechanizmust vizsgáljuk.

2.3.1. A hirtelen bomlás eltűnése alacsony dimenziószám esetén

A hirtelen bomlás vizsgálatához $\omega \in [0.9, 1)$ frekvenciájú kvázilélegzőket állítottunk elő a sine-Gordon modellben ($\lambda = 0$), különböző dimenziókban, majd kiszámítottuk ezek $E(\omega)$ energiagörbéit. A kvázilélegző energiájának általunk használt definíciója megtalálható a B. függelékben. Az energia görbét már vizsgálták korábban [17,36], de nem a teljes $D \in [1, 3]$ tartományban. Az energ görbék különböző dimenziókra a 2.7. ábrán láthatók, a jobb összehasonlíthatóság érdekében $E(\omega = 0.9) = 1$ szerint skálázva.

Az oszcillonok hirtelen bomlásának oka $D = 3$ dimenzióban az, hogy az energiagörbének valamely $\omega_c < m = 1$ kritikus frekvenciánál minimuma van. Az oszcillon sugárzása révén lassan energiát veszít, aminek a következtében frekvenciája lassan nő. Az oszcillonok kvázilélegző állapotokon keresztüli időfejlődésére gondolhatunk úgy, hogy az időfejlődés során az oszcillon az egyes energiagörbéken halad a magasabb frekvenciák



2.7. ábra. A kvázilégzők energiája a frekvencia függvényében különböző dimenziókban. $D > 2$ esetben a görbéknek határozott minimuma van, míg $D \leq 2$ esetben a görbék monoton csökkennek.

felé (pl. $D = 3$ -ban a 2.7. ábrán a kék görbén). Ezért a lassú sugárzás által az oszcillon legfeljebb az ω_c frekvenciát érheti el, ezen túl ugyanis energiájának növekednie kellene, ami kimenő sugárzás által nem lehetséges. További energiaveszteség ekkor csak úgy lehetséges, ha az oszcillon teljesen "összeomlik", azaz néhány oszcilláció alatt a teljes energiáját kisugározza, ezáltal a magrészben is csak sugárzást hagyva maga után, ezért a hirtelen bomláskor a frekvencia ω_c -ről $\omega = m = 1$ -re ugrik; ez látható a 2.8. ábra frekvencia görbéin. A kritikus frekvencia dimenziófüggése a 2.1. táblázatban látható; a minimumértéket egy a minimum pont körül illesztett másodrendű polinomból számítottuk.

D	2.25	2.50	2.75	3.00
ω_c	0.9591	0.9429	0.9381	0.9395

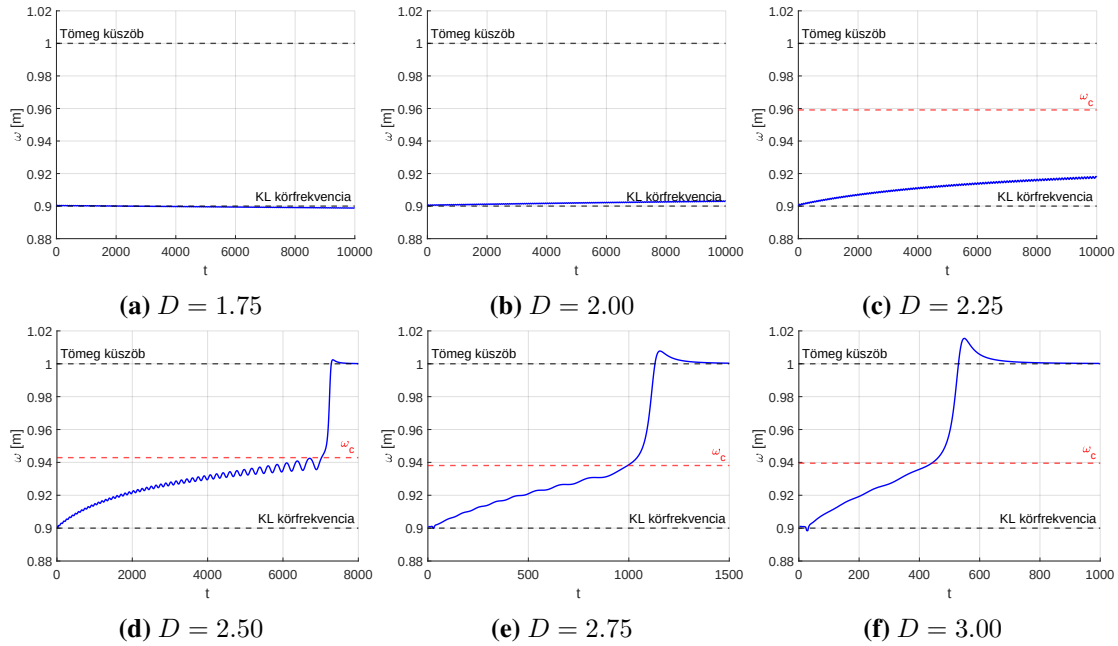
2.1. táblázat. A frekvencia különböző dimenziókban, ahol az energiagörbének minimuma van.

A 2.7. ábrán az is látható, hogy $D \leq 2$ esetben az energiagörbéknek már nem lesz minimuma, az $E(\omega)$ görbe ebben az esetben végig monoton csökken. Ezért $D \leq 2$ esetben az oszcillon tetszőleges frekvenciát elérhet hirtelen bomlás nélkül. A numerikus tapasztalat is valóban ez; $D \leq 2$ dimenzióban még nagyon hosszú szimulációkban sem sikerült megfigyelni hirtelen bomlást [15, 16]. Az energiagörbe minimumának eltűnését $D \leq 2$ esetben [29]-ben már korábban vizsgálták. Ott a ϕ^4 modell kisamplitúdós sorfejtésével hasonló következtetésre jutottak, mint mi a sine-Gordon modell fent ismertetett numerikus vizsgálatával.

Az energiagörbét $D = 1$ -ben összevetettük a sine-Gordon lélegző energiájával⁷

$$E(\omega) = 16\sqrt{1 - \omega^2}, \quad (2.49)$$

és megnyugtató egyezést találtunk a numerikusan kiszámított értékekkel.

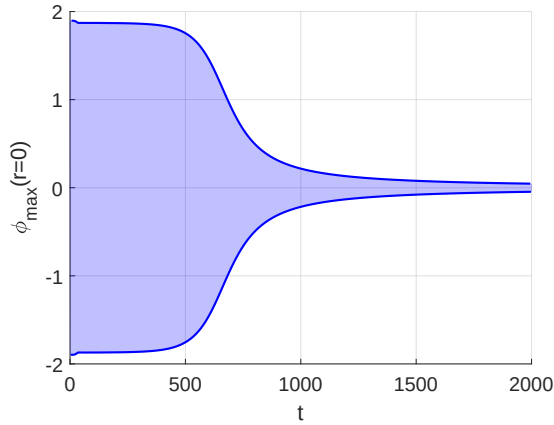


2.8. ábra. Az $\omega = 0.9$, $N = 3$ paraméterű kvázilélegzőből létrejövő oszcillon frekvenciája az időfejlődés során, különböző dimenziókban. Látható, hogy a dinamika felgyorsul, azaz a bomlásig eltelt idő csökken a dimenziószám növekedtével. Alacsony dimenzióban a sugárzás olyan kicsi, hogy a frekvenciában nagyon hosszú időskálán is csak kis változást látunk.

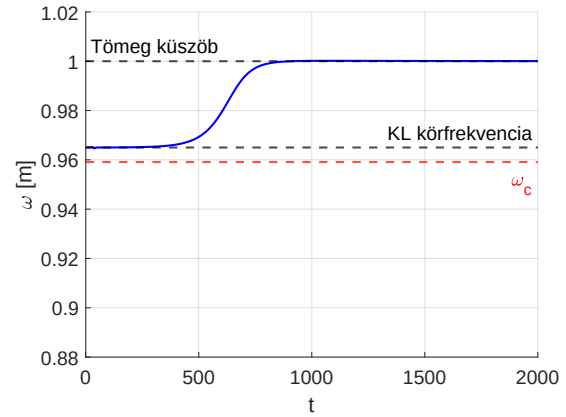
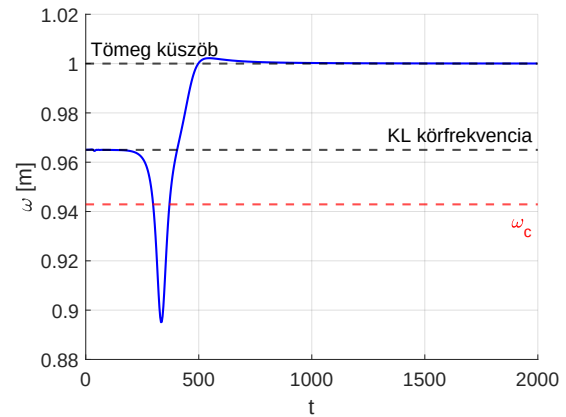
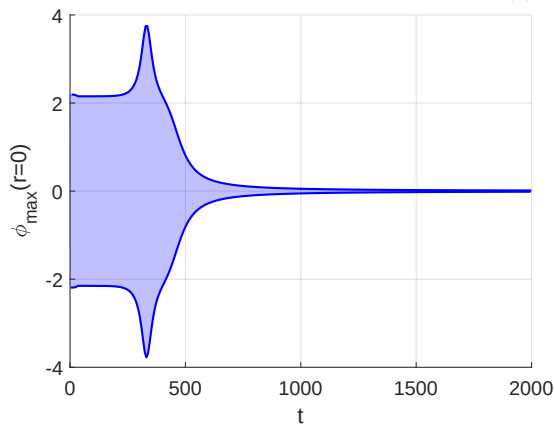
A 2.8. ábrán látható, hogy az időfejlődés arról a frekvenciáról indul, amit kiválasztottunk a kvázilélegző megoldásnak, és ezért a korai tranziensek, melyek abból származnak, hogy a kezdeti konfiguráció megtalálja a legközelebbi oszcillon állapotot, nincsenek jelen. A frekvenciagörbén láthatók azonban kis oszcillációk, amelyek a kvázilélegző tökéletlenségéből származnak (a korábban már említett alakmódusok). Ezek az oszcillációk csökkenthetők több módus használatával, vagy a sugárzó módusok amplitúdójának minimalizálásával. Vizsgálataink azt mutatják, hogy ezek a javítások a kvázilélegzőből fejlődő oszcillon élettartamát is megnövelik, de csak kis mértékben. Az ábrán az is látható, hogy a hirtelen bomlás valóban akkor következik be, amikor az oszcillon eléri a fent kiszámított kritikus frekvenciát, amennyiben az létezik az adott dimenzióban. $D \leq 2$ esetben a sugárzás olyan kicsi, hogy nehéz feladat elég ideig szimulálni, hogy a frekvenciában jelentős mértékű változást lássunk. Az időfejlődés már $D = 2.25$ esetén is olyannyira lelassul, hogy nem tudtunk elég ideig szimulálni, hogy a hirtelen bomlást lássuk.

⁷(2.27) egyenlet, $\mu = 1 = \beta$ paraméterekkel.

A mező amplitúdójának burkolója



A mező frekvenciájának időfüggése

(a) $D = 2.25$ (b) $D = 2.50$

2.9. ábra. Kétféle bomlási módus $D = 2.25$ és $D = 2.50$ dimenzióban, $\omega = 0.965$ kezdeti frekvencia és $N = 5$ esetén.

A 2.9. ábrán két, a kritikus frekvenciánál nagyobb frekvenciájú kvázilélegzőből fejlődő oszcillon időfejlődését látjuk. Ilyenkor az oszcillon egy instabil állapotban van, ahonnan kétféle bomlási módusa van, ezek láthatók az ábrákon. Megjegyezzük, hogy a kezdeti állapotot lehetséges úgy finomhangolni, hogy az abból fejlődő oszcillon az előre kiválasztott módon bomoljon [28, 34, 36], de ezen vizsgálat elvégzése nem képezi dolgozatunk témáját.

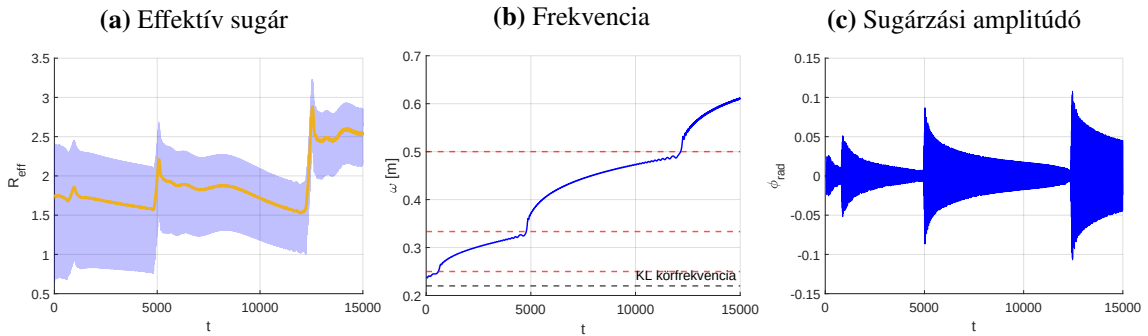
Az ezen alfejezetben ismertetett vizsgálatok célja az irodalomban már ismert eredmények reprodukálása, és ezáltal módszereink validálása volt. Eredményeink azt mutatják, hogy sikerült jó minőségű kvázilélegzőket előállítanunk, ami az irodalmi eredményekkel való egyezés mellett abból is látható, hogy a frekvencia a megfelelő értékről indul az

időfejlődés során.

2.3.2. A staccato bomlás eltűnése magasabb dimenziószám esetén

Ebben az alfejezetben ismertetjük az alacsony frekvenciás, azaz $\omega < m/2$ frekvenciájú kvázilélegzőkkel kapott eredményeinket. Célunk a nemrégiben $D = 1$ dimenzióban felfedezett staccato bomlás [32] vizsgálata magasabb dimenziókban. A magasabb dimenziós staccato bomlás lehetőségét már [9]-ben is vizsgáltuk, de az azóta implementált kvázilélegző módszerünkkel sokkal pontosabb analízist tudtunk elvégezni.

A staccato bomlás egyes "lépései" akkor történnek, amikor az oszcillon $\omega(t)$ frekvenciája eléri az $1/n$ (n egész) értéket, ekkor ugyanis az n -edik harmonikus lokalizáltról sugárzóvá válik. Ez a sugárzási amplitúdó robbanásszerű növekedését, a magrészt hirtelen energiacsökkenése miatt a frekvencia ugrásszerű változását és a kisugárzott energiasűrűség miatt a (2.19) effektív sugár ideiglenes növekedését vonja maga után. Ezek láthatók a 2.10. ábrán, a $\lambda \neq 0$ esetben. Ekkor az oszcillon páros és páratlan felharmonikusokat is tartalmaz, így az összes staccato lépést látjuk.



2.10. ábra. Az $\omega = 0.22$, $\lambda = 0.0025$, $D = 1$ paraméterekkel rendelkező kvázilélegző időfejlődése. Az (a) ábrán az átlátszó görbe az effektív sugár teljes időfejlődése, a narancssárga ennek az egy (időben változó) periódusra vett átlagértéke. A (b) ábrán láthatók a frekvencia felugrásai $1/n$ értékeknél (melyeket piros vonalakkal jelöltünk az ábrán, továbbá fekete vonal jelöli azt a frekvencia paramétert, amelyhez tartozó kvázilélegzőből az időfejlődést indítottuk). A (c) ábrán láthatók a sugárzási amplitúdó robbanásszerű felugrásai, melyek az egyes staccato lépésekhez tartoznak.

Mivel a staccato bomláshoz csak annyi szükséges, hogy az időfejlődés $\omega < m/2$ frekvenciáról induljon, arra számíthatnánk, hogy ez a bomlási mechanizmus magasabb dimenziókban is jelen van. Hogy ennek lehetőségét megvizsgáljuk, megkonstruáltuk a kvázilélegző profilokat $\omega = 0.3, 0.27, 0.22$ frekvenciákra, különböző λ -k esetén, a $D \in [1, 1.20]$ tartományban. Szimulációink azt mutatják, hogy a staccato lépések valóban láthatók $D \neq 1$ esetben is, azonban csak elegendően alacsony dimenzió esetén. A 2.11. ábrán látható egy tipikus görbesorozat $\lambda = 0.0025$ esetben. Habár $\lambda \neq 0$, a kvázilélegző megkonstruálásakor csak páratlan harmonikusokat használtunk a (2.41) egyenletben,

hogy a szükséges mennyiségő kvázilélegző profilt észszerű idő alatt elő tudjuk állítani. Emiatt azonban az ábrán is láthatóan a frekvencia a kiválasztott értéknél valamivel magasabb értékről indul az időfejlődés során. Az ábrák alapján látható, hogy D növelésével a dinamika felgyorsul, a staccato lépések egyre korábbi időpillanatokra tolódnak, míg elég magas dimenzióban már elvesznek az időfejlődés korai, tranziens szakaszában, amikor a kezdeti profil megtalálja a legközelebbi oszcillon profilt. Végül meghatároztuk az időfejlődés elindításától az egyes staccato lépésekig eltelt időt a dimenziószám függvényében, a három különböző frekvenciájú kvázilélegző és különböző λ -k esetén. Eredményeink a 2.12. ábrán láthatók. Azt látjuk, hogy az egyes lépésekig eltelt idők gyorsan csökkennek D növelésével, és viszonylag hamar eléri a kvázilélegzők kezdeti periódusidejét. Ekkor már nincs értelme az adott staccato lépésről beszélni, hiszen a frekvencia változása nem definiálható az oszcillon periódusidejénél rövidebb időskálákon. A staccato lépések megkülönböztethetetlené válnak az oszcillon időfejlődésének korai tranzienseitől.

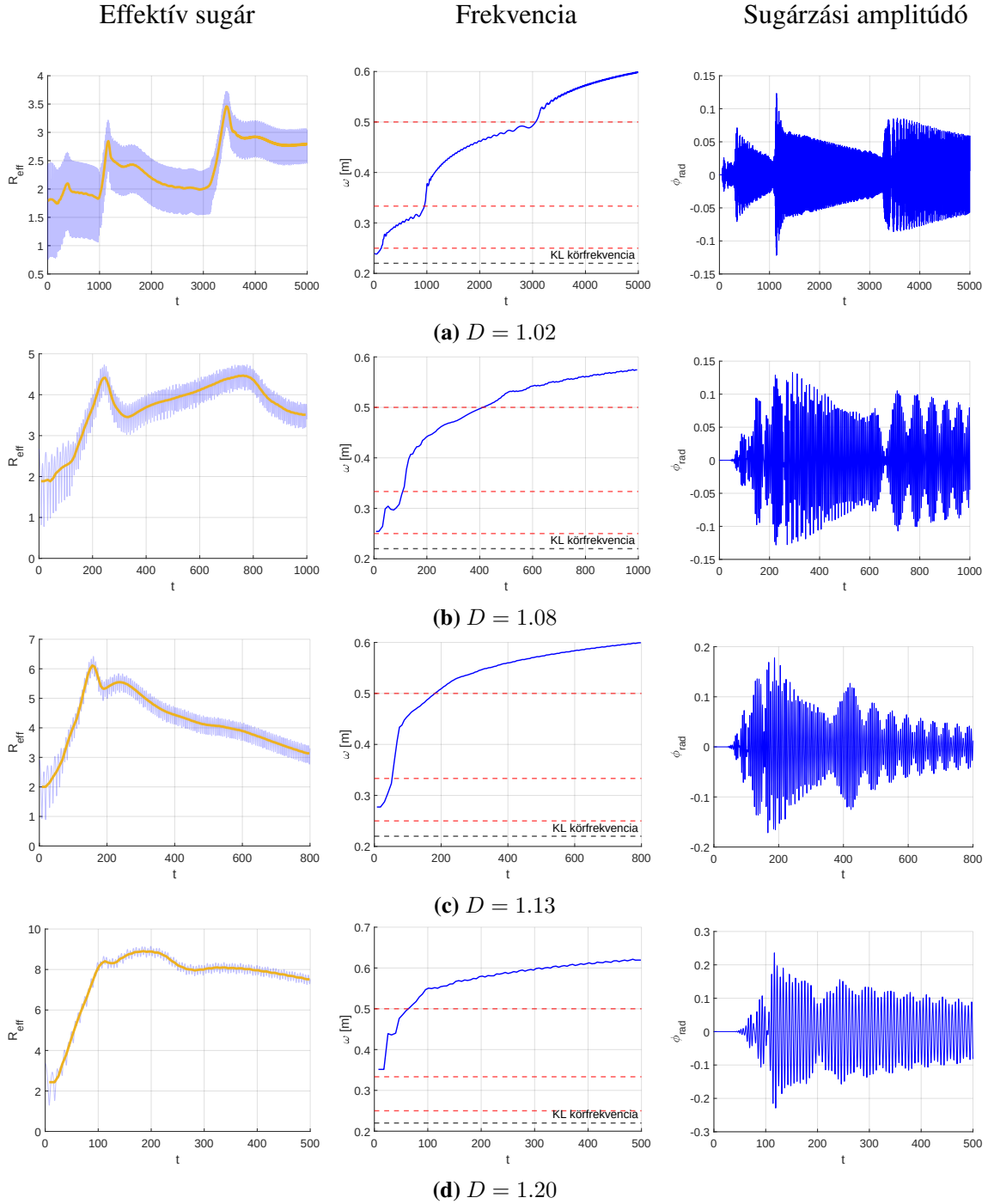
Megjegyezzük, hogy az oszcillon dinamikájának felgyorsulása a dimenziószám növekedtével konzisztens a magas frekvenciás tartományban megfigyelt viselkedéssel (lásd 2.8. ábra).

2.4. Konklúzió

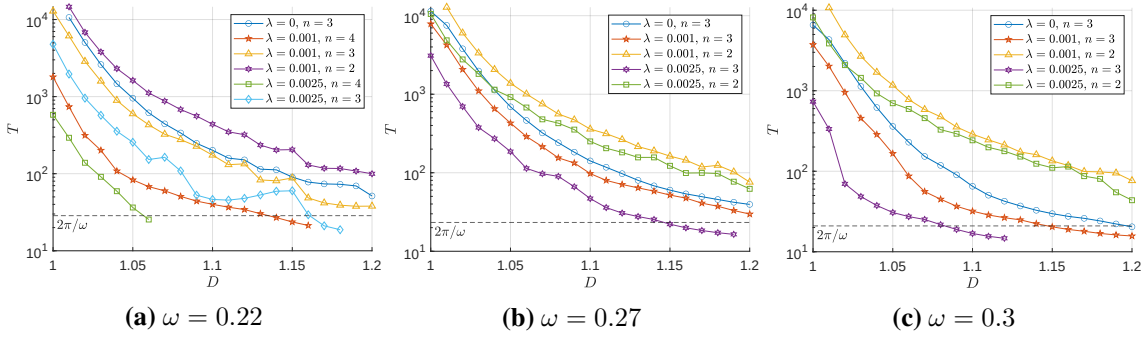
Klasszikus vizsgálataink során az oszcillonok bomlási mechanizmusainak dimenziószám-függését vizsgáltuk. Egy korábbi módszer módosításával kvázilélegző profilokat konstruáltunk a $(D+1)$ dimenziós deformált sine-Gordon modellben ((2.38) egyenlet), melyeket az időfejlesztés kezdeti konfigurációinak használtunk. A módszer különösen jól működött a magas frekvenciás tartományban, ahol energia-frekvencia görbék számításával a hirtelen bomlás kritikus frekvenciáját kerestük. Demonstráltuk, hogy az ezzel a módszerrel megtalált kritikus frekvenciánál az oszcillonok valóban hirtelen bomlanak az időfejlődés során, míg az energia-frekvencia görbék minimuma, és a hirtelen bomlás eltűnik $D \leq 2$ esetben. Eredményeink összhangban vannak az irodalomban fellelhető eredményekkel.

A fejezet második részében alacsony frekvenciás kvázilélegzők időfejlődését vizsgáltuk a ϕ^4 taggal deformált sine-Gordon modellben. Kérdésünk az volt, hogy a [32]-ben megfigyelt staccato bomlás létezik-e $D > 1$ dimenzióban is. $D = 1$ dimenzióban ugyanis a staccato bomlás egy robusztus és általánosan előforduló mechanizmus: [32]-ben akkor is sikerült megfigyelni, mikor az időfejlesztést nem egy finomhangolt, oszcillonhoz közeli konfigurációból indították, hanem például alacsonyenergiás kink-antikink ütközésekkel hoztak létre oszcillont. A mi eredményeink azt mutatják, hogy a staccato lépések felgyorsulnak a dimenziószám növelésével; $D = 1.2$ -ben már minden lépés olyan gyorsan történik, hogy a staccato karakterisztikák már nem megkülönböztethetők a korai dinamika tranzienseitől. Emiatt a staccato bomlás nem figyelhető meg magasabb, fizikailag releváns (egész) dimenziókban, legalábbis az általunk vizsgált modellben.

Magasabb dimenziós staccato bomlás megfigyeléséhez egy lehetőség lenne olyan fi-



2.11. ábra. Az $\omega = 0.22$, $\lambda = 0.0025$ paraméterű kvázilélegző időfejlődése különböző D dimenziószámok esetén. Látható az idő skála csökkenése a dimenziószám növekedtével. $D = 1.02$ esetén a staccato lépések még tisztán láthatók, $D = 1.08$ és $D = 1.13$ esetén még felismerhetők, de $D = 1.13$ esetén az $n = 4$ -hez tartozó staccato lépés már eltűnni látszik. $D = 1.2$ esetén a staccato bomlás karakterisztikus jelei már alig felismerhetők, de továbbra is látható a sugárzási amplitúdó hirtelen felugrása, amikor a frekvencia $m/2$ fölé ér.

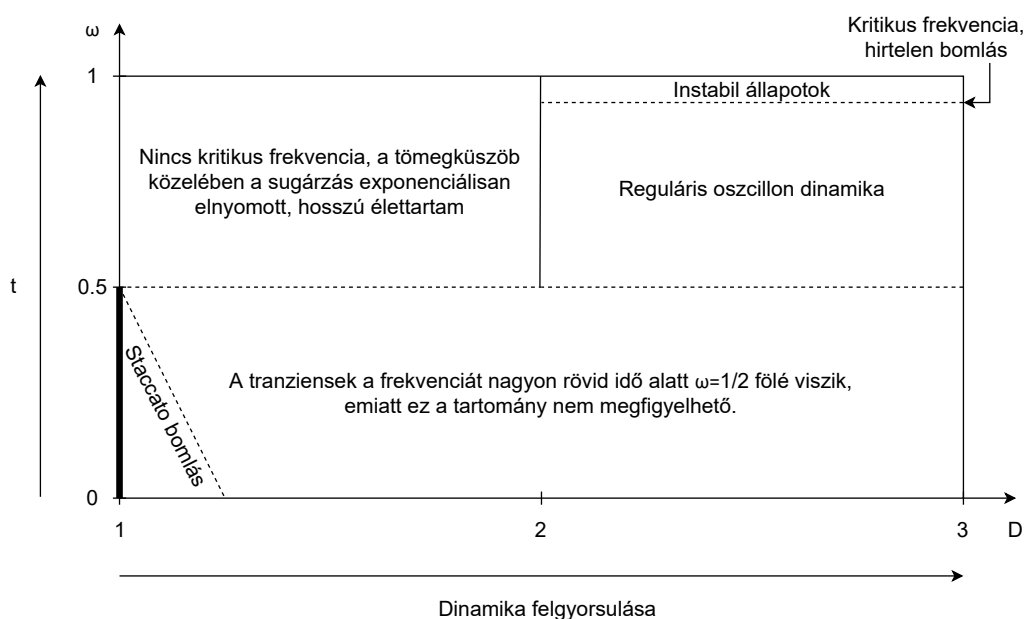


2.12. ábra. Az egyes staccato lépésekig eltelt idő.

nomhangolt potenciálok vizsgálata, ahol az oszcillon bomlás elegendően lassú ahhoz, hogy a staccato lépések között eltelt idő hosszabb legyen az oszcillon periódusidejénél. Valóban lehetséges nagyon hosszú élettartamú oszcillonokat létrehozni a potenciál finomhangolásával [33], azonban minden ismert esetben $\omega > m/2$.

Továbbá a következő intuitív érvelés miatt azt gondoljuk, hogy egy ilyen finomhangolás rendkívül nehéz, hacsak nem lehetetlen. Az oszcillonok sugárzását az elmélet nem-integrálhatósága okozza. Integrálható elméletekben, mint amilyen a sine-Gordon modell $D = 1$ esetén, a lokalizált gerjesztések – a lélegzők – stabilak. Ezért kell egy integrálhatóság-sértő λ paramétert adni a sine-Gordon potenciálhoz, hogy a $D = 1$ dimenziós elméletben is látható legyen a staccato bomlás. A dimenziószám növelése szintén megsérti az integrálhatóságot, még $\lambda = 0$ esetben is. Numerikus eredményeink azt mutatják, hogy D növelésével a staccato lépések felgyorsulnak, és hamarosan eltűnnek még a $\lambda = 0$ esetben is, ahol $D = 1$ esetén a modell integrálható. A megfelelő kvázilélegző kezdeti konfigurációként való használata segít a kezdeti tranziensek lecsökkentésében, de a staccato bomlás ebben az esetben is megkülönböztethetetlenül válik a tranziensektől, még jóval a $D = 2$ érték előtt. Összefoglalva, a staccato bomlás valószínűleg csak az egy dimenziós modellekben figyelhető meg, ugyanakkor eredményeink alapján nem zárható ki olyan finomhangolás, amivel speciális esetekben magasabb dimenzióban is megmarad.

A 2.13. ábrán látható az oszcillonok klasszikus dinamikáját összefoglaló ω – D síkbelu sematikus "fázisdiagram".



2.13. ábra. Az oszcillon dinamika fázisdiagramja ($m = 1$). Az időfejlődés során a frekvencia növekszik, így a frekvencia tengely megfeleltethető az idő tengelynek. $D > 2$ és $\omega > 1/2$ esetén a dinamika egyszerű: a frekvencia könnyen szimulálható időskálán növekszik, míg eléri a kritikus frekvenciát, ahol az oszcillon hirtelen összeomlik. A kritikus frekvencia felett instabil állapotok vannak, melyek rövid idő alatt a kétféle bomlási módus közül az egyikkel elbomlanak. $D < 2$ esetben az oszcillon a tömegküszöbhez tetszőlegesen közel kerülhet, mivel nincs kritikus frekvencia. A tömegküszöb közelében a sugárzás exponenciálisan el van nyomva, így ebben a tartományban az oszcillonok élettartama rendkívül hosszú. Az $\omega < 0.5$ tartomány magasabb dimenziókban a dinamika felgyorsulása miatt nem figyelhető meg, a tranziensek rövid idő alatt $\omega > 0.5$ fölé viszik a frekvenciát. A staccato bomlás az $\omega < 0.5$ frekvenciatartományban, csak alacsony dimenziókban figyelhető meg, és jóval $D = 2$ elérése előtt eltűnik. Ez a bomlási mechanizmus azonban $D = 1$ -ben robusztus, könnyen megfigyelhető, ezért ezt a tartományt az ábrán vastag vonallal jelöltük.

3. fejezet

Kvantumtérelmélet

A dolgozat második felében az oszcillonok kvantum dinamikáját vizsgáljuk, különös hangsúlyt fektetve az $1 + 1$ dimenziós elméletekre, ahol kölcsönható integrálható modellek is léteznek. Bemutatjuk az ezek megoldására fejlesztett megközelítéseket, és a klasszikusan már vizsgált sine-Gordon modell kvantum tulajdonságait, továbbá a klasszikus és kvantum világot összekötő szemiklasszikus módszereket. Végül ismertetjük a sine-Gordon modellben eredetileg stabil lélegzők perturbáció hatására való bomlásával kapcsolatos eredményeinket.

3.1. Elméleti összefoglaló

A kvantumtérelméletben a szabadsági fokokat leíró mezők operátor értékű disztribúciók. Valós skalármezők kvantumdinamikájának perturbatív vizsgálata során a kiindulópont a Klein-Gordon (vagy szabad) elmélet, melynek Hamilton operátora

$$H_0 = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right\}. \quad (3.1)$$

A mezőt Fourier térben

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (a_p e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} + a_p^\dagger e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}) \quad (3.2)$$

alakban írhatjuk, ahol $\omega_p^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$, $a_p^\dagger$ a $\mathbf{p}$ momentumú sajátállapotok keltő operátora, a_p pedig tetszőleges $\mathbf{p}$ esetén eltüntetni a $|0\rangle$ vákuumot, mely a legalacsonyabb energiájú sajátállapot. A léptető operátorok segítségével az elmélet spektruma, továbbá a mező időfejlődése is felírható. A későbbiekben szükségünk lesz az ún. Feynman propagátorra

$$D_F(x - y) = \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x - y)}, \quad (3.3)$$

ahol T az időrendezés operátora: az utána következő operátorokat balról jobbra időben csökkenő sorrendbe kell rendezni. A Feynman-propagátor ún. 2-pont függvény, vagy 2-pont korrelátor, mivel két mező operátor vákuum várható értékeként áll elő. Általában n -pont függvénynek hívjuk az n darab mező operátor beszúrásával kapott vákuum várható értékeket.

A legtöbb esetben az elméletet azonban nem szabad, hanem kölcsönható, ilyenkor a Hamilton operátor gyakran a következő alakban írható

$$H = H_0 + H_{int}(\lambda) , \quad (3.4)$$

ahol a kölcsönható tag a λ csatolási állandótól függ. Ha $\lambda \ll 1$, akkor az n -pont függvényeket λ -ban sorbafejtve számíthatjuk, ez a Feynman-féle perturbációs számítás. Az erre vonatkozó Feynman-szabályok a szakirodalomban megtalálhatók, lásd pl. [38].

Kísérletileg ellenőrizhető jóságot a szórási folyamatok vizsgálatával tehetünk. Ha egy szórási folyamatba beérkező részecskék impulzusait $\{p_i\}$ -vel, a kimenő impulzusokat pedig $\{p_f\}$ -vel jelöljük, akkor az erre a szórásra vett ún. S -mátrix elem

$${}_f\langle \{p_f\} | \{p_i\} \rangle_i = \langle \{p_f\} | S | \{p_i\} \rangle , \quad (3.5)$$

ahol a $|\rangle_i$ a végtelen távoli múltban vett, a $|\rangle_f$ a végtelen távoli jövőben vett, a $|\rangle$ pedig Heisenberg képbeli szabad részecske állapotokat jelöl. Az S -mátrix triviális, és a kinematikától függő részét külön szokás választani a kölcsönhatástól függő résztől, és a következő alakban felírni

$$\langle \{p_f\} | S | \{p_i\} \rangle = 1 + (2\pi)^d \delta^{(d)} \left(\sum p_i - \sum p_f \right) \mathcal{M}(\{p_i\} \rightarrow \{p_f\}) , \quad (3.6)$$

ahol $\mathcal{M}$ az ún. invariáns mátrixelem, mely Feynman-diagramokkal számítható, és amely a mérhető mennyiségek (pl. szórási hatáskeresztmetszet) számításánál hasznos.

A dolgozat további részében $1 + 1$ dimenziós elméletekkel foglalkozunk. Ekkor az egyes részecskék impulzusai paraméterezhetők az ún. θ rapiditásváltozókkal

$$p_i = (m_i \cosh \theta_i, m_i \sinh \theta_i) , \quad (3.7)$$

ekkor az $E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$ relativisztikus diszperziós reláció automatikusan teljesül. Egy térdimenzióban a részecskék egy egyenesen mozognak, ezért egy több részecskeállapotot egyértelműen meghatároz a részecskék sorrendje, és impulzusaik, ezért egy ilyen állapotot a következő alakban szokás felírni

$$|A_{a_1}(\theta_1) A_{a_2}(\theta_2) \dots A_{a_n}(\theta_n)\rangle , \quad (3.8)$$

ahol az a_i index különböző részecsketípusokat jelölhet. A beérkező állapotok esetén, mikor még egyetlen szóródás sem történt $\theta_1 > \theta_2 > \dots > \theta_n$, míg kimenő állapotok esetén, mikor már az összes szóródás megtörtént $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n$.

3.1.1. S-mátrix elmélet

Gyakran lehetséges az elmélet spektrumára vonatkozó következtetéseket levonni anélkül, hogy az azt definiáló hatásból indulnánk. Ehelyett axiómaként kimondjuk az elmélet S-mátrixával szemben támasztott elvárásainkat, és ezekből önkonzisztens módon határozzuk meg az S-mátrixot, amelyből pedig az elmélet spektrumára is következtethetünk. Ez az úgynevezett "bootstrap" megközelítés. Az elméletnek csak néhány, a továbbiak bemutatásához szükséges pontját ismertetjük a [39, 40] források segítségével. A továbbiakban integrálható modelleket vizsgálunk. Megmutatható, hogy az integrálhatóság erős megszorításokat jelent az S-mátrix tulajdonságaira. Ezek a következők:

- A szórási folyamatok elasztikusak, a bemenő és kimenő állapotok ugyanannyi részecskét tartalmaznak, ugyanazokkal a tömegekkel és kvantumszámokkal.
- A kimenő impulzusok halmaza megegyezik a bemenő impulzusokkal.
- A többrészecske szórások kétrészecske folyamatok szorzataként értelmezhetők, azaz az S-mátrix faktorizálódik.

Az S-mátrix elemeket a következő egyenlet definiálja.

$$|A_k(\theta_2)A_l(\theta_1)\rangle = S_{ij}^{kl}(\theta_{12}) |A_i(\theta_1)A_j(\theta_2)\rangle, \quad (3.9)$$

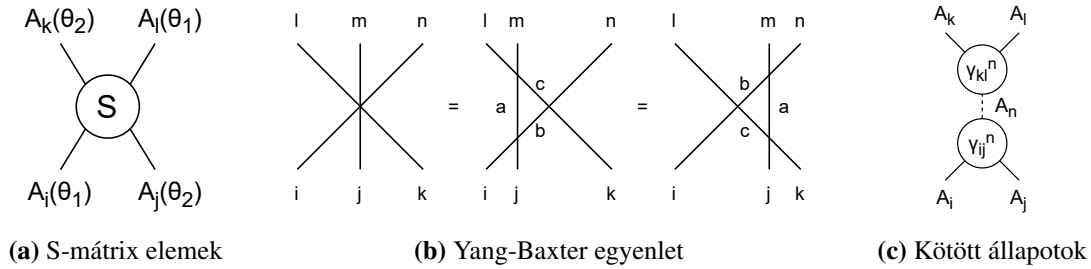
ahol $\theta_{12} = \theta_1 - \theta_2$. Bár fizikailag $\theta_{1,2} \in \mathbb{R}$, az S-mátrix fontos információt tartalmaz θ -ban a teljes komplex síkon, így S -et θ komplex függvényének tekintjük. A kifejezést a 3.1a. ábra szemlélteti. Az integrálhatóság további következménye, hogy a szórási folyamatok sorrendje a 3.1b. ábra szerint felcserélhető, a megmaradó töltések ugyanis olyan transzformációk generátorai, melyek a részecskék helyét különböző mértékben változtatják meg. Ennek matematikai következménye a Yang-Baxter egyenlet

$$S_{ijk}^{lmn}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = S_{ac}^{lm}(\theta_{23})S_{bk}^{cn}(\theta_{13})S_{ij}^{ab}(\theta_{12}) = S_{ba}^{mn}(\theta_{12})S_{ic}^{lb}(\theta_{13})S_{jk}^{ca}(\theta_{23}), \quad (3.10)$$

mely a sine-Gordon modell spektrumának meghatározásánál kiemelten fontos [41]. Egy olyan szórási folyamatban, ahol egy virtuális közbeeső állapot teljesíti a relativisztikus diszperziós relációt, az S-mátrixnak pólusa van. Integrálható esetben a pólusok csak $\theta = iu_{jk}^n$ alakúak lehetnek, ahol $u_{jk}^n \in [0, \pi]$, az S-mátrix aszimptotikus alakja a pólus közelében pedig

$$S_{ij}^{kl} \sim \frac{i\gamma_{ij}^n \gamma_{kl}^n}{\theta - iu_{ij}^n}, \quad (3.11)$$

ahol γ_{ij}^n az A_i , A_j és A_n részecskék közötti csatolás. Ilyenkor az A_n részecske tekinthető az A_i és az A_j részecskék kötött állapotának. A fentieket a 3.1c. ábra szemlélteti.



3.1. ábra

A kötött állapot tömege az s Mandelstam-invariáns segítségével számítható legegyszerűbben:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = m_n^2 = m_i^2 + m_j^2 + 2m_i m_j \cosh \theta, \quad (3.12)$$

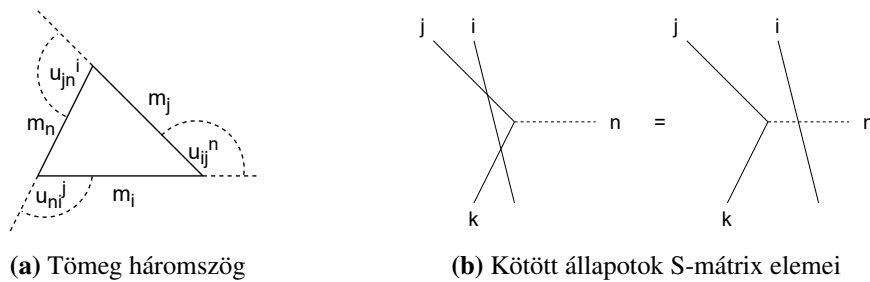
azaz

$$m_n^2 = m_i^2 + m_j^2 + 2m_i m_j \cos u_{ij}^n. \quad (3.13)$$

Ez egy koszinusz-tétel, melyben a háromszög oldali m_n , m_i és m_j , és az m_n oldallal szemben lévő külső szög u_{ij}^n . Ezt szemlélteti az ún. tömeg háromszög a 3.2a. ábrán. A kifejezés szimmetriájából az is leolvasható, hogy A_i is tekinthető A_j és A_n , A_j pedig A_i és A_n kötött állapotának ("nukleáris demokrácia" [42]).

További fontos összefüggés olvasható le a 3.2b. ábráról a kötött állapotok S-mátrix elemeire vonatkozóan, melyek az alábbi módon fejezhetők ki az állapotot felépítő részecskék mátrixelemeivel

$$S_{in}(\theta) = S_{ij}(\theta + i\bar{u}_{jn}^k) S_{ik}(\theta - i\bar{u}_{nk}^j). \quad (3.14)$$



3.2. ábra

3.1.2. Form faktorok

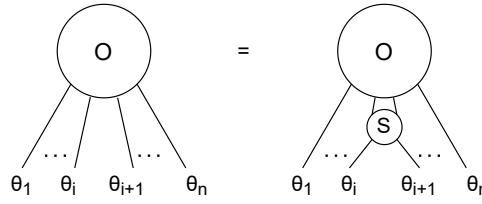
Egy $\mathcal{O}(x)$ operátor ún. form faktorait (alaktényezőit) a következő módon definiáljuk

$$F_{j_1, j_2, \dots, j_n}^{\mathcal{O}}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = \langle 0 | \mathcal{O}(0) | A_{j_1}(\theta_1) A_{j_2}(\theta_2) \dots A_{j_n}(\theta_n) \rangle. \quad (3.15)$$

Ezeket a függvényeket szintén a változók komplex függvényének tekintjük. Az S-mátrix hatásának részecskék felcseréléseként való interpretációjából adódóan a form faktorok eleget tesznek bizonyos axiómáknak. Ezek a következők

$$\begin{aligned}
 F_{j_1, \dots, j_i, j_{i+1}, \dots, j_n}^{\mathcal{O}}(\theta_1, \dots, \theta_i, \theta_{i+1}, \dots, \theta_n) &= S_{j_i, j_{i+1}}(\theta_i - \theta_{i+1}) F_{j_1, \dots, j_{i+1}, j_i, \dots, j_n}^{\mathcal{O}}(\theta_1, \dots, \theta_{i+1}, \theta_i, \dots, \theta_n) \\
 F_{j_1, \dots, j_n}^{\mathcal{O}}(\theta_1 + 2\pi i, \dots, \theta_n) &= \prod_{i=2}^n S_{j_i, j_1}(\theta_i - \theta_1) F_{j_1, \dots, j_n}^{\mathcal{O}}(\theta_1, \dots, \theta_n) \\
 \text{Res}_{\theta'=\theta} F_{k, k, j_1, \dots, j_n}^{\mathcal{O}}(\theta' + i\pi, \theta, \theta_1, \dots, \theta_n) &= i \left(1 - \prod_{i=1}^n S_{k, j_i}(\theta - \theta_i) \right) F_{j_1, \dots, j_n}^{\mathcal{O}}(\theta_1, \dots, \theta_n) \\
 \text{Res}_{\epsilon=0} F_{i, j, j_1, \dots, j_n}^{\mathcal{O}}(\theta + i\bar{u}_{ik}^j - \epsilon, \theta - i\bar{u}_{jk}^i + \epsilon, \theta_1, \dots, \theta_n) &= i\gamma_{ij}^k F_{k, j_1, \dots, j_n}^{\mathcal{O}}(\theta, \theta_1, \dots, \theta_n) .
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Az első axióma a 3.3. ábra segítségével motiválható: két részecske felcseréléséhez egy S-mátrix faktort is be kell illesztenünk.



3.3. ábra. Az első form faktor axióma szemléltetése

A további form faktor axiómák szemléltetése megtalálható a [39, 43] hivatkozásokban. A fenti axiómák és az elmélet S-mátrixának ismerete általában elegendő információ bizonyos operátorok form faktorainak kiszámításához. A munkánk során az axiómákat a numerikusan implementált form faktorok¹ ellenőrzésére használtuk.

3.1.3. A kvantumos sine-Gordon modell

A kvantum sine-Gordon modellt a klasszikus (2.20) esettel megegyező hatás definiálja

$$S = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \mu(\cos(\beta\phi) - 1) \right\} . \tag{3.17}$$

A modell ismertetéséhez bevezetjük az ún. renormált csatolási állandót

$$\xi = \frac{\beta^2}{8\pi - \beta^2} , \text{ ha } \beta < \sqrt{8\pi} . \tag{3.18}$$

¹Lásd 3.3. fejezet, és C. függelék.

A modell spektruma kvantumosan is tartalmazza a klasszikus modellben megismert szoliton-antiszoliton párt, melyek M tömege a μ csatolással a következő kapcsolatban áll [44].

$$\mu = \frac{2\Gamma\left(\frac{\xi}{\xi+1}\right)}{\pi\Gamma\left(\frac{1}{1+\xi}\right)} \left(\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1+\xi}{2}\right) M}{2\Gamma\left(\frac{\xi}{2}\right)} \right)^{2/(\xi+1)}. \quad (3.19)$$

A teljes spektrum meghatározásához először a szoliton-antiszoliton S-mátrixot kell megvizsgálni. Ez teljesen meghatározható a "bootstrap" megközelítéssel, ha felhasználjuk a modell $O(2)$ szimmetriáját is, mely a topologikus töltéssel kapcsolatos, továbbá a (3.10) Yang-Baxter egyenletet. Az így kapott szoliton-antiszoliton S-mátrixnak pólusai lesznek, ezen pólusok vizsgálatával kaphatók meg a klasszikus lélegzőknek megfelelő kvantumos lélegző állapotok tömegei a 3.1.1. fejezetben ismertetett módon, azaz a lélegzők tekinthetők szoliton-antiszoliton kötött állapotoknak. A fenti módszert követve a lélegző spektrum [39, 41, 45]

$$m_n = 2M \sin \frac{n\pi\xi}{2}, \quad n = 1, \dots, [1/\xi]. \quad (3.20)$$

A kvantumos modellben a lélegző spektrum a klasszikussal ellentétben már diszkrét, a lélegzők száma $n_{max} = [1/\xi]$. Meglepő, hogy elegendően nagy csatolás esetén a modell spektrumából eltűnik az összes lélegző állapot. A későbbiekben szükségünk lesz a $B_1 B_k$ (B_1 az első, B_k a k -adik lélegző) szórás S-mátrixára [39, 46]

$$S_{1k}(\theta) = \frac{\sinh(\theta) + i \sin \frac{\pi(k+1)\xi}{2} \sinh(\theta) + i \sin \frac{\pi(k-1)\xi}{2}}{\sinh(\theta) - i \sin \frac{\pi(k+1)\xi}{2} \sinh(\theta) - i \sin \frac{\pi(k-1)\xi}{2}}. \quad (3.21)$$

A B_{k+1} lélegző tekinthető a B_1 és a B_k lélegzők kötött állapotának, az ezen három állapothoz tartozó három-pont csatolást az S-mátrix megfelelő helyen vett reziduuma adja

$$\gamma_{1k}^{k+1} = -i \sqrt{\text{Res}_{\theta=\frac{i\pi(k+1)\xi}{2}} S_{1k}(\theta)} = \sqrt{\frac{2 \tan \frac{k\pi\xi}{2} \tan \frac{(k+1)\pi\xi}{2}}{\tan \frac{\pi\xi}{2}}}. \quad (3.22)$$

3.1.4. Form faktor perturbációs számítás (FFPT)

A magasan fekvő energiasajátállapotok bomlása alacsonyabb energiájú állapotokra bár kinematikailag megengedett lenne, a megmaradó töltések miatt ezen állapotok is stabilak. Azonban ha a hatásához hozzáadunk egy perturbációt, amivel megsértjük az integrálhatóságot

$$S = S_{int} - \lambda \int d^2x \Psi(x), \quad (3.23)$$

akkor az eredeti modellben stabil részecskék már bomlanak. A szokásos Feynman-féle perturbációs számítás során azt használjuk ki, hogy a nem kölcsönható Hamilton-operátor

sajátbázisa ismert, és ebben a bázisban a kölcsönhatási operátor mátrixelemei kiszámolhatók. Mivel a kvantum sine-Gordon modellben ismerjük az integrálható Hamilton-operátor sajátállapotait, és ebben a bázisban mátrixelemek is számolhatók (ezek a form faktorok), a szokásos Feynman-féle perturbációs számításhoz hasonló perturbációs számítás végezhető, de most az integrálható modell körül [39, 47]. A részecskék bomlási rátája a Fermi-féle arany szabály segítségével számítható. A Ψ operátor hatására egy álló, c típusú részecske a és b típusúra való bomlási rátájára a következő kifejezés adódik [48, 49]

$$\Gamma_{c \rightarrow ab} = \lambda^2 2^{1-\delta_{ab}} \frac{\left| F_{cab}^{\Psi} \left(i\pi, \theta_a^{(cab)}, \theta_b^{(cab)} \right) \right|^2}{m_c^2 m_a \left| \sinh \theta_a^{(cab)} \right|}. \quad (3.24)$$

A $2^{1-\delta_{ab}}$ faktor oka, hogy azonos részecskék esetén a kétféle végállapot megkülönböztethetetlen, így nem kell kétszer számolnunk. A bomlási ráta kifejezésében megjelenő rapiditások az energia és impulzus megmaradásból számíthatók

$$\begin{aligned} m_a \sinh \theta_a^{(cab)} + m_b \sinh \theta_b^{(cab)} &= 0, \\ m_a \cosh \theta_a^{(cab)} + m_b \cosh \theta_b^{(cab)} &= m_c. \end{aligned} \quad (3.25)$$

A későbbiek során a következő form faktorokat fogjuk vizsgálni

$$F_{k_1 k_2 \dots k_n}^a(\theta_1, \dots, \theta_n) = \langle 0 | e^{ia\beta\phi(0)} | B_{k_1}(\theta_1) B_{k_2}(\theta_2) \dots B_{k_n}(\theta_n) \rangle. \quad (3.26)$$

Ezen form faktorok kiszámítási módját a C. függelékben mutatjuk be.

A dolgozatban kétféle bomlást vizsgálunk majd, a $B_3 \rightarrow B_1 B_1$ és a $B_4 \rightarrow B_1 B_1$ bomlásokat. Könnyen látható, hogy amikor létezik a B_3 vagy B_4 lélegző, akkor annak bomlása kinematikailag engedélyezett ($m_3 > 2m_1$ és $m_4 > 2m_1$, ha B_3 vagy B_4 létezik az adott csatolás esetén), míg a B_2 lélegző túl könnyű, hogy 2 B_1 lélegzőre bomoljon. A lélegzők bomlását paritási tulajdonságok is befolyásolhatják, a lélegzők C-paritásából következően a $B_3 \rightarrow B_1 B_1$ bomlása x -ben páros perturbáló operátorok hatására például tiltott.

A $B_3 \rightarrow B_1 B_1$ bomlás vizsgálatához a következő perturbáló operátort tekintjük

$$\Psi_1(x) = \sin\left(\frac{\beta}{2}\phi(x)\right) \implies F_{311}^{\Psi_1} = \frac{1}{2i} \left(F_{311}^{1/2} - F_{311}^{-1/2} \right). \quad (3.27)$$

Kiskálázva a form faktor energiadimenzióját, a $B_3 \rightarrow B_1 B_1$ bomlási rátára a következő kifejezés adódik

$$\Gamma_{3 \rightarrow 11} = M \left(\frac{\lambda}{M^{\frac{4+3\xi}{2+2\xi}}} \right)^2 \frac{s_{311}^2}{\left(\frac{m_3}{M} \right)^2 \frac{m_1}{M} \sqrt{\left(\frac{m_3}{2m_1} \right)^2 - 1}}, \quad (3.28)$$

ahol

$$s_{311} = \frac{|F_{311}^{\Psi_1}(i\pi, \theta_c, -\theta_c)|}{M^{\frac{\xi}{2+2\xi}}}, \quad (3.29)$$

amely csak ξ függvénye. Továbbá (3.25)-ből

$$2 \cosh \theta_c = \frac{m_3}{m_1} = \frac{\sin \frac{3\pi\xi}{2}}{\sin \frac{\pi\xi}{2}}. \quad (3.30)$$

A $B_4 \rightarrow B_1 B_1$ bomlás esetén a következő perturbáló operátort vizsgáljuk

$$\Psi_2(x) = \cos\left(\frac{\beta}{2}\phi(x)\right) \implies F_{411}^{\Psi_2} = \frac{1}{2} \left(F_{411}^{1/2} + F_{411}^{-1/2}\right), \quad (3.31)$$

$$2 \cosh \theta_c = \frac{m_4}{m_1} = \frac{\sin 2\pi\xi}{\sin \frac{\pi\xi}{2}}, \quad (3.32)$$

és s_{411} hasonlóan definiáljuk, mint s_{311} -et.

Mivel $s_{311}(\xi)$ és $s_{411}(\xi)$ határozzák meg a bomlási ráta nemtriviális részét, ezek megfelelően pontos meghatározása elengedhetetlen a vizsgálatainkhoz. Az általunk numerikusan meghatározott függvények megtalálhatók a 3.3. fejezetben.

3.2. Szemiklasszikus közelítés

A klasszikus és kvantumos elméletek közötti átmeneti leírásokat szemiklasszikus közelítéseknek nevezzük. Ezen módszerek gyakran segítenek megérteni a kapcsolatot a klasszikus és a kvantumos modell spektruma között, és ezzel a klasszikus spektrum ismerete által közelebb kerülhetünk a kvantumos modell megoldásához. A szokásos, ún. WKB módszer leírása megtalálható a D. függelékben. Az alábbiakban bemutatam Hertzberg szemiklasszikus módszerét [18], amely a klasszikus oszcillonmegoldás $\hbar$ -ban vezető rendű kvantumkorrekcióit tárgyalja.

A módszer bemutatása előtt elvégezzünk egy rövid dimenzióanalízist, hogy az FFTP módszertől eltérő konvenciók ellenére a két módszert össze tudjuk hasonlítani. A módszer során végig nyomon követjük az elemi gerjesztések m tömegét, és a $\hbar$ Planck-állandót. Ekkor

$$[x] = [\hbar] \cdot [E]^{-1} = [t]. \quad (3.33)$$

Tekintsük a következő hatást

$$S = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - V_I(\phi) \right\}. \quad (3.34)$$

A kölcsönhatási potenciálban az együtthatókból kiskálázzuk az energiadimenziót

$$V_I(\phi) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!} m^{c_n} \phi^n. \quad (3.35)$$

Ez a következőképp történik. A (3.34) egyenlet két oldalán a dimenziók megegyeznek, ezért a derivált tagból

$$[\hbar] = [\hbar]^{d-2} \cdot [E]^{2-d} \cdot [\phi]^2 \implies [\phi] = [E]^{\frac{d-2}{2}} \cdot [\hbar]^{\frac{3-d}{2}} . \quad (3.36)$$

Ezután meghatározható az m paraméter dimenziója

$$[\hbar] = [\hbar]^d \cdot [E]^{-d} \cdot [m]^2 \cdot [E]^{d-2} \cdot [\hbar]^{3-d} \implies [m] = [E] \cdot [\hbar]^{-1} , \quad (3.37)$$

majd a csatolásoké

$$[\hbar] = [\hbar]^d \cdot [E]^{-d} \cdot [\lambda_n] \cdot [E]^{c_n} \cdot [\hbar]^{-c_n} \cdot [E]^{\frac{d-2}{2} \cdot n} \cdot [\hbar]^{\frac{3-d}{2} \cdot n} \implies c_n = \frac{2-d}{2} \cdot n + d , \quad (3.38)$$

mivel a csatolások dimenziójából az energiát kiskáláztuk. Továbbá

$$[\lambda_n] = [\hbar]^{1-d+c_n-\frac{3-d}{2} \cdot n} = [\hbar]^{1-\frac{n}{2}} , \quad (3.39)$$

azaz

$$[\lambda_3] = [\hbar]^{-1/2} , \quad [\lambda_4] = [\hbar]^{-1} , \quad [\lambda_5] = [\hbar]^{-3/2} , \quad [\lambda_6] = [\hbar]^{-2} . \quad (3.40)$$

A szemiklasszikus esetben a $d = 2$ eset vizsgálatára szűkíthezünk, így a kölcsönhatás alakja²

$$V_I(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda_3}{3!}m^2\phi^3 + \frac{\lambda_4}{4!}m^2\phi^4 + \frac{\lambda_5}{5!}m^2\phi^5 + \frac{\lambda_6}{6!}m^2\phi^6 + \dots \quad (3.41)$$

A módszer lényege, hogy a klasszikus oszcillont háttérmezőnek tekintjük, és ezen a háttérmezőn végezzük el a kvantálást, ezért a mezőt a következő alakban írjuk fel

$$\phi(t, x) = \phi_{osc}(t, x) + \hat{\phi}(t, x) , \quad (3.42)$$

ahol ϕ_{osc} a klasszikus oszcillon háttér, $\hat{\phi}$ pedig ennek a kvantumkorrekciója. A perturbációszámítás első rendjében $\hat{\phi}$ mozgásegyenlete a Heisenberg képpen

$$\partial_t^2 \hat{\phi} + \partial_x^2 \hat{\phi} + m^2 \hat{\phi} + \Phi(\phi_{osc}) \hat{\phi} = 0 , \quad (3.43)$$

ahol $\Phi(\phi_{osc}) = V_I''(\phi_{osc})$. A magasabb rendű tagok elhanyagolása azt jelenti, hogy $\hbar$ -ban elsőrendű, azaz szemiklasszikus vizsgálatot végzünk. A következő lépés, hogy a térbeli koordinátáról áttérünk Fourier-térbe

$$\partial_t^2 \hat{\phi}_k + \omega_k^2 \hat{\phi}_k + \int \frac{dk'}{2\pi} \tilde{\Phi}(k - k') \hat{\phi}_{k'} = 0 , \quad (3.44)$$

²A potenciál sorfejtését hatodik rendig végezzük, mivel – mint látni fogjuk – az ennél magasabb rendű tagokból $\hbar$ -ban magasabb járulékok származnak.

ahol $\omega_k^2 = k^2 + m^2$. Nemkölsönható esetben az utolsó tag nincs jelen, ilyenkor a megoldás triviális, a $\hat{\phi}_k$ operátor csak a k impulzusú keltő és eltüntető operátorokat tartalmazza. A kölcsönhatás azonban "összekeveri" a módusokat, és a megoldást a következő alakban kereshetjük

$$\hat{\phi}_k(t) = \sqrt{\hbar} \int \frac{dq}{2\pi} \hat{a}_q v_{qk}(t) + \text{h.c.} , \quad (3.45)$$

ahol az $\hat{a}_q$ operátorok eltüntetik az oszcillon háttérmezőhöz tartozó kvantum állapotot

$$\hat{a}_q |\Psi\rangle = 0 , \quad (3.46)$$

és teljesítik a kanonikus csere relációt

$$[\hat{a}_q, \hat{a}_{q'}^\dagger] = (2\pi)\delta(q - q') . \quad (3.47)$$

A v_{qk} együttthatók már klasszikus változók, melyek a következő egyenletet elégítik ki

$$\partial_t^2 v_{qk} + \omega_k^2 v_{qk} + \int \frac{dk'}{2\pi} \tilde{\Phi}(k - k') v_{qk'} = 0 . \quad (3.48)$$

A kezdeti feltételeket úgy választjuk, hogy $\hat{\phi}$ a $t = 0$ időpillanatban a nemkölsönható állapotban legyen:

$$\begin{aligned} v_{qk}(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (2\pi)\delta(q - k) , \\ \partial_t v_{qk}(0) &= -i\omega_k v_{qk}(0) . \end{aligned} \quad (3.49)$$

Az oszcillon által kisugárzott energia éppen a $\hat{\phi}$ kvantummezőben tárolt energia, amit $\hbar$ rendig a nemkölsönható Hamilton-operátor segítségével számíthatunk.

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\partial_t \hat{\phi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\partial_x \hat{\phi} \right)^2 + \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}^2 . \quad (3.50)$$

A háttérmezőhöz tartozó állapotban ennek várható értékét véve, és tér szerint kiintegrálva kapjuk az oszcillon által kisugárzott energiát

$$E(t) = \int dx \langle \Psi | \mathcal{H} | \Psi \rangle = \frac{\hbar}{2} \int \frac{dq}{2\pi} \frac{dk}{2\pi} \left[|\partial_t v_{qk}|^2 + \omega_k^2 |v_{qk}|^2 \right] . \quad (3.51)$$

A módszer neheze a (3.48) egyenlet megoldása. Hertzberg a csatolási állandókban perturbatív megoldást ad az $\epsilon \rightarrow 0$ határesetben, az oszcillonok kisamplitúdós sorfejtését is felhasználva, ahol az oszcillont a következő alakban írjuk fel

$$\phi_{osc}(t, x) = \phi_\epsilon(x) \cos(\omega t) . \quad (3.52)$$

A $\phi_\epsilon(x)$ függvény tetszőleges modellben felírható, a későbbiekben csak a sine-Gordon modellbeli alakjára lesz szükségünk.³ Az oszcillon bomlási rátájára adódó kifejezés a $3 \rightarrow 11$ esetben

$$\Gamma_{3 \rightarrow 11} = \frac{|\mathcal{M}(3\phi \rightarrow 2\phi)|^2 \hbar}{(3!)^2 2^7} \frac{1}{2k_{rad}} \frac{\int dx \phi_\epsilon^6}{E_{osc}}, \quad (3.53)$$

ahol k_{rad} egy rezonanciafeltételből adódóan kielégíti a

$$\sqrt{k_{rad}^2 + m^2} = \frac{3m\omega}{2} = \frac{3m}{2} \sqrt{1 - \epsilon^2} \quad (3.54)$$

feltételt. Emiatt az $\epsilon \rightarrow 0$ limeszben

$$\Gamma_{3 \rightarrow 11} = \frac{|\mathcal{M}(3\phi \rightarrow 2\phi)|^2}{m} \frac{\hbar}{(3!)^2 2^7 \sqrt{5}} \frac{\int dx \phi_\epsilon^6}{E_{osc}}, \quad (3.55)$$

ahol $\mathcal{M}(3\phi \rightarrow 2\phi)$ a $3\phi \rightarrow 2\phi$ szórás szórási amplitúdója, mely Feynman-diagrammok segítségével kiszámíthatók. Ezt a 3.3.2. fejezetben végezzük el. A $4 \rightarrow 11$ bomlási ráta

$$\Gamma_{4 \rightarrow 11} = |\mathcal{M}(4\phi \rightarrow 2\phi)|^2 \frac{\hbar}{(4!)^2 2^9} \frac{1}{2k_{rad}} \frac{\int dx \phi_\epsilon^8}{E_{osc}}, \quad (3.56)$$

ahol k_{rad} most

$$\sqrt{k_{rad}^2 + m^2} = \frac{4m\omega}{2} = 2m \sqrt{1 - \epsilon^2}, \quad (3.57)$$

azaz az $\epsilon \rightarrow 0$ limeszben

$$\Gamma_{4 \rightarrow 11} = \frac{|\mathcal{M}(4\phi \rightarrow 2\phi)|^2}{m} \frac{\hbar}{(4!)^2 2^{10} \sqrt{3}} \frac{\int dx \phi_\epsilon^8}{E_{osc}}. \quad (3.58)$$

A szórási amplitúdó most is Feynman-diagrammok segítségével számolható.

3.3. Eredmények

Ebben a fejezetben a kétfrekvenciás sine-Gordon modellt vizsgáljuk, melyet a

$$S = \int d^2x \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + \mu \int d^2x \cos(\beta\phi) + \lambda \int d^2x \cos\left(\frac{\beta}{2}\phi + \delta\right) + \text{const.} \quad (3.59)$$

hatás definiál.⁴ λ -t kis értéken tartva a modellt tekinthetjük a sine-Gordon modell perturbációjának. $\lambda \neq 0$ esetben a modell már nem integrálható, így a sine-Gordon modellben

³Lásd a 3.3.2. fejezetet

⁴A konstans úgy szokás megválasztani, hogy a vákuum energiája nulla legyen. Ez szabadon megtehető, hiszen fizikai jelentése csak az energiakülönbségeknek van.

az integrálhatóság miatt stabil lélegző állapotok a kétfrekvenciás modellben már nem stabilak, hanem bomlanak. A bomlási ráta kiszámítására létező kétféle módszert a 3.1. fejezetben bemutatottuk: az FFPT tetszőleges ξ csatolás esetén használható, míg Hertzberg módszere szemiklasszikus, azaz csak a $\xi \rightarrow 0$ esetben ad megbízható eredményt. Ezért ebben a határesetben vizsgáljuk a két módszert, és azok konzisztenciáját. Megjegyezzük, hogy $\xi \rightarrow 0$ limesz ekvivalens a $\beta \rightarrow 0$ limeszel.

A renormált csatolás $\xi \rightarrow 0$ esetben

$$\xi = \frac{\beta^2}{8\pi - \beta^2} = \frac{\beta^2}{8\pi} + \mathcal{O}(\beta^4) , \quad (3.60)$$

a szolitontömeg a csatolással kifejezve a (3.19) egyenletből

$$M_S = \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{8\pi - \beta^2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{4\pi}{8\pi - \beta^2}\right)} \left(\frac{\mu\pi\Gamma\left(\frac{8\pi - \beta^2}{8\pi}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\beta^2}{8\pi}\right)} \right)^{\frac{4\pi}{8\pi - \beta^2}} = \frac{8\sqrt{\mu}}{\beta} + \mathcal{O}(\beta) , \quad (3.61)$$

amely kis csatolás esetén megegyezik a szoliton (2.24) klasszikus tömegével. A kvantum lélegzők tömegét összevetve a klasszikus tömeggel

$$m_n = 2M_S \sin\left(\frac{n\pi\xi}{2}\right) \approx 16\frac{\sqrt{\mu}}{\beta} \frac{n\pi}{2} \frac{\beta^2}{8\pi} = n\beta\sqrt{\mu} \longleftrightarrow M_B(\epsilon) = \frac{16\epsilon\sqrt{\mu}}{\beta} , \quad (3.62)$$

amelyből az n -edik lélegzőhöz tartozó klasszikus amplitúdóparaméter

$$\epsilon \longleftrightarrow \frac{n}{16}\beta^2 . \quad (3.63)$$

3.3.1. Az FFPT bomlási ráta szemiklasszikus limesze

A C. függelék alapján

$$F_{11\dots 1}^a(\theta_1, \dots, \theta_n) = \mathcal{G}_a(\beta)[a]_{\xi}(i\bar{\lambda}(\xi))^n \prod_{i < j} \frac{f_{\xi}(\theta_j - \theta_i)}{e^{\theta_i} + e^{\theta_j}} Q_a^{(n)}(e^{\theta_1}, \dots, e^{\theta_n}) . \quad (3.64)$$

Az egyes tényezők definíciója megtalálható a C. függelékben. A bomlási rátához a form faktor függvényt meghatározott rapiditásértékeknél kell kiszámítani, így az egyes tényezők már csak ξ függvényei. A szemiklasszikus bomlási ráta kiszámításához a ξ -ben elsőrendű tagokat kell venni, melyek kiszámítása hosszadalmas, és helyigényes, ezért csak az $s(\xi)$ függvényeket és a bomlási rátára kapott végeredményt közöljük majd. Az egyetlen nemtriviális feladat az

$$f_{\xi}(\theta) = \exp\left(\int_0^{\infty} \frac{dt}{t} 4 \cosh\left[\left(1 - \frac{i\theta}{\pi}\right)t\right] \frac{\sinh\left(\frac{\xi}{2}t\right) \sinh\left(\frac{\xi+1}{2}t\right) \sinh\left(\frac{t}{2}\right)}{\sinh^2 t}\right) \quad (3.65)$$

függvény ξ szerinti sorfejtése. Általában a sorfejtés és az integrálás sorrendje nem felcserélhető, mivel azonban az integrál nem végezhető el analitikusan, ezért először sorfejtettünk

$$f_\xi(\theta) \approx \exp \left(\int_0^\infty 2 \cosh \left[\left(1 - \frac{i\theta}{\pi} \right) t \right] \frac{\sinh^2(\frac{t}{2})}{\sinh^2(t)} \xi \, dt \right). \quad (3.66)$$

Ekkor az integrál már elvégezhető, az eredmény

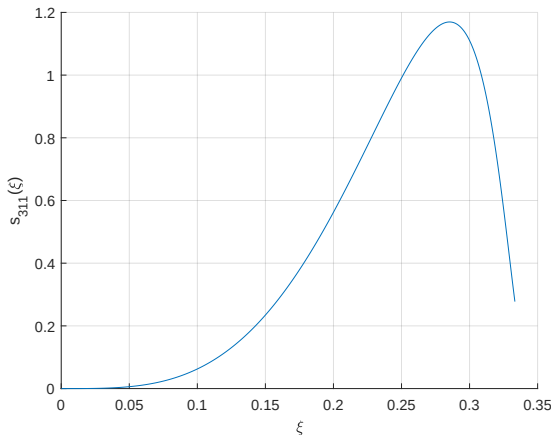
$$f_\xi(\theta) \approx \exp \left(\frac{-i(\pi - i\theta)}{\sinh \theta} \xi \right). \quad (3.67)$$

Az integrálás és a sorfejtés felcserélését eredményeink konzisztenciája validálja.

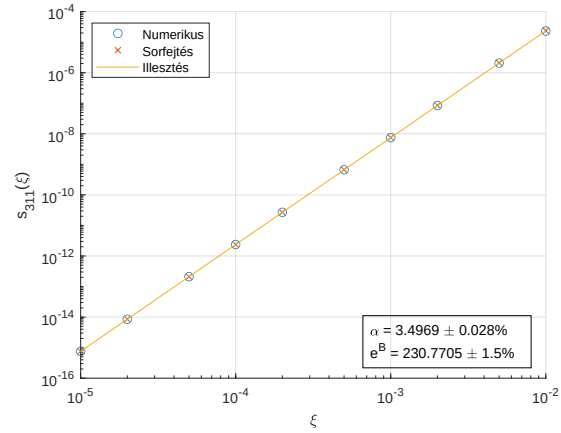
Megjegyezzük, hogy a numerikus számításokhoz használt form faktorokra ellenőriztük a (3.16) form faktor axiómák teljesülését.

A $3 \rightarrow 11$ bomlás

Ebben az esetben $\delta = -\pi/2$ a (3.59) egyenletben, azaz (3.27)-et vizsgáljuk. A teljes $s_{311}(\xi)$ függvény a releváns csatolási tartományban, és a függvény $\xi \rightarrow 0$ sorfejtett alakja a 3.4. ábrán látható.



(a) Az $s_{311}(\xi)$ függvény



(b) Az $s_{311}(\xi)$ függvény $\xi \rightarrow 0$ esetben

3.4. ábra

A numerikusan számított pontokra

$$\ln s_{311} = B + \alpha \ln \xi \implies s_{311} = e^B \xi^\alpha \quad (3.68)$$

alakú függvényt illesztettünk. Az illesztési paraméterek a 3.4b. ábrán láthatók, és majdnem tökéletesen megegyeznek a sorfejtésből számított

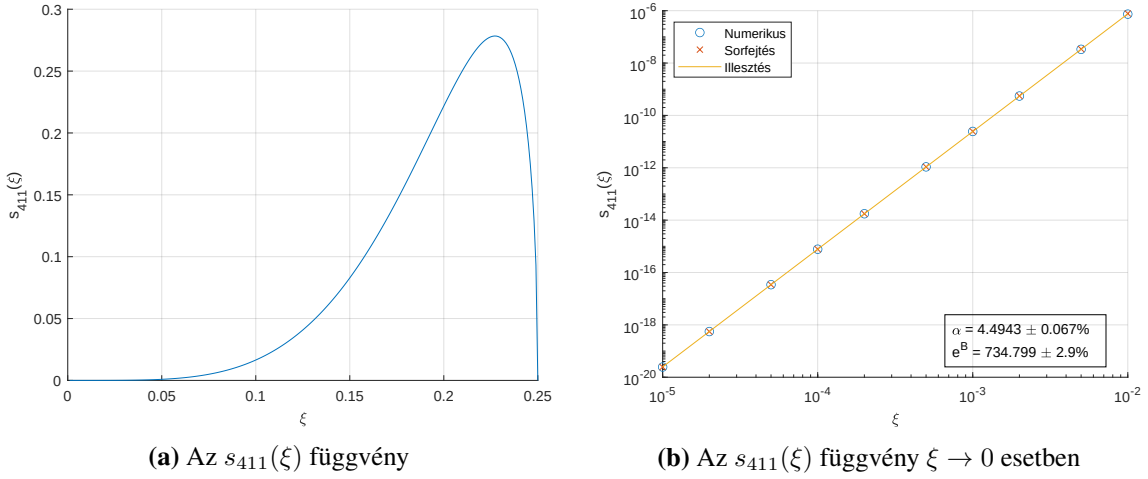
$$s_{311}(\xi) \approx 237.972 \cdot \xi^{7/2}, \text{ ha } \xi \rightarrow 0 \quad (3.69)$$

függvény paramétereivel. Ennek felhasználásával, és a (3.28) egyenletben a többi faktor sorfejtését is összegyűjtve, a bomlási ráta ξ -ben (és β -ban) vezető rendű alakjára a következő kifejezést kapjuk

$$\Gamma_{3 \rightarrow 11}^{FF} \approx \frac{\lambda^2}{\mu^{3/2}} \cdot \frac{5\sqrt{5}\pi^{11/2}}{\sqrt{2} \cdot 96} \cdot \xi^{11/2} = \frac{\lambda^2}{\mu^{3/2}} \cdot \frac{5\sqrt{5}}{2^{22} \cdot 3} \cdot \beta^{11} \approx 8.89 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{\lambda^2}{\mu^{3/2}} \cdot \beta^{11}. \quad (3.70)$$

A $4 \rightarrow 11$ eset

Ebben az esetben $\delta = 0$ a (3.59) egyenletben, azaz (3.31)-et vizsgáljuk. A teljes $s_{411}(\xi)$ függvény a releváns csatolási tartományban, és a függvény $\xi \rightarrow 0$ sorfejtett alakja a 3.5. ábrán látható.



3.5. ábra

A numerikusan számított pontokra

$$\ln s_{411} = B + \alpha \ln \xi \implies s_{411} = e^B \xi^\alpha \quad (3.71)$$

alakú függvényt illesztettünk. Az illesztési paraméterek a 3.5b. ábrán láthatók, és majdnem tökéletesen megegyeznek a sorfejtésből számított

$$s_{411}(\xi) \approx 776.939 \cdot \xi^{9/2}, \text{ ha } \xi \rightarrow 0 \quad (3.72)$$

függvény paramétereivel. Ennek felhasználásával a bomlási ráta ξ -ben (és β -ban) vezető rendű alakjára a következő kifejezést kapjuk

$$\Gamma_{4 \rightarrow 11}^{FF} \approx \frac{\lambda^2}{\mu^{3/2}} \cdot \frac{81\pi^{15/2}}{512\sqrt{10}} \cdot \xi^{15/2} = \frac{\lambda^2}{\mu^{3/2}} \cdot \frac{3^4}{2^{32}\sqrt{5}} \cdot \beta^{15} \approx 8.43 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{\lambda^2}{\mu^{3/2}} \cdot \beta^{15}. \quad (3.73)$$

3.3.2. Hertzberg módszere a kétfrekvenciás sine-Gordon modellben

A sine-Gordon lélegző (2.26) kifejezése $\epsilon \rightarrow 0$, azaz a kisamplitúdójú közelítésben, a (3.52) egyenlettel összehasonlítva

$$\phi_B(t, x) \approx \frac{4 \epsilon \cos(m\omega t)}{\beta \omega \cosh(m\epsilon x)} \implies \phi_\epsilon(x) = \frac{4 \epsilon}{\beta \omega} \frac{1}{\cosh(m\epsilon x)}. \quad (3.74)$$

Ennek hatványait kell majd kiintegrálnunk ((3.55) és (3.58) egyenletek), amely megtehető analitikusan.

A $3 \rightarrow 11$ bomlás

Ebben az esetben a következő potenciált vizsgáljuk

$$V(\phi) = \mu \left(1 - \cos(\beta(\phi + \phi_0)) \right) + \lambda \sin\left(\frac{\beta}{2}(\phi + \phi_0)\right) + C, \quad (3.75)$$

ahol ϕ_0 és C szerepe, hogy a potenciál minimuma nulla legyen, a $\phi = 0$ helyen. Rövid számolással megmutatható, hogy

$$\phi_0 = \frac{2}{\beta} \arcsin\left(-\frac{\lambda}{4\mu}\right), \quad C = \frac{\lambda^2}{8\mu}. \quad (3.76)$$

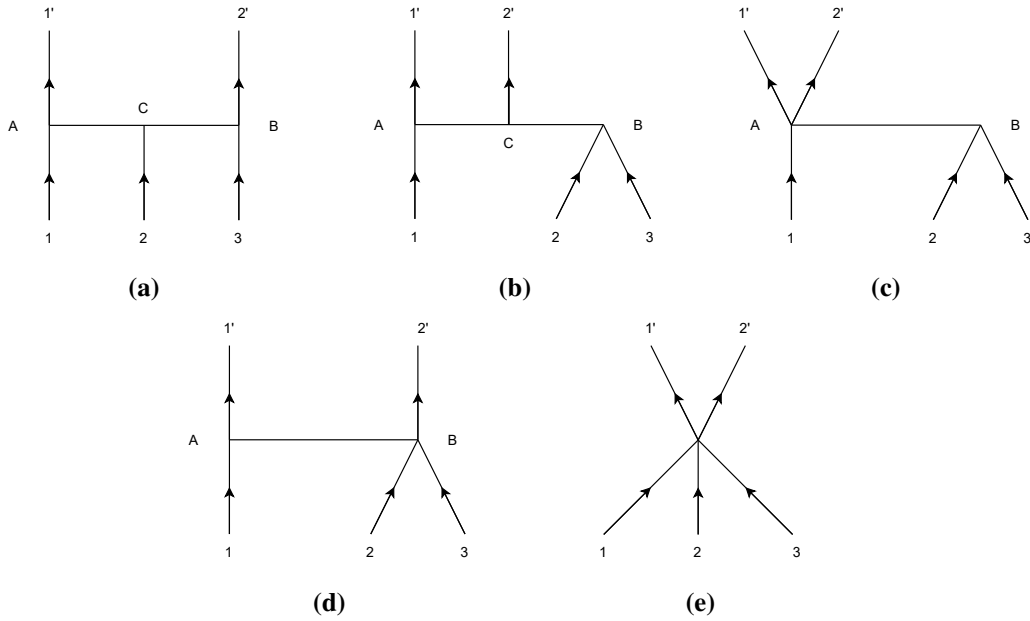
A potenciált a (3.41) egyenletnek megfelelően sorbafejtve

$$\begin{aligned} V(\phi) = & \frac{1}{2} \left(\mu\beta^2 - \frac{\lambda^2\beta^2}{16\mu} \right) \phi^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{3}{8}\beta^3\lambda\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{4\mu}\right)^2} \right) \phi^3 + \\ & + \frac{1}{4!} \left(-\mu\beta^4 + \frac{7\lambda^2\beta^4}{64\mu} \right) \phi^4 + \frac{1}{5!} \left(-\frac{15}{32}\beta^5\lambda\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{4\mu}\right)^2} \right) \phi^5 + \dots \end{aligned} \quad (3.77)$$

azaz

$$\begin{aligned}
 m^2 &= \mu\beta^2 - \frac{\lambda^2\beta^2}{16\mu} = \mu\beta^2 \left[1 - \left(\frac{\lambda}{4\mu} \right)^2 \right], \\
 \lambda_3 &= \frac{\frac{3}{8}\beta^3\lambda\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{4\mu} \right)^2}}{\mu\beta^2 \left[1 - \left(\frac{\lambda}{4\mu} \right)^2 \right]} = \frac{3}{8} \frac{\lambda}{\mu} \frac{\beta}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{4\mu} \right)^2}}, \\
 \lambda_4 &= -\frac{\mu\beta^4 - \frac{7\lambda^2\beta^4}{64\mu}}{\mu\beta^2 \left[1 - \left(\frac{\lambda}{4\mu} \right)^2 \right]} = -\beta^2 \frac{1 - \frac{7}{4} \left(\frac{\lambda}{4\mu} \right)^2}{1 - \left(\frac{\lambda}{4\mu} \right)^2}, \\
 \lambda_5 &= -\frac{\frac{15}{32}\beta^5\lambda\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{4\mu} \right)^2}}{\mu\beta^2 \left[1 - \left(\frac{\lambda}{4\mu} \right)^2 \right]} = -\frac{15}{32} \frac{\lambda}{\mu} \frac{\beta^3}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{4\mu} \right)^2}},
 \end{aligned} \tag{3.78}$$

Vizsgáljuk most meg a $3\phi \rightarrow 2\phi$ diagramokat!



3.6. ábra. A $3 \rightarrow 11$ bomlás leírásához szükséges Feynman diagramok

Az első diagramon a három bemenő láb momentuma $(m, 0)$, így a két kimenő lábé

$\left(\frac{3}{2}m, \pm\frac{\sqrt{5}}{2}m\right)$. Az A csúcsból a C csúcsba menő propagátor $p_{AC} = \left(-\frac{m}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}m\right)$ momentumot, a C csúcsból a B csúcsba menő $p_{CB} = \left(\frac{m}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}m\right)$ momentumot szállít, így a diagram értéke⁵

$$(-i\lambda_3 m^2)^3 \frac{i}{p_{AC}^2 - m^2} \frac{i}{p_{CB}^2 - m^2} = \frac{-i\lambda_3^3 m^2}{4}. \quad (3.79)$$

Ha a kimenő lábakat rögzítjük, a bemenő lábakat hatféleképpen permutálhatjuk, így ez a diagram hatszoros súllyal szerepel a szórási amplitúdóban. A második diagramon a bemenő és kimenő momentumok ugyanazok, így az A csúcsból a C csúcsba menő propagátor momentuma most is $p_{AC} = \left(-\frac{m}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}m\right)$, de a C csúcsból a B csúcsba menő propagátor momentuma $p_{CB} = (-2m, 0)$, így a diagram értéke

$$(-i\lambda_3 m^2)^3 \frac{i}{p_{AC}^2 - m^2} \frac{i}{p_{CB}^2 - m^2} = \frac{i\lambda_3^3 m^2}{6}. \quad (3.80)$$

Az A csúcsba befutó lábat háromféleképp, az A csúcsból kifutó lábat kétféleképp választhatjuk ki, így a diagram hatszoros súllyal számít a szórási amplitúdóban. A harmadik diagramon a propagátor $p_{BA} = (2m, 0)$ momentumot visz a B csúcsból az A -ba, így a diagram értéke

$$(-i\lambda_4 m^2)(-i\lambda_3 m^2) \frac{i}{p_{BA}^2 - m^2} = \frac{-i\lambda_3 \lambda_4 m^2}{3}. \quad (3.81)$$

Itt az A csúcsba befutó lábat háromféleképp választhatjuk ki, így a diagram háromszoros súllyal számít a szórási amplitúdóban. A negyedik diagramon a propagátor $p_{AB} = \left(-\frac{m}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}m\right)$ momentumot visz A -ból B -be, így a diagram értéke

$$(-i\lambda_3 m^2)(-i\lambda_4 m^2) \frac{i}{p_{AB}^2 - m^2} = \frac{i\lambda_3 \lambda_4 m^2}{2}. \quad (3.82)$$

Az A csúcsba befutó lábat háromféleképpen választhatjuk ki, az A csúcsból kifutót kétféleképpen, így ez a diagram hatszoros súllyal számít. Az utolsó diagram értéke triviális: $-i\lambda_5 m^2$. Így a teljes szórási amplitúdó

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(3\phi \rightarrow 2\phi) &= i\lambda_3^3 m^2 \left(-\frac{3}{2} + 1\right) + i\lambda_3 \lambda_4 m^2 (-1 + 3) - i\lambda_5 m^2 = \\ &= i \left(-\frac{\lambda_3^3}{2} + \lambda_3 \lambda_4 - \lambda_5\right) m^2. \end{aligned} \quad (3.83)$$

⁵A számolásokban megjelenő négyzetre emelések a Feynman-szabályoknak megfelelően Minkowski-négyzetek. Így pl. a (3.79) egyenletben $p_{AC}^2 = -m^2$.

Felhasználva a (3.78) egyenleteket

$$|\mathcal{M}(3\phi \rightarrow 2\phi)|^2 = \frac{9\beta^6(32\lambda\mu^2 - 5\lambda^3)^2}{256(16\mu^2 - \lambda^2)^3} m^4 = \frac{9}{1024} \lambda^2 \beta^{10} + \mathcal{O}(\lambda^4). \quad (3.84)$$

A bomlási rátához szükséges integrál

$$\int dx \phi_\epsilon^6(x) = \int dx \left(\frac{4}{\beta} \frac{\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \frac{1}{\cosh(\sqrt{\mu}\beta\epsilon x)} \right)^6 = \frac{65536\epsilon^5}{15\beta^7(1-\epsilon^2)^3\sqrt{\mu}}. \quad (3.85)$$

Az $\epsilon \rightarrow 0$ limeszben, felhasználva a (3.63) egyenletet is ($n = 3$),

$$\int dx \phi_\epsilon^6(x) = \frac{81}{80} \frac{\beta^3}{\sqrt{\mu}}. \quad (3.86)$$

A bomló lélegző tömege a (3.62) egyenletből pedig $E_{osc} = m_3 = 3\beta\sqrt{\mu}$. A faktorokat összegyűjtve a (3.55) egyenlet szemiklasszikus limesze

$$\begin{aligned} \Gamma_{3 \rightarrow 11} &= \frac{\frac{9}{1024} \lambda^2 \beta^{10}}{\sqrt{\mu}\beta} \frac{\hbar}{(3!)^2 2^7 \sqrt{5}} \frac{\frac{81}{80} \frac{\beta^3}{\sqrt{\mu}}}{3\beta\sqrt{\mu}} = \\ &= \frac{\lambda^2}{\mu^{3/2}} \cdot \frac{3^3 \hbar}{2^{23} \cdot 5 \sqrt{5}} \cdot \beta^{11} = \hbar \cdot 2.88 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{\lambda^2}{\mu^{3/2}} \cdot \beta^{11}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Látható, hogy a $\hbar = 1$ konvencióval felírt (3.70) egyenlethez képest ez a módszer kb. harmad akkora konstans ad, de a csatolások hatványaira a két módszerrel azonos eredményt kapunk.

Magasabb rendű Feynman-diagramokból $\hbar$ -ban is magasabb rendű korrekciókat kapnánk, hiszen a magasabb rendű csatolási állandók $[\hbar]$ -dimenziója egyre csökken a (3.40) egyenlet alapján, így ezek a bomlási rátában $\hbar$ magasabb hatványaival együtt jelennek meg, így a (3.87) egyenlet a $\hbar$ -ban legalacsonyabb rendű eredmény.

A $4 \rightarrow 11$ bomlás

Ebben az esetben a következő potenciált vizsgáljuk

$$V(\phi) = \mu \left(1 - \cos(\beta\phi) \right) + \lambda \left(1 - \cos\left(\frac{\beta}{2}\phi\right) \right), \quad (3.88)$$

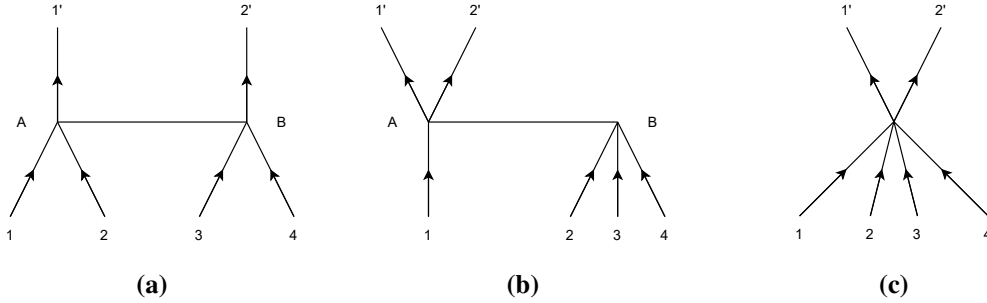
ahol most a potenciál minimuma λ -tól függetlenül nulla, a $\phi = 0$ -ban. Sorbafejtve

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \left(\mu\beta^2 + \frac{\lambda\beta^2}{4} \right) \phi^2 + \frac{1}{4!} \left(-\mu\beta^4 - \frac{\lambda\beta^4}{16} \right) \phi^4 + \frac{1}{6!} \left(\mu\beta^6 + \frac{\lambda\beta^6}{64} \right) \phi^6 + \dots, \quad (3.89)$$

azaz

$$\begin{aligned}
 m^2 &= \mu\beta^2 \left(1 + \frac{\lambda}{4\mu}\right), \\
 \lambda_4 &= -\frac{\mu\beta^4 + \frac{\lambda\beta^4}{16}}{\mu\beta^2 \left(1 + \frac{\lambda}{4\mu}\right)} = -\beta^2 \frac{1 + \frac{1}{4}\frac{\lambda}{4\mu}}{1 + \frac{\lambda}{4\mu}}, \\
 \lambda_6 &= \frac{\mu\beta^6 + \frac{\lambda\beta^6}{64}}{\mu\beta^2 \left(1 + \frac{\lambda}{4\mu}\right)} = \beta^4 \frac{1 + \frac{1}{16}\frac{\lambda}{4\mu}}{1 + \frac{\lambda}{4\mu}}.
 \end{aligned} \tag{3.90}$$

Vizsgáljuk most meg a $4\phi \rightarrow 2\phi$ diagramokat!



3.7. ábra. A $4 \rightarrow 2$ bomlás leírásához szükséges Feynman diagramok

Az első diagramon a négy bemenő láb momentuma $(m, 0)$, így a két kimenő láb momentuma $(2m, \pm\sqrt{3}m)$. A propagátor emiatt A -ból B -be $p_{AB} = (0, -\sqrt{3}m)$ momentumot visz, ezért a diagram értéke

$$(-i\lambda_4 m^2)^2 \frac{i}{p_{AB}^2 - m^2} = \frac{i\lambda_4^2 m^2}{4}. \tag{3.91}$$

Ha rögzítjük az A csúcsot annak a pontnak, amelybe az 1 láb fut, akkor a másik befutó láb lehet a 2, 3 és 4, míg a kifutó láb lehet az $1'$ és a $2'$. Ezért az ábrán látható diagram hatszoros súllyal szerepel a szórási amplitúdóban. A második diagramon a bemenő és a kimenő lábak momentuma ugyanaz, mint az előzőn, ezért a propagátor B -ből A -ba $p_{BA} = (3m, 0)$ momentumot visz, ezért a diagram értéke

$$(-i\lambda_4^2 m^2)^2 \frac{i}{p_{BA}^2 - m^2} = \frac{-i\lambda_4^2 m^2}{8}. \tag{3.92}$$

A diagram négyszeres súllyal szerepel a szórási amplitúdóban, ugyanis az A csúcsba befutó lábat négyféleképpen választhatjuk ki. A harmadik diagram értéke triviális: $-i\lambda_6 m^2$. Így a teljes szórási amplitúdó

$$\mathcal{M}(4\phi \rightarrow 2\phi) = i\lambda_4^2 m^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) - i\lambda_6 m^2 = i(\lambda_4^2 - \lambda_6) m^2. \tag{3.93}$$

Felhasználva a (3.90) egyenleteket

$$|\mathcal{M}(4\phi \rightarrow 2\phi)|^2 = \frac{81}{16} \frac{\mu^2 \lambda^2 \beta^8}{(\lambda + 4\mu)^4} m^4 = \frac{81}{4096} \lambda^2 \beta^{12} + \mathcal{O}(\lambda^3). \quad (3.94)$$

A bomlási rátához szükséges integrál

$$\int dx \phi_\epsilon^8(x) = \int dx \left(\frac{4}{\beta} \frac{\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \frac{1}{\cosh(\sqrt{\mu}\beta\epsilon x)} \right)^8 = \frac{2097152\epsilon^7}{35\beta^9(1-\epsilon^2)^4\sqrt{\mu}}. \quad (3.95)$$

Az $\epsilon \rightarrow 0$ limeszben, felhasználva a (3.63) egyenletet is ($n = 4$),

$$\int dx \phi_\epsilon^8(x) = \frac{128}{35} \frac{\beta^5}{\sqrt{\mu}}, \quad (3.96)$$

A bomló lélegző tömege a (3.62) egyenletből pedig $E_{osc} = m_4 = 4\beta\sqrt{\mu}$. A faktorokat összegyűjtve a (3.58) egyenlet szemiklasszikus limesze

$$\begin{aligned} \Gamma_{4 \rightarrow 11} &= \frac{\frac{81}{4096} \lambda^2 \beta^{12}}{\sqrt{\mu}\beta} \frac{\hbar}{(4!)^2 2^{10} \sqrt{3}} \frac{\frac{128}{35} \frac{\beta^5}{\sqrt{\mu}}}{4\beta\sqrt{\mu}} = \\ &= \frac{\lambda^2}{\mu^{3/2}} \cdot \frac{3\sqrt{3}\hbar}{2^{23} \cdot 5 \cdot 7} \cdot \beta^{15} = \hbar \cdot 1.77 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{\lambda^2}{\mu^{3/2}} \cdot \beta^{15}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Látható, hogy a $\hbar = 1$ konvencióval felírt (3.73) egyenlethez képest ez a módszer kb. kétszer nagyobb konstanst ad, de a csatolások hatványaira a két módszerrel azonos eredményt kapunk.

3.4. Konklúzió

Kvantumos vizsgálataink során a sine-Gordon modell lélegzőinek bomlási rátáit vizsgáltuk egy integrálhatóság-sértő perturbáció hatására. Kétféle módszer konzisztenciáját vizsgáltuk a $\xi \rightarrow 0$, azaz a gyenge csatolású szemiklasszikus határesetben. Eredményeink azt mutatják, hogy a kétféle módszerben a lélegzők bomlási rátája a csatolások azonos hatványaitól függ, ebből a szempontból a módszerek tehát konzisztensek. Meglepő azonban, hogy a numerikus arányossági tényezők nem egyeznek meg, sőt míg a $3 \rightarrow 11$ bomlás esetén az FFPT módszer háromszor akkora konstans ad, mint a Hertzberg módszer, addig a $4 \rightarrow 11$ bomlásnál fele akkorát.

Azt gondoljuk, hogy az FFPT módszerből kapott eredmény az, amelyik minden bizonnyal megbízható, ugyanis a form faktorok az irodalomban rengeteg helyen előfordulnak, és az FFPT eredményét független numerikus számításokkal is ellenőrizték, míg a Hertzberg módszer tudomásunk szerint nem lett ellenőrizve független számításokkal. A Hertzberg-módszer ellenőrzésére használható numerikus számítások például a csonkolt Hamiltoni módszerek (THA) [50], melyek segítségével az előző két módszertől függetlenül meghatározhatjuk a lélegzők bomlási rátáit. A numerikus módszer implementálása, és a bomlási ráta kiszámítása a jövőbeni terveink között szerepel.

A Hertzberg-féle módszer más úton is ellenőrizhető numerikusan, Hertzberg munkájában [18] ugyanis röviden bemutatja módszerének numerikus megvalósítását. Ennek implementálását és eredményeinkkel való összevetését a közeljövőben tervezzük.

A kétféle numerikus módszer segítségével remélhetőleg megérthetjük majd a dolgozatban bemutatott eredményeink közötti különbség eredetét. Mivel az FFPT módszer jóslatait megbízható numerikus számításokkal ellenőrizték [49], ezért arra számítunk, hogy a numerikus tesztekéből kiderül, ha a Hertzberg módszert az alkalmazhatósági tartományán kívül próbálnánk alkalmazni (pl. a B_3 és B_4 lélegzők nem elég "szemiklasszikusak", hogy a módszer alkalmazható legyen), vagy esetleg más hibát vétettünk.

4. fejezet

Összefoglalás

A dolgozatomban kölcsönható skalárelméletek hosszú élettartamú gerjesztéseinek nem-egyensúlyi dinamikáját vizsgáltam. A dolgozat első felében klasszikus fizikai megfontolásainkat ismertettük. A klasszikus mezőelméletben a hosszú élettartamú gerjesztésekre az oszcillon elnevezés terjedt el az irodalomban. Bemutattuk az oszcillonok vizsgálatához szükséges elméleti háttérrel, és ismertettük az irodalom fontosabb eredményeit, a hangsúlyt a bomlási mechanizmusokra, a hirtelen összeomlásra, és a staccato bomlásra fektetve, majd ismertettük az oszcillonok, és kvázilélegzők bomlási mechanizmusainak dimenziófüggésének vizsgálatára implementált saját numerikus módszereinket. A hirtelen bomlással kapcsolatos vizsgálataink azt mutatták, hogy $D \leq 2$ -ben a hirtelen bomlás eltűnik, míg $D > 2$ esetben a kvázilélegző energia-görbe megfelelő pontossággal jósolja meg a hirtelen bomlást okozó kritikus frekvencia nagyságát. A staccato bomlással kapcsolatban amellet érveltünk, hogy ez a bomlási mechanizmus a $D = 1$ dimenziós modellek sajátos, robusztus tulajdonsága, eredményeink azt mutatják, hogy fizikailag releváns, magasabb dimenziókban már nem megfigyelhető. A klasszikus vizsgálataink eredményéről szóló publikációnk a Physical Review D folyóiratban került közlésre [10].

A dolgozat második részében a kvantumelméletben előforduló hosszú élettartamú gerjesztésekkel foglalkoztunk, és a sine-Gordon modell lélegző állapotainak integrálhatóságsértő perturbáció hatására való bomlását vizsgáltuk két független módszerrel a szemiklasszikus tartományban. A kétféle módszer bemutatása után a számítások elvégzését is prezentáltuk, és láttuk, hogy az általunk vizsgált két bomlási ráta az egyes csatolási paraméterektől azonos módon függ a kétféle módszerben. Azonban az arányossági tényezőkre különböző eredményt kaptunk, ennek okainak megértéséhez további vizsgálatokat tervezünk, ugyanis a Hertzberg módszer még nincs összevetve a teljes térelméleti dinamikát szimuláló numerikával. Következő feladatunk a Hertzberg-módszer numerikus implementálása, majd a THA módszer megtanulásával és alkalmazásával tervezzük folytatni vizsgálatainkat. Reményeink szerint a numerikus módszerek segítenek majd megérteni a két módszerrel kapott eredmények közti különbségek háttérében álló okokat.

A. függelék

Időfejlesztés

Ebben a függelékben bemutatjuk az oszcillonok időfejlesztésére használt numerikus módszereinket, aminek részletes leírása megtalálható korábbi TDK munkámban [9]. A numerikus kódunkat a [28, 36] forrásokban ismertetett módszer alapján írtam. A bemutatáshoz [10]-et követjük. Mivel csak gömbszimmetrikus konfigurációkat vizsgálunk, így csak az $r = |x| \in [0, \infty)$ térváltozót használjuk, amit az $R \in [0, 1)$ tartományra transzformálunk

$$R = \frac{2R}{\kappa(1 - R^2)} , \quad (\text{A.1})$$

amely a végtelenben vett határfeltételek numerikus kezelését könnyíti meg. A κ paraméter megválasztásával az oszcillon magrészében lévő rácspontok számát változtathatjuk, az általunk használt értéke $\kappa = 0.05$. Mivel a megoldandó mozgásegyenlet (2.40) másodrendű differenciálegyenlet, bevezetjük a következő változókat

$$\phi_t = \frac{\partial \phi}{\partial t} , \quad \phi_R = \frac{\partial \phi}{\partial R} . \quad (\text{A.2})$$

Ekkor az új változókban a következő, már elsőrendű csatolt differenciálegyenlet-rendszert kell megoldanunk

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \phi_t , \\ \frac{\partial \phi_t}{\partial t} &= \frac{\kappa^2(1 - R^2)^3}{2(1 + R^2)} \left[\frac{(1 - R^2)}{2(1 + R^2)} \frac{\partial \phi_R}{\partial R} - \frac{R(3 + R^2)}{(1 + R^2)^2} \phi_R + \frac{D - 1}{2R} \phi_R \right] - V'(\phi) , \\ \frac{\partial \phi_R}{\partial t} &= \frac{\partial \phi_t}{\partial R} . \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Ez a kezdeti feltétel $\phi(0, R)$ specifikálása után már megoldható numerikusan tetszőleges t ideig, azaz meghatározható $\phi(t, R)$, amelyből $\phi(t, r)$ is. Az időfejlesztéshez $\Delta t = \Delta R$ osztópontokat és negyedrendű Runge-Kutta módszert használtunk a "method of lines" módszerrel kombinálva.

A numerikus stabilitás eléréséhez a rövid hullámhosszú instabilitások elnyomására volt szükségünk. Ezt úgy értük el, hogy a következő alakú

$$\mathcal{D} = \mathcal{K}(\partial_R^6 \Phi)(\Delta R)^5 \quad (\text{A.4})$$

disszipatív tagot [51] adtunk hozzá (A.3) minden egyenletéhez. Ez csak ötödrendű numerikus hibát okoz, ami egy renddel magasabb, mint az időfejlesztéshez használt negyedrendű Runge-Kutta módszeré.

A (2.44) határfeltételek kielégítéséhez, és a megoldás további stabilizálásához az (A.3) egyenletet az $R \in [-1 - \epsilon, 1 + \epsilon]$ tartományon oldjuk meg, és a három változót (ϕ, ϕ_t, ϕ_R) nullára állítjuk az $|R| \geq 1$ tartományon, a változókat pedig minden időlépés után szimmetrizáljuk

$$\begin{aligned} \phi(R) &\rightarrow \frac{\phi(R) + \phi(-R)}{2}, \\ \phi_t(R) &\rightarrow \frac{\phi_t(R) + \phi_t(-R)}{2}, \\ \phi_R(R) &\rightarrow \frac{\phi_R(R) - \phi_R(-R)}{2}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Az oszcillon frekvenciáját azon t_i^0 időpillanatokból számítottuk, ahol az oszcillon origóbeli értéke nulla, $\phi(R = 0, t_i^0) = 0$; a frekvencia ω_i értékét a t_i^0 időpillanatban a két szomszédos időpillanat között eltelt időből számítjuk

$$\omega_i = \frac{2\pi}{t_{i+1}^0 - t_{i-1}^0}. \quad (\text{A.6})$$

A t_i^0 időpillanatok azokból a t'_j pontokból határozhatók meg, ahol az origóbeli mezőérték előjelet vált. Ha

$$\phi(R = 0, t'_j) \cdot \phi(R = 0, t'_{j+1}) = -1, \quad (\text{A.7})$$

akkor t_i^0 -t a t'_j, t'_{j+1} pontokra illesztett egyenes zérushelye adja.

B. függelék

Kvázilélegző energia

A kvázilélegző energiájának kiszámításához a (2.41) kvázilélegző próbafüggvényt a (2.18) egyenletbe kell beírunk, amihez a következő mennyiségekre van szükségünk

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial t} &= \sum_{m=1}^N \phi_m(r)(-m\omega) \sin(\omega t) , \\ \frac{\partial\phi}{\partial r} &= \sum_{m=1}^N \frac{\partial_m\phi(r)}{\partial r} \cos(\omega t) .\end{aligned}\tag{B.1}$$

A véges N -nél való trunkálás miatt a kvázilélegző nem egzakt megoldása a mozgásegyenletnek, ezért ha az energiafunkcionált kiértékeljük egy kvázilélegzőre, akkor az oszcillálni fog. Ezt egy periódusra való átlagolással küszöböljük ki, így definiáljuk a következő mennyiségeket

$$\begin{aligned}\langle \dot{\phi}^2 \rangle &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 , \\ \langle \phi'^2 \rangle &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt \left(\frac{\partial\phi}{\partial r} \right)^2 , \\ \langle V \rangle &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt V(\phi) .\end{aligned}\tag{B.2}$$

Ezek segítségével a kvázilélegző energiáját a következőképp definiáljuk

$$E_{QB} = \langle E \rangle = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \int_0^R dr r^{D-1} \left[\frac{1}{2} \langle \dot{\phi}^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \phi'^2 \rangle + \langle V \rangle \right] ,\tag{B.3}$$

ahol az R koordinátát úgy kell megválasztani, hogy a magrészen kívülre essen. A pontos értéke a kvázilélegző energiát csak elhanyagolható mértékben befolyásolja, mivel a kvázilélegző farokrészében az energiasűrűség exponenciálisan kicsi.

C. függelék

A sine-Gordon lélegző form faktorok

A sine-Gordon lélegző form faktorok numerikus implementálásához a [46, 49] forrásokat követjük. Az n darab B_1 lélegzőt tartalmazó exponenciális form faktorok

$$\begin{aligned} F_{11\dots 1}^a(\theta_1, \dots, \theta_n) &= \langle 0 | e^{ia\beta\phi(0)} | B_1(\theta_1) \dots B_1(\theta_n) \rangle = \\ &= \mathcal{G}_a(\beta) [a]_\xi (i\bar{\lambda}(\xi))^n \prod_{i < j} \frac{f_\xi(\theta_j - \theta_i)}{e^{\theta_i} + e^{\theta_j}} Q_a^{(n)}(e^{\theta_1}, \dots, e^{\theta_n}) , \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

ahol

$$Q_a^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 , & n \leq 2 \\ \det \left([a + i - j]_\xi \sigma_{2i-j}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \right)_{i,j=1, \dots, n-1} , & n > 2 , \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

$$[a]_\xi = \frac{\sin \pi \xi a}{\sin \pi \xi} , \quad (\text{C.3})$$

$$\bar{\lambda}(\xi) = 2 \cos \frac{\pi \xi}{2} \sqrt{2 \sin \frac{\pi \xi}{2}} \exp \left(- \int_0^{\pi \xi} \frac{dt}{2\pi} \frac{t}{\sin t} \right) , \quad (\text{C.4})$$

$\sigma_k^{(n)}$ pedig a k rendű, n változós elemi szimmetrikus polinom. Továbbá

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_a(\beta) = \langle e^{ia\beta\phi} \rangle &= \left(\frac{M \sqrt{\pi} \Gamma \left(\frac{4\pi}{8\pi - \beta^2} \right)}{2 \Gamma \left(\frac{\beta^2/2}{8\pi - \beta^2} \right)} \right)^{\frac{a^2 \beta^2}{4\pi}} \times \\ &\times \exp \left(\int_0^\infty \frac{dt}{t} \left[\frac{\sinh^2 \left(\frac{a\beta^2}{4\pi} t \right)}{2 \sinh \left(\frac{\beta^2}{8\pi} t \right) \cosh \left(\left(1 - \frac{\beta^2}{8\pi} \right) t \right) \sinh t} - \frac{a^2 \beta^2}{4\pi} e^{-2t} \right] \right) , \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

az exponencializált mező operátor egzakt vákuum várható értéke [52]. Az ún. minimális form faktor

$$f_\xi(\theta) = \exp \left(\int_0^\infty \frac{dt}{t} 4 \cosh \left[\left(1 - \frac{i\theta}{\pi} \right) t \right] \frac{\sinh\left(\frac{\xi}{2}t\right) \sinh\left(\frac{\xi+1}{2}t\right) \sinh\left(\frac{t}{2}\right)}{\sinh^2 t} \right) \quad (\text{C.6})$$

reprezentációja csak a $-2\pi < \text{Im}\theta < 0$ sávon érvényes. Az f_ξ függvény az ezen a sávon kívüli rapiditásértékeknél a

$$f_\xi(\theta)f_\xi(\theta + i\pi) = \frac{\sinh \theta}{\sinh \theta - i \sin \pi \xi} \quad (\text{C.7})$$

összefüggés segítségével számítható. Magasabb energiájú lélegzők exponenciális form faktorait annak segítségével számíthatjuk, hogy a B_n lélegző tekinthető n darab B_1 lélegző kötött állapotának. Ennek megfelelően

$$\begin{aligned} F_{k_1 \dots k_r n l_1 \dots l_s}^a(\theta_1, \dots, \theta_r, \theta, \theta'_1, \dots, \theta'_s) = \\ \langle 0 | e^{ia\beta\phi(0)} | B_{k_1}(\theta_1) \dots B_{k_r}(\theta_r) B_n(\theta) B_{l_1}(\theta'_1) \dots B_{l_s}(\theta'_s) \rangle = \gamma_{11}^2 \gamma_{12}^3 \dots \gamma_{1n-1}^n \times \\ \times F_{k_1 \dots k_r \underbrace{11 \dots 1}_n l_1 \dots l_s}^a \left(\theta_1, \dots, \theta_r, \theta + \frac{1-n}{2} i\pi\xi, \theta + \frac{3-n}{2} i\pi\xi, \dots, \theta + \frac{n-1}{2} i\pi\xi, \theta'_1, \dots, \theta'_s \right). \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

A $3 \rightarrow 11$ esetben a kiszámítandó form faktor

$$F_{311}^{1/2}(i\pi, \theta_c, -\theta_c) = \gamma_{11}^2 \gamma_{12}^3 F_{111111}^{1/2}(i\pi - i\pi\xi, i\pi, i\pi + i\pi\xi, \theta_c, -\theta_c), \quad (\text{C.9})$$

ahol

$$\theta_c = \text{acosh} \left(\frac{m_3}{2m_1} \right) = \text{acosh} \left(\frac{\sin \frac{3\pi\xi}{2}}{2 \sin \frac{\pi\xi}{2}} \right), \quad (\text{C.10})$$

míg $4 \rightarrow 11$ esetben a kiszámítandó form faktor

$$\begin{aligned} F_{411}^{1/2}(i\pi, \theta_c, -\theta_c) = \\ = \gamma_{11}^2 \gamma_{12}^3 \gamma_{13}^4 F_{111111}^{1/2} \left(i\pi - \frac{3i\pi\xi}{2}, i\pi - \frac{i\pi\xi}{2}, i\pi + \frac{i\pi\xi}{2}, i\pi + \frac{3i\pi\xi}{2}, \theta_c, -\theta_c \right), \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

ahol

$$\theta_c = \text{acosh} \left(\frac{m_4}{2m_1} \right) = \text{acosh} \left(\frac{\sin 2\pi\xi}{2 \sin \frac{\pi\xi}{2}} \right). \quad (\text{C.12})$$

D. függelék

A WKB módszer

A szemiklasszikus WKB módszert egy egy dimenziós rendszeren mutatjuk be, a [45] forrás segítségével. A Feynman-féle pályaintegrál megadja azt a mátrixelemet, hogy a részecske a q_a pontból T idő alatt a q_b pontba időfejlődik.

$$\langle q_b | \exp(-iHT/\hbar) | q_a \rangle = \int \mathcal{D}[q(t)]_{q_b, q_a} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[q]\right). \quad (\text{D.1})$$

Definiáljuk a $G(T)$ függvényt

$$G(T) = \text{Tr}(\exp(-iHT/\hbar)), \quad (\text{D.2})$$

majd a trace-t számítsuk ki energia- és koordinátabázisban is

$$\begin{aligned} G(T) &= \text{Tr}(\exp(-iHT/\hbar)) = \sum_n \exp(-iE_n T/\hbar) = \\ &= \int dq_0 \langle q_0 | \exp(-iHT/\hbar) | q_0 \rangle = \int \mathcal{D}q(t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[q]\right). \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Ebből az látható, hogy a pályaintegrál információt tartalmaz a részecske energiaszintjeiről. Szemiklasszikus közelítésben a hatást sorbafejtjük a részecske klasszikus pályája körül¹

$$S[q(t)] = S[q_{cl}(t)] + \frac{1}{2} \int dt y(t) O(t) y(t) + \mathcal{O}(y^3), \quad (\text{D.4})$$

ahol

$$\begin{aligned} O(t, t') &= \frac{\delta^2 S[q]}{\delta q(t) \delta q(t')} \Big|_{q_{cl}(t)} = \frac{\delta^2}{\delta q(t) \delta q(t')} \left(\int dt \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 - V(q) \right\} \right) \Big|_{q_{cl}(t)} = \\ &= \delta(t - t') \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial q^2} \Big|_{q_{cl}(t)} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

¹Az elsőrendű tag nulla, hiszen a hatás extrémuma definiálja a klasszikus pályát.

A stacionárius fázis közelítés során a pályaintegrált a klasszikus pálya hatása dominálja, az O -ból eredő korrekciók pedig

$$\int \mathcal{D}q(t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[q(t)]\right) \approx \text{const.} \cdot \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[q_{cl}(t)]\right) [\det(O)]^{-1/2} , \quad (\text{D.6})$$

amely az N dimenziós Gauss-integrállal való analógiából látható

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}y(t) \exp\left(-\frac{1}{2i\hbar} \int dt y(t) O(t) y(t)\right) &= \text{const.} \cdot [\det(O)]^{-1/2} \iff \\ \iff \int d^N x \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i A_{ij} x_j\right) &= (2\pi)^{N/2} [\det(A)]^{-1/2} . \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Az (D.6) egyenletből látszik, hogy a klasszikus pálya hatása, és O stabilitásmátrixa tartalmazza az energiaszintekre vonatkozó információt. A stabilitásmátrix determinánsa leg-egyszerűbben a sajátértékei szorzataként számítható. Az energiaszintek megtalálásához definiáljuk a következő függvényt

$$\mathcal{G}(E) = \text{Tr} \left(\frac{1}{E - H} \right) = \frac{i}{\hbar} \int_0^\infty dT G(T) \exp(iET/\hbar) . \quad (\text{D.8})$$

A kötött állapotok energiaértékeinél ennek a függvénynek nyilvánvalóan pólusai vannak. A stacionárius fázis közelítés többszöri alkalmazásával belátható, hogy stabil kötött állapotok megfeleltethetők periodikus klasszikus pályákkal, és a $\mathcal{G}(E)$ függvény a következő alakban írható

$$\mathcal{G}(E) = \frac{-i\tau(E)}{\hbar} \frac{\exp\left(\frac{i}{\hbar} W(E)\right)}{1 + \exp\left(\frac{i}{\hbar} W(E)\right)} , \quad (\text{D.9})$$

amelynek pólusai a

$$W_m = (2m + 1)\pi\hbar \quad (\text{D.10})$$

értékeknél találhatók, és

$$W(E) = S(\tau(E)) + E\tau(E) , \quad (\text{D.11})$$

ahol $\tau(E)$ az E energiájú klasszikus pálya periódusideje. Tehát a kvantumelmélet kötött állapotainak energiáit a szemiklasszikus közelítésben a $W(E) = W_m$ egyenlet megoldásai határozzák meg, melynek megoldásához a klasszikus periodikus pályák ismerete szükséges.

Dashen, Hasslacher és Neveu a fent ismertetett egy szabadsági fokú rendszerekre alkalmazható módszert általánosította a végtelen szabadsági fokú térelméletekre [53], és meghatározták a sine-Gordon modell szemiklasszikus spektrumát is [54]. Az egzakt spektrumot később a Zamolodchikov testvérek határozták meg [41]. Módszerük helyességének igazolásában fontos szerepet játszott a szemiklasszikus spektrum ismerete, és az egzakt eredmények sorfejtésével mutatott konzisztenciája.

Irodalomjegyzék

- [1] T. Kinoshita, T. Wenger, and D. S. Weiss, „A quantum Newton’s cradle,” *Nature* **440** (2006) 900–903.
- [2] R. Coldea, D. A. Tennant, E. M. Wheeler, E. Wawrzynska, D. Prabhakaran, M. Telling, K. Habicht, P. Smeibidl, and K. Kiefer, „Quantum Criticality in an Ising Chain: Experimental Evidence for Emergent E_8 Symmetry,” *Science* **327** (2010) 177–180.
- [3] T. Langen, R. Geiger, and J. Schmiedmayer, „Ultracold Atoms Out of Equilibrium,” *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **6** (2015) 201–217.
- [4] T. Schweigler, V. Kasper, S. Erne, I. Mazets, B. Rauer, F. Cataldini, T. Langen, T. Gasenzer, J. Berges, and J. Schmiedmayer, „Experimental characterization of a quantum many-body system via higher-order correlations,” *Nature* **545** (2017) 323–326.
- [5] I. L. Bogolyubskiĭ, „Oscillating particle-like solutions of the nonlinear Klein-Gordon equation,” *JETP Letters* **24** (1976) 535.
- [6] I. L. Bogolyubskiĭ and V. G. Makhan’kov, „Dynamics of spherically symmetrical pulsons of large amplitude,” *JETP Letters* **25** (1977) 107.
- [7] H. Segur and M. D. Kruskal, „Nonexistence of small-amplitude breather solutions in ϕ^4 theory,” *Phys. Rev. Lett.* **58** (1987) 747–750.
- [8] M. Gleiser, „Pseudostable bubbles,” *Phys. Rev. D* **49** (1994) 2978–2981.
- [9] Nagy Botond, „Oscillonok dinamikája,” 2020. TDK dolgozat.
- [10] B. C. Nagy and G. Takács, „Collapse instability and staccato decay of oscillons in various dimensions,” *Phys. Rev. D* **104** (2021) 056033.
- [11] A. Scott, F. Chu, and D. McLaughlin, „The soliton: A new concept in applied science,” *Proc. IEEE* **61** (1973) 1443–1483.

-
- [12] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, and H. Segur, „Method for Solving the Sine-Gordon Equation,” *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1262–1264.
 - [13] L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan, „Essentially Nonlinear One-Dimensional Model Of The Classical Field Theory,” *Teor. Mat. Fiz.* **21** (1974) 160–174.
 - [14] E. J. Copeland, M. Gleiser, and H.-R. Müller, „Oscillons: Resonant configurations during bubble collapse,” *Phys. Rev. D* **52** (1995) 1920–1933.
 - [15] M. Hindmarsh and P. Salmi, „Numerical investigations of oscillons in 2 dimensions,” *Phys. Rev. D* **74** (2006) 105005.
 - [16] M. Gleiser and A. Sornborger, „Long-lived localized field configurations in small lattices: Application to oscillons,” *Phys. Rev. E* **62** (2000) 1368–1374.
 - [17] P. M. Saffin and A. Tranberg, „Oscillons and quasi-breathers in d+1 dimensions,” *JHEP* **2007** (2007) 030.
 - [18] M. P. Hertzberg, „Quantum radiation of oscillons,” *Phys. Rev. D* **82** (2010) 045022.
 - [19] P. M. Saffin, P. Tognarelli, and A. Tranberg, „Oscillon lifetime in the presence of quantum fluctuations,” *JHEP* **2014** (2014) 125.
 - [20] J. Ollé, O. Pujolàs, T. Vachaspati, and G. Zahariade, „Quantum evaporation of classical breathers,” *Phys. Rev. D* **100** (2019) 045011.
 - [21] E. A. Andersen and A. Tranberg, „Four results on φ^4 oscillons in d+1 dimensions,” *JHEP* **2012** (2012) 016.
 - [22] E. J. Copeland, M. Gleiser, and H.-R. Müller, „Oscillons: Resonant configurations during bubble collapse,” *Phys. Rev. D* **52** (1995) 1920–1933.
 - [23] M. Gleiser and D. Sicilia, „Analytical characterization of oscillon energy and lifetime,” *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008) 011602.
 - [24] M. Gleiser and D. Sicilia, „General theory of oscillon dynamics,” *Phys. Rev. D* **80** (2009) 125037.
 - [25] H.-Y. Zhang, M. A. Amin, E. J. Copeland, P. M. Saffin, and K. D. Lozanov, „Classical decay rates of oscillons,” *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2020** (2020) 055.
 - [26] M. Gleiser, „Pseudostable bubbles,” *Phys. Rev. D* **49** (1994) 2978–2981.
 - [27] F. C. Simas, F. C. Lima, K. Z. Nobrega, and A. R. Gomes, „Solitary oscillations and multiple antikink-kink pairs in the double sine-Gordon model,” *JHEP* **2020** (2020) 143.

-
- [28] G. Fodor, „A review on radiation of oscillons and oscillatons,” [arXiv:1911.03340 \[hep-th\]](#).
- [29] G. Fodor, P. Forgács, Z. Horváth, and A. Lukács, „Small amplitude quasibreathers and oscillons,” *Phys. Rev. D* **78** (2008) 025003.
- [30] G. Fodor, P. Forgács, Z. Horváth, and M. Mezei, „Computation of the radiation amplitude of oscillons,” *Phys. Rev. D* **79** (2009) 065002.
- [31] G. Fodor, P. Forgács, Z. Horváth, and M. Mezei, „Radiation of scalar oscillons in 2 and 3 dimensions,” *Phys. Lett. B* **674** (2009) 319–324.
- [32] P. Dorey, T. Romańczukiewicz, and Y. Shnir, „Staccato radiation from the decay of large amplitude oscillons,” *Phys. Lett. B* **806** (2020) 135497.
- [33] D. Cyncynates and T. Giurgica-Tiron, „Structure of the oscillon: The dynamics of attractive self-interaction,” *Phys. Rev. D* **103** (2021) 116011.
- [34] E. P. Honda and M. W. Choptuik, „Fine structure of oscillons in the spherically symmetric φ^4 Klein-Gordon model,” *Phys. Rev. D* **65** (2002) 084037.
- [35] J. Ollé, O. Pujolàs, and F. Rompineve, „Recipes for oscillon longevity,” *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2021** (2021) 015.
- [36] G. Fodor, P. Forgács, P. Grandclément, and I. Rácz, „Oscillons and quasibreathers in the ϕ^4 Klein-Gordon model,” *Phys. Rev. D* **74** (2006) 124003.
- [37] G. L. Alfimov, W. A. B. Evans, and L. Vázquez, „On radial sine-Gordon breathers,” *Nonlinearity* **13** (2000) 1657–1680.
- [38] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.
- [39] G. Mussardo, *Statistical field theory: an introduction to exactly solved models in statistical physics*. Oxford Univ. Press, New York, NY, 2010.
- [40] P. Dorey, „Exact S matrices,” in *Eotvos Summer School in Physics: Conformal Field Theories and Integrable Models*, pp. 85–125. 1996. [arXiv:hep-th/9810026](#).
- [41] A. B. Zamolodchikov and Al. B. Zamolodchikov, „Factorized S-matrices in two dimensions as the exact solutions of certain relativistic quantum field theory models,” *Ann. Phys. (N. Y.)* **120** (1979) 253–291.

-
- [42] G. F. Chew and S. C. Frautschi, „Principle of Equivalence for all Strongly Interacting Particles within the S -Matrix Framework,” *Phys. Rev. Lett.* **7** (1961) 394–397.
- [43] I. Vona, „Finite volume corrections of non-diagonal form factors,” [arXiv:1908.09704](https://arxiv.org/abs/1908.09704) [hep-th].
- [44] A. B. Zamolodchikov, „Mass scale in the sine-Gordon model and its reductions,” *Int. J. Mod. Phys. A* **10** (1995) 1125–1150.
- [45] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*. North Holland, 1982.
- [46] G. Takács, „Form factor perturbation theory from finite volume,” *Nucl. Phys. B* **825** (2010) 466–481.
- [47] G. Delfino, G. Mussardo, and P. Simonetti, „Non-integrable quantum field theories as perturbations of certain integrable models,” *Nucl. Phys. B* **473** (1996) 469–508.
- [48] G. Delfino, P. Grinza, and G. Mussardo, „Decay of particles above threshold in the ising field theory with magnetic field,” *Nucl. Phys. B* **737** (2006) 291–303.
- [49] B. Pozsgay and G. Takács, „Characterization of resonances using finite size effects,” *Nucl. Phys. B* **748** (2006) 485–523.
- [50] A. J. A. James, R. M. Konik, P. Lecheminant, N. J. Robinson, and A. M. Tsvelik, „Non-perturbative methodologies for low-dimensional strongly-correlated systems: From non-Abelian bosonization to truncated spectrum methods,” *Rep. Prog. Phys.* **81** (2018) 046002.
- [51] G. Fodor and I. RÁCZ, „Numerical investigation of highly excited magnetic monopoles in $SU(2)$ Yang-Mills-Higgs theory,” *Phys. Rev. D* **77** (2008) 025019.
- [52] S. L. Lukyanov and A. B. Zamolodchikov, „Exact expectation values of local fields in quantum sine-Gordon model,” *Nucl. Phys. B* **493** (1997) 571–587, [arXiv:hep-th/9611238](https://arxiv.org/abs/hep-th/9611238).
- [53] R. F. Dashen, B. Hasslacher, and A. Neveu, „Nonperturbative methods and extended-hadron models in field theory. I. Semiclassical functional methods,” *Phys. Rev. D* **10** (1974) 4114–4129.
- [54] R. F. Dashen, B. Hasslacher, and A. Neveu, „Particle spectrum in model field theories from semiclassical functional integral techniques,” *Phys. Rev. D* **11** (1975) 3424–3450.