

BTZ fekete lyuk duális összefonódottsági mintázatainak vizsgálata klaszter algebrák segítségével

TDK DOLGOZAT

Boldis Bercel

BME Természettudományi Kar

Kutatófizikus MSc

Témavezető:

Dr. Lévay Péter Pál

Tudományos főmunkatárs

BME Fizikai Intézet

Elméleti Fizika Tanszék



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

2021

AZ INNOVÁCIÓS ÉS TECHOLÓGIAI MINISZTERIUM ÚNKP-20-1 KÓDSZÁMÚ
ÚJ NEMZETI KIVÁLÓSÁG PROGRAMJÁNAK A NEMZETI KUTATÁSI, FEJLESZ-
TÉSI ÉS INNOVÁCIÓS ALAPBÓL FINANSZÍROZOTT SZAKMAI TÁMOGATÁSÁ-
VAL KÉSZÜLT.



NEMZETI KUTATÁSI, FEJLESZTÉSI
ÉS INNOVÁCIÓS HIVATAL

ÚNKP
Új Nemzeti
Kiválóság Program

Absztrakt

Az $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$ megfeleltetés kapcsolatát teremtem a 2+1 dimenziós aszimptotikusan anti-de Sitter terek geodetikusai, valamint a tér kétdimenziós határán lévő konform térelméletek megfelelő tartományainak kvantum információelméleti mennyiségei között. Dolgozatomban ezen megfeleltetés egy speciális esetét vizsgálom. A makroszkópikus BTZ fekete lyukak triangulációinak szerkezetéből kiindulva megmutatom, hogy a magas hőmérsékletű CFT tartományainak összefonódottsági entrópiái úgynevezett C_n típusú klaszter algebrákkal, kölcsönös feltételes információi pedig Zamolodchikov Y-rendszerekkel állnak kapcsolatban. Korábbi eredményeinkkel együtt így már nem csak a vákuum, hanem a magas hőmérsékletű CFT összefonódottságának is algebrai leírást adtunk.

Tartalomjegyzék

1. Bevezető	5
2. A BTZ fekete lyuk	8
3. A BTZ fekete lyuk geodetikusai	12
4. Összefonódottsági mennyiségek	18
5. BTZ triangulációinak klaszter algebrai leírása	24
5.1. Kicserélési gráf	24
5.2. Klaszter algebra	26
6. A kinematikus tér és az Y-rendszerek	34
7. Összefoglalás	43
Függelék	45
A. Lambda-hossz	45
B. Pontozott felületek és triangulációk	47
B.1. Sokszög kicserélési gráfja	49
B.2. Lyukas sokszög kicserélési gráfja	49
C. Klaszter algebrák	51
C.1. A_n klaszter algebra	54
C.2. C_n klaszter algebra	56
Irodalomjegyzék	59

1. fejezet

Bevezető

A modern fizika egyik alapvető kérdése, hogy a gravitáció elméletének klasszikus fizikai leírása hogyan hozható kapcsolatba a kvantummechanika jelenségeivel. Ezt a kérdést igyekszik magválaszolni az úgynevezett AdS/CFT megfeleltetés, amely kapcsolatot teremt a kvantumozott összefonódottság és a gravitáció jelenségei között. Általános esetben az AdS/CFT megfeleltetés szerint összefüggés van az aszimptotikusan anti-de Sitter terek minimális felületei, valamint a tér eggyel alacsonyabb dimenziós határán lévő konform térelméletek megfelelő tartományainak kvantum információelméleti mennyiségei között. A CFT vákuum gerjesztései a duális elméletben különböző, AdS jellegű geometriákat eredményezhetnek. Ilyenek például az úgynevezett makroszkópikus BTZ (Banados-Teitelboim-Zanelli) fekete lyukak [1], amelyek az AdS tér faktorizációjának segítségével állíthatók elő. Dolgozatom fő témája a statikus, makroszkópikus, nem forgó BTZ fekete lyuk geometria és a duális, magas hőmérsékletű CFT.

A kvantum információelmélet egyik alapvető összefüggése az úgynevezett erős szubadditivitás, amely egy kvantumrendszer részrendszereinek összefonódottsági entrópiáira szolgáltat megkötéseket. Az erős szubadditivitás szerkezete miatt a CFT összefonódottsági mennyiségei több részrendszerre való particionálása esetén a duális gravitációs térben godetikus sokszögek triangulációin keresztül vizsgálhatók. Témavezetőmmel korábban a tiszta AdS tér triangulációiból kiindulva megmutattuk [2], hogy a duális CFT vákuum tartományainak entrópiái úgynevezett A_n típusú klaszter algebrákat alkotnak [3, 4, 5]. Arra is rámutattunk, hogy a több részrendszerre vonatkozó kölcsönös feltételes információk az integrálható rendszerek elméletéből ismert [6, 7, 8] Y-rendszereket alkotnak [9]. Dolgozatomban a CFT vákuumból kilépve megmutatom, hogy a makroszkópikus

BTZ fekete lyukakkal duális magas hőmérsékletű CFT tartományok összefonódottsági mennyiségei szintén klaszter algebrákat határoznak meg.

Dolgozatom második fejezetében bemutatom az anti-de Sitter geometriát és ismertetem, hogy a faktorizációjával hogyan lehet előállítani a 2+1 dimenziós BTZ fekete lyukat. A statikus, nem forgó, makrószkópikus esetre szorítkozva megmutatom, hogy a geometria hogyan vihető át az AdS tér egy gyakran használt reprezentációjába, a Poincaré körmodellbe.

A harmadik fejezetben bemutatom a BTZ fekete lyuk minimális íveit, más néven geodetikusait. Elmagyarázom, hogy ezek a görbék hogyan jelennek meg a körmodellel. Végül bevezetem az úgynevezett lambda-hossz fogalmát, amely a geodetikusok regularizált hosszával áll kapcsolatban.

A dolgozat negyedik fejezetében összefoglalom az összetett kvantumrendszerekre vonatkozó alapvető fogalmakat és relációkat, úgy mint az összefonódottsági entrópiát és a kölcsönös feltételes információt. Ezután ismertetem az AdS/CFT megfelelést és annak legfontosabb eredményét, a Ryu-Takayanagi formulát [10, 11, 12], amely összekapcsolja az AdS tér geodetikusainak hosszát és a tér határán értelmezett konform térelmélet részrendszereinek összefonódottsági entrópiáit. Végül kifejtem, hogy az összefonódottsági mennyiségek hogyan származtathatók a körmodell segítségével.

Az ötödik fejezetben rátérek a dolgozat fő eredményeire. Ismertetem a BTZ fekete lyuk triangulációit és bemutatom, hogy ezek egy zárt struktúrát alkotnak. Kiderül, hogy a triangulációk kapcsolatai egy úgynevezett ciklohedront határoznak meg [14, 15, 16]. A ciklohedronok absztrakt matematikai struktúrákkal, úgynevezett klaszter algebrákkal állnak kapcsolatban. A fejezet végén a tiszta AdS térre kapott eredményeken keresztül megmutatom, hogy a BTZ fekete lyukak lambda-hosszai, így a határ összefonódottsági entrópiái egy C_n klaszter algebrát [3, 4, 5] alkotnak. Végül egy általános formulát adok a CFT összefonódottsági mennyiségeire vákuum és magas hőmérséklet esetén.

Az utolsó fejezetben bevezetem a geodetikusok terét, az úgynevezett kinematikus teret [19, 26]. Ezen a téren egy tetszőleges körmodellbeli sokszög tartományokat határoz meg. Ezen tartományok területeire levezetek egy relációt, amely az integrálható rendszerek elméletéből [6, 7, 8] ismert Zamolodchikov Y-rendszerekkel [9] áll kapcsolatban. Ez a Ryu-Takayanagi összefüggésen keresztül a kölcsönös feltételes információkra is összefüggést ad. A körmodell faktorizációjából kiindulva végül megmutatom, hogy BTZ fekete lyuk esetén ez az összefüggés hogyan módosul.

Munkám egy éppen referálás alatt álló, témavezetőmmel közös munkánk alapján készült cikk alapján készült [13] néhány részletesebb magyarázattal és kiegészítéssel. A fizikailag releváns és a téma szempontjából elengedhetetlen részeket a 2.-5. fejezetek tartalmazzák. Ezek teljes egészében a megírt a cikkekre támaszkodnak. A függelékben azonban fontos hangsúlyt fektettem a felhasznált matematikai struktúrák, úgy mint a lambda-hosszak, pontozott Riemann-felületek és klaszter algebrák részletes ismertetésére. Ezek megértése a végeredmény szempontjából nem lényeges, a fő szövegben ezek egyszerűsített modelljeit használom. Azonban a pontos matematikai háttér megértése szempontjából elengedhetetlenek.

2. fejezet

A BTZ fekete lyuk

Az AdS/CFT megfelelés tisztán geometriai oldalát az úgynevezett anti-de Sitter tér szolgáltatja. Az AdS_3 tér a sík $\mathbb{R}^{2,2}$ tér azon pontjainak halmaza, amelyekre teljesül a következő geometriai kényszer:

$$-U^2 - V^2 + X^2 + Y^2 = -R^2 \quad (1)$$

Ahol R az úgynevezett AdS sugár. A metrika $\mathbb{R}^{2,2}$ -n az alábbi ívelem négyzetet adja:

$$ds^2 = -dU^2 - dV^2 + dX^2 + dY^2 \quad (2)$$

Az AdS tér koordinátáit egy 2×2 -es mátrixba rendezhetjük a következőképpen:

$$\mathbf{X} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} U + X & V + Y \\ -V + Y & U - X \end{pmatrix} \quad (3)$$

Ahol $\det(\mathbf{X}) = 1$, vagyis $\mathbf{X} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Ekkor a tér izometriáit az $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) / \mathbb{Z}_2$ csoport elemei adják, ahol a csoport hatás egy mátrix szorzás jobbról és balról a következőképpen: $\mathbf{X} \rightarrow \rho_L \mathbf{X} \rho_R$, ahol $\rho_L, \rho_R \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ és $(\rho_L, \rho_R) \sim (-\rho_L, \rho_R)$.

Különböző (ρ_L, ρ_R) párok megválasztásával előállíthatók különböző $AdS / \langle (\rho_L, \rho_R) \rangle$ hányados terek [32, 34, 33], ahol $\langle (\rho_L, \rho_R) \rangle$ az $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) / \mathbb{Z}_2$ csoport (ρ_L, ρ_R) által generált diszkrét részcsoportha. Dolgozatomban ezeknek egy speciális esetével foglalkozok, az úgynevezett BTZ (Banados, Teitelboim, Zanelli) fekete lyukakkal [1]. Ezek az Einstein-egyenletek $2 + 1$ dimenziós megoldásait szolgáltatják negatív kozmológikus konstanssal. A fekete lyuk elnevezés abból ered, hogy ezek a geometriák a jól ismert $3 + 1$ dimenziós

fekete lyukakhoz hasonló tulajdonságokkal rendelkeznek, például rendelhető hozzájuk tömeg illetve perdület, valamint forgó esetben két eseményhorizontjuk van.

A következőkben a nulla impulzusmomentumú esetre szorítkozok. Ekkor az $AdS/\langle(\rho_L, \rho_R)\rangle$ faktorizációhoz használt $SL(2, \mathbb{R})$ elemek a következő alakúak:

$$\rho := \rho_L = \rho_R = \begin{pmatrix} e^{\pi r_+/R} & 0 \\ 0 & e^{-\pi r_+/R} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Megmutatható, hogy ekkor a BTZ geometriát az úgynevezett Schwarzschild koordináták segítségével írhatjuk le:

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{R}{r_+} r \cosh\left(\frac{r_+}{R} \varphi\right) \\ \sqrt{\left(\frac{R}{r_+} r\right)^2 - R^2} \sinh\left(\frac{r_+}{R} \tau\right) \\ \frac{R}{r_+} r \sinh\left(\frac{r_+}{R} \varphi\right) \\ \sqrt{\left(\frac{R}{r_+} r\right)^2 - R^2} \cosh\left(\frac{r_+}{R} \tau\right) \end{pmatrix} \quad (5)$$

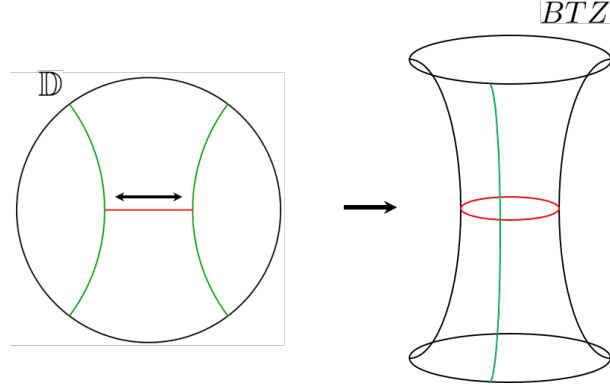
Ahol τ időszerű, r radiális, φ pedig hiperbolikus polár koordinátaként fogható fel. A faktorizációból adódóan $\varphi \sim \varphi + 2\pi$, vagyis $-\pi \leq \varphi < \pi$ [32, 34, 33, 35]. A (2) metrikát átírva kapjuk:

$$ds^2 = -\left(r^2 - r_+^2\right) d\tau^2 + \frac{R^2}{r^2 - r_+^2} dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad (6)$$

Látható, hogy az ívelemnégyzet $r = r_+$ esetén divergens, amely az esemény horizontnak felel meg. A fekete lyuk M tömege közvetlenül kifejezhető az R AdS hossz és r_+ segítségével a következő módon: $M = r_+^2/R^2$, ha a $8G = 1$ mértékegységrendszert használjuk [1]. Dolgozatomban az úgynevezett makroszkópikus esettel foglalkozom, amely az $M \gg 1$. A későbbiekben a BTZ geometria határával részletesen foglalkozok, amelyet az $r \rightarrow \infty$ határérték definiál és ∂BTZ -vel jelölök.

Vezessük most be a következő ρ radiális, Θ időszerű és t hiperbolikus polár koordinátákat:

$$\begin{pmatrix} r \\ \tau \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_+ \cosh \rho \\ \frac{R}{r_+} \Theta \\ \frac{R}{r_+} t \end{pmatrix} \quad (7)$$



1. ábra. A statikus BTZ fekete lyuk a körmodell egy diszkrét részcsoporthoz való lefaktorizációjából kapható meg. Szemléletesen ez azt jelenti, hogy két, egymást nem metsző geodetikus (zöld) közötti tartományt kivágunk és a tartomány két szélét azonosítjuk. Ekkor a fekete lyuk horizontját a két geodetikus közötti legrövidebb hiperbolikus szakasz (piros) határozza meg.

Ekkor az (5) metrika a következő alakot ölti:

$$ds^2 = R^2 \left(\cosh^2 \rho dt^2 + d\rho^2 - \sinh^2 \rho d\Theta^2 \right) \quad (8)$$

Vegyük észre, hogy a metrika ebben a formában független r_+ -tól, azonban t (és Θ) koordináta tartománya függ tőle, vagyis $-\frac{r_+}{R}\pi \leq t < +\frac{r_+}{R}\pi$. Az $M \gg 1$ makroszkópikus esetben ez azt jelenti, hogy $-\infty < t < \infty$. A dolgozat további részében a statikus $\tau = 0$ (így $V = 0$ és $\Theta=0$) esetet vizsgálom. Ekkor a metrika a következő alakra egyszerűsödik:

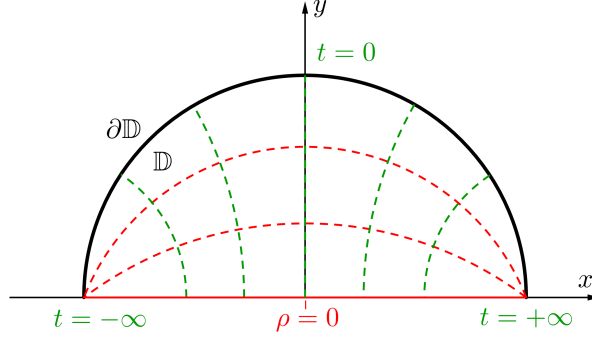
$$ds^2 = R^2 \left(\cosh^2 \rho dt^2 + d\rho^2 \right) \quad (9)$$

A statikus BTZ fekete lyuk egy másik reprezentációját kapjuk, ha a hiperbolikus geometriából ismert $\mathbb{D}$ Poincaré körmodellt használjuk. Tekintsük a következő koordináta transzformációt:

$$z = \frac{X + iY}{R + U} = x + iy = |z|e^{i\vartheta} \in \mathbb{D} \quad (10)$$

Amely a tiszta, statikus AdS teret a $|z| < 1$ komplex egységkörre képezi le, amelyen a távolságnégyzet:

$$ds^2 = \frac{4R^2}{(1 - x^2 - y^2)^2} (dx^2 + dy^2) \quad (11)$$



2. ábra. A (7)-ben bevezetett koordináták koordinátavonalai a körmodell felső felén statikus esetben. A zöld vonalak a $t = \text{const.}$, a piros vonalak pedig a $\rho = \text{const.}$ görbéket jelzik. A fekete lyuk horizontját a $\rho = 0$ egyenes adja. Mivel esetünkben $M \gg 1$, ezért a $t = \pm\infty$ (azaz $x = \pm 1$) pontok azonosítva vannak.

A körmodell $\partial\mathbb{D}$ határa a $z^2 = x^2 + y^2 = 1$ komplex egységkör. Az (4) elememmel való $AdS/\langle(\rho, \rho)\rangle$ faktorizáció a körmodellen szemléltessen azt jelenti, hogy az egységkörből két, az $y = 0$ tengelyre merőleges, nem metsző geodetikus által meghatározott tartományt kivágunk, majd a két geodetikus minden pontját megfeleltetjük egymásnak (1. ábra). Ekkor a fekete lyuk horizontja az $y = 0$ szakasz kivágott tartományon belüli része, az általunk vizsgált geometria pedig a tartomány $y > 0$ része. A speciális $M \gg 1$ makroszkópikus esetben a faktorizációhoz használt két geodetikus az $x = \pm 1$ pontokba zsugorodik, vagyis a makroszkópikus BTZ fekete lyuk körmodell reprezentációja a pozitív komplex félkör [17], ahol $\vartheta = 0 \sim \vartheta = \pi$. A t hiperbolikus polár koordináta és a ϑ komplex argumentum között az átváltást a következő összefüggés adja meg:

$$e^t = \cot \frac{\vartheta}{2} \quad (12)$$

A 2. ábrán ábrázoltam a körmodell felső felét rajta a (7)-ben bevezetett koordináták koordinátavonaláival.

3. fejezet

A BTZ fekete lyuk geodetikusai

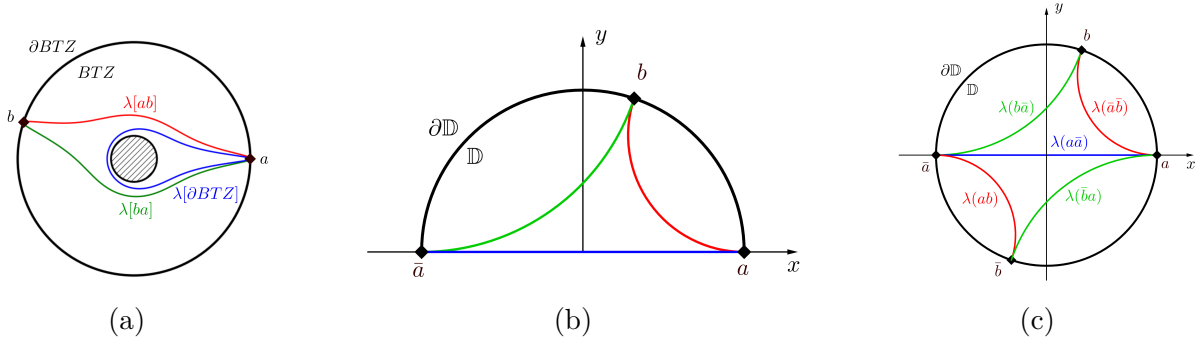
A következőkben a BTZ geometria geodetikusait ismertetem különböző reprezentációkban. Geodetikusnak nevezzük az erőmentes mozgás tetszőleges geometriára való általánosítását. A geodetikusok egyenletét a geometriát jellemző ívelemnégyzet ismeretében az Euler-Lagrange egyenletek segítségével határozhatjuk meg. BTZ fekete lyukak esetében a (2) metrikából kiindulva megmutatható, hogy a geodetikusok egyenlete (5) koordinátákban:

$$r(\varphi; \varphi_a, \varphi_b) = r_+ \frac{\cosh \sqrt{M} \frac{\varphi_b - \varphi_a}{2}}{\sqrt{\cosh^2 \sqrt{M} \frac{\varphi_b - \varphi_a}{2} - \cosh^2 \left(\sqrt{M} \frac{\varphi}{2} - \sqrt{M} \frac{\varphi_b + \varphi_a}{2} \right)}} \quad (13)$$

Ahol φ_a és φ_b a geodetikus $a, b \in \partial BTZ$ végpontjait jellemző koordináták és $\varphi_a < \varphi < \varphi_b$.

Az egyenlet által meghatározott geodetikusokat a $\varphi_b - \varphi_a$ nyílásszögük alapján csoportosíthatjuk. A következőkben azokra az esetekre szorítkozunk, amelyekre teljesül, hogy $\varphi_b - \varphi_a \leq 2\pi$ (az ennél nagyobb nyílásszögű geodetikusok önmagukat metszve megkerülik a feketelyuk horizontját). Amennyiben $\varphi_b - \varphi_a = 2\pi$, akkor a geodetikus egyszer megkerüli a horizontot és két végpontja egybeesik. Ezt a későbbiekben huroknak nevezem. Mivel $\varphi \sim \varphi + 2\pi$, ezért ha $\varphi_b - \varphi_a < 2\pi$, akkor a két pont között két különböző geodetikus húzható: egy amelyik a horizont egyik oldalán a pontból megy b pontba, másik pedig amelyik a horizont másik oldalán b -pontból megy a $\varphi_a + 2\pi \sim \varphi_a$ koordinátával jellemzett $\bar{a}$ pontba (3. (a) ábra).

Hogyan reprezentálhatók a BTZ geometria geodetikusai a körmodellen? Egy általános körmodellbeli geodetikust a (11) ívelemnégyzettel ellátott komplex egységkörön a



3. ábra. A BTZ geometria geodetikusai BTZ (a), és körmodell reprezentációban (b). Mind a két esetben a piros és a zöld görbék az a és b pontokat kötik össze, de a horizontot különböző irányokból kerülik meg. A kék görbék jelölik azt a hurok geodetikust, amelyik az a pontban kezdődik és ugyanott végződik. A körmodellen ez az a és $\bar{a} \sim a$ között haladó átmérő. A BTZ határán lévő két pont a geodetikussal együtt egy BTZ $N = 2$ -szöget alkot. (c) A BTZ kétszög körmodellbeli $2N = 4$ -szög megfelelője. Az (a) és (c) ábrán jelöltem az egyes geodetikuskok lambda-hosszát a különböző reprezentációkban.

következő egyenlet írja le [18]:

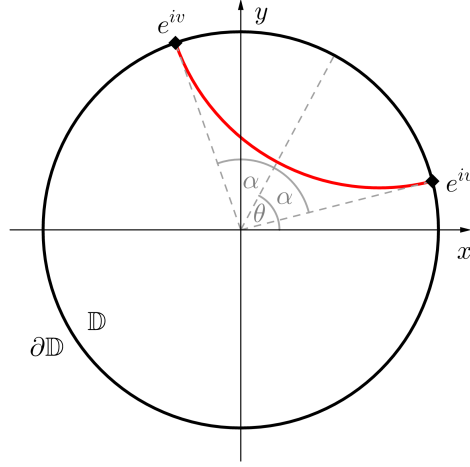
$$\left(x - \frac{B_1}{M}\right)^2 + \left(y - \frac{B_2}{M}\right)^2 = \frac{1}{M^2} \quad (14)$$

Ahol B_1 , B_2 és M paraméterek és $B_1^2 + B_2^2 - M^2 = 1$. Ezek a görbék olyan körívek (vagy speciális esetben egyenesek), amelyek végpontjai a körmodell $\partial\mathbb{D}$ határán vannak és merőlegesek arra. Egy tetszőleges geodetikust tehát megadhatunk akár két paraméterrel is, például a $e^{iu}, e^{iv} \in \partial\mathbb{D}$ végpontjait jellemző u és v komplex argumentumokkal. Egy hasznos paraméter választás továbbá a következő:

$$\theta = (v + u)/2, \quad \alpha = (v - u)/2 \quad (15)$$

Ahol θ a geodetikus körív középpontjának x -tengelytől mért középponti szöge, α pedig a körív félnyílásszöge (4. ábra). A B_1 , B_2 és M paraméterek a következőképpen fejezhetők ki θ és α segítségével [19]:

$$B_1 = \frac{\cos \theta}{\sin \alpha} \quad B_2 = \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} \quad M = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (16)$$



4. ábra. A körmodell geodetikusai (piros) olyan körívek a komplex síkon, amelyek merőlegesek $\partial\mathbb{D}$ -re. Egy geodetikust jellemezhetünk a végpontjait jellemző (u,v) komplex argumentumokkal, vagy a (θ,α) középponti szögével és félnyílás szögével.

Tekintsünk most egy $\mathbb{D}$ -beli geodetikust, amelynek kezdő- és végpontja $a,b \in \partial\mathbb{D}$. Ekkor megmutatható, hogy a geodetikus regularizált hossza [10, 19]:

$$\ell(ab) = 2R \log(e^{\rho_0} \sin \alpha) \quad (17)$$

Ahol a regularizációt úgy választottam meg, hogy $x^2 + y^2 \leq \tanh^2 \rho_0/2$, feltéve, hogy $e^{\rho_0} \gg 1$. Definiáljuk ekkor a következő mennyiséget:

$$\lambda(ab) = e^{\ell(ab)/2R} = e^{\rho_0} \sin \alpha \quad (18)$$

Erre a mennyiségre a továbbiakban lambda-hosszként hivatkozok, ugyanis $R = 1$ esetén ez a Penner által bevezetett lambda-hosszal egyezik meg, ha a geodetikusokat mind a két végpontján ugyanakkora horociklusokkal regularizáljuk [20, 21, 22] (lásd Függelék A).

Ahogy az előző fejezetben részleteztem, a magas hőmérsékletű BTZ fekete lyuk Poincaré körmodell reprezentációja a komplex felső félkör, ahol a félkör két csúcsa azonosítva van ($\vartheta = 0 \sim \vartheta = \pi$). A fekete lyuk geodetikusait reprezentálhatjuk az ezen félkörben található, (14) által megadott körívekkel (vagy egyenesekkel). Jelöljük meg speciálisan két a,b pontot ∂BTZ -n úgy, hogy $\varphi_a = -\pi$ és $-\pi \leq \varphi_b < \pi$ tetszőleges. Ekkor a körmodellen a megfelelő $a,b \in \partial\mathbb{D}$ pontokra $\vartheta_a = 0$ és $0 \leq \vartheta_b < \pi$. Mivel $\vartheta = 0 \sim \vartheta = \pi$

ezért a $\vartheta = \pi$ pontban megjelölhetjük az $\bar{a} \in \partial\mathbb{D}$ pontot, amelyre $a \sim \bar{a}$, vagyis ugyan azt a ∂BTZ pontot jelöli. Ekkor a BTZ geometria a -ból a -ba menő hurok geodetikusa a körmodellen az a -ból $\bar{a}$ -ba menő egyenes szakasz. Az $a, b \in \partial BTZ$ pontok között menő két geodetikus pedig az $a \in \partial\mathbb{D}$ -ből $b \in \partial\mathbb{D}$ -be, illetve a $b \in \partial\mathbb{D}$ -ből $\bar{a} \in \partial\mathbb{D}$ -ba menő körívek (3. (b) ábra).

Vizsgáljuk meg most az imént bemutatott geodetikusokat a lambda-hosszak nyelvén. A BTZ fekete lyuk hurok geodetikusainak a körmodell reprezentációban $\alpha = \pi/2$ félnyílás szög felel meg (ugyanis ezek egyenesek), így:

$$\lambda(a\bar{a}) = e^{\rho_0} \sin \frac{\pi}{2} \quad (19)$$

Vegyük észre, hogy ez a lehető leghosszabb geodetikus. Tekintsük most az a -ból b -be menő geodetikust. Mivel speciálisan $\vartheta_a = 0$, ezért $\alpha = \vartheta_b/2$, vagyis:

$$\lambda(ab) = e^{\rho_0} \sin \frac{\vartheta_b}{2} \quad (20)$$

Végül pedig a b -ből $\bar{a} \sim a$, $\vartheta_{\bar{a}} = \pi$ pontba menő geodetikus (amely BTZ reprezentációban b -ből megy a -ba) lambda-hossza:

$$\lambda(b\bar{a}) = e^{\rho_0} \sin \left(\frac{\pi - \vartheta_b}{2} \right) = e^{\rho_0} \cos \frac{\vartheta_b}{2} \quad (21)$$

Vegyük észre, hogy a lambda-hossz független a geodetikus θ középponti szögétől. Ennek oka, hogy a (11) metrika invariáns a $z \rightarrow ze^{i\gamma}$ transzformációra, vagyis az origó körüli forgatásokra. Ezért tetszőleges két, azonos α nyílásszöggel rendelkező geodetikus hossza megegyezik. Ennek köszönhetően általánosíthatjuk eredményeinket tetszőleges ϑ_a kezdőponttal rendelkező geodetikusokra [24]. A továbbiakban bármely két $a, b \in \partial BTZ$ pontnak a körmodellen mindig négy $a, b, \bar{a}, \bar{b} \in \partial\mathbb{D}$ pontot feleltetünk meg úgy, hogy $\vartheta_{\bar{a}} = \vartheta_a + \pi$ és $\vartheta_{\bar{b}} = \vartheta_b + \pi$, valamint $\bar{a} \sim a$ és $\bar{b} \sim b$.

Ezen a ponton, hogy megkülönböztessük a BTZ és a körmodell határán található, egymásnak megfelelő intervallumokat, érdemes bevezetni egy új jelölést. Amennyiben egy ∂BTZ intervallumról van szó, akkor azt szögletes zárójellel, ha pedig egy $\partial\mathbb{D}$ intervallumról van szó, akkor azt kerek zárójellel jelölöm. Tegyük fel például, hogy van két $a, b \in \partial BTZ$ pontunk. Ekkor ők két különböző intervallumot jelölnek ki a BTZ határán: $[ab]$, $[ba]$. A két pontnak megfelel négy $a, b, \bar{a}, \bar{b} \in \partial\mathbb{D}$ pont. Ezek a körmodell határán a következő intervallumokat jelölik ki: (ab) , $(\bar{a}\bar{b})$, $(b\bar{a})$, $(\bar{b}a)$, $(\bar{a}a)$, $(a\bar{a})$, $(b\bar{b})$ és $(\bar{b}b)$. Ekkor a

pontoknak megfelelően minden, egymáshoz képest középpontosan tükrözött $\partial\mathbb{D}$ intervallum párhoz megfeleltethetünk egy ∂BTZ intervallumot a következőképpen (3. (c) ábra):

$$\partial\mathbb{D} \supset (ab), (\bar{a}\bar{b}) \sim [ab] \subset \partial BTZ \quad (22a)$$

$$\partial\mathbb{D} \supset (b\bar{a}), (a\bar{b}) \sim [ba] \subset \partial BTZ \quad (22b)$$

$$\partial\mathbb{D} \supset (a\bar{a}), (\bar{a}a) \sim [\partial BTZ] \quad (22c)$$

$$\partial\mathbb{D} \supset (b\bar{b}), (\bar{b}b) \sim [\partial BTZ] \quad (22d)$$

Ahol $[\partial BTZ]$ a BTZ fekete lyuk teljes határát jelöli.

Mivel a $\mathbb{D}$ -beli metrika invariáns a forgatásokra, ezért például az $a, b \in \partial\mathbb{D}$ pontok, valamint az $\bar{a}, \bar{b} \in \partial\mathbb{D}$ pontok között menő geodetikusoknak azonos a lambda-hossza. Mivel $a, \bar{a}$ és $b, \bar{b}$ azonos pontokat reprezentálnak ∂BTZ -n, ezért ez a két geodetikus ugyan annak az $a, b \in \partial BTZ$ pontok közt menő geodetikusnak feleltethetők meg a BTZ geometriában. Vagyis a bevezetett jelölést felhasználva, formálisan a következő összefüggéseket írhatjuk fel a lambda-hosszakra: $\lambda[ab] = \lambda(ab) = \lambda(\bar{a}\bar{b})$, $\lambda[ba] = \lambda(b\bar{a}) = \lambda(\bar{b}a)$, illetve $\lambda[\partial BTZ] = \lambda(a\bar{a}) = \lambda(\bar{a}a) = \lambda(b\bar{b}) = \lambda(\bar{b}b)$. Ha feltesszük, hogy az $a, b \in \partial\mathbb{D}$ pontokat jellemző komplex argumentumok ϑ_a és ϑ_b , illetve $\alpha = (\vartheta_b - \vartheta_a)/2$, akkor az előzőek alapján ezek a lambda-hosszak körmodell reprezentációban (3. ábra):

$$\lambda[ab] = \lambda(ab) = \lambda(\bar{a}\bar{b}) = e^{\rho_0} \sin(\alpha) \quad (23a)$$

$$\lambda[ba] = \lambda(b\bar{a}) = \lambda(\bar{b}a) = e^{\rho_0} \cos(\alpha) \quad (23b)$$

$$\lambda[\partial BTZ] = \lambda(a\bar{a}) = \lambda(\bar{a}a) = e^{\rho_0} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (23c)$$

$$\lambda[\partial BTZ] = \lambda(b\bar{b}) = \lambda(\bar{b}b) = e^{\rho_0} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (23d)$$

Ezek a lambda hosszak teljes egészében leírják egy makroszkópikus BTZ kétszög geodetikus szerkezetét.

A fejeztben elhangzottakhoz végül egy megjegyzést fűznék. A BTZ fekete lyuk geodetikusainak hosszát az irodalomban (9) ívelemnyégzet segítségével számolják, amely alapján egy geodetikus hossza:

$$\ell[ab] = 2R \log \left(\frac{2r_0}{r_+} \sinh \frac{t_b - t_a}{2} \right) \quad (24)$$

Ahol $r_0 \gg R$ egy tetszőleges regularizációs faktor. Ez a kifejezés könnyen kapcsolatban hozható (17) geodetikus hosszal, ugyanis (12) segítségével a logaritmus argumentumában

szereplő hiperbolikus függvény a következő alakra írható:

$$\begin{aligned}
\sinh \frac{t_b - t_a}{2} &= \frac{1}{2} e^{-(t_b+t_a)/2} (e^{t_b} - e^{t_a}) = \\
&= \frac{\cot(\vartheta_b/2) - \cot(\vartheta_a/2)}{2\sqrt{\cot(\vartheta_b/2)\cot(\vartheta_a/2)}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\sin \vartheta_b \sin \vartheta_a}} \sin \frac{\vartheta_b - \vartheta_a}{2}
\end{aligned} \tag{25}$$

Vagy másképpen:

$$\sin \frac{\vartheta_b - \vartheta_a}{2} = \frac{1}{\sqrt{\cosh t_b \cosh t_a}} \sinh \frac{t_b - t_a}{2} \tag{26}$$

Hasonlítsuk össze (17) és (24) kifejezéseket. A hiperbolikus függvény előtt szereplő t_a és t_b függő tényező a geodetikusok hosszának regularizációjával hozható kapcsolatba. Ugyan-
is a mind a BTZ, mind a körmodell képben választhatunk uniform regularizációt, amely
azonban a másik reprezentációban már függeni fog az adott koordinátától. Amennyiben
a lambda-hosszat használjuk a geodetikusok hosszának mérésére, úgy ez a "mértéksza-
badság" a horociklusok (Függelék A) szabad megválasztásaként fogható fel.

4. fejezet

Összefonódottsági mennyiségek

A kvantuminformáció-elmélet egyik alapvető mennyisége az úgynevezett összefonódottsági entrópia, amely az összetett kvantum rendszerek összefonódottságának mérőszáma. Hogy megértsük pontosan mit jelent ez, tekintsünk egy két részrendszerrel (A és B) rendelkező összetett kvantum rendszert. A teljes $\mathcal{H}$ állapottér a két részrendszer állapotterének $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ tenzorszorzata.

Ezen a tenzorszorzattéren a fizikai állapotokat általános esetben a $\rho \in \mathcal{H}$ sűrűség operátorokkal leírható kevert állapotok adják meg. Egy teljes rendszer egy kevert állapotát szeparálhatónak nevezzük, ha:

$$\rho = \sum_i w_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B \quad (27)$$

Ahol w_i pozitív valószínűségi súlyok, valamint ρ_i^A és ρ_i^B a megfelelő részrendszerek kevert állapotai. Amennyiben ρ nem esik szét a két részrendszer állapot tenzorzorzatainak fenti alakú (27) konvex kombinációjára, akkor a két részrendszer nem szeparálható. Ekkor ρ -t összefonódott állapotnak hívjuk. Az összefonódottság mértékének számszerűsítésére szolgál a von Neumann-entrópia, melyet a következőképpen definiálunk:

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \ln \rho) \quad (28)$$

Ez pontosan akkor nulla, ha ρ tiszta állapot, különben pozitív.

Tegyük fel, hogy ismerjük egy összetett rendszer állapotát, de csak az A részrendszer állapotára vagyunk kíváncsiak. Ezt az állapotot az úgynevezett redukált sűrűség mátrix

adja meg, amely definíció szerint:

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho) = \sum_j \langle j|_B \rho |j\rangle_B \quad (29)$$

Ahol $\{|j\rangle_B\}$ a $\mathcal{H}_B$ Hilbert-tér egy ortonormált bázisa. Az összefonódottsági entrópia az A részrendszerre is megadható a redukált sűrűség mátrix segítségével:

$$S(\rho_A) = S(A) = -\text{Tr}(\rho_A \ln \rho_A) \quad (30)$$

Ez hasonlóan kiszámolható a B részrendszerre is. Amennyiben ρ egy tiszta állapot, akkor megmutatható, hogy $S(A) = S(B)$.

Ezek ismeretében bevezethetjük a következő információelméleti mennyiségeket [19, 25]:

$$S(A|B) = S(AB) - S(B) \quad (31)$$

$$I(A,B) = S(A) - S(A|B) \quad (32)$$

Az első az úgynevezett feltételes entrópia, amely klasszikusan megmutatja, hogy ha ismerjük a B rendszert, akkor mennyi bizonytalanság marad a teljes AB rendszerben. A második pedig az A és B közötti kölcsönös információ, amely annak a mérőszáma, hogy ha méréseket végzünk B -n, mennyi információt szerzünk A -ról.

Vegyünk most egy három részből álló ABC rendszert. Ekkor (31) és (32) mennyiségeket kombinálva kapjuk az úgynevezett kölcsönös feltételes információt:

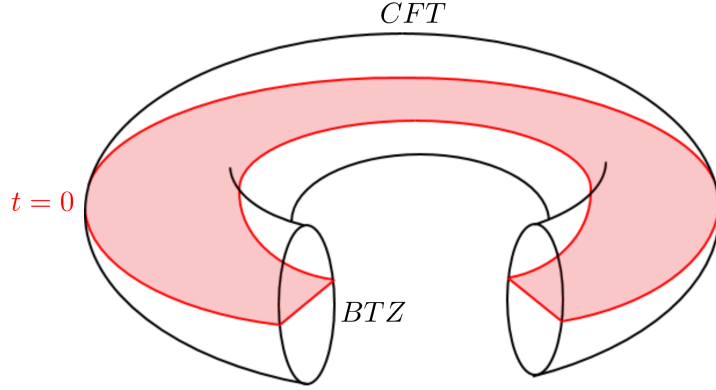
$$I(A,C|B) = S(A|B) - S(A|BC) = I(A,BC) - I(A,B) \quad (33)$$

Vagy az entrópiákkal kifejezve:

$$I(A,C|B) = S(AB) + S(BC) - S(B) - S(ABC) \quad (34)$$

A kölcsönös feltételes információra belátható [25], hogy:

$$I(A,C|B) = S(AB) + S(BC) - S(B) - S(ABC) \geq 0 \quad (35)$$



5. ábra. A BTZ fekete lyuk Wick-rotációja után a geometria topológiája egy tóruszéval egyezik meg. A tórusz belseje a BTZ geometria, a határán pedig a geometriával duális konform térelmélet (CFT) él. Dolgozatomban a $t = 0$ statikus esettel foglalkozom.

Ez az entrópia erős szubadditivitása, amely szemléletesen azt fejezi ki, hogy ha nagyobb részrendszeren végzünk mérést, akkor azzal csökkentjük az A részrendszerrel kapcsolatos bizonytalanságunkat.

Egy lokálisan AdS tér $\rho \rightarrow \infty$ aszimptotikus határán az (6) ívelemnégyzet konform ekvivalens lesz a következővel [17]:

$$ds^2 = -d\left(\frac{\Lambda\tau}{R}\right)^2 + \Lambda^2 d\varphi^2 \quad (36)$$

Ahol Λ egy tetszőleges skála faktor. BTZ fekete lyuk esetében egy $t \rightarrow -it$ Wick-rotációt végrehajtva a határ egy $2\pi\Lambda$ és $\beta = 2\pi R\Lambda/r_+$ sugarakkal jellemzett tóruszt határoz meg (5. ábra). Tekintsünk ezen a határon [10] egy $1 + 1$ dimenziós c centrális töltéssel rendelkező konform térelméletet (például valamilyen spin modelt). A rendszer állapotát a $\rho = e^{-\beta\hat{H}}/Z(\beta)$ termális sűrűség operátor jellemzi, ahol β egyben a rendszer inverz hőmérséklete is, $Z(\beta)$ az állapotösszeg és $\hat{H}$ a rendszer dinamikáját leíró Hamilton-operátor.

Shinsei Ryu és Tadasi Takayanagi megmutatták [10], hogy a határ egy térszerű A intervallumának összefonódottsági entrópiája arányos a háromdimenziós, aszimptotikusan AdS tér A intervallumára illeszkedő, $\mathbf{A}$ térszerű geodetikusának $L(\mathbf{A})$ regularizált hosszával. A $c = \frac{3R}{2G}$ Brown-Henneaux összefüggés [28] felhasználásával az összefonódott-

sági entrópia és a geodetikusok hossza között a következő összefüggés írható fel:

$$S(A) = \frac{L(\mathbf{A})}{4G} \quad (37)$$

Ahol G a háromdimenziós Newton-konstans. Ez a Ryu-Takayanagi megfelelés [10], amely az AdS/CFT -megfelelés legalapvetőbb összefüggése. Egy konform térelmélet esetében (ahogyan az AdS tér geodetikusának hossza is) az A intervallum összefonódottsági entrópiája egy divergens mennyiség, amelynek regularizációja szabadon megválasztható. Geometriailag ez az adott intervallumhoz tartozó geodetikus hossz regularizációjának szabad megválasztaként értelmezhető. Ez az összefonódottsági mennyiségek számolásánál egy "mértékszabadságot" határoz meg [22, 27].

Válasszunk ki most két, egymást metsző E és F intervallumot a BTZ geometria határán. Ezek a következő CFT intervallumokat határozzák meg: E , F , $A = E \setminus F$, $B = E \cap F$, $C = F \setminus E$ és $D = E \cup F$. Ekkor a Ryu-Takayanagi megfelelés és a lambda-hosszak segítségével a korábban ismertetett összefonódottsági mennyiségek a következő alakra hozhatók: az összefonódottsági entrópia:

$$S(A) = \frac{c}{3} \log \lambda(A) \quad (38)$$

A feltételes entrópia:

$$S(A | B) = \frac{c}{3} \log \frac{\lambda(E)}{\lambda(B)} \quad (39)$$

A kölcsönös információ:

$$I(A, B) = \frac{c}{3} \log \frac{\lambda(A)\lambda(B)}{\lambda(E)} \quad (40)$$

Valamint a kölcsönös feltételes információ:

$$I(A, C | B) = \frac{c}{3} \log \frac{\lambda(E)\lambda(F)}{\lambda(B)\lambda(D)} \quad (41)$$

Fontos megjegyezni, hogy (38) összefüggés csak magas hőmérséklet (vagyis $M \gg 1$ makroszkópikus fekete lyuk) esetén igaz. Végese hőmérsékleten létezik a határ részrendszereknek egy α_c kritikus nyílásszöge, amely felett a részrendszer összefonódottsági entrópiája nem a vele homológ geodetikus hosszával, hanem a komplementer geodetikus és a fekete lyuk horizont hosszának összegével áll kapcsolatban [17]. Azonban az $M \gg 1$ esetben a kritikus nyílásszög $\alpha_c \rightarrow \pi$, amely nyílásszög éppen a hurok geodetikusoknak

felel meg, vagyis ekkor minden esetben teljesül (38). Mivel a dolgozat során kizárólag a magas hőmérsékletű esetet vizsgálom, ezért ezzel a problémával a későbbiekben nem foglalkozom. ¹

Körmodell reprezentációban ezen mennyiségek konkrét értékét is megadhatjuk. Legyenek $a, b, c, d \in \partial BTZ$ pontok a kijelölt intervallumok végpontjai, vagyis a bevezetett jelölést használva $A = [ab]$, $B = [bc]$ és $C = [cd]$. Ezeknek a pontoknak a körmodel- len az $a, b, c, d, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \in \partial \mathbb{D}$ középpontosan szimmetrikus pontpárokat feleltetjük meg. Az $a, b, c, d \in \partial \mathbb{D}$ pontokhoz tartozó komplex argumentumok rendre $\vartheta_a, \vartheta_b, \vartheta_c$ és ϑ_d . (22)-nek megfelelően a BTZ intervallumoknak is a körmodell határán középpontosan szimetri- kus intervallum párok felelnek meg. Mivel minden egyes $\mathbb{D}$ intervallumhoz tartozik egy olyan geodetikus, ami homológ vele, ezért (23)-at felhasználva az entrópikus mennyisé- geket expliciten kifejtethetjük ezen körmodellbeli geodetikusok lambda-hosszaival. Vagyis az A részrendszer von-Neumann entrópiája például:

$$\begin{aligned} S[A] &= S(A) = \\ &= \frac{c}{3} \log e^{\rho_0} \sin(\alpha) = \\ &= \frac{c}{3} \log e^{\rho_0} \sin\left(\frac{\vartheta_b - \vartheta_a}{2}\right) \end{aligned} \quad (42)$$

Ismét fontos megjegyezni, hogy az irodalomban az entrópiát a (24) geodetikus hossz- hoz hasonlóan a BTZ reprezentációban szokták kifejezni. Ezt az eredményt adják azok a számítások is, amelyek közvetlenül, térelméleti megfontolások alapján adják meg egy CFT részrendszer összefonódottságát [30]. Azonban ezek a számítások a regularizáci- ót egységesnek választják a BTZ határán, míg én a körmodellen választottam uniform regularizációt. Emiatt az entrópia (25)-nek megfelelően átírható alakba.

Hasonlóan számolhatjuk a több rendszerre vonatkozó összefonódottsági mennyisége- ket is. A feltételes entrópia a következőképpen kapható meg:

$$S[A | B] = S(A | B) = \frac{c}{3} \log \frac{\sin\left(\frac{\vartheta_c - \vartheta_a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\vartheta_c - \vartheta_b}{2}\right)} \quad (43)$$

¹Precízen a hurok geodetikusok magas hőmérséklet esetén nem entrópiát, hanem egy másik mennyi- séget (angolul entwinement) kódolnak [29], amely az összefonódottsági entrópia úgynevezett összefonó- dotsági platón túli általánosítása.

Továbbá a kölcsönös információ:

$$I[A, B] = I(A, B) = \frac{c}{3} \log e^{\rho_0} \frac{\sin\left(\frac{\vartheta_b - \vartheta_a}{2}\right) \sin\left(\frac{\vartheta_c - \vartheta_b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\vartheta_c - \vartheta_a}{2}\right)} \quad (44)$$

Valamint a kölcsönös feltételes információ:

$$\begin{aligned} I[A, C \mid B] &= I(A, C \mid B) = \\ &= \frac{c}{3} \log \frac{\sin\left(\frac{\vartheta_c - \vartheta_a}{2}\right) \sin\left(\frac{\vartheta_d - \vartheta_b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\vartheta_c - \vartheta_b}{2}\right) \sin\left(\frac{\vartheta_d - \vartheta_a}{2}\right)} \end{aligned} \quad (45)$$

Fontos megjegyezni, hogy míg az összefonódottsági entrópia és a kölcsönös információ divergens, regularizáció függő mennyiségek, addig a feltételes entrópia és a kölcsönös feltételes információ véges, regularizáció független mennyiségek.

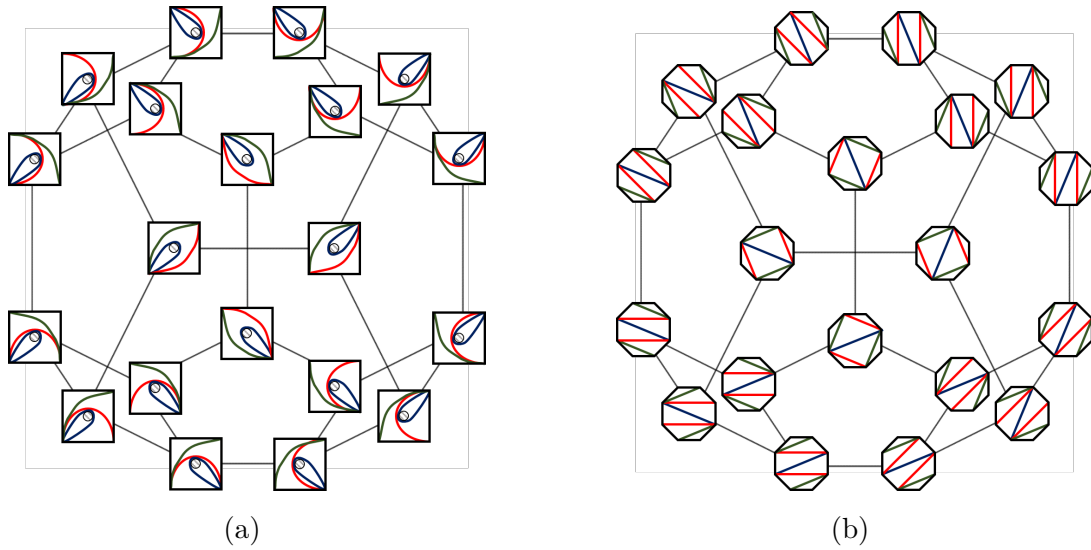
5. fejezet

BTZ triangulációinak klaszter algebrai leírása

5.1. Kicserélési gráf

Témavezetőmmel egy korábbi cikkben megmutattuk, hogy a tiszta AdS tér triangulációihoz egy zárt struktúra rendelhető, amelyet asszociahedronnak hívnak [2]. Megmutattuk azt is, hogy a triangulációkban szereplő geodetikusok úgynevezett A_n típusú klaszter algebrát alkotnak [2]. A dolgozat korábbi szakaszaiban a lambda-hosszakra és az összefonódottsági mennyiségekre kapott kifejezések segítségével lehetőség nyílik eredményeinket a BTZ geodetikusaira és a határ összefonódottságára általánosítani.

Ehhez először tekintsünk át néhány alapvető fogalmat [5]. Rögzítsünk egy aszimptotikus határral rendelkező geometria határán N pontot. Ekkor a geometria egy triangulációja az N pont között futó geodetikusoknak egy olyan maximális halmaza, amelyek páronként nem metszik egymást. Feltesszük továbbá azt is, hogy a kiválasztott geodetikusok önmagukat sem metszik a geometria belsejében. A geodetikusok által meghatározott tartományokat háromszögeknek hívjuk. Tegyük fel, hogy a triangulációból eltávolítunk egy geodetikust, majd hozzáadunk egy másikat úgy, hogy egy másik triangulációt kapjunk. Ezt a műveletet flipnek nevezzük. Azon geodetikusok, amelyeken végrehajtható flip, azt átlónak, a többit élnek nevezzük. Legyen a triangulációban szereplő átlók száma n . Ekkor azt az n -reguláris gráfot, amelynek csúcsaiban különböző triangulációk szerepelnek, és csakis azon csúcsok vannak összekötve, amelyek egy fliptől eltekintve azonosak, kicserélési gráfnak nevezzük. Ezeknek a fogalmaknak a precíz matematikai definícióját a Függelék B fejezet tartalmazza.



6. ábra. Egy BTZ 4-szög kicserélési gráfja, amely egy $\mathcal{C}_3$ ciklohedron. Az (a) ábrán a gráf csúcsaiban a négyszögek szerepelnek lyukkal középen, amely a BTZ reprezentációnak felel meg. A (b) ábrán pedig az (a) ábra triangulációinak középpontosan szimmetrikus nyolcszög beli megfelelői láthatók. Ezek felelnek meg a körmodellbeli reprezentációnak. A két gráf minden csúcsában az azonos színek azonos átlóhoz tartoznak.

Láttuk, hogy a BTZ geometria rendelkezik aszimptotikus határral, így ha ∂BTZ -n kijelölünk N darab pontot, akkor elkészíthetjük a BTZ fekete lyuk triangulációit. A geometria belseje azonban nem egyszeresen összefüggő, így a triangulációkban különböző típusú átlók szerepelnek. Ahogyan a 3. fejezetben részleteztem, előfordulhat olyan geodetikus, amelynek két végpontja azonos. Ezt huroknak hívom. Továbbá két különböző ∂BTZ pont között két különböző geodetikus húzható, egy amelyik a horizontot egyik, illetve egy amelyik a másik irányból kerüli meg. Egyszerűen belátható, hogy egy triangulációban összesen $N - 1$ geodetikus szerepel.

A trianguláció által meghatározott háromszögek is több csoportba sorolhatók. Először is előfordulnak "természetes" háromszögek, amelynek éleit három különböző átló, vagy él alkotja. Előfordul "összehajtott" háromszög is, amelynek egyik éle a hurok. Végül pedig minden triangulációban szerepel egy kétszög, amelynek közepén a horizont található. BTZ fekete lyuk esetében a flipnek is két fajtája van. Kiválaszthatunk egy tetszőleges, a trianguláció geodetikusaiból álló (akár összehajtogatott) négyszöget és annak egy átlóját kicserélhetjük, illetve végrehajthatunk flipet a hurokon is, egy másik hurkot kapva.

A BTZ N -szög kicserélési gráfját úgy készíthetjük el, hogy egy egy-egy megfeleltetést teszünk a "lyukas" BTZ N -szög és egy szokásos $2N$ -szög középpontosan szimmetrikus triangulációi között. Legyen $a, b, c, \dots \in \partial BTZ$ pontok és a körmodell felső határán a megfelelő $a, b, c, \dots \in \partial \mathbb{D}$ pontok. Tükrözzük középpontosan ez utóbbiakat a körmodell alsó határára, az így kapott pontokat jelöljük rendre $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots \in \partial \mathbb{D}$. Ekkor minden $[ij] \subset BTZ$, $i \neq j$ geodetikusként egy centrálisan szimmetrikus $(ij), (\bar{i}\bar{j}) \subset \mathbb{D}$ (vagy ha $j < i$, akkor $(j\bar{i}), (\bar{j}i) \subset \mathbb{D}$) geodetikus pár, az $[ii] \subset BTZ$ huroknak pedig az $(i\bar{i}) \subset \mathbb{D}$ átmérő felel meg. Egy szokásos flipnek a BTZ N -szögben a körmodellen egy centrálisan szimmetrikus flip pár felel meg, egy hurok kicserélése pedig a $2N$ -szögben az átmérő cseréjét jelenti. A $2N$ -szög így kialakítható triangulációit felhasználva elkészíthető a kicserélési gráf (6. ábra). Ezt a gráfot az irodalomban $\mathcal{C}_{N-1}$ ciklohedronnak nevezik [14, 15, 16]. Összefoglalva tehát egy BTZ N -szög triangulációinak kicserélési gráfja egy ciklohedron.

5.2. Klaszter algebra

A matematikában természetes kapcsolat van az aszimptotikus határral rendelkező geometriák triangulációi és az úgynevezett klaszter algebrák között [5]. Klaszter algebráknak nevezzük azokat a struktúrákat, amelyeket egy speciális rekurziós reláció definiált. Tekintsünk m darab $x_1, x_2, \dots, x_m$ változót és egy B $m \times m$ -es kicserélési mátrixot, amelynek minden elemére $b_{ij} \in \mathbb{Z}$. Rögzítsük az m darab változó utolsó $m - n$ elemét. Ezeket nevezzük együttthatóknak, az első n elemet pedig klaszter változóknak. Tekintsük ekkor a következő relációt [3, 24, 5]:

$$x_j x'_j = \prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ b_{ij} > 0}} x_i^{b_{ij}} + \prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ b_{ij} < 0}} x_i^{-b_{ij}} \quad (46)$$

Ahol $j \leq n$ és x'_j a j -edik elemből nyerhető új elem. Ezt a relációt bármelyik j elemre, akárhányszor végrehajthatjuk. Az $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ halmaz rekurziós reláció által meghatározott összes lehetséges képének a halmazát nevezzük klaszter algebrának. Fontos megjegyezni, hogy ez egy nagyon leegyszerűsített definíció ugyanis egy általános klaszter algebrában minden egyes lépésben mind a klaszter változók, mind az együttthatók, mind pedig a B mátrix is változik. Részletesebb leírást a Függelék C fejezet tartalmaz.

Hogyan hozhatók kapcsolatba a klaszter algebrák és a BTZ fekete lyuk? Ennek megválaszolásához először tekintsünk egy egyszerűbb példát. Témavezetőmmel korábban

megmutattuk, hogy a tiszta AdS tér triangulációi, így a határon lévő CFT összefonódottsági mennyiségei A_{N-3} klaszter algebrákkal állnak kapcsolatban [2]. A tiszta AdS teret reprezentálhatjuk a teljes $\mathbb{D}$ körmodellel. Rögzítsünk a körmodell határán N darab $a, b, c, \dots$ pontot. Erre gondolhatunk úgy, mint egy $(ab), (bc), (cd), \dots$ oldalú sokszögre. Válasszunk ki ebből négy, $i < j < k < l$ pontot. Ekkor trigonometrikus átalakításokkal egyszerűen megmutatható, hogy az (ik) és (jl) geodetikus átlók lambda-hosszaira teljesül a következő összefüggés:

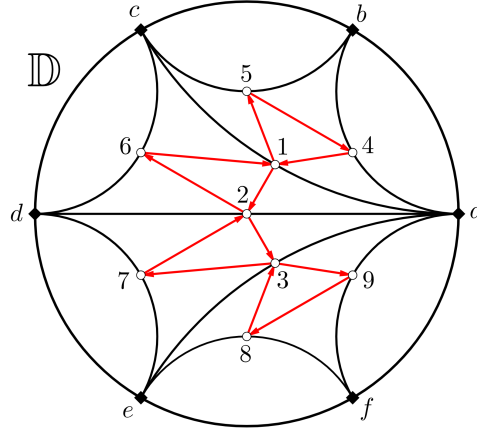
$$\lambda(ik)\lambda(jl) = \lambda(ij)\lambda(kl) + \lambda(li)\lambda(jk) \quad (47)$$

Ahol a jobb oldalon szereplő lambda-hosszak a négyszög oldalaihoz tartoznak. Ezt az összefüggést nevezzük Ptolemaiosz-relációnak [20], amely teljesül tetszőleges $\mathbb{D}$ beli körmodellel.

Vegyünk most ennek az N -szögnek egy tetszőleges triangulációját! Jelöljük a behúzott átlókat $1, \dots, N-3$ -mal, az éleket pedig $N-2, \dots, 2N-3$ -mal. Tegyük mindegyik átló és él középre egy-egy pontot, melyek legyenek egy gráf csúcsai. Jelöljük őket azokkal a számokkal, amely geodetikuson elhelyezkednek. A trianguláció minden háromszögének élein tehát a gráf csúcsai szerepelnek. Minden háromszögben alkossunk meg egy új háromszöget úgy, hogy az óramutató járásával megegyező irányba összekötjük az oldalakon szereplő gráf csúcsokat. Ezek lesznek a gráf élei.

Készítsünk most el egy $(2N-3) \times (2N-3)$ -as B mátrixot, amelynek b_{ij} elemei a következők: ha az imént megalkotott gráfban mutat él az i csúcsból a j csúcsba, akkor $b_{ij} = 1$, illetve, ha az i csúcsba mutat él a j csúcsból, akkor $b_{ij} = -1$. A 7. ábrán látható ötszög trianguláció esetén például a kicserélési mátrix a következő:

$$B = \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad (48)$$



7. ábra. Egy körmodellbeli hatszög triangulációjának gráf reprezentációja. Az átlókat $1, \dots, N-3$ számokkal címkéztem, míg az éleket $N-2, \dots, 2N-3$ számokkal jelöltem. Az élek és átlók által kijelölt pontok egy irányított gráfot határoznak meg, amelynek élei (piros nyilak) minden, a trianguláció által meghatározott háromszögben az óramutató járásával megegyező irányban haladnak.

A mátrix a következő blokkokból épül fel: a bal felső $(N-3) \times (N-3)$ -as blokk tartalmazza az átló-átló kapcsolatokat, a bal alsó $N \times (N-3)$ -as és a jobb felső $(N-3) \times N$ -es blokk az oldal-átló kapcsolatokat, a jobb alsó $N \times N$ -es pedig az oldal-oldal kapcsolatokat. Látható, hogy a B mátrix teljes egészében meghatározza a triangulációban szereplő geodetikusok kölcsönös helyzetét.

Legyenek ekkor az $1, \dots, N-3$ geodetikusok $\lambda[1], \dots, \lambda[N-3]$ lambda-hosszai¹ klaszter változók, az $\lambda[N-2], \dots, \lambda[2N-3]$ geodetikusok lambda-hosszai pedig együttthatók. Tegyük fel, hogy egy flipet hajtunk végre a $j \leq N-3$ geodetikuson amelynek hatására a $\lambda[j]$ lambda-hosszú geodetikusból $\lambda'[j]$ lambda-hosszú geodetikus lesz. A köztük lévő kapcsolatot a (47) Ptolemaiosz reláció határozza meg, amely a B mátrix bevezetésével átírható a következő alakra:

$$\lambda[j]\lambda'[j] = \prod_{\substack{1 \leq i \leq 2N-3 \\ b_{ij} > 0}} \lambda[i]^{b_{ij}} + \prod_{\substack{1 \leq i \leq 2N-3 \\ b_{ij} > 0}} \lambda[i]^{-b_{ij}} \quad (49)$$

¹Itt annak ellenére, hogy a körmodellen dolgozok, ismét szögletes zárójelet használtam. Ennek oka, hogy tiszta AdS tér esetén a körmodell határának intervallumai egy-egy megfeleltetésben állnak az AdS tér határának intervallumaival, tehát itt mind a két jelölés azonos tartalmú. Azonban a később levezetendő univerzális formula miatt a szögletes zárójel használata szükséges.

Látható, hogy ez éppen a klaszter algebrákat definiáló összefüggés. Az átlókon végrehajtott flippek segítségével elkészíthető az összes trianguláció, a hozzájuk tartozó B kicserélési mátrixok és a $\{\lambda[1], \dots, \lambda[N-3], \lambda[N-2], \dots, \lambda[2N-3]\}$ halmazok, vagyis egy teljes klaszter algebra. Azt a klaszter algebrát, amelynek a kicserélési mátrixa az imént említett módon áll elő, A_{N-3} típusú klaszter algebrának nevezik, ahol $N-3$ mutatja a klaszter változók számát.

A (38) Ryu-Takayanagi összefüggés segítségével a rekurziós reláció átírható a triangulációt alkotó geodetikussal homológ CFT intervallumok összefonódottsági entrópiáira vonatkozó összefüggésre. Könnyen belátható, hogy ez az összefüggés a következő alakot ölti:

$$S[j] + S'[j] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2N-3} |b_{ij}| S[i] + \frac{c}{3} \log 2 \cosh \frac{3}{2c} \sum_{i=1}^{2N-3} b_{ij} S[i] \quad (50)$$

Ez az összefüggés egy algebrai leírást ad a CFT vákuum összefonódottsági szerkezetére.

A BTZ fekete lyuk duális összefonódottságának algebrai leírásához vezető út ugyanaz, mint tiszta AdS esetén. Az 2. fejezetben láttuk, hogy a BTZ geometria körmodell megfelelőjét úgy kapjuk, ha $\mathbb{D}$ -t félbe vágjuk és a $\vartheta = 0$ és $\vartheta = \pi$ pontokat azonosítjuk. Jelöljünk ki N darab $a, b, \dots \in \partial BTZ$ pontot. Ekkor a körmodellen minden pontnak egy középpontosan szimmetrikus pontpár feleltethető meg. Legyen ez a $2N$ pont $a, b, \dots, \bar{a}, \bar{b}, \dots \in \partial \mathbb{D}$. Ahogy korábban is részleteztem, minden $[ij] \subset BTZ$, $i \neq j$ geodetikusként egy centrálisan szimmetrikus $(ij), (\bar{i}\bar{j}) \subset \mathbb{D}$ (vagy ha $j < i$, akkor $(\bar{j}\bar{i}), (\bar{i}j) \subset \mathbb{D}$) geodetikus pár, az $[i\bar{i}] \subset BTZ$ huroknak pedig az $(i\bar{i}) \subset \mathbb{D}$ átmérő felel meg. Egy szokásos flipnek a BTZ N -szögben a körmodellen egy centrálisan szimmetrikus flip pár felel meg, egy hurok kicserélése pedig a $2N$ -szögben az átmérő cseréjét jelenti.

Válasszunk ki tehát négy különböző $i < j < k < l \in \partial \mathbb{D}$ pontot a körmodell felső felén. Ekkor hat különböző összefüggés írható fel a különböző típusú flippekre a lambda-hosszakra vonatkozó Ptolemaiosz-reláció segítségével [24] (8. ábra):

$$\lambda(ik)\lambda(jl) = \lambda(ij)\lambda(kl) + \lambda(il)\lambda(jk) \quad (51a)$$

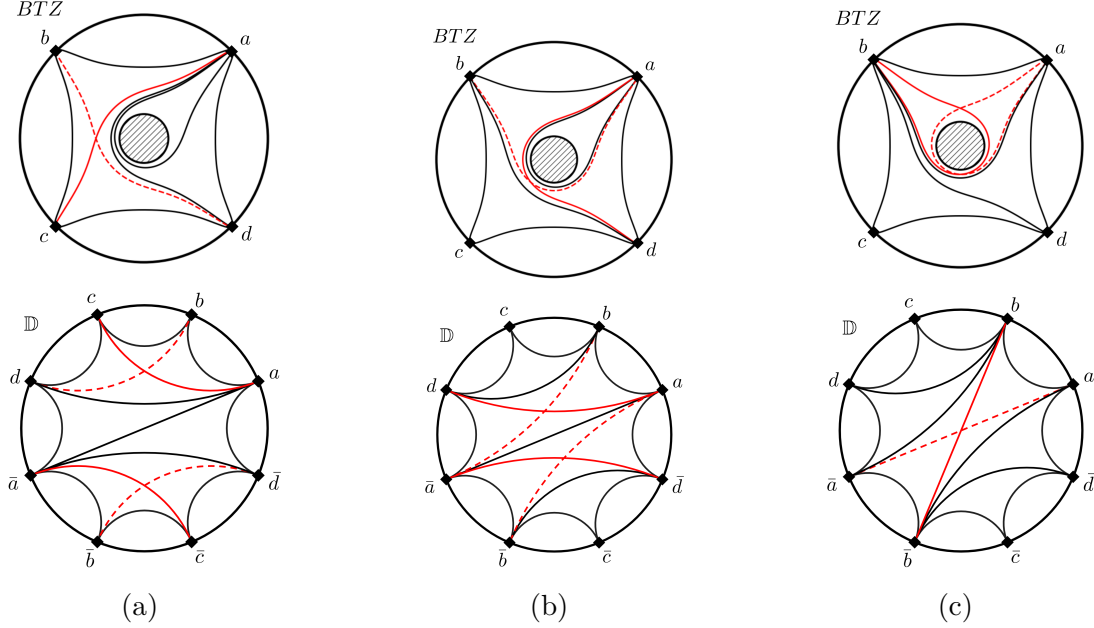
$$\lambda(k\bar{i})\lambda(jl) = \lambda(j\bar{i})\lambda(kl) + \lambda(l\bar{i})\lambda(jk) \quad (51b)$$

$$\lambda(k\bar{i})\lambda(l\bar{j}) = \lambda(\bar{i}\bar{j})\lambda(kl) + \lambda(l\bar{i})\lambda(k\bar{j}) \quad (51c)$$

$$\lambda(ik)\lambda(j\bar{i}) = \lambda(ij)\lambda(k\bar{i}) + \lambda(i\bar{i})\lambda(jk) \quad (51d)$$

$$\lambda(j\bar{i})\lambda(k\bar{j}) = \lambda(\bar{i}\bar{j})\lambda(jk) + \lambda(j\bar{j})\lambda(k\bar{i}) \quad (51e)$$

$$\lambda(i\bar{i})\lambda(j\bar{j}) = \lambda(ij)\lambda(\bar{i}\bar{j}) + \lambda(j\bar{i})\lambda(\bar{j}i) \quad (51f)$$



8. ábra. A BTZ fekete lyuk különböző trianguláció $N = 4$ -szög esetén (felső ábrák), valamint a körmodellbeli $2N = 8$ -szög reprezentációik (alsó ábrák). A folytonos fekete és piros geodetikusok a sokszög élei és átlói. A körmodell minden középpontosan szimmetrikus átló párja (vagy egyetlen átmérője) pontosan egy átlónak felel meg a BTZ négyszögben. Mind a három (a), (b) és (c) ábrán különböző fajta flipet ábrázoltam, amelyek a folytonos piros átlókat a szaggatottakra cserélik ki. Az (a) ábrán egy "természetes" átlócsere látható egy kiválasztott négyszögben. A fliphez tartozó kicserélési relációkat az (51a) és (52a) egyenletek határozzák meg az $i = a$, $j = b$, $k = c$ és $l = d$ választásokkal. A (b) ábrán egy összehajtott négyszög belüli flip látható. Az ehhez tartozó kicserélési relációkat az (51d) és (52b) egyenletek adják az $i = a$, $j = b$ és $k = d$ választásokkal. Végül pedig a (c) ábrán egy hurok flip látható, amelynek kicserélési relációi a (51f) és (52c) egyenletek $i = a$ és $j = b$ választásokkal.

Ezek a relációk egy C_{N-1} típusú klaszter algebrát definiálnak [24] (lásd Fügelék C). Elmondható tehát, hogy a BTZ N -szög geodetikus szerkezete egy C_{N-1} klaszter algebrával áll kapcsolatban [24].

Alakítsuk tovább a fenti relációkat. Észrevehető, hogy a fenti hat relációból az első három egy rendes flipet jelent egy tetszőleges négyszögben a BTZ reprezentációban. A

negyedik és az ötödik szintén egy rendes flipet jelent, azonban egy összehajtott négyszögben. Az utolsó reláció pedig egy hurok flipnek felel meg. Felhasználva tehát a BTZ reprezentációra bevezetett jelölésünket, a fenti hat összefüggés a következő háromra egyszerűsödik:

$$\lambda[ik]\lambda[jl] = \lambda[ij]\lambda[kl] + \lambda[il]\lambda[jk] \quad (52a)$$

$$\lambda[ik]\lambda[ji] = \lambda[ij]\lambda[ki] + \lambda[\partial BTZ]\lambda[jk] \quad (52b)$$

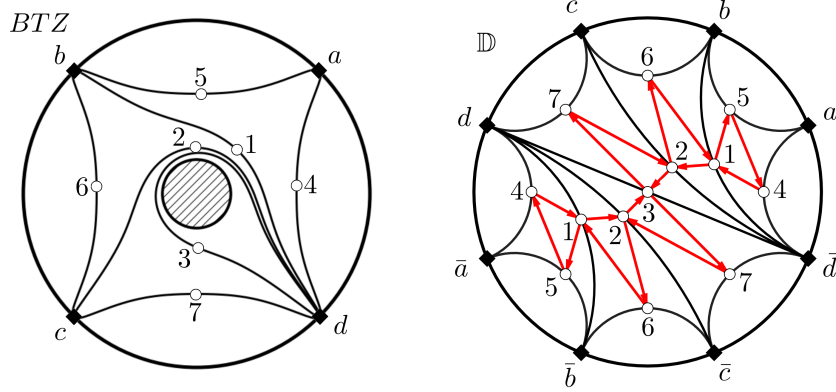
$$\lambda[\partial BTZ]^2 = \lambda[ij]^2 + \lambda[ji]^2 \quad (52c)$$

Ahol tehát most $i < j < k < l \in \partial BTZ$ BTZ határon lévő pontokat jelölnek.

A tiszta AdS-nél használt konstrukció segítségével ismét elkészíthetünk egy gráfot, amely leírja a triangulációban szereplő geodetikusok kölcsönös helyzetét. Jelöljük a BTZ triangulációban behúzott átlókat $1, \dots, N-1$ -gyel, az éleket pedig $N, \dots, 2N-1$ -gyel. Vegyük most ennek a triangulációnak a körmodell reprezentációját. Minden behúzott $\mathbb{D}$ -beli geodetikusra helyezzünk egy pontot. Ezek lesznek a gráf csúcsai. Jelöljük ezeket a csúcsokat azzal a számmal, amely a hozzá tartozó geodetikus BTZ reprezentáció belső megfelelőjén szerepel. Vagyis $\mathbb{D}$ -n az átmérőn kívül minden szám kétszer szerepel. A trianguláció minden háromszögének élein tehát a gráf csúcsai szerepelnek. Minden háromszögben alkossunk meg egy új háromszöget úgy, hogy az óramutató járásával meg egyező irányba összekötjük az oldalakon szereplő gráf csúcsokat. Ezek lesznek a gráf élei.

Készítsünk most el egy $(2N-1) \times (2N-1)$ -es B mátrixot, amelynek b_{ij} elemei a következők: Ha az imént megalkotott gráfban egy i -vel jelölt csúcsból k darab él mutat k különböző j -vel jelölt csúcsba, akkor $b_{ij} = k > 0$. Ha pedig egy i -vel jelölt csúcsba k különböző él mutat k különböző j -vel jelölt csúcsból, akkor $b_{ij} = -k < 0$. Például a 9. ábrán látható triangulációban B mátrix a következő:

$$B = \left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (53)$$



9. ábra. Egy BTZ négyszög triangulációjának gráf reprezentációja. A bal oldalon látható a trianguláció a BTZ képben. Az átlókat $1, \dots, N-1$ számokkal címkéztem, míg az éleket $N, \dots, 2N-1$ számokkal jelöltem. A jobb oldalon ugyan ennek a triangulációnak a körmodellbeli megfelelője látható. Ebben a képben az éleket és átlókat (22a),(22b),(22c) és (22d) alapján címkéztem. Az élek és átlók által kijelölt pontok egy irányított gráfot határoznak meg, amelynek élei (piros nyilak) minden, a triangulációk által meghatározott háromszögben óramutató járásával megegyező irányban haladnak.

A mátrix a következő blokkokból épül fel: a bal felső $(N-1) \times (N-1)$ -as blokk tartalmazza az átló-átló kapcsolatokat, a bal alsó $N \times (N-1)$ -as és a jobb felső $(N-1) \times N$ -es blokk az oldal-átló kapcsolatokat, a jobb alsó $N \times N$ -es pedig az oldal-oldal kapcsolatokat. Ismét látható, hogy a B mátrix teljes egészében meghatározza a triangulációban szereplő geodetikusok kölcsönös helyzetét.

Legyenek ekkor az $1, \dots, N-1$ geodetikusok $\lambda[1], \dots, \lambda[N-1]$ lambda-hosszai klaszter változók, az $\lambda[N], \dots, \lambda[2N-1]$ geodetikusok lambda-hosszai pedig együtthatók. Tegyük fel, hogy egy flipet hajtunk végre a $j \leq N-1$ geodetikuson amelynek hatására a $\lambda[j]$ lambda-hosszú geodetikusból $\lambda'[j]$ lambda-hosszú geodetikus lesz. Belátható, hogy a (52a),(52b) és (52c) egyenletek a B kicserélési mátrix segítségével a következő alakra hozhatók:

$$\lambda[j]\lambda'[j] = \prod_{\substack{1 \leq i \leq 2N-1 \\ b_{ij} > 0}} \lambda[i]^{b_{ij}} + \prod_{\substack{1 \leq i \leq 2N-1 \\ b_{ij} > 0}} \lambda[i]^{-b_{ij}} \quad (54)$$

Amely ismét a klaszter algebrákat definiáló összefüggés.

A (38) Ryu-Takayanagi összefüggés segítségével a rekurziós relációt ismét átírhatjuk a határ magas hőmérsékletű CFT intervallumainak összefonódottsági entrópiáira vonatkozó összefüggésre:

$$S[j] + S'[j] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2N-1} |b_{ij}| S[i] + \frac{c}{3} \log 2 \cosh \frac{3}{2c} \sum_{i=1}^{2N-1} b_{ij} S[i] \quad (55)$$

Ez az összefüggés tehát egy algebrai leírást ad a magas hőmérsékletű CFT összefonódottsági szerkezetének.

Összefoglalva tehát egy közös algebrai leírást sikerült adni az N részrendszerre osztott vákuum és a magas hőmérsékletű CFT összefonódottsági szerkezetére. A részrendszerek összefonódottsági entrópiái közötti összefüggés a következő:

$$S[j] + S'[j] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |b_{ij}| S[i] + \frac{c}{3} \log 2 \cosh \frac{3}{2c} \sum_{i=1}^n b_{ij} S[i] \quad (56)$$

Ahol vákuum esetén $n = N - 3$ és létezik olyan trianguláció és $B = \{b_{ij}\}$ egy $(2N - 3) \times (2N - 3)$ -as mátrix, amely tehát egy A_{N-3} klaszter algebrát határoz meg. Magas hőmérséklet esetén pedig $n = N - 1$ és $B = \{b_{ij}\}$ egy $(2N - 1) \times (2N - 1)$ -es mátrix, amely pedig egy C_{N-1} klaszter algebrát határoz meg. Vákuum és magas hőmérséklet esetén is $\mathcal{O}(N^2)$ különböző részrendszert lehet kijelölni a határon, amely ennyi ismeretlen összefonódottsági entrópiát is jelent. A rekurziós reláció segítségével azonban elég $\mathcal{O}(N)$ összefonódottsági entrópia ismerete a többi kiszámításához.

6. fejezet

A kinematikus tér és az Y-rendszerek

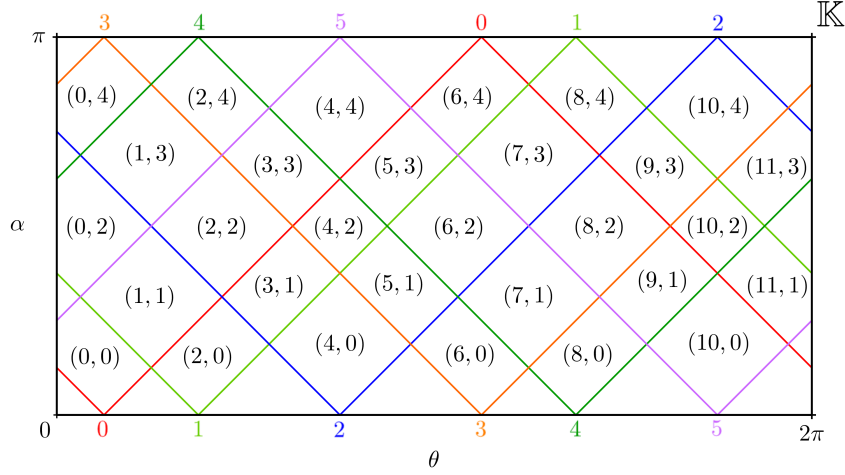
Ebben a fejezetben megvizsgáljuk, hogy milyen algebrai struktúrák jelennek meg a körmodell geodetikusanak terén, az úgynevezett kinematikus téren [19, 26]. Korábban a körmodellbeli geodetikusokat a (B_1, B_2, M) paraméterekkel jellemeztük, amelyek a kinematikus téren koordinátaként szolgálnak. Ezekre a paraméterekre teljesül, hogy $B_1^2 + B_2^2 - M^2 = 1$. Tehát a kinematikus térre gondolhatunk úgy, mint az $\mathbb{R}^{2,1}$ térbe ágyazott két dimenziós egy-köpenyű hiperboloidra (két dimenziós de Sitter-térre [19]). A kinematikus téren az ívelemnégyzetet az $\mathbb{R}^{2,1}$ beli metrika indukálja:

$$ds_{\mathbb{K}}^2 = dB_1^2 + dB_2^2 - M^2 \quad (57)$$

A kinematikus tér egy másik hasznos koordinátázása, ha egy pontját az általa reprezentált geodetikus (θ, α) középponti szögével és félnyílásszögével, vagy az (u, v) kezdő és végpontjával reprezentáljuk. A metrika a kinematikus téren (15) és (16) segítségével a következő alakokra hozható:

$$ds_{\mathbb{K}}^2 = \frac{d\theta^2 - d\alpha^2}{\sin^2 \alpha} = \frac{dudv}{\sin^2 \frac{v-u}{2}} \quad (58)$$

A (θ, α) koordinátákra gondolhatunk úgy, mint tér- és időszerű, míg az (u, v) koordinátákra pedig, mint fénytörő koordináták. Ez azt jelenti, hogy a teljes körmodell kinematikus terét a $(\theta, \alpha) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ koordinátarendszerrel reprezentálhatjuk, ahol $\theta \sim \theta + 2\pi$, valamint a (θ, α) és $(\theta + \pi, \pi - \alpha)$ koordináták ugyan azt a geodetikus jelölik, mivel ezek végpontjai azonosak. Fontos még megjegyezni, hogy a körmodell pontjait a kinemati-



10. ábra. A Poincaré körmodell kinematikus tere. A színes pontgörbék egy hatszög különböző csúcsait reprezentálják, amelyeket 0,1,2,3,4,5 számokkal jelöltem. A görbék által meghatározott tartományokat (j,k) koordináta párokkal láttam el, amelyeket (59)-ben definiáltam.

kus tér görbéi reprezentálják. Egy $\partial\mathbb{D}$ beli pontnak a kinematikus téren egy fényszerű szakaszokból álló görbe felel meg, amelyet pontgörbének nevezünk [19] (10. ábra).

Amennyiben körmodellbeli geodetikus N -szögekkel foglalkozunk, úgy mind az N $\partial\mathbb{D}$ ponthoz külön pontgörbe tartozik a kinematikus téren. Ezek a tér egy csempézését határozzák meg téglalap alakú tartományokkal (10. ábra). Az N -szög csúcsait mostantól a $0, \dots, N-1$ számokkal jelölöm. Kiválaszthatunk az N pont közül tetszőleges két $0 \leq a < b \leq N-1 \in \partial\mathbb{D}$ pontot úgy, hogy:

$$a \equiv \frac{j-k}{2}, \quad b \equiv \frac{j+k}{2} \quad \text{mod } N \quad (59)$$

Ahol $j \in \{0, \dots, 2N-1\}$ és $k \in \{0, \dots, N-2\}$, valamint $j+k \equiv 0 \pmod{2}$. Ez a kinematikus tér csempézésének egy (j,k) koordinátázását adja (10. ábra). Ezen csempék területét az (u,v) reprezentációban a (58) metrika által meghatározott felületelem segítségével számolhatjuk:

$$\begin{aligned} T_{j,k} &= \int_{\vartheta_b}^{\vartheta_{b+1}} \int_{\vartheta_{a-1}}^{\vartheta_a} \frac{du \wedge dv}{4 \sin^2 \frac{v-u}{2}} = \\ &= \log \frac{\sin\left(\frac{\vartheta_b - \vartheta_{a-1}}{2}\right) \sin\left(\frac{\vartheta_{b+1} - \vartheta_a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\vartheta_b - \vartheta_a}{2}\right) \sin\left(\frac{\vartheta_{b+1} - \vartheta_{a-1}}{2}\right)} \end{aligned} \quad (60)$$

Ahol a ϑ_a és ϑ_b az a és b pontokat jellemző, körmodellbeli komplex argumentumok. A területet a lambda-hosszak segítségével a következő keresztarányként írhatjuk fel:

$$T_{j,k} = \log \frac{\lambda(a-1b)\lambda(ab+1)}{\lambda(ab)\lambda(a-1b+1)} \quad (61)$$

Fontos megjegyezni, hogy a $k = 0$ és $k = N - 2$ koordinátákhoz tartozó csempék területei divergensnek.

Vegyük észre, hogy a felületelemet (4) segítségével kifejezhetjük az adott geodetikushoz tartozó intervallum összefonódottsági entrópiájával is:

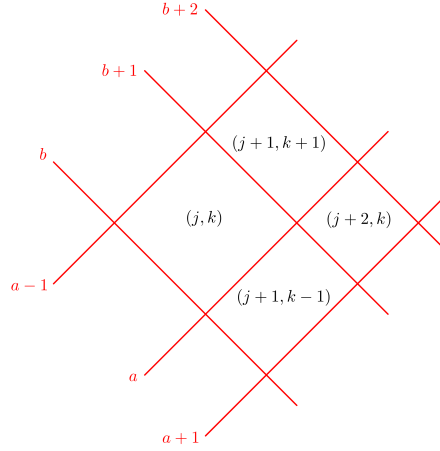
$$\omega = \frac{\partial^2 S(u,v)}{\partial u \partial v} du \wedge dv = \frac{c}{12} \frac{du \wedge dv}{\sin^2 \frac{v-u}{2}} \quad (62)$$

Ezt nevezzük Crofton-formának [19]. Ezt felhasználva minden, a kinematikus tér $k \neq 0$ és $k \neq N - 2$ csempéjéhez egy kölcsönös feltételes információt rendelhetünk, ahol a (35) kifejezésben szereplő négy intervallum a csempe négy csúcsához tartozó geodetikussal homológ intervallum, vagyis:

$$\begin{aligned} I_{j,k} &= I(a-1a, bb+1|ab) = \\ &= S(a-1b) + S(ab+1) - S(ab) - S(a-1b+1) = \\ &= \frac{c}{3} T_{j,k} \end{aligned} \quad (63)$$

A csempéhez tartozó kölcsönös feltételes információ [19, 2]. A $k = 0$ és $k = N - 2$ csempékhez tartozó divergens területekhez az $I(A,B) = S(A) + S(B) - S(AB)$ alakú kölcsönös információt feleltetünk meg, amely a pontgörbék címkéivel kifejezve $I(a-1a, bb+1) = S(a-1a) + S(bb+1) - S(a-1b+1)$, ahol $a = b$.

Tekintsünk most négy szomszédos csempét a következő koordinátákkal: (j,k) , $(j+1,k+1)$, $(j+1,k-1)$ és $(j+2,k)$ (11. ábra), ahol $0 < k < N - 2$. Ezeket a tartományokat



11. ábra. A kinematikus tér négy szomszédos csempéje egy tetszőleges N -szög esetén. A csempék címkéi (j, k) , $(j+1, k+1)$, $(j+1, k-1)$ és $(j+2, k)$. Ezeket a tartományokat azok a pontgörbék határolják, amelyek az N -szög tetszőleges $a-1$, a , $a+1$, b , $b+1$ és $b+2$ címkékkel ellátott csúcsaihoz tartoznak.

azon pontgörbék határolják, amelyek $a-1$, a , $a+1$, b , $b+1$ és $b+2$ címkékkel ellátott csúcsokhoz tartoznak. A négy csempe területei a következők:

$$T_{j,k} = \log \frac{\lambda(a-1b)\lambda(ab+1)}{\lambda(ab)\lambda(a-1b+1)}, \quad (64a)$$

$$T_{j+1,k+1} = \log \frac{\lambda(a-1b+1)\lambda(ab+2)}{\lambda(ab+1)\lambda(a-1b+2)}, \quad (64b)$$

$$T_{j+1,k-1} = \log \frac{\lambda(ab)\lambda(a+1b+1)}{\lambda(a+1b)\lambda(ab+1)}, \quad (64c)$$

$$T_{j+2,k} = \log \frac{\lambda(ab+1)\lambda(a+1b+2)}{\lambda(a+1b+1)\lambda(ab+2)} \quad (64d)$$

Vezessük be most minden tartományhoz a következő mennyiséget:

$$Y_{j,k} = \frac{1}{e^{T_{j,k}} - 1} = \frac{1}{e^{\frac{3}{c}I_{j,k}} - 1} \quad (65)$$

A lambda-hosszak segítségével megmutatható, hogy a négy csempére teljesül a következő reláció:

$$Y_{j,k}Y_{j+2,k} = (1 + Y_{j+1,k-1})(1 + Y_{j+1,k+1}) \quad (66)$$

A csempék $j \rightarrow j-1 \pmod{2N-1}$ átcímkezésével (ahol most $j+k \equiv 1 \pmod{2}$) az előző összefüggés a következő alakú [2]:

$$Y_{j-1,k}Y_{j+1,k} = (1 + Y_{j,k-1})(1 + Y_{j,k+1}) \quad (67)$$

Ahol a divergens területű csempék miatt a határfeltételek a következők: $Y_{j,0} = Y_{j,N-2} = 0$. Az összefüggést átírhatjuk a következő alakra:

$$Y_{j-1,k}Y_{j+1,k} = \prod_{i \neq k} (Y_{j,i} + 1)^{-a_{ki}} \quad (68)$$

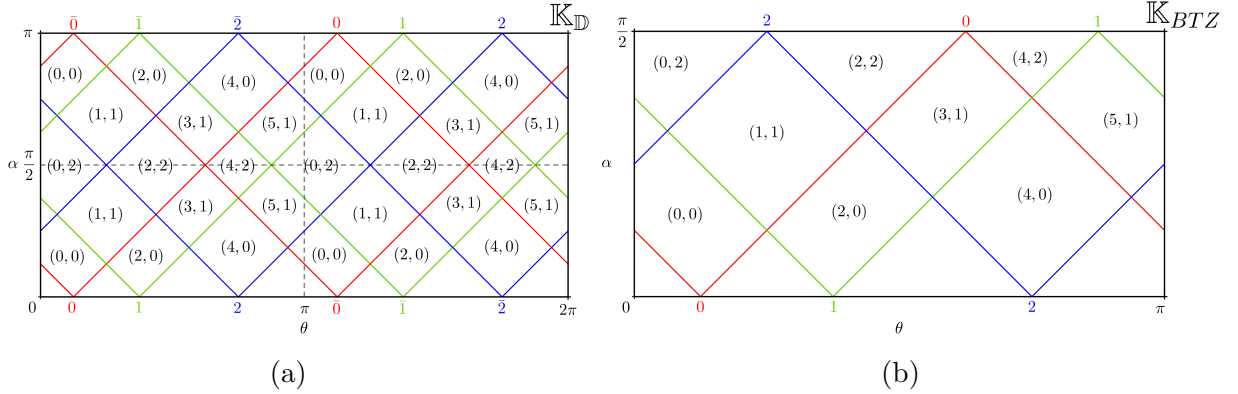
Minden $k = 1, \dots, N-3$ -ra, ahol $A = \{a_{ij}\}_{i,j=0,\dots,N-2}$ a következő alakú, szimmetrikus, $(N-1) \times (N-1)$ -es mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (69)$$

A rögzített¹ határfeltételek pedig $Y_{j,0} = Y_{j,N-2} = 0$. Az így generált $Y_{j,k}$ mennyiségek rendszerét A_{N-3} Zamolodchikov Y-rendszernek hívjuk [9, 6]. Ez tehát a kinematikus tér szerkezetén keresztül a CFT vákuum rendszerek kölcsönös feltételes információinak egy algebrai struktúráját határozza meg.

Felmerül a kérdés, hogy a magas hőmérsékletű CFT esetén is meg lehet-e adni hasonló algebrai szerkezetet? Ennek megválaszolásához konstruáljuk meg a BTZ fekete lyuk körmodell reprezentációjának kinematikus terét. Tekintsünk egy BTZ N -szöget, amely a körmodellen egy $2N$ -szöggel reprezentálható. Ez azt jelenti, hogy a teljes körmodell kinematikus tere $2N$ pontgörbével (amit innentől $\mathbb{K}_{\mathbb{D}}$ -vel jelölök) teljes egészében leírja a BTZ N -szöget (12. (a) ábra). Mivel azonban a megkonstruált $2N$ -szög középpontosan szimmetrikus, és valójában a BTZ geometriát a körmodell fele írja le, ezért a kinematikus tér négy azonos tartományra bomlik fel. A teljes körmodell kinematikus terén $\theta \sim \theta + 2\pi$, azonban a fél körmodell $\vartheta = 0 \sim \vartheta = \pi$ azonosítása miatt most $\theta \sim \theta + \pi$. A négy tar-

¹A határfeltételt rögzítettnek nevezem, ugyanis a $k = 0$ és $k = N-3$ csempékre nem vonatkozik a lvezetett reláció. Valójában ezért az A mátrix nulladik és utolsó sora nem is fordul elő a relációkban kitevőként. Azonban általános esetben ezek a mátrixok összefüggésbe hozhatók az úgynevezett Cartan-mátrixokkal, amelyeknek köszönhetően A ilyen alakban áll elő.



12. ábra. (a) Egy körmodellbeli középpontosan szimmetrikus hatszög kinematikus tere. A hatszög csúcsait $0, 1, 2, \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}$ -vel jelöltem, ahol $0, 1, 2$ csúcsok középpontosan szimmetrikusak a $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}$ csúcsokra. Ebben a speciális esetben a kinematikus tér négy azonos, fundamentális tartományból épül fel, amelyeket a $\theta = \pi$ és $\alpha = \pi/2$ vonalak választanak el egymástól. A bal alsó negyed csempéit (59) alapján (j, k) címkékkel láttam el, amely azonosan meghatározta a maradék három tartomány csempéinek koordinátáit is. Erre a térre gondolhatunk úgy, mint egy BTZ háromszög körmodellbeli hatszög reprezentációjának kinematikus terére. (b) Egy fundamentális tartomány, amely megfeleltethető egy BTZ N -szög kinematikus terének. Vegyük észre, hogy ebben az esetben a felső tartományok területei végesek.

tományt tehát azonosíthatjuk egymással. Válasszuk ki például a $(\vartheta, \alpha) \in [0, \pi] \times [0, \pi/2]$ negyed, amely így teljes egészében reprezentálja a BTZ N -szöget. Jelöljük ezt a tartományt $\mathbb{K}_{BTZ}$ -vel. $\mathbb{K}_{BTZ}$ -re tehát gondolhatunk úgy, mint a BTZ fekete lyuk körmodelljének kinematikus tér reprezentációjára (12. (b) ábra). A BTZ kinematikus terére alkotott koncepció hasonló ahhoz, amelyet az úgynevezett kúp szingularitás esetén vizsgáltak a [31] cikkben.

Az előzőekhez hasonlóan elkészíthetnénk $\mathbb{K}_D$ $2N$ pontgörbe által kijelölt csempéinek (j, k) koordinátázását. Mivel azonban $\mathbb{K}_D$ négy azonosított tartományból áll elő, minden adott területű csempe négyszer fordul elő (vagy kétszer, amennyiben az a csempék középső sorában helyezkedik el). Ezért tehát tekintsük a $\mathbb{K}_{BTZ}$ negyed, amelyen a korábbi szabály alapján elkészítjük a csempék címkézését, majd a (j, k) koordinátákat az azonosított csempéknek megfelelően kiterjesztjük $\mathbb{K}_{BTZ}$ maradék három másolatára

is. Belátható, hogy ekkor az előforduló koordináták halmaza: $j = 0, 1, \dots, 2N - 1$ és $k = 0, 1, \dots, N - 1$, ahol $j + k \equiv 0 \pmod{2}$ (12. ábra).

Vizsgáljuk meg tehát, hogy milyen összefonódottsági mennyiségeket kódol a fundamentális $\mathbb{K}_{BTZ}$ tartomány. A $k = 0$ csempék területei továbbra is arányosak a divergens kölcsönös információval:

$$\begin{aligned} \frac{c}{3}T_{j,0} &= I[a - 1a, bb + 1] = \\ &= S[a - 1, a] + S[b, b + 1] - S[a - 1, b + 1] \end{aligned} \quad (70)$$

Ahol $a, b \in \partial BTZ$ és ismét használtuk a korábban bevezetett kapcsos zárójelet a BTZ határ intervallumainak jelölésére.

A $0 < k \leq N - 2$ csempék területei ebben az esetben is kölcsönös feltételes információkat kódolnak, vagyis:

$$\begin{aligned} \frac{c}{3}T_{j,k} &= I_{j,k} = \\ &= I[a - 1a, bb + 1|ab] = \\ &= S[a - 1b] + S[ab + 1] - S[ab] - S[a - 1b + 1] \end{aligned} \quad (71)$$

$\mathbb{K}_{BTZ}$ esetében a kinematikus tér tartalmaz $k = N - 1$ címkével ellátott, véges méretű, háromszög alakú tartományt is. Jelöljük ezek területeit $T_{j,N-1}$ -gyel. Ezek értékeit úgy tudjuk meghatározni, ha vissza megyünk a négy fundamentális tartományt tartalmazó $\mathbb{K}_{\mathbb{D}}$ térre. Itt a $k = N - 1$ -gyel jelölt négyzet alakú csempék területei $2T_{j,N-1}$. Ezeket a tartományokat az $a, \bar{a}, b, \bar{b}$ címkékkel ellátott pontgörbék határolják, ahol:

$$a \equiv \frac{j - k}{2}, \quad b \equiv \frac{j + k}{2}, \quad \bar{b} \equiv a - 1, \quad \bar{a} \equiv b + 1 \pmod{2N} \quad (72)$$

(a és b jelölhetnek akár eredetileg is felülvonással címkézett görbéket is). Tehát a csempe területét a Crofton-forma segítségével formálisan kapcsolatba hozhatjuk a következő alakú kölcsönös feltételes információkkal:

$$2 \cdot \frac{c}{3}T_{j,N-1} = I(ab, \bar{a}\bar{b}|b\bar{a}) = S(a\bar{a}) + S(b\bar{b}) - S(\bar{b}a) - S(b\bar{a}) \quad (73)$$

Vegyük észre, hogy BTZ reprezentációban $S(a\bar{a})$ és $S(b\bar{b})$ a teljes határra vonatkoztatott $S[\partial BTZ]$ összefonódottsági entrópiát szolgáltatják, valamint $S(b\bar{a}) = S(\bar{b}a) = S[ba]$. Ezt felhasználva az (73) egyenlet két-két tagja a következő alakra hozható:

$$\begin{aligned}
S(a\bar{a}) - S(\bar{b}a) &= S(b\bar{b}) - S(b\bar{a}) = \\
&= S[\partial BTZ] - S[ab] = \\
&= S[ba|ab]
\end{aligned} \tag{74}$$

Ahol az utolsó két sorban $[ab]$ és $[ba]$ BTZ intervallumokat jelölnek, $S[ba|ab]$ mennyiség pedig a 4. fejezetben bemutatott feltételes entrópia. Ezt felhasználva (73) egyenlet átírható a következő alakra:

$$\frac{c}{3}T_{j,N-1} = S[ba|ab] \tag{75}$$

Tehát $\mathbb{K}_{BTZ}$ $k = N - 1$ -hez tartozó háromszög alakú csempéi feltételes entrópiákat kódolnak.

Összefoglalva tehát azt kaptuk, hogy a BTZ fekete lyuk kinematikus terén a csempék területei a következő összefonódottsági mennyiségekkel arányosak:

$$T_{j,k} = \frac{3}{c} \cdot \begin{cases} I[a - 1a, bb + 1], & \text{if } k = 0 \\ I[a - 1a, bb + 1|ab], & \text{if } 0 < k < N - 1 \\ S[ba, ab], & \text{if } k = N - 1 \end{cases} \tag{76}$$

Ahol:

$$a \equiv \frac{j - k}{2}, \quad b \equiv \frac{j + k}{2} \pmod{N} \tag{77}$$

A kapott eredményeket felhasználva szeretnénk a BTZ fekete lyuk összefonódottsági mennyiségeihez is egy Y-rendszert találni. A korábbiakhoz hasonlóan vezessük be a következő mennyiségeket:

$$Y_{j,k} = \begin{cases} \frac{1}{e^{T_{j,k-1}}}, & \text{if } 0 \leq k < N - 1 \\ \frac{1}{e^{2T_{j,k-1}}}, & \text{if } k = N - 1 \end{cases} \tag{78}$$

Ahol $T_{j,k}$ továbbra is $\mathbb{K}_{BTZ}$ beli csempék területeit jelöli. A korábbiakkal analóg módon a négy fundamentális $\mathbb{K}_{BTZ}$ tartományt tartalmazó $\mathbb{K}_{\mathbb{D}}$ tér segítségével, (66)-t felhasználva két különböző alakú reláció írható fel (ismét a $j \rightarrow j - 1 \pmod{2N - 1}$ átcímkezésével). Egyik, amelyik a $k \leq N - 2$ csempékre vonatkozik:

$$Y_{j-1,k}Y_{j+1,k} = (1 + Y_{j,k-1})(1 + Y_{j,k+1}) \tag{79}$$

A másik, pedig amelyik a $k = N - 1$ háromszögekre vonatkozik:

$$Y_{j-1,N-1}Y_{j+1,N-1} = (1 + Y_{j,N-2})^2 \quad (80)$$

Ezt a két összefüggés szintén összevonható a vákuum esetén bevezett alakká:

$$Y_{j-1,k}Y_{j+1,k} = \prod_{i \neq k} (Y_{j,i} + 1)^{-a_{ki}} \quad (81)$$

Minden $k = 1, \dots, N-1$ -re, ahol most $A = \{a_{ij}\}_{i,j=0,\dots,N-1}$ a következő alakú, $N \times N$ -es mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (82)$$

És a határfeltételek a rögzített $Y_{j,0} = 0$ és a szabad² $Y_{j,N-1} = \frac{1}{e^{2T_{j,N-1}-1}} = \frac{1}{e^{2S[ba,ab]-1}}$. Az így generált $Y_{j,k}$ mennyiségek rendszerét C_{N-1} Zamolodchikov Y-rendszernek hívjuk. Ez tehát a kinematikus tér szerkezetén keresztül a magas hőmérsékletű CFT részrendszerek kölcsönös feltételes információinak egy algebrai struktúráját határozza meg.

Összefoglalva tehát vákuum és magas hőmérséklet esetén találtunk a CFT kölcsönös feltételes információira egy közös algebrai leírást. A két esetet (hasonlóan a klaszter algebrákhoz) a rekurziós relációban használt A mátrix, valamint a határfeltételek különböztetik meg. Az algebrai leírás lehetőséget ad arra, hogy rögzített számú részrendszer esetén mind az $\mathcal{O}(N^2)$ kölcsönös feltételes információt $\mathcal{O}(N)$ mennyiség ismeretében meghatározzuk.

²Ebben az esetben a szabad határfeltétel azt jelenti, hogy most a $k = N-1$ csempékre is vonatkozik a levezetett reláció. Az A mátrix nulladik és utolsó sora továbbra sem is fordul elő a relációkban kitévőként, de az utolsó már igen.

7. fejezet

Összefoglalás

Dolgozatomban az AdS/CFT megfelelés egy speciális esetét vizsgáltam, amely szerint kapcsolat van a 2+1 dimenziós anti-de Sitter jellegű terek geodetikusai és a határon értelmezett konform térelmélet részrendszereinek összefonódotsági entrópiái között. A határon élő CFT gerjesztései esetén a tiszta AdS tér faktorizációjának segítségével előállítható geometriák adják a duális elméletet. Az egyik ilyen geometria az úgynevezett BTZ fekete lyuk. Munkámban a statikus, nem forgó, makroszkópikus BTZ fekete lyuk segítségével vizsgáltam a magas hőmérsékletű CFT összefonódottságát.

Témavezetőmmel végzett korábbi munkáink során, a tiszta AdS tér geodetikus sokszögeinek triangulációin keresztül megmutattuk, hogy a CFT vákuum összefonódotsági mennyiségei speciális matematikai struktúrákkal állnak kapcsolatban: a részrendszerek von Neumann entrópiái A_n klaszter algebrát, a több részrendszerre vonatkozó kölcsönös feltételes információk pedig A_n Zamolodchikov Y-rendszert alkotnak [2]. Dolgozatomban a korábbi recept segítségével megmutattam, hogy hasonló algebrai struktúrák jelennek meg BTZ fekete lyuk esetén is. A határ részrendszereinek összefonódotsági mennyiségei a klaszter algebrák egy másik speciális esetét, úgynevezett C_n típusú klaszter algebrát alkotnak. Hasonlóan a geodetikusok teréből kiindulva megmutattam, hogy a kölcsönös feltételes információk C_n típusú Y-rendszert határoznak meg.

Az összefüggéseket a hiperbolikus geometriában használt Poincaré féle körmodell geometriájának segítségével határoztam meg. Ebben a reprezentációban a geodetikusok hosszára, így a Ryu-Takayanagi összefüggésen keresztül az összefonódotsági entrópiára is más kifejezéseket kapunk, mint amit az irodalomban, a Schwarzschild koordináták segítségével kapnak. Ez a különbség az összefonódotsági entrópia számításánál egy speciális regularizáció (mértékszabadság) választásával állítható kapcsolatba. Ez a speciális

geometriai mértékválasztás a későbbiekben lehetőséget adhat arra, hogy bonyolultabb geometriák esetén, az összefonódottsági mennyiségek algebrai összefüggéseit a körmodel-
len keresztül vizsgáljuk. Nyitott kérdés azonban, hogy az így kapott entrópia formulák
magas hőmérsékleten is kielégítik -e az összefonódottsági mennyiségekre vonatkozó meg-
szorításokat, például az úgynevezett Araki-Lieb egyenlőtlenséget.

Bár dolgozatomban a $\tau = 0$ statikus, nem forgó esetre szorítkoztunk, az eredmények a
nem statikus esetre való általánosítás alapjait is képezhetik. Megmutatható ugyanis, hogy
a bonyolultabb topológiájuk Riemann-felületek határa szintén a hiperbolikus geometria
faktorizációjának segítségével állíthatók elő [32, 34, 33].

Egy fontos további kérdés, hogy véges hőmérséklet esetén hogyan módosulnak a kapott
algebrai struktúrák. Ekkor (38) egyenlet érvényét veszti, ugyanis egy bizonyos kritikus
 α nyílásszög alatt az adott részrendszer entrópiája már nem a vele homológ geodetikus
hosszával, hanem egy kétkomponenst tartalmazó geodetikus pár hosszával fog kapcsolat-
ban állni [17]. Véleményünk szerint ennek a kérdésnek a megválaszolását is többek közt
a nem statikus eset részletes feltárása fogja elősegíteni.

A statikus eset és a kölcsönös feltételes információkra vonatkozó Y-rendszerek álta-
lánosítására már vannak próbálkozásaink a twistor geometria és a termodinamikából
ismert eredmények felhasználásával. A bonyolultabb esetek megértéséhez azonban a kon-
form térelmélet és a pályaintergrál elmélet alapos ismerete is elengedhetetlen. A dolgozat
alapját adó kutatásunk és későbbi eredményeink várhatóan ezen irányokat fogják maguk-
ba foglalni.

Függelék

A. Lambda-hossz

Ebben a fejezetben a lambda-hosszal kapcsolatos legfontosabb fogalmakat és összefüggéseket ismertetem. Tekintsük $R = 1$ esetén a statikus ($V = 0$) AdS térhez (amely a kétköpenyű hiperboloid geometriájával azonos) aszimptotikusan illeszkedő pozitív fénykúpot [20], azaz:

$$\mathcal{L}^+ = \{b \cdot b = 0 | b \in \mathbb{R}^{1,2} \wedge b_1 > 0\} \quad (83)$$

Azon $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}$ görbéket, melyekre teljesül a következő feltétel:

$$w \cdot b = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (84)$$

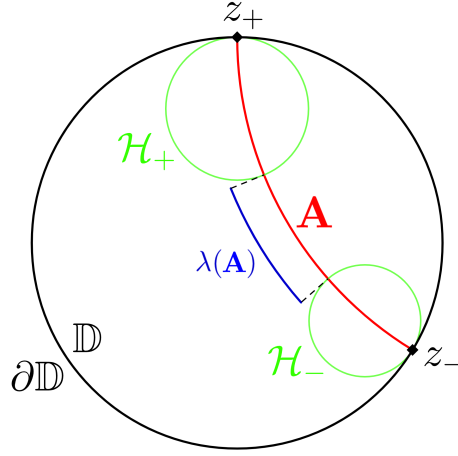
Horociklusoknak hívjuk [20]. Itt $w \in AdS$ és $b \in \mathcal{L}^+$. Ekkor $\mathcal{L}^+$ minden egyes pontjának pontosan egy AdS-beli horociklus felel meg. Belátható, hogy $\mathbb{D}$ -beli koordinátákra áttérve egy horociklus azon pontok halmaza, mely kielégíti a következő egyenletet:

$$\mathcal{H} : \left(\xi - \frac{\sqrt{2}b_2}{1 + \sqrt{2}b_1} \right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{2}b_3}{1 + \sqrt{2}b_1} \right)^2 = \frac{1}{(1 + \sqrt{2}b_1)^2} \quad (85)$$

Ez egy $\mathbb{D}$ -beli Euklideszi kör egyenlete, melynek egyik $(b_2/b_1, b_3/b_1)$ pontja rajta van $\partial\mathbb{D}$ -n. Komplex alakra áttérve ez a következő $z \in \partial\mathbb{D}_{\mathbb{C}}$ pont:

$$z = e^{iu} := \frac{b_2 + b_3i}{b_1} \quad (86)$$

Tehát $\mathcal{L}^+$ minden egyes pontja megfelel $\partial\mathbb{D}$ egy-egy pontjának is. Tekintsük ekkor azt a $\mathbb{D}$ -beli $\mathbf{A}$ geodetikust, amely $z_- = e^{iu}$ pontból indul és $z_+ = e^{iv}$ pontba érkezik. $z_{\pm} \in \partial\mathbb{D}$ -nek megfelel két $b_{\pm} \in \mathcal{L}^+$ pont, amely egy-egy $\mathcal{H}_{\pm}$ horociklust határoz meg. Ekkor ezen



13. ábra. (89) szerint egy $\mathbf{A}$ geodetikus lambda-hossza a geodetikus végpontjaiba állított horociklusokkal vett metszéspontja közé eső szakaszának hosszával áll kapcsolatban. A lambda-hosszat azonban (87) alapján csak a geodetikus végpontjainak helyzete határozza meg.

geodetikus lambda-hosszát a következőképpen definiáljuk [20]:

$$\lambda(\mathbf{A}) := \sqrt{-(b_- \cdot b_+)} \quad (87)$$

Amely az (u, v) és (α, Θ) paraméterekkel kifejezve:

$$\lambda(\mathbf{A}) = \sqrt{2(b_-)_1(b_+)_1} |\sin \alpha| = \sqrt{2(b_-)_1(b_+)_1} \left| \sin \frac{v - u}{2} \right| \quad (88)$$

Belátható, hogy a lambda-hossz és a hiperbolikus távolság között fennáll a következő összefüggés:

$$\lambda^2(\mathbf{A}) = e^{\delta(\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_+)} \quad (89)$$

Ahol $\delta(\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_+)$ a $\mathbf{A}$ geodetikusnak a $\mathcal{H}_-$ és $\mathcal{H}_+$ horociklussal alkotott metszéspontjainak hiperbolikus távolsága (13. ábra). Ennek bizonyításához vegyük azt a triviális esetet, amikor $u = 0$ és $v = \pi$, vagyis $z_- = 1$ és $z_+ = -1$. Ekkor az $\mathbf{A}$ geodetikus egy Euklideszi egyenes $\mathbb{D}$ -n. Vegyük fel $\mathcal{H}_+ - t$ horociklust úgy, hogy átmenjen az origón, $\mathcal{H}_-$ -t pedig úgy, hogy $\mathbf{A}$ -val való metszéspontja w legyen. Ekkor (85) alapján belátható, hogy az

ezekhez tartozó $b_{\pm} \in \mathcal{L}^+$ vektorok a következők:

$$b_- = \begin{pmatrix} \frac{1+w}{\sqrt{2}(1-w)} \\ 0 \\ \frac{1+w}{\sqrt{2}(1-w)} \end{pmatrix} \quad b_+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (90)$$

Ekkor a lambda-hossz négyzete:

$$\lambda^2(\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_+) = -(b_- \cdot b_+) = \frac{1+w}{1-w} \quad (91)$$

Két $\mathbb{D}$ -beli, Q_1 és Q_2 pont távolságát a következőképpen lehet meghatározni:

$$\delta(Q_1, Q_2) = \ln \frac{|1 - \bar{z}_1 z_2| + |z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_1 z_2| - |z_1 - z_2|} \quad (92)$$

Ahol z_1 és z_2 jelölik a Q_1 és Q_2 pontok helyzetét a komplex síkon. Ezt a geodetikusok és horociklusok két metszéspontjára alkalmazva:

$$\delta(\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_+) = \ln \frac{1+w}{1-w} \quad (93)$$

Látható, hogy erre a speciális esetre igaz a (87)-es összefüggés. Mivel olyan diffeomorfizmusok segítségével, melyekre a metrika invariáns, $\mathbb{D}$ összes geodetikusa előállítható, valamint mivel ezekre a transzformációkra nézve a metrika invariáns, így w és 0 képe között a távolság, továbbá a lambda-hossz is állandó, így erre a speciális esetre bizonyítva az állítást beláttuk minden geodetikusra és horociklusra. A lambda-hossz tehát felfogható úgy, mint a geodetikus horociklusok által regularizált hosszának egy mérőszáma.

B. Pontozott felületek és triangulációk

A következőkben [4] cikk alapján összefoglalom a pontokkal megjelölt, aszimptotikus határral rendelkező Riemann-felületekre vonatkozó matematikai definíciókat.

B.1. Definíció (Pontozott, határral rendelkező felületek). *Legyen $\mathbf{S}$ egy kétdimenziós, irányított, összefüggő Riemann-felület $\partial\mathbf{S}$ határral. Jelöljünk meg pontok egy $\mathbf{M}$ halmazát $\partial\mathbf{S}$ -en. Ekkor $(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ pontozott, határral rendelkező felületnek hívjuk, int $\mathbf{S}$ -et pedig az $\mathbf{S}$ felület belsejének.*

B.2. Megjegyzés. ∂S véges számú komponenst tartalmazhat, amelyek egyenként összefüggőek.

A következőkben olyan felületekkel foglalkozom, amelyek kizárólag egy, vagy két határral rendelkeznek.

B.3. Definíció (Horizont, lyuk). Amennyiben a felület két komponenst tartalmaz, amelyből az egyik nem pontozott és a másik teljes egészében körül fogja, akkor azt horizontnak hívjuk, az általa kivágott rész pedig lyuknak.

B.4. Definíció (Ív). Azon (S, M) -beli görbét, amelyekre teljesülnek a következő feltételek:

- a görbe végpontjai M elemei,
- a görbe nem metszi saját magát $\text{int}S$ -ben,
- a végpontjaitól eltekintve a görbe diszjunkt M -től és ∂S -től,

Íveknek hívjuk és γ -val jelöljük őket.

B.5. Definíció (Kompatibilis ívek). Ha két ív nem metszi egymást $\text{int}S$ -ben, akkor őket kompatibilisnek hívjuk.

B.6. Definíció (Trianguláció, háromszögek). Egy T ideális triangulációja (S, M) -nek egy maximális halmaza különböző, páronként kompatibilis íveknek. Egy ideális trianguláció (S, M) -et háromszögekre osztja¹.

B.7. Megjegyzés. Ha a megjelölt pontok számát rögzítjük, akkor (S, M) minden triangulációja ugyanannyi kompatibilis ívet tartalmaz.

B.8. Definíció (Flip). Töröljünk ki egy γ ívet egy T triangulációban és adjunk hozzá egy másik γ' ívet úgy, hogy egy újabb T' triangulációhoz jussunk. Ezt a transzformációt flipnek nevezzük.

B.9. Definíció (Kicserélési gráf). Legyen (S, M) egy pontozott, határral rendelkező felület. Legyen a triangulációiban szereplő kompatibilis ívek száma n . Ekkor azt az n -reguláris gráfot, amelynek csúcsaiban (S, M) triangulációi szerepelnek (S, M) kicserélési gráfjának nevezzük, amennyiben az összekötött csúcsaiban szereplő triangulációk egy flip-ben különböznek egymástól.

A következőkben vizsgáljunk meg két, a dolgozat szempontjából fontos példát.

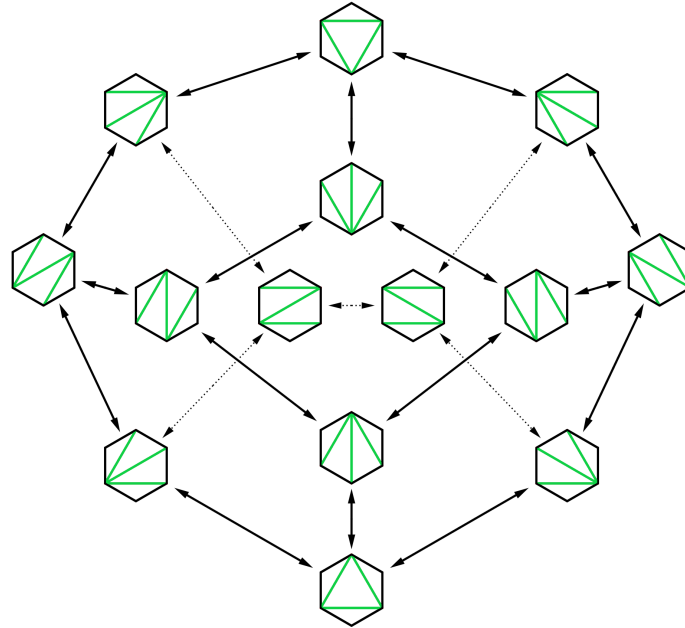
¹A háromszög kifejezés nem feltétlenül jelent három különböző csúccsal rendelkező objektumot.

B.1. Sokszög kicserélési gráfja

Legyen $(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ egy határral rendelkező felület egyetlen határ komponenssel és $N \geq 4$ ponttal $\partial \mathbf{S}$ -en. Ezek a pontok egy sokszöget határoznak meg. Az oldalai határ elemek (vagy ívek) szomszédos, az átlói pedig kompatibilis ívek nem szomszédos pontok közt.

Az N -szög triangulációja $N - 3$ kompatibilis ívet tartalmaz. Egy adott trianguláció minden γ átlója meghatároz egy négyszöget a következő értelemben: minden éle a sokszög egy oldala, vagy átlója, az egyik átlója pedig γ . Jelöljük a kiválasztott négyszög másik átlóját γ' -val. Ekkor egy flip γ mentén azt jelenti, hogy ebben a négyszögben kicseréljük γ -t γ' -re.

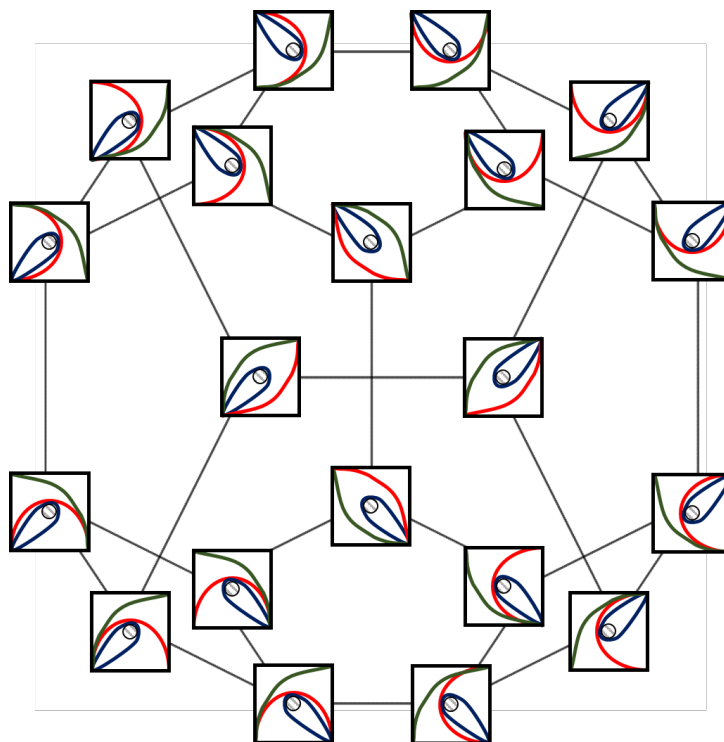
A sokszög kicserélési gráfja a sokszög triangulációiból és az azok közötti flibekből épül fel. Egy N -szög esetén a gráfnak $\frac{(2N-4)!}{(N-1)!(N-2)!}$ csúcsa van. Ezt a gráfot asszociahedronnak nevezik. $N = 6$ esetén lásd 14. ábra.



14. ábra. $N = 6$ esetén, a flipek által meghatározott asszociahedron, csúcsaiban a sokszög triangulációival.

B.2. Lyukas sokszög kicserélési gráfja

Legyen $(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ egy pontozott, határral rendelkező felület egy külső és egy belső határ komponenssel. Jelöljük meg N darab pontot a külsőn, vagyis a belső komponens egy



15. ábra. $N = 6$ esetén, a flipek által meghatározott ciklohedron, csúcsaiban a sokszög triangulációival.

horizont. Ekkor egy triangulációban a lyuk nélküli esettől eltérő, több féle kompatibilis ív húzható be. Vannak olyan ívek, amelyek a horizontot megkerülve önmagukba csatlakoznak a külső határon. Ezeket az íveket hurkoknak nevezzük. Két különböző pont között két különböző, "természetes" ív húzható: egy, amelyik a horizontot egyik oldalról, másik pedig a másik oldalról kerüli meg.

Egy egy lyukú N -szög triangulációi $N - 2$ természetes és egy hurok ívet tartalmaznak. A trianguláció a következő tartományokból épül fel: néhány természetes háromszög, amelyek oldalai a sokszög átlói, vagy élei. Tartalmaz továbbá egy összehajtott háromszöget (vagyis amelynek két különböző csúcsa van), amelynek az egyik oldala a hurok, továbbá egy nem összefüggő tartományt, amelynek határai a hurok ív és a horizont.

Ebben az esetben két különböző típusú flip hajtható végre. Egyrészt lehetőség van a sokszög egyik átlójának transzformációjára egy kiválasztott négyszögben. Ez a négyszög összehajtott is lehet, amennyiben egyik oldala a hurok. Másrészt pedig a hurkon is végrehajtható egy flip. Ebben az esetben az ív kicserélése után szintén egy hurkot kapunk.

A kicserélési gráfot úgy határozhatjuk meg, ha észrevesszük, hogy egy egy-egy megfeleltetés van az egy lyukkal rendelkező N -szög triangulációi és egy lyuk nélküli $2N$ -szög

középpontosan szimmetrikus triangulációi között. Jelöljük az N -szög csúcsait $a, b, \dots$ -vel. A $2N$ -szöget úgy tudjuk megkonstruálni, ha az N -szög minden csúcsának ekészítjük a középpontos tükörképét, amelyet jelöljünk $\bar{a}, \bar{b}, \dots$ -vel. Ekkor az N -szög minden természetes (ij) ($i \neq j$) íve a $2N$ -szög egy középpontosan szimmetrikus $\{(ij), (\bar{i}\bar{j})\}$ (vagy, ha $i > j$, akkor $\{(j\bar{i}), (\bar{j}\bar{i})\}$) párjához tartozik. Az N -szögben található (ii) hurok pedig az $(i\bar{i})$ átmérőnek felel meg a $2N$ -szög képbén. Ekkor az N -szög minden, nem hurok átlójának flipje egy középpontosan szimmetrikus flip párnak, a hurkon végrehajtott transzformáció pedig az átmérő cseréjének felel meg. Ezzel a konstrukcióval ekészíthetjük a kicserélési gráfot, amely egy ciklohedron (lásd 15. ábra).

C. KLASZTER algebrák

A következőkben [4, 23, 24] cikkek alapján összefoglalom a klaszter algebrákkal kapcsolatos legfontosabb matematikai fogalmakat.

C.1. Definíció (($\mathbb{P}, \oplus, \cdot$) féltest). Legyen $(\mathbb{P}, \cdot)$ egy Abel-csoport és $(\mathbb{P}, \oplus)$ egy kommutatív félgyűrű azzal a felétellel, hogy $\oplus$ disztributív a szorzásra nézve. Ekkor $(\mathbb{P}, \oplus, \cdot)$ -t féltestnek nevezzük.

C.2. Megjegyzés (Félcsoport). $(\mathbb{P}, \oplus)$ egy félcsoport, ha az $\oplus$ bináris művelet asszociatív.

C.3. Példa. $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \cdot)$ egy féltest, ha $\forall x, y \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$: $x \oplus y = \min\{x, y\}$ és $x \cdot y = x + y$.

C.4. Példa (Tropikus féltest). Legyen I indexek véges halmaza és tekintsük a következő félcsoportot:

$$\mathbb{P} = \text{Trop}(q_i : i \in I) = \left\{ \prod_{i \in I} q_i^{a_i} \mid a_i \in \mathbb{Z} \right\} \quad (94)$$

Definiáljuk két $\mathbb{P}$ beli elem között az $\oplus$ összeadást a következőképpen:

$$\prod_i q_i^{a_i} \oplus \prod_i q_i^{b_i} = \prod_i q_i^{\min(a_i, b_i)} \quad (95)$$

Ekkor $(\mathbb{P}, \oplus, \cdot)$ egy féltest, amelyet tropikus féltestnek nevezünk.

C.5. Definíció. Legyen $\mathcal{F}$ egy test, amely izomorf az n független változóval rendelkező racionális függvények testével, amelyek együtthatói a $\mathbb{Z}\mathbb{P} = \left\{ \sum_{p_i \in \mathbb{P}} a_i p_i \mid a_i \in \mathbb{Z} \right\}$ test elemei.

C.6. Definíció (Normalizált gyök). $\Sigma = (\mathbf{x}, \mathbf{p}, B)$ az $\mathcal{F}$ bel normalizált gyöknek nevezzük, ha:

- $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ n darab $\mathcal{F}$ bel elemet tartalmaz,
- $\mathbf{p} = (p_i^\pm)_{1 \leq i \leq n}$ $2n$ darab $\mathbb{P}$ -beli elemet tartalmaz, amelyekre teljesül a $p_i^+ \oplus p_i^- = 1$ normalizációs feltétel minden $1 \leq i \leq n$ -re,
- és $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ egy $n \times n$ -es, egész elemű mátrix.

Ekkor $\mathbf{x}$ -et klaszternek, az elemeit klaszter változóknak, $\mathbf{p}$ -t együttható halmaznak, elemeit együtthatóknak, B -t pedig kicserélési mátrixnak nevezzük.

C.7. Definíció (Gyök mutáció). Legyen $\Sigma = (\mathbf{x}, \mathbf{p}, B)$ egy $\mathcal{F}$ -beli gyök és válasszunk ki $\mathbf{x}$ -ből egy tetszőleges $x_j \in \mathbf{x}$ klaszter változót. Ekkor azt mondjuk, hogy a $\Sigma' = (\mathbf{x}', \mathbf{p}', B')$ a Σ gyök egy mutációja, ha a következők teljesülnek:

- $\mathbf{x}' = (\mathbf{x} / \{x_j\}) \cup \{x'_j\}$ egy klaszter, ahol $x'_j \in \mathcal{F}$ -t a következő reláció határozza meg:

$$x_j x'_j = p_j^+ \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ b_{ij} > 0}} x_i^{b_{ij}} + p_j^- \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ b_{ij} < 0}} x_i^{-b_{ij}} \quad (96)$$

- $\mathbf{p}' = (p_i'^\pm)_{1 \leq i \leq n}$ egy együttható halmaz, amelyet a $p_i'^+ \oplus p_i'^- = 1$ normalizációs feltétel és a következő összefüggés határoz meg:

$$p_i'^+ / p_i'^- = \begin{cases} p_j^- / p_j^+, & \text{ha } x_i = x'_j \\ (p_j^+)^{b_{ji}} p_i^+ / p_i^-, & \text{ha } b_{ji} \geq 0 \\ (p_j^-)^{b_{ji}} p_i^+ / p_i^- & \text{ha } b_{ji} \leq 0 \end{cases} \quad (97)$$

- $B' = (b'_{ij})$ pedig egy együttható mátrix, amely B -vel a következő kapcsolatban áll:

$$b'_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{ha } x_i = x_k = x'_j \\ -b_{ij} & \text{ha } x_k = x'_j \neq x_i \\ -b_{jk} & \text{ha } x_i = x'_j \neq x_k \\ b_{ik} & \text{ha } x_i \neq x'_j, x_k \neq x'_j, \text{ és } b_{ij}b_{jk} \leq 0 \\ b_{ik} + |b_{ij}|b_{jk} & \text{ha } x_i \neq x'_j, x_k \neq x'_j, \text{ és } b_{ij}b_{jk} \geq 0 \end{cases} \quad (98)$$

Látható, hogy a klaszterváltozóra vonatkozó összefüggés hasonló alakú, mint az 5.2 fejezetben található (46) reláció. Fontos megjegyezni azonban, hogy az itt közölt definíció sokkal általánosabb, mint az 5.2 fejezetben található. A korábbi definícióban szereplő klaszter változók magukba foglalták az együtthatókat is. Ezek a sokszög oldalaihoz tartozó geodetikus lambda-hosszak voltak, amelyekre a $j < N - 1$ feltétel miatt nem vonatkozott a (46) rekurziós reláció, tehát ezek is együtthatók szerepét töltötték be. Az imént ismertetett definícióban a B mátrix (amely ebben az esetben szintén nem tartalmaz az együtthatókra vonatkozó elemeket) kicserélési relációja is szerepel, amelyre a korábbi szövegben szintén nem tértem ki részletesen.

A következőkben a klaszter algebrák és a pontozott felületek közötti kapcsolatot ismertetem

C.8. Definíció (Előjeles összefüggőségi mátrix). Legyen T az (S, M) pontozott, határral rendelkező felület egy triangulációja. Ekkor T -hez kapcsolhatunk egy $B = B(T)$ $n \times n$ mátrixot, amelyet előjeles összefüggőségi mátrixnak nevezünk. Ez magába foglalja a T trianguláció kombinatorikai tulajdonságait. Jelöljük T íveit $1, \dots, n$ -nel. Ekkor $B(T)$ sorait és oszlopait ezen ívek címkéivel indexeljük.

A $B(T)$ mátrixot a következőképpen konstruálhatjuk meg: a T trianguláció minden Δ háromszögéhez definiáljunk egy $B^\Delta = \{b_{ij}^\Delta\}$ $n \times n$ -es, egész elemű mátrixot a következőképpen:

$$b_{ij}^\Delta = \begin{cases} 1 & \text{ha } \Delta \text{ oldalai } i \text{ és } j, \text{ ahol } j \text{ } i\text{-t óramutató járásával megegyezően követi,} \\ -1 & \text{ha az előző feltétel teljesül, de óramutató járásával ellentétes irányban,} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases} \quad (99)$$

Ekkor $B = B(T) = \{b_{ij}\}$ a következőképpen kapható meg:

$$B = \sum_{\Delta} B^{\Delta} \quad (100)$$

Ahol az összegzés az összes T beli háromszögon végigfut. Ez az $n \times n$ -es mátrix antiszimmetrikus és minden b_{ij} eleme $0, 1, -1, 2$, vagy -2 .

A B mátrix kiszámítására vonatkozó definíció analóg az 5.2 fejezetben említett gráfos módszerrel, azzal a különbséggel, hogy B indexei most csak a klaszter változókra, az együtthathatókra pedig nem vonatkozik.

C.9. Definíció (Mutáció ekvivalencia). Tekintsük az $(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ két különböző, T és T' triangulációját és a hozzájuk tartozó $B(T)$ és $B(T')$ mátrixokat. Mivel T' megkapható T -ből a trianguláción végrehajtott flipok sorozatával, ezért azt mondjuk, hogy $B(T)$ és $B(T')$ mutációt tekintve ekvivalensek.

C.10. Tétel. Legyen $(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ egy pontozott, határral rendelkező felület, T ennek egy triangulációja, valamint $\mathbf{x}(T)$ az $\mathcal{F}$ test elemeit tartalmazó klaszter. $\mathbf{x}(T)$ elemeit az $(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ felület $\gamma \in T$ íveivel indexeljük. Ekkor:

- minden $\Sigma_T = (\mathbf{x}(T), \mathbf{p}(T), B(T))$ hármas egy gyök, ahol $\mathbf{x}(T) = (x_{\gamma}(T))_{\gamma \in T}$, $\mathbf{p}(T) = (p_{\gamma}^{\pm}(T))_{\gamma \in T}$, és a $B(T)$ kicserélési mátrix egyenlő a T trianguláció előjeles összefüggőségi mátrixával,
- ha T' megkapható T -ből egy $\gamma \in T$ menti flip végrehajtásával, akkor $\Sigma_{T'}$ megkapható Σ_T -ből a $x_{\gamma} \rightarrow x_{\gamma'}$ mutáció végrehajtásával.

Ez utóbbi tétel egyértelműen meghatározza a pontozott, határral rendelkező felületek és a klaszter algebrák között kapcsolatot.

C.1. A_n klaszter algebra

Egy N -szög triangulációjához az úgynevezett A_n típusú klaszter algebrát társítjuk, ahol $n = N - 3$. Jelöljük a sokszög csúcsait $a, b, \dots$ -vel. A triangulációban szereplő íveket és a klaszter változókat a sokszög átlóinak végpontjait jelölő párokkal címkézzük. Ekkor a klaszter algebrára vonatkozó kicserélési relációk (amelyek egyben egy flipet is jelölnek) a következő alakúak:

$$x_{ik}x_{jl} = p_{ik,jl}^+ x_{ij}x_{kl} + p_{ik,jl}^- x_{li}x_{kj} \quad (101)$$

Ahol i, j, k és l a négyszög tetszőleges csúcsait jelölik az óramutató járásával ellentétes irányban, valamint a $p_{ac,bd}^\pm$ együtthatók egy $\mathbb{P}$ féltest elemei.

Milyen alakúnak válasszuk az oldalakhoz tartozó együtthatókat és az átlókhöz tartozó klaszter változókat, hogy az 5.2 fejezetben említettekkel azonos eredményt kapjunk? Ehhez a sokszög minden csúcsához rendeljünk egy $z_i = (z_{1i}, z_{2i}) \in \mathbb{C}^2$ vektort, ahol i a sokszög egyik csúcsát jelöli. Ekkor minden (ij) élhez és átlóhoz definiáljuk a következő mennyiséget:

$$\Delta_{ij} = \frac{z_{2i}z_{1j} - z_{1i}z_{2j}}{2i} \quad (102)$$

A klaszter változók legyenek ekkor $x_{ij} = \Delta_{ij}$, illetve azt a konvenciót használjuk továbbá, hogy $x_{ij} = 1$, ha (ij) a sokszög egy oldala. Az együtthatók $\mathbb{P}$ halmazát válasszuk meg a következőképpen:

$$\mathbb{P} = \text{Trop}(\Delta_{ij} : (ij) \text{ a sokszög egy oldala}) \quad (103)$$

Az együtthatókat pedig definiáljuk a következőképpen: $p_{ik,jl}^+ = p_{ik}p_{jl}$ és $p_{ik,jl}^- = p_{li}p_{jk}$, ahol:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } (ij) \text{ a sokszög egy átlója,} \\ \Delta_{ij} & \text{ha } (ij) \text{ a sokszög egy éle.} \end{cases} \quad (104)$$

Az így megkonstruált együtthatók minden flip esetén kielégítik a kicserélési relációt és a normalizálási feltételt.

Ekkor a (101) kicserélési reláció minden flip (mutáció) esetében a következő alakú:

$$\Delta_{ik}\Delta_{jl} = \Delta_{ij}\Delta_{kl} + \Delta_{li}\Delta_{jk} \quad (105)$$

Látható, hogy ez az 5.2. fejezetben szereplő (47) Ptolemaiosz-relációval azonos, valamint az (18) lambda-hossz valóban felírható (102) alakban a $z = e^{\rho_0/2}(e^{i\vartheta_i}, e^{-i\vartheta_i})$ választással, ahol ϑ_i az i -edik csúcsot jellemző komplex argumentum.

Megmutatható, hogy egy A_n típusú klaszter algebrában az összes kicserélési mátrix mutációt tekintve ekvivalens a következő mátrixsal:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (106)$$

A sorok és oszlopok együttes felcserélésétől eltekintve.

C.2. C_n klaszter algebra

Egy lyukkal rendelkező N -szöghöz az úgynevezett C_n típusú klaszter algebrát társítjuk, ahol $n = N - 1$. Hogy meghatározzuk a kicserélési relációkat, ismét a $2N$ -szög képet használjuk. Jelöljük ennek csúcsait $a, b, \dots, \bar{a}, \bar{b}, \dots$ -vel. Ekkor minden, a csúcsokból kiválasztott pár meghatározza a $2N$ -szög egy oldalát, vagy átlóját. Ezekhez együtthatókat és klaszter változókat társíthatunk. Ahogy korábban említettem, ebben az esetben két típusú flip hajtható végre, amelyek a következő három kicserélési relációt határozzák meg:

- Ha a sokszögből egy tetszőlegesen kiválasztott négyszögben hajtunk végre flipet, amelynek i, j, k, l csúcsai óramutató járásával ellentétes irányban követik egymást, és az N -szögben négy különböző csúcsot reprezentálnak, akkor:

$$x_{ik}x_{jl} = p_{ik,jl}^+ x_{ij}x_{kl} + p_{ik,jl}^- x_{li}x_{jk}. \quad (107)$$

Amely azonos az A_n esetben kapott relációval.

- Ha egy olyan négyszögben hajtunk végre flipet, amelynek csúcsai $i, j, k, \bar{i}$ óramutató járásával ellentétes irányban, akkor:

$$x_{ik}x_{i\bar{j}} = p_{ik,i\bar{j}}^+ x_{ij}x_{i\bar{k}} + p_{ik,i\bar{j}}^- x_{i\bar{i}}x_{jk}. \quad (108)$$

Vegyük észre, hogy ez az az eset, amikor a kiválasztott négyszög egyik oldala a $2N$ -szög átmérője. Ez az N -szög képben az összehajtott négyszög beli flipnek felel meg.

- Ha pedig egy olyan négyszögben hajtunk végre flipet, amelynek csúcsai $i, \bar{i}, j, \bar{j}$ óramutató járásával ellenkező irányban, akkor:

$$x_{i\bar{i}}x_{j\bar{j}} = p_{i\bar{i},j\bar{j}}^+ x_{ij}^2 + p_{i\bar{i},j\bar{j}}^- x_{i\bar{j}}^2 \quad (109)$$

Ez az eredeti N -szög képben a hurok menti flipnek felel meg.

Ismét felmerül a kérdés, hogy milyen alakúnak válasszuk az oldalakhoz tartozó együtt-hatókat és az átlókhöz tartozó klaszter változókat, hogy az 5.2 fejezetben említettekkel azonos eredményt kapjunk? Ebben az esetben is az A_n klaszter algebrához hasonló módon járunk el. A $2N$ -szög minden középpontosan szimmetrikus csúcs párjához egy-egy két komponensű $z_i = (z_{1i}, z_{2i}) \in \mathbb{C}^2$ és $z_{\bar{i}} = (z_{1\bar{i}}, z_{2\bar{i}}) \in \mathbb{C}^2$ vektort rendelünk, ahol i és $\bar{i}$ az adott, szemközti csúcsokat jelölő címkék. Ekkor a sokszög minden középpontosan szimmetrikus él és átló párjához, valamint az átmérőhöz a következő mennyiségeket rendeljük:

$$\{[i, j], [\bar{i}, \bar{j}]\} \rightarrow \Delta_{ij} = \Delta_{\bar{i}\bar{j}} = \frac{z_{2i}z_{1j} - z_{1i}z_{2j}}{2i} = \frac{z_{2\bar{i}}z_{1\bar{j}} - z_{1\bar{i}}z_{2\bar{j}}}{2\bar{i}} \quad (110)$$

$$\{[j, \bar{i}], [\bar{j}, i]\} \rightarrow \Delta_{\bar{j}i} = \Delta_{j\bar{i}} = -\frac{z_{1j}z_{2\bar{i}} + z_{2j}z_{1\bar{i}}}{2} = -\frac{z_{1\bar{j}}z_{2i} + z_{2\bar{j}}z_{1i}}{2} \quad (111)$$

$$[i, \bar{i}] \rightarrow \Delta_{i\bar{i}} = -z_{1i}z_{2\bar{i}} \quad (112)$$

Látható, hogy a $z_i = e^{\rho_0/2}(e^{i\vartheta_i}, e^{-i\vartheta_i})$ és $z_{\bar{i}} = e^{\rho_0/2}(e^{i\vartheta_{\bar{i}}}, e^{-i\vartheta_{\bar{i}}})$ választással, ahol ϑ_i és $\vartheta_{\bar{i}} = \vartheta_i + \pi$ az i és $\bar{i}$ csúcsokat jellemző komplex argumentumok, a definiált mennyiségek éppen megegyeznek a 3. fejezetben szereplő (23) lambda-hosszakkal.

Ha ezeket a mennyiségeket az A_n esettel analóg módon ismét klaszter változókként és együtt-hatókként használjuk, akkor a (107), (108) és (109) egyenletek a következő alakúak lesznek:

$$\Delta_{ik}\Delta_{jl} = \Delta_{ij}\Delta_{kl} + \Delta_{il}\Delta_{jk} \quad (113)$$

$$\Delta_{\bar{k}i}\Delta_{jl} = \Delta_{j\bar{i}}\Delta_{kl} + \Delta_{l\bar{i}}\Delta_{jk} \quad (114)$$

$$\Delta_{k\bar{i}}\Delta_{l\bar{j}} = \Delta_{i\bar{j}}\Delta_{kl} + \Delta_{l\bar{i}}\Delta_{k\bar{j}} \quad (115)$$

$$\Delta_{ik}\Delta_{j\bar{i}} = \Delta_{ij}\Delta_{k\bar{i}} + \Delta_{i\bar{i}}\Delta_{jk} \quad (116)$$

$$\Delta_{j\bar{i}}\Delta_{k\bar{j}} = \Delta_{i\bar{j}}\Delta_{jk} + \Delta_{j\bar{j}}\Delta_{k\bar{i}} \quad (117)$$

$$\Delta_{i\bar{i}}\Delta_{j\bar{j}} = \Delta_{ij}^2 + \Delta_{j\bar{i}}^2 \quad (118)$$

Amelyek ismét azonosak a lambda-hosszakra kapott (51) összefüggésekkel.

Végül pedig a C_n esetben megmutatható, hogy a triangulációk kicserélési mátrixai mutációt tekintve ekvivalensek a következővel:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (119)$$

A sorok és oszlopok együttes felcserélésétől eltekintve.

Irodalomjegyzék

- [1] M. Banados, C. Teitelboim, J. Zanelli, Phys. Rev. Lett **69** 1849 (1992).
- [2] P. Lévay and B. Boldis, Phys. Rev. D**111** 126022 (2020).
- [3] S. Fomin and A. Zelevinsky, J. Amer. Math. Soc. **15** 497 (2002).
- [4] S. Fomin, M. Shapiro and D. Thurston, Acta Math. **201** 83 (2008).
- [5] L. K. Williams, Bull. Amer. Mth. Soc. **51** 1-26 (2014), arXiv:1212.6263 (2012).
- [6] E. Frenkel and A. Szenes, Mathematical Research Letters **2**, 677 (1995).
- [7] F. Ravanini, A. Valleriani and R. Tateo, Int. J. Mod. Phys. A**8** 1707 (1993).
- [8] F. Gliozzi and R. Tateo, Phys.Lett. **B348** 84 (1995).
- [9] Al. B. Zamolodchikov, Phys. Lett. **B253** 391 (1991).
- [10] S. Ryu and T. Takayanagi, Phys. Rev. Lett. **96** 181602 (2006).
- [11] S. Ryu and T. Takayanagi JHEP **08** 045 (2006).
- [12] V. E. Hubeny, M. Rangamani and T. Takayanagi, JHEP **07** 062 (2007).
- [13] B. Boldis and P. Lévay, Phys. Rev. D**105** 046020 (2022).
- [14] R. Bott and C. Taubes, J. Math. Phys. **35** 5247 (1994).
- [15] C. Hohlweg and C. Lange, Discrete and Computational Geometry, **37** 517 (2007).
- [16] S. L. Devadoss, T. Heath and C. Vipsmakul, Notices of the AMS, **58**, 530 (2011).
- [17] C. T. Asplund, N. Callebaut, and C. Zukowski, JHEP **09** 154 (2016).

- [18] N. L. Balazs and A. Voros, Physics Reports **143** 109 (1986).
- [19] B. Czech, L. Lamprou, S. McCandlish and J. Sully, JHEP **10** 175 (2015).
- [20] R. C. Penner, Commun. Math. Phys. **113** 299-339 (1987).
- [21] R. C. Penner, *Decorated Teichmüller Theory* European Mathematical Society 201:::2.
- [22] P. Lévy, Phys. Rev. D**100** 126022 (2019), arXiv:1909.09442 (2019).
- [23] S. Fomin and D. Thurston, Mem. Amer. Math. Soc. **255**, no. 1223 (2018).
- [24] S. Fomin and A. Zelevinsky, Invent. Math. **154**, 63–121 (2003).
- [25] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* Cambridge
- [26] B. Czech, L. Lamprou, S. McCandlish, B. Mosk and J. Sully, JHEP **07** 129 (2016).
University Press 2000.
- [27] B. Czech, L. Lamprou, S. McCandlish and J. Sully, Phys. Rev. Lett. **120**, 091601 (2018).
- [28] J. D. Brown and M. Henneaux, Commun. Math. Phys. **104** 207 (1986).
- [29] V. Balasubramanian, B. D. Chowdhury, B. Czech, J. de Boer, JHEP **01** 048 (2015)
- [30] P. Calabrese and J. Cardy, JSTAT **0406** P002 (2004).
- [31] J. C. Cresswell and A. W. Peet, JHEP **11** 155 (2017)
- [32] D. Brill, *Black Holes and Wormholes in 2+1 Dimensions*. In: Cotsakis S., Gibbons G.W. (eds) Mathematical and Quantum Aspects of Relativity and Cosmology. Lecture Notes in Physics, vol 537. Springer, Berlin (2000).
- [33] K. Skenderis, B. C. van Rees, Commun.Math.Phys. **301** 583 (2011).
- [34] S. Ammineborg, I. Bengtsson, D. Brill, S. Holst, P. Peldan, Class. Quant. Grav. **15** 627 (1998).
- [35] S. Carlip, Class. Quant. Grav. **12** 2853 (1995).
- [36] M. Headrick and T. Takayanagi, Phys. Rev. **D76** 106013 (2007).
- [37] V. E. Hubeny and M. Rangamani, JHEP **08** 092 (2013).