

Saját eredmények

Baja Zsolt, Dobák Dániel, Kovács Benedek, Pigler Donát
Lépés az $ax+by=p(z)$ alakú 2-Ramsey egyenletek karakterizációja felé

Témavezető: Pach Péter Pál

Az OTDK munkánkban vizsgált fő probléma a következő:

Legyenek a és b pozitív egészek és $p(z)$ egy legalább másodfokú, egész együtthatós polinom. Adott a pozitív egész számoknak egy 2 színnel való kiszínezése. Az a kérdés, hogy igaz-e tetszőleges ilyen színezés esetén, hogy az $ax+by=p(z)$ egyenletnek található végtelen sok olyan (x,y,z) megoldása, melyben x , y és z egyszínűek. (Ha ez igaz, akkor az egyenletet 2-Ramsey-nek nevezzük.)

A munka előzménye, hogy Hong Liu, Sándor Csaba, és témavezetőnk, Pach Péter Pál teljesen megoldották ezt a problémát az $a=b=1$ esetben, vagyis teljesen karakterizálták azokat a p egész együtthatós polinomokat, melyekre $x+y=p(z)$ 2-Ramsey. (Pontosan azok a polinomok lesznek 2-Ramsey-k, melyekre $p(1)p(2)$ páros.)

Ezt követően mi (tehát az OTDK-pályamunka négy szerzője) közös kutatásunkban, melyet 2021 nyarán végeztünk, azzal a célkitűzéssel dolgoztunk, hogy a Liu, Sándor és Pach által készített bizonyítást a lehető legjobban adaptáljuk arra az esetre, amikor a és b most már nem feltétlenül 1, hanem tetszőleges pozitív egészek.

A bizonyítás átültetése során számos új, kombinatorikai illetve számelméleti akadály vetődött fel, melyeket mi (szerzők) oldottunk meg. Voltak olyan lépések, melyeknél szükség volt bizonyos új technikai feltételek bevezetésére ahhoz, hogy a bizonyítás működni tudjon, így keletkezett a fő eredményünk, a dolgozat 1.1. Tétele. Ezen tétel 6 konkrét feltétel teljesülése esetén igazolja, hogy az $ax+by=p(z)$ egyenlet 2-Ramsey.

Ezen tétel ugyan önmagában eléggé technikai jellegű, de főként azért értékes, mert következik belőle bizonyos „szép” polinomosztályok 2-Ramseysége. Az alábbi következmények igazolása szintén a mi saját munkánk:

- **1.2. Következmény.** Legyenek a és b relatív prím pozitív egész számok. Ha a $p(z)=a_d z^d+\dots+a_1 z$ egész együtthatós polinomra igaz, hogy $d\geq 2$, $a_d>0$ és $a_1\neq 0$, akkor az $ax+by=p(z)$ egyenlet 2-Ramsey.
- **1.3. Következmény.** Legyenek a és n pozitív egészek úgy, hogy $n\geq 2$. Ekkor $ax+y=z^n$ 2-Ramsey.
- **1.5. Következmény.** Legyenek a , b , c pozitív egészek, melyekre $(a,b)=1$, $(a,c)=2^l$ és $(b,c)=2^{l'}$ valamilyen l, l' természetes számokra. Ekkor az $ax+by=c z^2$ egyenlet 2-Ramsey.

A cikkben szereplő másik két következmény (1.4. és 1.6.) igazolása szintén a mi saját munkánk.

A munkát angol nyelven benyújtottuk a Discrete Mathematics című folyóirathoz (Pach Péter Pál témavezetőnkkel közösen), ahol azt 2023. januárban közlésre elfogadták.

Hivatkozások:

[1] H. Liu, P. P. Pach, Cs. Sándor, *Polynomial Schur's theorem*, arXiv: 1811.05200