

A TUTTE-POLINOM EGY ALTERNATÍV MEGKÖZELÍTÉSE

BEKE CSONGOR, CSÁJI GERGELY KÁL ÉS PITUK SÁRA

TÉMAVEZETŐ: CSIKVÁRI PÉTER (ELTE TTK, SZÁMÍTÓGÉPTUDOMÁNYI TANSZÉK)

KIVONAT. A dolgozatban minden H páros gráfhoz definiálunk egy $\tilde{T}_H(x, y)$ kétváltozós polinomot, amit a H permutációs Tutte-polinomjának fogunk nevezni. Erre teljesül, hogy tetszőleges G gráf esetén, G -nek a hagyományos értelemben vett Tutte-polinomja előáll $T_G(x, y) = \sum_{i=1}^k \tilde{T}_{H_i}(x, y)$ alakban, valamely G -ből kapott $H_1, \dots, H_k$ páros gráfok esetén. Ki fog derülni, hogy a $\tilde{T}_H(x, y)$ és $T_G(x, y)$ polinomok sok szempontból nagyon hasonlóan viselkednek. Ennek köszönhetően $\tilde{T}_H(x, y)$ rendkívül hasznos eszköznek bizonyul a hagyományos Tutte-polinommal kapcsolatos kérdések vizsgálatában. Ezt több példán keresztül is demonstráljuk. Többek között adunk egy új bizonyítást a Jackson-egyenlőtlenségre, ami szerint

$$T_G(3, 0)T_G(0, 3) \geq T_G(1, 1)^2$$

minden elvágóél; és hurokélmentes G gráfra, felhasználva, hogy

$$\tilde{T}_H(3, 0)\tilde{T}_H(0, 3) \geq \tilde{T}_H(1, 1)^2$$

teljesül minden olyan H páros gráfra, amely nem tartalmaz izolált csúcsot. Továbbá, kiterjesztjük Brylawski egy híres tételét a Tutte-polinom együtthatóiról, és adunk rá egy új, egyszerű bizonyítást.

1. BEVEZETÉS

Legyen $G = (V, E)$ egy n csúcsú, m élű gráf. Jelölje $T_G(x, y)$ a G Tutte-polinomját [7]:

$$T_G(x, y) = \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{k(A)-k(E)} (y-1)^{k(A)+|A|-n},$$

ahol $k(A)$ jelöli a (V, A) gráf összefüggőségi komponenseinek számát.

A G gráf Tutte-polinomjából G számos tulajdonsága kiolvasható. Például $\tau(G) = T_G(1, 1)$, valamint $F(G) = T_G(2, 1)$ megadja, hogy G -nek hány feszítőfája, illetve feszítőerdeje van. Egy $F \subseteq E$ élhalmaz feszítőerdőt alkot, ha körmentes. (A *feszítő* elnevezés arra utal, hogy mindig V -t tekintjük az erdő csúcshalmazának.) Az $a(G) = T_G(2, 0)$ érték épp G aciklikus irányításainak számával egyezik meg, $T_G(0, 2)$ pedig G erősen összefüggő irányításainak számával. Ezen kívül a G csúcsainak q színnel való jó színezéseit számoló kromatikus polinom, valamint a

UNIVERSITY OF CAMBRIDGE (BSC II.), bekecsongor@gmail.com

ELTE: EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM, H-1117 BUDAPEST, PÁZMÁNY PÉTER SÉTÁNY 1/C (MSC II.), csaji.gergely@gmail.com

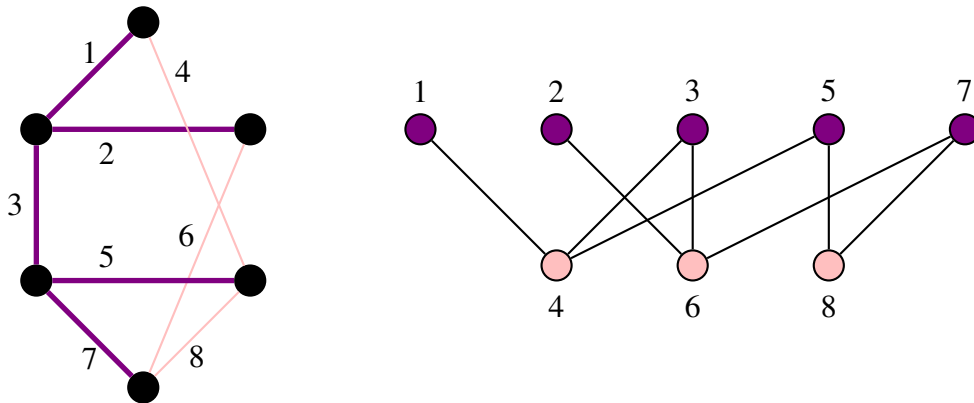
ELTE: EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM, H-1117 BUDAPEST, PÁZMÁNY PÉTER SÉTÁNY 1/C (MSC II.), pituksari@gmail.com

sehol sem nulla $\mathbb{Z}_q$ -folyamokat számoló folyampolinom is kifejezhető T_G segítségével: előbbi a $\text{ch}(G, q) = (-1)^{n-k(G)} q^{k(G)} T_G(1-q, 0)$, míg utóbbi a $C_G(q) = (-1)^{m-n+k(G)} T_G(0, 1-q)$ módon. A Tutte-polinomról az [1, 2, 4, 8] forrásokból nyerhet átfogó képet az olvasó.

Tutte eredeti definíciója [7] eltér a fent leírttól, de belátható, hogy ekvivalens azzal. Ő a következőképpen definiálta a Tutte-polinomot. Legyen T egy feszítőfa G -ben. Ha $e \in E(T)$ a fának egy éle, akkor legyen $\text{cut}(T, e)$ az a vágás G -ben, amelyet $T - e$ két komponense határoz meg. Továbbá ha $e \notin E(T)$ egy olyan él, ami nem tartozik a T feszítőfához, akkor jelölje $\text{cyc}(T, e)$ azt a kört G -ben, amely akkor keletkezik, ha T -hez hozzáadjuk e -t. Tekintsük most az éleknek egy rögzített sorrendjét. Nevezzünk egy $e \in E(T)$ élt *belül aktív*nek a T feszítőfára nézve, ha a $\text{cut}(T, e)$ vágásban szereplő élek közül e a legutolsó a sorrendben, egy $e \notin E(T)$ élt pedig *kívül aktív*nek T -re nézve, ha a $\text{cyc}(T, e)$ kör élei közül e a legutolsó. Vegyük észre, hogy ha $e \in E(T)$ és $f \notin E(T)$, akkor $f \in \text{cut}(T, e)$ pontosan akkor teljesül, ha $e \in \text{cyc}(T, f)$, és ebben az esetben e és f közül legfeljebb az egyik lehet aktív. Jelölje $\text{ba}(T)$ és $\text{ka}(T)$ a belül, illetve kívül aktív élek számát T -re nézve. Ekkor

$$T_G(x, y) = \sum_T x^{\text{ba}(T)} y^{\text{ka}(T)}.$$

Fontos, hogy a fenti összegben az éleknek ugyanazt a sorrendjét tekintjük minden feszítőfa esetén. Egy T feszítőfából kiindulva könnyen definiálhatunk egy $H[T]$ páros gráfot: $H[T]$ csúcsai legyenek G élei, úgy, hogy az egyik színosztályt a T -ben szereplő élek, a másikat pedig a T -ben nem szereplő élek alkotják. Az $e \in E(T)$ és $f \notin E(T)$ éleknek megfelelő csúcsokat pontosan akkor kössük össze éllel, ha $f \in \text{cut}(T, e)$, vagy ezzel ekvivalensen $e \in \text{cyc}(T, f)$.



1. ábra. Példa egy G gráfra, és a páros gráfra, amit G egy feszítőfájából kapunk

Ettől az ötlettől vezérelve a dolgozatunkban minden H páros gráfhoz definiálunk egy $\tilde{T}_H(x, y)$ kétváltozós polinomot a fenti (Tutte-féle) definíció mintájára. Viszont ahelyett, hogy H csúcsainak egy fix permutációját tekintenénk, átlagolni fogunk az összes lehetséges permutációra. Látni fogjuk, hogy $T_G(x, y)$ és $\tilde{T}_H(x, y)$ sok szempontból hasonlóan viselkedik, és $\tilde{T}_H(x, y)$ bizonyos tulajdonságaiból levezethetők az analóg tulajdonságok $T_G(x, y)$ -ra. A formális definíció a következő.

1.1. Definíció. Legyen $H = (A, B, E)$ páros gráf. Tegyük fel, hogy $V(H) = [m]$. A $\pi : [m] \rightarrow [m]$ permutációra nézve az $i \in A$ csúcsot *belül aktívnek* nevezzük, ha

$$\pi(i) > \max_{j \in N_H(i)} \pi(j).$$

Hasonlóan egy $j \in B$ csúcsot *kívül aktívnek* hívunk, ha

$$\pi(j) > \max_{i \in N_H(j)} \pi(i).$$

Jelölje $ba(\pi)$ és $ka(\pi)$ a belül, illetve kívül aktív csúcsok számát. Legyen

$$\tilde{T}_H(x, y) = \frac{1}{m!} \sum_{\pi \in S_m} x^{ba(\pi)} y^{ka(\pi)}$$

a H páros gráf *permutációs Tutte-polinomja*.

1.2. Példa. Legyen $H = P_5$ az 5 csúcsú út, ahol A 3, B pedig 2 csúcsból áll. Ekkor

$$\tilde{T}_{P_5}(x, y) = \frac{2}{15}x^3 + \frac{4}{15}x^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{2}{15}y^2 + \frac{1}{15}x + \frac{1}{15}y.$$

Könnyen látható, hogy ha összegezzük G minden T feszítőfájára a $H[T]$ páros gráfok permutációs Tutte-polinomjait, akkor pont G Tutte-polinomját kapjuk (ld. a 2.6. Lemmát).

Megjegyezzük, hogy hasonló gráfpolinomot definiálhatunk tetszőleges (nem feltétlenül páros) gráfokra is. Bizonyos tulajdonságok erre az általánosabb polinomra is érvényesek maradnak.

1.3. Definíció. Legyen $G = (V, E)$ tetszőleges gráf. Tegyük fel, hogy $V = [m]$. A $\pi : [m] \rightarrow [m]$, permutációra nézve az $i \in V$ csúcsot *aktívnek* nevezzük, ha

$$\pi(i) > \max_{j \in N_G(i)} \pi(j).$$

Jelölje $A(\pi)$ az aktív csúcsok halmazát a π permutációra nézve. Rendeljük hozzá az i csúcshoz az x_i változót ($i = 1, \dots, m$). Legyen

$$\tilde{T}_G(x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\pi \in S_m} \prod_{i \in A(\pi)} x_i.$$

1.4. Megjegyzés. A Tutte-polinom definíciója természetes módon általánosítható gráfok helyett tetszőleges matroidokra. Ebben az esetben is minden nehézség nélkül elkészíthetők a megfelelő páros gráfok.

Eredmények. A dolgozatunkban főként két, a Tutte-polinommal kapcsolatos kérdéssel foglalkozunk: a Brylawski-azonosságokkal és a Merino-Welsh sejtéssel.

A Brylawski-azonosságok szerint ha

$$T_G(x, y) = \sum_{i, j} t_{ij} x^i y^j,$$

akkor $t_{01} = t_{10}$, ha G -nek legalább egy éle van, $t_{20} - t_{11} + t_{02} = t_{10}$, ha G -nek legalább két éle van, és általánosan

$$\sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^{h-i} \binom{h-i}{j} (-1)^j t_{ij} = 0,$$

ha G -nek legalább h éle van. A dolgozatban megmutatjuk, hogy hasonló azonosságok érvényesek a $\tilde{T}_H(x, y)$ polinomra is. Továbbá bebizonyítjuk, hogy a tétel egy általánosabb verziója is igaz, mely a $h \geq e(G)$ esetre is egy szép zárt képletet ad a fenti összegre.

A másik probléma, amit vizsgálunk, a Merino-Welsh sejtés. Merino és Welsh azt sejtette, hogy ha a G gráf nem tartalmaz sem hurokért, sem elvágó élt, akkor

$$\max(T_G(2, 0), T_G(0, 2)) \geq T_G(1, 1).$$

Később Conde és Merino megfogalmazták a sejtés egy erősebb változatát is, miszerint

$$T_G(2, 0) + T_G(0, 2) \geq 2T_G(1, 1),$$

valamint

$$T_G(2, 0)T_G(0, 2) \geq T_G(1, 1)^2.$$

Nyilvánvalóan a multiplikatív változathoz következik az additív, amiből pedig következik az eredeti, maximumos változat. Megfogalmazhatjuk az analóg sejtést $\tilde{T}_H(x, y)$ -ra is:

$$\tilde{T}_H(2, 0)\tilde{T}_H(0, 2) \geq \tilde{T}_H(1, 1)^2 = 1$$

minden izolált csúcsot nem tartalmazó H páros gráfra. Az derül ki, hogy ha a permutációs Tutte-polinomra vonatkozó sejtés igaz, akkor az eredeti sejtésnek is igaz mindhárom verziója. Meg fogjuk mutatni, hogy reguláris páros gráfok permutációs Tutte-polinomjaira igaz a sejtés, valamint belátjuk, hogy

$$\tilde{T}_H(3, 0)\tilde{T}_H(0, 3) \geq \tilde{T}_H(1, 1)^2$$

fennáll minden izolált csúcsot nem tartalmazó H páros gráfra. Ezzel egy új bizonyítást nyerünk a Jackson-egyenlőtlenségre, miszerint

$$T_G(3, 0)T_G(0, 3) \geq T_G(1, 1)^2$$

fennáll minden olyan G gráfra, amelyben nincsenek sem hurokélek, sem elvágó élek.

Jelölések. A dolgozatban a gráfokat G -vel, a páros gráfokat H -val jelöljük. Általában ha G tetszőleges gráf, akkor a csúcsainak számát n , az éleinek számát pedig m fogja jelölni. Ha H páros gráf, akkor viszont a csúcsok számát jelöljük m -mel. Ennek az az oka, hogy legtöbbször a H páros gráfot egy G gráfból kapjuk, és H csúcshalmaza ilyenkor G élhalmazának felel meg. Ha $H = (A, B, E)$ páros gráf, akkor az $|A| = a$, $|B| = b$ jelöléssel élünk. $K_{a,b}$ jelöli a teljes páros gráfot a és b méretű színosztályokkal, P_n pedig az n csúcsú utat. Ha $v \in V(H)$, akkor $H - v$ -vel jelöljük azt a gráfot, amelyet H -ból a v csúcs törlésével kapunk. Ezen kívül mindig $t_{ij}(H)$ fogja jelölni az $x^i y^j$ monom együtthatóját $\tilde{T}_H$ -ban. Ez a mennyiség $V(H)$ azon permutációinak számát adja meg, amelyekre nézve pontosan i belül aktív és j kívül aktív csúcs van H -ban.

A dolgozat felépítése. A következő szakaszban összegyűjtjük $\tilde{T}_H(x, y)$ pár alapvető tulajdonságát. Ezután részletesen megvizsgáljuk a polinom bizonyos speciális együtthatóit. Majd a Brylawski azonosságokat tanulmányozzuk mind a $\tilde{T}_H(x, y)$, mind a $T_G(x, y)$ polinomokra. Ezt követi a Merino-Welsh sejtésről szóló szakasz, végezetül pedig még megemlítünk pár nyitott kérdést és megjegyzést.

2. ALAPVETŐ TULAJDONSÁGOK

Ebben a szakaszban az újonnan definiált permutációs Tutte-polinom tulajdonságait vizsgáljuk meg. Többek között belátunk egy rekurziós formulát, illetve adunk egy alternatív, valószínűségi változókon alapuló definíciót is.

2.1. Lemma. *Ha H előáll H_1 és H_2 diszjunkt uniójaként, akkor*

$$\tilde{T}_H(x, y) = \tilde{T}_{H_1}(x, y) \tilde{T}_{H_2}(x, y).$$

Speciálisan ha $v \in A$ izolált csúcs, akkor

$$\tilde{T}_H(x, y) = x \tilde{T}_{H-v}(x, y).$$

Hasonlóan ha $v \in B$ izolált csúcs, akkor

$$\tilde{T}_H(x, y) = y \tilde{T}_{H-v}(x, y).$$

Bizonyítás. Számoljuk meg, hány olyan permutációja van a $V(H)$ halmaznak, amire nézve az A -beli belül aktív csúcsok száma i , a B -beli kívül aktív csúcsok száma pedig j . Ehhez csoportosítsuk az ilyen permutációkat aszerint, hogy hány belül, illetve kívül aktív csúcs esik H_1 -be, és hány H_2 -be. Azon $\pi \in S_m$ permutációk száma, amelyekre $\text{ba}_{H_1}(\pi) = i_1$, $\text{ba}_{H_2}(\pi) = i_2$, $\text{ka}_{H_1}(\pi) = j_1$ and $\text{ka}_{H_2}(\pi) = j_2$, pontosan

$$m_1! t_{i_1 j_1}(H_1) m_2! t_{i_2 j_2}(H_2) \frac{m!}{m_1! m_2!},$$

ahol $m_1 = v(H_1)$ és $m_2 = v(H_2)$. Ennek az az oka, hogy ha a $\pi_1 \in S_{m_1}$ és a $\pi_2 \in S_{m_2}$ permutációkat összefésüljük, akkor csak azok között a csúcsok között kell megőriznünk a sorrendet, amik ugyanahhoz a részgráfhoz (H_1 -hez vagy H_2 -höz) tartoznak. Tehát meg kell szoroznunk $m_1! t_{i_1 j_1}(H_1) m_2! t_{i_2 j_2}(H_2)$ -t azzal a mennyiséggel, ahányféleképpen m_1 kék és m_2 piros golyót sorba tudunk rendezni. Ebből azt kapjuk, hogy

$$m! t_{ij}(H) = m! \sum_{\substack{i_1, i_2, j_1, j_2 \\ i_1 + i_2 = i \\ j_1 + j_2 = j}} t_{i_1 j_1}(H_1) t_{i_2 j_2}(H_2).$$

A 2.1 Lemma következik a polinomok szorzására vonatkozó szabályból. □

Következzen egy lemma, amely a síkgráfok és duálisaik Tutte-polinomjai közötti összefüggéssel analóg.

2.2. Lemma. Ha $H = (A, B, E)$ páros gráf, akkor legyen $H' = (B, A, E)$ az a gráf, amit úgy kapunk, hogy megcseréljük H két színosztályát. Ekkor

$$\tilde{T}_H(x, y) = \tilde{T}_{H'}(y, x).$$

Bizonyítás. Tetszőleges $\pi \in S_m$ esetén $\text{ba}_H(\pi) = \text{ka}_{H'}(\pi)$, valamint $\text{ka}_H(\pi) = \text{ba}_{H'}(\pi)$, így

$$\tilde{T}_H(x, y) = \frac{1}{m!} \sum_{\pi \in S_m} x^{\text{ba}_H(\pi)} y^{\text{ka}_H(\pi)} = \frac{1}{m!} \sum_{\pi \in S_m} x^{\text{ka}_{H'}(\pi)} y^{\text{ba}_{H'}(\pi)} = \tilde{T}_{H'}(y, x).$$

□

A következő lemma a hagyományos Tutte-polinomra vonatkozó éltörlési rekurziós formula megfelelője.

2.3. Lemma. Ha H nem tartalmaz izolált csúcsot, akkor

$$\tilde{T}_H(x, y) = \frac{1}{m} \sum_{v \in V(H)} \tilde{T}_{H-v}(x, y).$$

Bizonyítás. A $\pi \in S_m$ permutációra legyen $v(\pi)$ az a csúcsa H -nak, amelyre $\pi(v(\pi)) = 1$. Legyen $\alpha = \alpha(\pi)$ az a permutációja $V(H - v(\pi))$ -nek, amelyre $\alpha(x) < \alpha(y)$ pontosan akkor teljesül, ha $\pi(x) < \pi(y)$. Ekkor egy csúcs éppen akkor belül (kívül) aktív az α permutációra nézve, ha π -re nézve az, ugyanis $v(\pi)$ sosem aktív, mert izolált, és az ő indexe a legkisebb. Tehát $\text{ba}_H(\pi) = \text{ba}_{H-v(\pi)}(\alpha)$ és $\text{ka}_H(\pi) = \text{ka}_{H-v(\pi)}(\alpha)$. Ha π végigfut S_m -en, akkor minden $v \in V(H)$ csúcsot pontosan $(m-1)!$ -szor törölünk a gráfból, és mindegyik $\text{Sym}([m] \setminus \{v\})$ -beli permutációt pontosan egyszer kapunk meg α -ként. Így

$$\begin{aligned} \tilde{T}_H(x, y) &= \frac{1}{m!} \sum_{\pi \in S_m} x^{\text{ba}_H(\pi)} y^{\text{ka}_H(\pi)} = \frac{1}{m!} \sum_{\pi \in S_m} x^{\text{ba}_{H-v(\pi)}(\alpha(\pi))} y^{\text{ka}_{H-v(\pi)}(\alpha(\pi))} \\ &= \frac{1}{m!} \sum_{v \in V(H)} \sum_{\alpha \in \text{Sym}([m] \setminus \{v\})} x^{\text{ba}_{H-v}(\alpha)} y^{\text{ka}_{H-v}(\alpha)} = \frac{1}{m} \sum_{v \in V(H)} \tilde{T}_{H-v}(x, y). \end{aligned}$$

□

2.4. Lemma. Legyen $\tilde{T}_H(x, y) = \sum_{i,j} t_{ij} x^i y^j$. Ha H összefüggő, és $t_{ij} > 0$ valamely i, j indexekre, akkor $t_{i'j'} > 0$ minden $i' \leq i, j' \leq j, (i', j') \neq (0, 0)$ esetén.

Bizonyítás. Ha $t_{ij} > 0$, akkor létezik legalább egy olyan π permutáció, amelyre nézve pontosan i belül aktív és j kívül aktív csúcs van. Vegyük észre, hogy ezek a csúcsok $V(H)$ -nak egy független részalmazát alkotják, hiszen két aktív csúcs között nem mehet él. Legyen most $i' \leq i, j' \leq j, (i', j') \neq (0, 0)$. A π permutációból kiindulva konstruálunk egy π' permutációt, amelyre nézve a belül aktív csúcsok száma i' , a kívül aktívaké pedig j' lesz. Ebből következni fog, hogy $t_{i'j'} > 0$. Defináljuk π' -t a következőképpen. Rendeljük az $m, m-1, \dots, m-(i'+j')+1$ értékeket az eredetileg aktív csúcsok közül néhány kiválasztotthoz, úgy, hogy i' darab legyen közülük A -ban, és j' darab legyen B -ben. Nyilvánvaló, hogy a kiválasztott csúcsok is független csúcshalmazt alkotnak, hiszen egy független halmaz részalmaz is független. Így ezek a csúcsok mind aktívak lesznek π' -re nézve. Ezután pedig úgy járunk el, hogy a sorrendben következő

legnagyobb számot mindig olyan csúcshoz rendeljük, amelynek már valamelyik szomszédjához korábban rendeltünk számot. Mivel H összefüggő, ezt mindig meg tudjuk tenni, és az eljárás végén minden csúcshoz rendeltünk egy számot, vagyis kaptunk egy permutációt. A konstrukció miatt az elsőnek kiválasztott $i' + j'$ csúcson kívül semelyik másik csúcs nem lesz aktív. $\square$

Az alábbi lemma mondanivalója, hogy permutációk helyett vehetünk 0 és 1 közötti random számokat minden csúcsra, és tekinthetjük az ezek által meghatározott sorrendjét a csúcsoknak. Ez a megközelítés nagyon hasznosnak bizonyul sok bizonyításban.

2.5. Lemma. *Legyen $v(H) = m$, és legyenek $X_1, X_2, \dots, X_m$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók $X_i \sim U(0, 1)$ eloszlással. Legyen $I(A) = |\{v \in A \mid X_v \geq X_{v'} \forall v' \in N_H(v)\}|$, valamint $I(B) = |\{v \in B \mid X_v \geq X_{v'} \forall v' \in N_H(v)\}|$. Ekkor*

$$\mathbb{P}(I(A) = i, I(B) = j) = t_{i,j}(H).$$

Bizonyítás. A $\pi \in S_m$ permutációra legyen A_π az az esemény, hogy $X_{\pi(1)} > X_{\pi(2)} > \dots > X_{\pi(m)}$. Ekkor $\mathbb{P}(I(A) = i, I(B) = j \mid A_\pi) = 1$, ha $\text{ba}(\pi) = i$ és $\text{ka}(\pi) = j$, különben pedig 0. Ezért

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(I(A) = i, I(B) = j) &= \sum_{\pi \in S_m} \mathbb{P}(I(A) = i, I(B) = j \mid A_\pi) \cdot \mathbb{P}(A_\pi) \\ &= \frac{1}{m!} \sum_{\pi \in S_m} \mathbb{P}(I(A) = i, I(B) = j \mid A_\pi) = t_{i,j}(H). \end{aligned}$$

$\square$

2.6. Lemma. *A G gráf tetszőleges T feszítőfájára legyen $H[T]$ az a páros gráf, amelynek egyik színosztályában szereplő csúcsok a T élei, a másikban szereplő csúcsok pedig azok az élek, amelyek nem szerepelnek T -ben. Az e feszítőfaélnak és az f nem feszítőfaélnak megfelelő csúcsokat pontosan akkor kössük össze éllel $H[T]$ -ben, ha f szerepel a T és e által meghatározott vágásban. Ekkor*

$$T_G(x, y) = \sum_{T \in \mathcal{T}(G)} \tilde{T}_{H[T]}(x, y),$$

ahol az összegzés G feszítőfáinak a $\mathcal{T}(G)$ halmazára történik.

Bizonyítás. Világos a Tutte-polinom eredeti definíciójában szereplő aktivitásfogalomból. $\square$

2.7. Megjegyzés. A $H[T]$ gráfnak pontosan akkor van izolált csúcsa, ha G -nek van hurokéle vagy elvágó éle. Továbbá $H[T]$ pontosan akkor összefüggő, ha G 2-élösszefüggő.

Ennek a szakasznak a lezárásaként kiszámoljuk a permutációs Tutte-polinomot teljes páros gráfokra.

2.8. Lemma. *Legyen H a $K_{a,b}$ teljes páros gráf, és legyen $m = a + b$. Ekkor*

$$t_{i,j}(H) = \begin{cases} 0, & \text{ha } i > 0 \text{ és } j > 0, \\ \frac{b(b-1)\dots(b-j+1)a}{m(m-1)\dots(m-j)}, & \text{ha } i = 0, \\ \frac{a(a-1)\dots(a-i+1)b}{m(m-1)\dots(m-i)}, & \text{ha } j = 0. \end{cases}$$

Bizonyítás. Ha $i > 0$, vagyis létezik $v \in A$ belül aktív csúcs, akkor $\pi(v)$ nagyobb $\pi(w)$ -nél minden $w \in B$ esetén. Ez azt jelenti, hogy nem lehet B -ben kívül aktív csúcs, és így $j = 0$. Hasonlóan kapjuk, hogy ha $j > 0$, akkor $i = 0$. Ha meg szeretnénk számolni azon π permutációkat, amelyekre $ba(\pi) = 0$ és $ka(\pi) = j$, akkor az olyan permutációkat kell figyelembe vennünk, amelyekre $\pi^{-1}(1), \pi^{-1}(2), \dots, \pi^{-1}(j) \in B$, de $\pi^{-1}(j+1) \in A$. A $j = 0$ eset hasonló. $\square$

3. SPECIÁLIS EGYÜTTHATÓK

Ebben a szakaszban részletesebben megismerkedünk a permutációs Tutte-polinom együtthatóival, különös tekintettel az általunk $\text{alt}(H)$ -nak elnevezett együtthatóra, amiről ki fog derülni, hogy sok érdekes tulajdonsággal bír.

3.1. Lemma. Legyen $H = (A, B, E)$ izolált csúcsot nem tartalmazó páros gráf. Legyen $|A| = a$, $|B| = b$ és $\tilde{T}_H(x, y) = \sum t_{ij} x^i y^j$. Ekkor $t_{a0} = t_{0b}$

Bizonyítás. Legyen $\pi \in S_m$ egy permutáció, amelyre $ba(\pi) = a$ és $ka(\pi) = 0$. Mivel erre nézve minden A -beli csúcs belül aktív, ha $j \in B$ és $i \in N_H(j) \subseteq A$, akkor $\pi(i) > \pi(j)$. Így a $\pi'(v) = m + 1 - \pi(v)$ permutációra B minden csúcsa kívül aktív lesz. Az is világos, hogy az A -beli csúcsok π' -re nézve már nem lesznek aktívak, vagyis $ba(\pi') = 0$ és $ka(\pi') = b$. A $\pi \mapsto \pi'$ bijekció mutatja, hogy x^a és y^b együtthatója megegyezik $\tilde{T}_H(x, y)$ -ban. $\square$

3.2. Lemma. Legyen $H = (A, B, E)$ páros gráf. Legyen $|A| = a$, $|B| = b$ és $\tilde{T}_H(x, y) = \sum t_{i,j} x^i y^j$. Ha A -ban r , B -ben pedig ℓ izolált csúcs van, akkor

$$t_{a,\ell} = t_{r,b}.$$

Bizonyítás. Legyen H' az a gráf, amelyet H -ból az izolált csúcsok törlésével kapunk. Ekkor a 2.1 Lemmából következik, hogy $\tilde{T}_H(x, y) = x^r y^\ell \tilde{T}_{H'}(x, y)$, $\tilde{T}_{H'} = \sum t'_{ij} x^i y^j$. Felhasználva a 3.1 Lemmát a H' gráfra, adódik, hogy

$$\begin{aligned} t'_{a-r,0} &= t'_{0,b-\ell} \\ \Rightarrow t_{a,\ell} &= t_{r,b}. \end{aligned}$$

$\square$

3.3. Definíció. Legyen $H = (A, B, E)$ páros gráf. Legyen $|A| = a$ és $|B| = b$. Jelölje r az A -beli, ℓ pedig a B -beli izolált csúcsok számát. Legyen

$$\text{alt}(H) = t_{a,\ell} = t_{r,b}.$$

3.4. Megjegyzés. Az $\text{alt}(H)$ jelölés abból ered, hogy utakra $\text{alt}(P_m) = \frac{A_m}{m!}$, ahol A_m az $[m]$ alternáló permutációinak száma. Például $A_5 = 16$, ami összhangban van azzal, hogy az x^3 és y^2 monomok együtthatója $2/15 = 16/120$ a $\tilde{T}_{P_5}(x, y)$ polinomban.

Most lássunk egy, a 2.3 Lemmában szereplő rekurzióhoz hasonló formulát $\text{alt}(H)$ -ra.

3.5. Lemma. Tetszőleges $H = (A, B, E)$ páros gráfra, amelynek nincs B -ben izolált csúcsa,

$$\text{alt}(H) = \frac{1}{m} \sum_{v \in A} \text{alt}(H - v).$$

Hasonlóan ha H -nak nincs A -beli izolált csúcsa, akkor

$$\text{alt}(H) = \frac{1}{m} \sum_{v \in B} \text{alt}(H - v).$$

Bizonyítás. Ha H -nak nincsenek izolált csúcsai, akkor az állítás azonnal következik a 2.3 Lemmából, hiszen x^a együtthatóinak összege a $\tilde{T}_{H-v}$ polinomokban $\text{alt}(H)$, és ugyanez igaz y^b együtthatóira is. Továbbá $\tilde{T}_{H-v}$ -ben x^a együtthatója pontosan akkor nem nulla, ha $v \in B$, y^b együtthatója pedig pontosan akkor nem nulla, ha $v \in A$. Most tegyük fel, hogy az A -beli izolált csúcsok száma ℓ , a B -belieké 0 , és legyen H' az a gráf, amelyet H -ból az izolált csúcsok törlése után kapunk. Legyen $A' = A \cap V(H')$. Definíció szerint $\text{alt}(H) = \text{alt}(H')$. Mivel H' -nek már nincsenek izolált csúcsai, tudjuk, hogy

$$\text{alt}(H') = \frac{1}{m-l} \sum_{v \in A'} \text{alt}(H' - v),$$

ezért

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \left(\sum_{v \in A} \text{alt}(H - v) \right) &= \frac{1}{m} \left(\sum_{v \in A \setminus A'} \text{alt}(H - v) + \sum_{v \in A'} \text{alt}(H - v) \right) \\ &= \frac{1}{m} (\text{alt}(H')l + \text{alt}(H')(m-l)) = \text{alt}(H). \end{aligned}$$

Abban az esetben, amikor csak B -ben vannak izolált csúcsok, hasonlóan járhatunk el. $\square$

Az $\text{alt}(H)$ egy másik érdekes tulajdonságáról szól az alábbi lemma.

3.6. Lemma. Ha $H = (A, B, E)$ páros gráf m csúcson, akkor

$$\tilde{T}_H(2, 2) = \text{alt}(H)2^m.$$

Bizonyítás. Az állítást m szerinti indukcióval látjuk be. Ha $m = 1$, akkor $H = K_1$, vagyis $\tilde{T}_H(2, 2) = \text{alt}(H)2^m = 2$. Tegyük fel, hogy H csúcsainak száma $m > 1$, és az állítás tetszőleges legfeljebb $m - 1$ csúcsú páros gráfokra igaz.

Ha H tartalmaz izolált csúcsot, akkor válasszunk egyet ezek közül, legyen ez v . Ekkor

$$\tilde{T}_H(2, 2) = 2 \cdot \tilde{T}_{H-v}(2, 2) = 2 \cdot \text{alt}(H - v)2^{m-1} = \text{alt}(H)2^m.$$

Ha H -ban nincs izolált csúcs, akkor a 2.3 és a 3.5 Lemmákból következik, hogy

$$\begin{aligned} \tilde{T}_H(2, 2) &= \frac{1}{m} \left(\sum_{v \in A} \tilde{T}_{H-v}(2, 2) + \sum_{v \in B} \tilde{T}_{H-v}(2, 2) \right) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{v \in A} \text{alt}(H - v)2^{m-1} + \frac{1}{m} \sum_{v \in B} \text{alt}(H - v)2^{m-1} \\ &= \text{alt}(H)2^{m-1} + \text{alt}(H)2^{m-1} = \text{alt}(H)2^m. \end{aligned}$$

$\square$

Eddig az $\text{alt}(H)$ mennyiséget csak páros gráfokra definiáltuk. A következő lemma segítségével könnyedén kiterjeszthetjük a definíciót tetszőleges gráfokra.

3.7. Lemma. Legyen $H = (A, B, E)$ páros gráf. Ekkor $\text{alt}(H)$ megegyezik a $0 \leq x_i \leq 1$ ($1 \leq i \leq m$), $x_i + x_j \leq 1$ ($(i, j) \in E$) egyenlőtlenségek által definiált politóp térfogatával.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $A \cup B = [m]$. Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_m$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, $X_i \sim U(0, 1)$ eloszlással ($i \in [m]$). Minden $i \in A$ esetén legyen $Y_i = 1 - X_i$. Ekkor $Y_i \sim U(0, 1)$. Jelölje ℓ a B -beli izolált csúcsok számát. A 2.5 Lemma miatt

$$\begin{aligned} \text{alt}(H) &= \mathbb{P}(I(A) = |A|, I(B) = \ell) \\ &= \mathbb{P}(X_i \geq X_j \text{ ha } i \in A, j \in B, (i, j) \in E) \\ &= \mathbb{P}(Y_i + X_j \leq 1 \text{ ha } i \in A, j \in B, (i, j) \in E) \\ &= \mathbb{P}(X_i + X_j \leq 1 \text{ ha } i \in A, j \in B, (i, j) \in E) \\ &= \mathbb{P}(X_i + X_j \leq 1 \text{ ha } (i, j) \in E) \\ &= \text{Vol}(0 \leq x_i \leq 1, x_i + x_j \leq 1 \text{ ha } (i, j) \in E). \end{aligned}$$

□

3.8. Definíció. Tetszőleges $G = (V, E)$ gráf esetén legyen $\text{alt}(G) = \mathbb{P}(X_i + X_j \leq 1 \text{ ha } (i, j) \in E)$, vagy ezzel ekvivalensen $\text{alt}(G) = \text{Vol}(0 \leq x_i \leq 1, x_i + x_j \leq 1 \text{ ha } (i, j) \in E)$.

Az n csúcsú G gráfra definiált $\{0 \leq x_i \leq 1 \leq n, x_i + x_j \leq 1 \text{ ha } (i, j) \in E(G)\}$ politóp az angol nyelvű irodalomban *2-weak vertex-packing polytope* néven ismert. A következő eredményt felhasználva a 3.6 Lemma állítása tetszőleges gráfra általánosítható.

3.9. Lemma. [6] Ha G tetszőleges n csúcsú gráf, amely nem tartalmaz izolált csúcsot, akkor

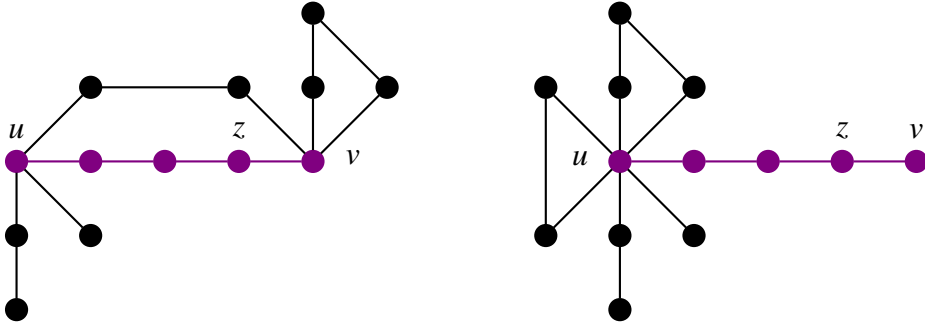
$$\text{alt}(G) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \text{alt}(G - v_i).$$

A következőkben a célunk annak meghatározása, hogy $\text{alt}(G)$ mely G gráfokra veszi fel a szélsőértékeit. Ennek vizsgálatához szükségünk lesz a következő gráftranszformációra a [3] cikkből.

3.10. Definíció. Legyen P egy út a G gráfban, amelyre teljesül, hogy P minden belső pontjának a G -beli foka 2. Legyen u és v a P út két végpontja, és jelöljük z -vel v -nek a szomszédját P -n. A G gráf *KC-transzformáltját*, amelyet $KC(G, P, u, v)$ -vel jelölünk, úgy kapjuk G -ből, hogy minden $\{v, w\}$ ($w \neq z$) élt lecserélünk az $\{u, w\}$ éltre. Vegyük észre, hogy $KC(G, P, u, v)$ és $KC(G, P, v, u)$ izomorf gráfok.

3.11. Lemma. Tetszőleges G gráfra $\text{alt}(KC(G, P, u, v)) \geq \text{alt}(G)$.

Bizonyítás. Legyen G' az a gráf, amelyet G -ből P belső pontjainak törlésével kapunk. Ha u és v a G' gráf ugyanazon komponensébe esik, akkor legyen C egy olyan vágás, amely elválasztja egymástól u -t és v -t. (Különben legyen $C = \emptyset$.) Jelölje G_u és G_v a C -beli élek elhagyása után kapott gráfnak az u -t, illetve a v -t tartalmazó komponenseit, értelemszerűen. Jelölje továbbá



2. ábra. Példa egy G gráfra, és annak a $KC(G, P, u, v)$ KC-transzformáltjára. A P út lilával van jelölve az ábrán.

$u_1, \dots, u_n$, valamint $v_1, \dots, v_n$ a C vágásban szereplő éleknek a G_u -ba, illetve a G_v -be eső végpontjait. Tegyük fel, hogy $V(G) = [m]$, és legyenek $X_1, X_2, \dots, X_m$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, amelyekre $X_i \sim U(0, 1)$ ($i \in [m]$). Legyen

$$A(x, \underline{x}) = \mathbb{P}(X_a + X_b \leq 1 \text{ ha } (a, b) \in E(G_u) | X_u = x, X_{u_i} = x_i \text{ ha } 1 \leq i \leq n);$$

$$B(y, \underline{y}) = \mathbb{P}(X_a + X_b \leq 1 \text{ ha } (a, b) \in E(G_v) | X_v = y, X_{v_i} = y_i \text{ ha } 1 \leq i \leq n);$$

$$F(x, y) = \mathbb{P}(X_a + X_b \leq 1 \text{ ha } (a, b) \in E(P) | X_u = x, X_v = y).$$

Továbbá ha $1 \leq i \leq n$, akkor legyen $f_i(x_i, y_i) = \mathbb{P}(X_{u_i} + X_{v_i} \leq 1 | X_{u_i} = x_i, X_{v_i} = y_i)$.

Világos, hogy $F(x, y) = F(y, x)$, és minden $1 \leq i \leq n$ esetén $f_i(x_i, y_i) = f_i(y_i, x_i)$. Az $F'(x, y, \underline{x}, \underline{y}) = F(x, y) \prod_{i=1}^n f_i(x_i, y_i) \geq 0$ függvényre

$$\begin{aligned} \text{alt}(G) &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \int_{\underline{x} \in [0,1]^n} \int_{\underline{y} \in [0,1]^n} A(x, \underline{x}) B(y, \underline{y}) F(x, y) \prod_{i=1}^n f_i(x_i, y_i) d\underline{y} d\underline{x} dy dx \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \int_{\underline{x} \in [0,1]^n} \int_{\underline{y} \in [0,1]^n} A(x, \underline{x}) B(y, \underline{y}) F'(x, y, \underline{x}, \underline{y}) d\underline{y} d\underline{x} dy dx. \end{aligned}$$

Másrészt

$$\begin{aligned} \text{alt}(G) &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \int_{\underline{x} \in [0,1]^n} \int_{\underline{y} \in [0,1]^n} A(y, \underline{x}) B(x, \underline{y}) F(y, x) \prod_{i=1}^n f_i(x_i, y_i) d\underline{y} d\underline{x} dy dx \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \int_{\underline{x} \in [0,1]^n} \int_{\underline{y} \in [0,1]^n} A(y, \underline{x}) B(x, \underline{y}) F'(x, y, \underline{x}, \underline{y}) d\underline{y} d\underline{x} dy dx. \end{aligned}$$

Hasonlóan

$$\begin{aligned} &\text{alt}(KC(G, P, x, y)) \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \int_{\underline{x} \in [0,1]^n} \int_{\underline{y} \in [0,1]^n} A(x, \underline{x}) B(x, \underline{y}) F(x, y) \prod_{i=1}^n f_i(x_i, y_i) d\underline{y} d\underline{x} dy dx \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \int_{\underline{x} \in [0,1]^n} \int_{\underline{y} \in [0,1]^n} A(x, \underline{x}) B(x, \underline{y}) F'(x, y, \underline{x}, \underline{y}) d\underline{y} d\underline{x} dy dx, \end{aligned}$$

és

$$\text{alt}(KC(G, P, x, y)) = \text{alt}(KC(G, P, y, x))$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \int_{\underline{x} \in [0,1]^n} \int_{\underline{y} \in [0,1]^n} A(y, \underline{x}) B(y, \underline{y}) F(y, x) \prod_{i=1}^n f_i(x_i, y_i) dy d\underline{x} dy dx \\
&= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \int_{\underline{x} \in [0,1]^n} \int_{\underline{y} \in [0,1]^n} A(y, \underline{x}) B(y, \underline{y}) F'(x, y, \underline{x}, \underline{y}) dy d\underline{x} dy dx.
\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy $A(x, \underline{x})$ monoton csökken x -ben, $B(y, \underline{y})$ pedig monoton csökken y -ban. Így $(A(x, \underline{x}) - A(y, \underline{x})) (B(x, \underline{y}) - B(y, \underline{y})) \geq 0$. Vagyis

$$\begin{aligned}
&2\text{alt}(KC(G, P, x, y)) - 2\text{alt}(G) \\
&= \iiint (A(x, \underline{x})B(x, \underline{y}) + A(y, \underline{x})B(y, \underline{y}) - A(x, \underline{x})B(y, \underline{y}) - A(y, \underline{x})B(x, \underline{y})) \\
&\quad \cdot F'(x, y, \underline{x}, \underline{y}) dy d\underline{x} dy dx \\
&= \iiint (A(x, \underline{x}) - A(y, \underline{x})) (B(x, \underline{y}) - B(y, \underline{y})) F'(x, y, \underline{x}, \underline{y}) dy d\underline{x} dy dx \geq 0.
\end{aligned}$$

Ebből már következik a lemma állítása. $\square$

- 3.12. Lemma.** (1) Legyen G olyan gráf, ami nem út, és vannak levelei. Ekkor létezik olyan G' gráf, aminek szigorúan kevesebb levele van, mint G -nek, és $\text{alt}(G') \leq \text{alt}(G)$.
- (2) Legyen G egy n csúcsú fa. Ekkor $\text{alt}(G) \geq \text{alt}(P_n)$.
- (3) Legyen G egy összefüggő gráf n csúccsal és n éllel. Ekkor $\text{alt}(G) \geq \text{alt}(C_n)$, ahol C_n jelöli az n csúcsú kört.
- (4) Legyen G tetszőleges n csúcsú gráf. Ekkor $\text{alt}(G) \leq \text{alt}(S_n)$, ahol S_n is jelöli az n csúcsú csillagot.

Bizonyítás. Legyen G egy gráf, és v tetszőleges levele G -nek. Legyen P a leghosszabb v -ből induló út G -ben, amire teljesül, hogy P minden belső pontja 2-fokú. Legyen u a P út másik végpontja. Ha G nem egy út, akkor u foka legalább 3. Legyen w az u -nak egy olyan szomszédja, ami nincs rajta P -n. Legyen G' az a gráf, amelyet G -ből az $\{u, w\}$ élt törölve, és a $\{v, w\}$ élt behúzával kapunk. Ennek a G' gráfnak kevesebb levele van, mint G -nek, továbbá $G = KC(G', P, u, v)$, így a 3.11 Lemmából következik az első pont állítása.

Mivel minden fának legalább két levele van, és egyenlőség pontosan az utakra teljesül, ha G egy n csúcsú fa, akkor az első pont szerint $\text{alt}(G) \geq \text{alt}(P_n)$.

Ha G egy összefüggő gráf n csúccsal és n éllel, akkor G -nek pontosan akkor nincs levele, ha $G = C_n$. Tehát $\text{alt}(G) \geq \text{alt}(C_n)$ az első pont szerint.

Az összes n csúcsú fa közül az n csúcsú csillagnak van a legtöbb levele. Egy csillagtól különböző fából néhány KC -transzformációt alkalmazva minden esetben el tudunk jutni a csillaghoz. Ebből következik, hogy az összes n csúcsú fa között $\text{alt}(G)$ S_n -re maximális. A negyedik pont belátásához figyeljük meg, hogy $\text{alt}(G)$ nem nőhet, ha G -hez éleket adunk. Ez egyszerűen abból következik, hogy minden él behúzásával eggyel több egyenlőtlenség fogja meghatározni a politópot, amelynek a térfogatát $\text{alt}(G)$ méri. $\square$

Ennek a szakasznak a lezárásaként bebizonyítottunk még két eredményt a permutációs Tutte-polinom együtthatóiról.

3.13. Lemma. Legyen $H = (A, B, E)$ fa m csúcson, és legyen $\tilde{T}_H(x, y) = \sum_{k, \ell} t_{k, \ell} x^k y^\ell$. Ekkor

$$t_{01} + t_{10} = 2t_{01} \geq 2^{m-1},$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha H egy út.

Bizonyítás. Figyeljük meg, hogy $t_{0,1} + t_{1,0}$ azon permutációk számával egyezik meg, amelyekre nézve pontosan 1 aktív csúcs van. Világos, hogy ha $\text{ba}(\pi) = 1$ és $\text{ka}(\pi) = 0$ valamely π permutációra, akkor $\pi^{-1}(m) \in A$, $\pi^{-1}(m-1) \in B$, és ez a két csúcs szomszédos egymással. Ha úgy módosítjuk π -t, hogy megcseréljük az ehhez a két csúcshoz rendelt értékeket, akkor az így kapott π' permutációra teljesül, hogy $\text{ba}(\pi') = 0$ és $\text{ka}(\pi') = 1$. A $\pi \rightarrow \pi'$ bijekció létezése bizonyítja, hogy $t_{0,1} = t_{1,0}$.

Járunk el a következő módon. Az 1 értéktől indulva minden lépésben válasszuk ki H -nak egy levelét, rendeljük hozzá a legkisebb értéket, amit még nem rendeltünk semelyik csúcshoz, majd töröljük ezt a levelet a fából. Az eljárás végén egy olyan permutációját kapjuk a csúcsoknak, amelyre csak egy aktív csúcs van: az, amelyik az m értéket kapta. (Minden más csúcsnak volt szomszédja a törlése előtt, és az később kapott számot.) Amíg H legalább két csúcsból áll, mindig legalább két levél van benne. Ebből azt kapjuk, hogy legalább 2^{m-1} ilyen permutáció van, vagyis $t_{01} + t_{10} \geq 2^{m-1}$. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha mindig pontosan két levél közül választhatunk az eljárás során, ami pedig azzal ekvivalens, hogy H egy út. Ha H út, akkor valóban minden 1 aktív csúcsot tartalmazó permutáció előáll a fenti módon, így utakra tényleg egyenlőséget kapunk. $\square$

3.14. Megjegyzés. Ha egy páros gráf csúcsain adott egy olyan permutáció, amire nézve az aktív csúcsok száma 1, akkor a gráfhoz éleket adva ugyanez a permutáció szintén 1 aktív csúccsal fog rendelkezni. Ebből következik, hogy ha H tetszőleges páros gráf, akkor is teljesül, hogy

$$t_{01} + t_{10} = 2t_{01} \geq 2^{m-1}.$$

Az is látszik, hogy ha H -nak van olyan feszítőfája, ami nem út, akkor nem állhat fenn egyenlőség. Ha H nem út, de minden feszítőfája út, akkor H egy kör. Viszont ekkor H -ban rögzítve egy feszítőfát, könnyen találhatunk olyan permutációt, amire nézve H -ban 1 aktív csúcs van, de a feszítőfában több. Így egyenlőség az összes páros gráf között is csak az utakra teljesül.

3.15. Lemma. Legyen $H = (A, B, E)$ páros gráf, amelyre $|A| = a$ és $|B| = b$. Legyen $\tilde{T}_H(x, y) = \sum_{k, \ell} t_{k, \ell} x^k y^\ell$. Ha H nem tartalmaz izolált csúcsot, akkor

$$b \cdot t_{a,0} = \sum_j t_{a-1,j}.$$

Bizonyítás. Ahhoz, hogy az állítást belássuk, megadunk egy b -értelmű hozzárendelést azon permutációk halmazából, amelyekre A minden csúcsa aktív, azon permutációk halmazába, amelyekre A -ban pontosan egy nem aktív csúcs van. Ezalatt azt értjük, hogy minden első típusú permutációhoz pontosan b második típusút rendelünk. Legyen π olyan permutáció, amelyre nézve a belül aktív csúcs van, és legyen $v \in B$. A π permutációból készíthetünk egy π' permutációt, amire nézve pontosan egy A -beli csúcs nem lesz aktív, oly módon, hogy megcseréljük a

v -hez rendelt számot a v szomszédaihoz rendelt számok közül a legkisebbel. Mivel ezt minden $v \in B$ csúccsal megtehetjük, és az így kapott permutációk mind különbözők lesznek, adódik, hogy $b \cdot t_{a,0} \leq \sum_j t_{a-1,j}$. Másrészt ha adott egy permutáció, amire nézve u az egyetlen nem aktív A -beli csúcs, akkor tudjuk, hogy B aktív csúcsai csak u szomszédai közül kerülhetnek ki. Így ha megcseréljük az u -hoz rendelt számot az u szomszédaihoz rendelt számok közül a legnagyobbbal, akkor olyan permutációt kapunk, amire nézve minden A -beli csúcs aktív. Vagyis mindegyik egy nem aktív A -beli csúcsot tartalmazó permutációt megkapunk a fent definiált leképezésben. Tehát valóban egyenlőség áll fenn. $\square$

4. A BRYLAWSKI-AZONOSSÁGOK

Az [1] cikkben Brylawski lineáris összefüggéseket bizonyított a Tutte-polinom együtthatói-ra, amely eredmény igen jelentősnek bizonyult, és azóta számos cikkben és könyvben idézték. Brylawski eredeti bizonyítása viszonylag hosszú volt, és erős eszközöket használt. Ebben a szakaszban adunk egy rövidebb, egyszerű bizonyítást Brylawski eredeti tételére, valamint a permutációs Tutte-polinomra vonatkozó analóg állításra is. Ezen kívül kiterjesztjük a Brylawski-azonosságokat arra az esetre, amikor $h \geq m$.

4.1. Tétel (A permutációs Tutte-polinomra vonatkozó Brylawski-azonosságok). *Legyen H páros gráf m csúcson, és $\tilde{T}_H(x, y) = \sum_{i,j} t_{ij} x^i y^j$ a H -nak a permutációs Tutte-polinomja. Ekkor tetszőleges $h < m$ egész szám esetén*

$$\sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^{h-i} \binom{h-i}{j} (-1)^j t_{ij} = 0.$$

Továbbá ha $h = m + k$, $0 \leq k \in \mathbb{Z}$, akkor

$$\sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^{h-i} \binom{h-i}{j} (-1)^j t_{ij} = (-1)^{b_{\text{alt}}(H)} \cdot \binom{b+k}{k}.$$

Bizonyítás. Az állítást m szerinti indukcióval bizonyítjuk. Ha H -nak egyetlen v csúcsa van, akkor könnyen ellenőrizhető, hogy teljesülnek a formulák, akár A -ban, akár B -ben van v .

Tegyük fel, hogy a legfeljebb $m - 1$ csúcsú páros gráfokra teljesülnek a tételben szereplő azonosságok, és vegyünk egy tetszőleges H páros gráfot m csúcson.

Elsőként tekintsük azt az esetet, amikor létezik $v \in A$ izolált csúcs. Ekkor $t_{ij}^H = t_{i-1,j}^{H-v}$, vagyis

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^{h-i} \binom{h-i}{j} (-1)^j t_{ij}^H &= \sum_{i=1}^h \sum_{j=0}^{h-i} \binom{h-i}{j} (-1)^j t_{ij}^H \\ &= \sum_{i=1}^h \sum_{j=0}^{h-i} \binom{h-i}{j} (-1)^j t_{i-1,j}^{H-v} = \sum_{i'=0}^{h-1} \sum_{j=0}^{h-1-i'} \binom{h-1-i'}{j} (-1)^j t_{i'j}^{H-v}. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy ha egy izolált csúcsot adunk A -hoz, akkor a baloldal értéke egy fix h -ra megegyezik az eredeti gráf esetén $h - 1$ -re vett értékkel. Mivel a csúcsszám is 1-el nő, így indukcióval azonnal kapjuk, hogy teljesülnek az azonosságok.

Most tegyük fel, hogy A nem tartalmaz izolált csúcsot. Jelölje $\ell \geq 0$ a B -beli izolált csúcsok

számát. Legyen $S = \{v_1, v_2, \dots, v_\ell\}$ ezen izolált csúcsok halmaza. Ekkor $t_{ij}^H = t_{i,j-\ell}^{H-S}$ és $\text{alt}(H) = \text{alt}(H-S)$, tehát ha $h = m + k$, $k \geq 0$, akkor a 3.5 Lemmát is felhasználva

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^{h-i} \binom{h-i}{j} (-1)^j t_{ij}^H = \sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^{h-i} \binom{h-i}{j} (-1)^j t_{i,j-\ell}^{H-S} = \\
&= \frac{1}{m-\ell} \sum_{v_i \in H-S} \sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^{h-i} \binom{h-i}{j} (-1)^j t_{i,j-\ell}^{H-S-v_i} = \frac{1}{m-\ell} \sum_{v_i \in H-S} \sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^{h-i} \binom{h-i}{j} (-1)^j t_{i,j}^{H-v_i} \\
&= \frac{1}{m-\ell} \left(\sum_{v_i \in A} \text{alt}(H-v_i) (-1)^b \binom{b+k+1}{k+1} + \sum_{v_i \in B-S} \text{alt}(H-v_i) (-1)^{b-1} \binom{b+k}{k+1} \right) \\
&= \frac{1}{m-\ell} \left(\sum_{v_i \in A} \text{alt}(H-S-v_i) (-1)^b \binom{b+k+1}{k+1} + \sum_{v_i \in B-S} \text{alt}(H-S-v_i) (-1)^{b-1} \binom{b+k}{k+1} \right) \\
&= \frac{(-1)^b \text{alt}(H-S) \cdot (m-\ell)}{m-\ell} \cdot \left(\binom{b+k+1}{k+1} - \binom{b+k}{k+1} \right) = (-1)^b \text{alt}(H) \binom{b+k}{k}.
\end{aligned}$$

Ha $h \leq m-2$, akkor

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^{h-i} \binom{h-i}{j} (-1)^j t_{ij}^H = \sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^{h-i} \binom{h-i}{j} (-1)^j t_{i,j-\ell}^{H-S} \\
&= \frac{1}{m-\ell} \sum_{v_i \in H-S} \sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^{h-i} \binom{h-i}{j} (-1)^j t_{i,j-\ell}^{H-S-v_i} = \frac{1}{m-\ell} \sum_{v_i \in H-S} \sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^{h-i} \binom{h-i}{j} (-1)^j t_{i,j}^{H-v_i} \\
&= \frac{1}{m-\ell} \sum_{v_i \in H-S} 0 = 0.
\end{aligned}$$

Végezetül ha $h = m-1$, akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{m-\ell} \sum_{v_i \in H-S} \sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^{h-i} \binom{h-i}{j} (-1)^j t_{i,j}^{H-v_i} \\
&= \frac{1}{m-\ell} \left(\sum_{v_i \in A} (-1)^b \text{alt}(H-v_i) + \sum_{v_i \in B-S} (-1)^{b-1} \text{alt}(H-v_i) \right) = (\text{alt}(H) - \text{alt}(H)) = 0,
\end{aligned}$$

a 3.5 Lemma szerint, vagyis beláttuk a kívánt állítást. $\square$

4.2. Tétel (Általánosított Brylawski-azonosságok). *Legyen G egy n csúcsú, m élű gráf, és legyen $T_G(x, y) = \sum_{i,j} t_{ij} x^i y^j$ a G -nek a Tutte-polinomja. Ekkor tetszőleges $h \geq m$ egész szám esetén*

$$\sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^{h-i} \binom{h-i}{j} (-1)^j t_{ij} = (-1)^{m-n+c} \binom{h-n+c}{h-m}$$

és tetszőleges $0 \leq h < m$ egész szám esetén

$$\sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^{h-i} \binom{h-i}{j} (-1)^j t_{ij} = 0.$$

A 4.2 tétel matroidokra is teljesül, ezért megfogalmazzuk ezt az általánosabb verziót is.

4.3. Tétel (Általánosított Brylawski-azonosságok matroidokra). *Legyen M matroid az S alaphalmazon. Jelölje m az S méretét, és r az S rangját. Legyen $T_M(x, y) = \sum_{i,j} t_{ij} x^i y^j$ az M -nek a*

Tutte-polinomja. Ekkor tetszőleges $h \geq m$ egész szám esetén

$$\sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^{h-i} \binom{h-i}{j} (-1)^j t_{ij} = (-1)^{m-r} \binom{h-r}{h-m},$$

és tetszőleges $0 \leq h < m$ egész szám esetén

$$\sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^{h-i} \binom{h-i}{j} (-1)^j t_{ij} = 0.$$

A 4.3 Tétel rögtön következik a 4.1 Tételből és a 2.6 Lemmából, de adunk rá egy közvetlen bizonyítást is.

Bizonyítás. A tételt m szerinti indukcióval látjuk be. Ha $m = 0$, akkor $r = 0$, és mindkét oldal 1-gyel egyenlő. Legyen $m \geq 1$. Ha M -nek nem csak hurok- illetve elvágó elemei vannak, akkor vegyünk egy s nem hurok-, nem elvágó elemet, és töröljük s -et M -ből. Az így kapott új matroidnak is r lesz a rangja, mivel s nem elvágó elem volt, és így volt M -nek egy s -et nem tartalmazó bázisa, ami $M - s$ -ben is bázis. Másrészt az s elem összehúzásával keletkező matroid rangja eggyel kisebb, mint M -é hiszen s nem hurokelem volt M -ben. A $T_M(x, y)$ -ra vonatkozó ismert rekurzió ($T_M(x, y) = T_{M-s}(x, y) + T_{M/s}(x, y)$, ha s nem hurok, nem elvágó) szerint

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^{h-i} \binom{h-i}{j} (-1)^j t_{ij}(M) \\ &= \sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^{h-i} \binom{h-i}{j} (-1)^j t_{ij}(M-s) + \sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^{h-i} \binom{h-i}{j} (-1)^j t_{ij}(M/s). \end{aligned}$$

Először tekintsük azt az esetet, amikor $h \geq m$. Ekkor persze $h \geq m-1$, és az indukciós feltevésünk szerint a fenti kifejezés

$$(-1)^{m-1-r} \binom{h-r}{h-m+1} + (-1)^{m-1-(r-1)} \binom{h-r+1}{h-m+1} = (-1)^{m-r} \binom{h-r}{h-m}.$$

Ha $h = m-1$, akkor azt kapjuk, hogy

$$(-1)^{m-1-r} \binom{h-r}{h-m+1} + (-1)^{m-1-(r-1)} \binom{h-r+1}{h-m+1} = (-1) + 1 = 0.$$

Végül ha $h \leq m-2$, akkor az indukciós feltevés szerint

$$\sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^{h-i} \binom{h-i}{j} (-1)^j t_{ij}(M-s) = 0,$$

és

$$\sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^{h-i} \binom{h-i}{j} (-1)^j t_{ij}(M/s) = 0.$$

Így ennek a két kifejezésnek az összege is 0, és készen vagyunk. Most tegyük fel, hogy S minden eleme hurok- vagy elvágó elem. Jelölje k az elvágó elemek számát, ℓ pedig a hurkokét. Ekkor $T_M(x, y) = x^k y^\ell$, valamint $r = k$. Ez azt jelenti, hogy $t_{ij} = 0$, ha $(i, j) \neq (k, \ell)$. Tehát ha

$k \leq h$, akkor

$$\sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^{h-i} \binom{h-i}{j} (-1)^j t_{ij}(M) = \binom{h-k}{\ell} (-1)^\ell = \binom{h-r}{m-r} (-1)^{m-r}.$$

Vegyük észre, hogy ez a kifejezés 0, ha $h < m$, és

$$(-1)^{m-r} \binom{h-r}{h-m},$$

ha $h \geq m$. Most már csak a $h < k$ eset van hátra. Ekkor

$$\sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^{h-i} \binom{h-i}{j} (-1)^j t_{ij}(M) = 0,$$

de ha $h < k$, akkor $h < m$, tehát ez pont az, amit szerettünk volna. $\square$

5. A MERINO-WELSH SEJTÉS KÖRNYÉKE

Ebben a szakaszban a Merino-Welsh sejtéssel, és annak a permutációs Tutte-polinomra vonatkozó analóg változatával foglalkozunk, miszerint

$$\tilde{T}_H(2, 0) \tilde{T}_H(0, 2) \geq \tilde{T}_H(1, 1)^2$$

minden izolált csúcsot nem tartalmazó H páros gráfra.

A következőkben szükségünk lesz az FKG-egyenlőtlenség alábbi változatára [5].

5.1. Lemma (Fortuin, Kasteleyn, Ginibre [5]). *Tegyük fel, hogy μ az egyenletes mérték $[0, 1]^N$ -en, és $X_1, \dots, X_t$ nemnegatív, monoton növekvő függvények, azaz ha $x_i \geq x'_i$ ($i = 1, \dots, N$), akkor minden $1 \leq j \leq t$ indexre teljesül, hogy*

$$X_j(x_1, \dots, x_n) \geq X_j(x'_1, \dots, x'_n).$$

Ekkor

$$\mathbb{E}_\mu \left[\prod_{j=1}^t X_j \right] \geq \prod_{j=1}^t \mathbb{E}_\mu [X_j].$$

5.2. Megjegyzés. Az FKG-egyenlőtlenség fenti alakja talán kevésbé ismert, ugyanis az egyenlőtlenséget általában véges, disztributív hálókra szokás kimondani. Azonban $[0, 1]^N$ közelíthető a $\{0, \frac{1}{M}, \frac{2}{M}, \dots, 1\}^N$ alakú véges, disztributív hálókval, és így az egyenlőtlenség fenti speciális változata következik a szokásos alakból.

Ez a speciális eset n szerinti indukcióval is belátható. A kiinduló $n = 1$ eset pont a Csebisev-egyenlőtlenség.

Az alábbi lemma hasznos alsó korlátot ad $\tilde{T}_H(x, y)$ -ra.

5.3. Lemma. *Legyen d_i az i csúcs fokszáma. Tegyük fel, hogy $0 \leq x \leq 1$ és $y \geq 1$, vagy $0 \leq y \leq 1$ és $x \geq 1$. Ekkor*

$$\tilde{T}_H(x, y) \geq \prod_{i \in A} \left(1 + \frac{x-1}{d_i+1} \right) \cdot \prod_{j \in B} \left(1 + \frac{y-1}{d_j+1} \right).$$

Bizonyítás. Definiáljunk egy véltlen sorrendet az alábbi módon. Minden i csúcshoz válasszunk egy véltlen x_i számot a $[0, 1]$ intervallumból egyenletesen. Az x_i értékek megadnak egy rendezést a csúcsokon. (Annak az esélye, hogy két csúcshoz is ugyanazt a számot választottuk, 0.) A $j \in B$ csúcsokra legyen $y_j = 1 - x_j$. Továbbá $i \in A$ esetén legyen

$$X_i(x_i, \{y_j\}_{j \in B}) = \begin{cases} x & \text{ha } \max_{j \in N_H(i)} (1 - y_j) \leq x_i, \\ 1 & \text{ha } \max_{j \in N_H(i)} (1 - y_j) > x_i, \end{cases}$$

$j \in B$ esetén pedig legyen

$$Y_j(\{x_i\}_{i \in A}, y_j) = \begin{cases} y & \text{ha } \max_{i \in N_H(j)} x_i \leq 1 - y_j, \\ 1 & \text{ha } \max_{i \in N_H(j)} x_i \geq 1 - y_j. \end{cases}$$

Ezekre teljesül, hogy

$$\mathbb{E}[X_i] = \left(1 - \frac{1}{d_i + 1}\right) + \frac{x}{d_i + 1} = 1 + \frac{x - 1}{d_i + 1},$$

és

$$\mathbb{E}[Y_j] = \left(1 - \frac{1}{d_j + 1}\right) + \frac{y}{d_j + 1} = 1 + \frac{y - 1}{d_j + 1}.$$

Vegyük észre, hogy X_i és Y_j monoton növekvő függvények az $\{x_i\}_{i \in A}$ és $\{y_j\}_{j \in B}$ változóiban, ha $x \geq 1$ és $0 \leq y \leq 1$, és monoton csökkenők, ha $0 \leq x \leq 1$ és $y \geq 1$. Továbbá

$$\tilde{T}_H(x, y) = \mathbb{E} \left[\prod_{i \in A} X_i \cdot \prod_{j \in B} Y_j \right].$$

Így az FKG-egyenlőtlenség szerint

$$\mathbb{E} \left[\prod_{i \in A} X_i \cdot \prod_{j \in B} Y_j \right] \geq \prod_{i \in A} \mathbb{E}[X_i] \cdot \prod_{j \in B} \mathbb{E}[Y_j] = \prod_{i \in A} \left(1 + \frac{x - 1}{d_i + 1}\right) \cdot \prod_{j \in B} \left(1 + \frac{y - 1}{d_j + 1}\right).$$

□

5.4. Tétel. Legyen G hurokélmentes, elvágóél-mentes gráf. Ekkor

$$T_G(3, 0)T_G(0, 3) \geq T_G(1, 1)^2.$$

Bizonyítás. A 2.6 Lemma szerint

$$T_G(x, y) = \sum_{T \in \mathcal{T}(G)} \tilde{T}_H[T](x, y),$$

ahol az összegzés G feszítőfáinak a $\mathcal{T}(G)$ halmazán történik. Megmutatjuk, hogy tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$(5.1) \quad \lambda^2 T_G(3, 0) + T_G(0, 3) \geq 2\lambda T_G(1, 1),$$

amiből következik, hogy

$$T_G(3, 0)T_G(0, 3) \geq T_G(1, 1)^2.$$

Mivel (5.1) minden rögzített λ -ra egy lineáris egyenlőtlenség, elég azt belátni, hogy

$$\lambda^2 \tilde{T}_H(3, 0) + \tilde{T}_H(0, 3) \geq 2\lambda \tilde{T}_H(1, 1)$$

fennáll minden H páros gráfra, ami ekvivalens azzal, hogy

$$\tilde{T}_H(3,0)\tilde{T}_H(0,3) \geq \tilde{T}_H(1,1)^2.$$

Használjuk fel, hogy $\tilde{T}_H(1,1) = 1$, és hogy az 5.3 Lemma szerint

$$\tilde{T}_H(3,0) \geq \prod_{i \in A} \left(1 + \frac{2}{d_i + 1}\right) \cdot \prod_{j \in B} \left(1 - \frac{1}{d_j + 1}\right),$$

és

$$\tilde{T}_H(0,3) \geq \prod_{i \in A} \left(1 - \frac{1}{d_i + 1}\right) \cdot \prod_{j \in B} \left(1 + \frac{2}{d_j + 1}\right).$$

Így elég azt belátni, hogy

$$\left(1 + \frac{2}{d+1}\right) \left(1 - \frac{1}{d+1}\right) \geq 1.$$

Az $(1 + 2\varepsilon)(1 - \varepsilon) \geq 1$ egyenlőtlenség ekvivalens azzal, hogy $\varepsilon \geq 2\varepsilon^2$, azaz $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$. Ez pedig teljesül, mert $d_v \geq 1$ minden $v \in V(H)$ csúcsra. $\square$

Nagyon hasonló gondolatmenettel adódik az alábbi tétel is, mely a permutációs Tutte-polinomra vonatkozó Merino-Welsch sejtés egy speciális esete.

5.5. Tétel. *Ha H d -reguláris páros gráf, akkor*

$$\min(\tilde{T}_H(2,0), \tilde{T}_H(0,2)) \geq \tilde{T}_H(1,1) = 1,$$

amiből

$$\tilde{T}_H(2,0)\tilde{T}_H(0,2) \geq \tilde{T}_H(1,1)^2.$$

Bizonyítás. Ha H reguláris, akkor tartalmaz egy $M = \{(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)\}$ teljes párosítást. Ekkor az 5.3 Lemma bizonyításában definiált változókra azt kapjuk, hogy

$$\tilde{T}_H(x,y) = \mathbb{E} \left[\prod_{i \in A} X_i \cdot \prod_{j \in B} Y_j \right] \geq \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[X_{u_i} Y_{v_i}].$$

Figyeljük meg, hogy abban az esetben, ha $x = 0$ és $y = 2$, vagy ha $x = 2$ és $y = 0$, mivel minden fokszám d , az adódik, hogy

$$\mathbb{E}[X_{u_i} Y_{v_i}] = 1 + \frac{-1}{d+1} + \frac{1}{d+1} = 1.$$

Vagyis $\tilde{T}_H(0,2) \geq 1$ és $\tilde{T}_H(2,0) \geq 1$. $\square$

5.6. Lemma. *Ha a $H = (A, B, E)$ páros gráf nem tartalmaz izolált csúcsot, akkor*

$$\tilde{T}_H(2,0) \geq \frac{2^a}{\binom{a+b}{a}};$$

$$\tilde{T}_H(0,2) \geq \frac{2^b}{\binom{a+b}{a}}.$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $\text{alt}(H) \geq \frac{1}{\binom{a+b}{a}}$, mivel ha az $1, 2, \dots, a$ számokat rendeljük az A -beli csúcsokhoz, a maradékot pedig a B -beliekhez – tetszőleges sorrendben –, akkor B minden csúcsa aktív lesz, de A egyik csúcsa sem lesz aktív. Tehát

$$\tilde{T}_H(2, 0) \geq 2^a t_{a,0} = 2^a \text{alt}(H) \geq \frac{2^a}{\binom{a+b}{a}},$$

és hasonlóan

$$\tilde{T}_H(0, 2) \geq 2^b t_{0,b} = 2^b \text{alt}(H) \geq \frac{2^b}{\binom{a+b}{a}}.$$

□

5.7. Következmény. Ha a $H = (A, B, E)$ páros gráf nem tartalmaz izolált csúcsot, akkor $\tilde{T}_H(2, 0) \geq \tilde{T}_H(1, 1)$, ha $\frac{a+b}{a} \leq 1.29$, és $\tilde{T}_H(0, 2) \geq \tilde{T}_H(1, 1)$, ha $\frac{a+b}{b} \leq 1.29$.

6. ÖSSZEFOGLALÁS, NYITOTT KÉRDÉSEK

A dolgozatunkban bevezettünk egy páros gráfokra definiált gráfpolinomot, a permutációs Tutte-polinomot. Tanulmányoztuk ennek az új polinomnak a tulajdonságait, valamint kapcsolatát az eredeti Tutte-polinommal. Megmutattuk, hogy sok szempontból hasonlóan viselkedik, mint a Tutte-polinom, például ennek az együtthatói is eleget tesznek a Brylawski-azonosságoknak. Másrészt viszont meglepő tulajdonságokkal is rendelkezik, és új perspektívát adhat a Tutte-polinom vizsgálatában. Például teljesül rá egy szép és könnyen érthető rekurziós formula. Azt is láttuk, hogy a permutációs Tutte-polinom hasznos eszköznek bizonyulhat a híres Merino-Welsh sejtés tanulmányozásában. Bár a megfelelő erősebb sejtést csak bizonyos páros gráfokra tudtuk bebizonyítani, ez a kutatási irány még tartogathat új eredményeket. Láttuk azt is, hogy egy gráf permutációs Tutte-polinomja bizonyos gráftulajdonságokat is elkódol, ilyen szempontból is érdemesnek látszik tovább vizsgálni ezt a polinomot. Ezen kívül a csoportelméleti vonatkozások is érdekesek lehetnek.

HIVATKOZÁSOK

- [1] Thomas Brylawski és James Oxley. „The Tutte polynomial and its applications”. *Matroid applications* 40 (1992), 123–225. old.
- [2] Henry H. Crapo. „The Tutte polynomial”. *Aequationes Mathematicae* 3.3 (1969), 211–229. old.
- [3] Péter Csikvári. „On a poset of trees”. *Combinatorica* 30 (2010), 125–137. old.
- [4] Joanna A. Ellis-Monaghan és Criel Merino. „Graph polynomials and their applications I: The Tutte polynomial”. *Structural analysis of complex networks*. Springer, 2011, 219–255. old.
- [5] Cees M. Fortuin, Pieter W. Kasteleyn és Jean Ginibre. „Correlation inequalities on some partially ordered sets”. *Communications in Mathematical Physics* 22.2 (1971), 89–103. old.
- [6] Einar Steingrímsson. „A decomposition of 2-weak vertex-packing polytopes”. *Discrete & Computational Geometry* 12.4 (1994), 465–479. old.

- [7] William Thomas Tutte. „A contribution to the theory of chromatic polynomials”. *Canadian journal of mathematics* 6 (1954), 80–91. old.
- [8] Dominic Welsh. „The Tutte polynomial”. *Random Structures & Algorithms* 15.3-4 (1999), 210–228. old.