

Dolgozatunkban a Tutte-polinom [3] vizsgálatát tűztük ki célul, melynek definíciója a következő:

0.1. Definíció. Legyen $G = (V, E)$ egy n csúcsú, m élű gráf. A G Tutte-polinomja

$$T_G(x, y) = \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{k(A)-k(E)} (y-1)^{k(A)+|A|-n},$$

ahol $k(A)$ jelöli a (V, A) gráf összefüggősségi komponenseinek számát.

Minden H páros gráfhoz definiáltunk egy $\tilde{T}_H(x, y)$ kétváltozós polinomot:

0.2. Definíció. Legyen $H = (A, B, E)$ páros gráf. Tegyük fel, hogy $V(H) = [m]$. A $\pi : [m] \rightarrow [m]$ permutációra nézve az $i \in A$ csúcsot *belül aktívnak* nevezzük, ha

$$\pi(i) > \max_{j \in N_H(i)} \pi(j).$$

Hasonlóan egy $j \in B$ csúcsot *kívül aktívnak* hívunk, ha

$$\pi(j) > \max_{i \in N_H(j)} \pi(i).$$

Jelölje $ba(\pi)$ és $ka(\pi)$ a belül, illetve kívül aktív csúcsok számát. Legyen

$$\tilde{T}_H(x, y) = \frac{1}{m!} \sum_{\pi \in S_m} x^{ba(\pi)} y^{ka(\pi)}$$

a H páros gráf *permutációs Tutte-polinomja*.

Ennek az új polinomnak a tulajdonságait vizsgáltuk, és ennek segítségével bizonyítottunk az eredeti Tutte-polinomra vonatkozó eredményeket.

Az új polinomra vonatkozó eredményeink a következők:

0.3. Lemma. Ha H előáll H_1 és H_2 diszjunkt uniójaként, akkor

$$\tilde{T}_H(x, y) = \tilde{T}_{H_1}(x, y) \tilde{T}_{H_2}(x, y).$$

Speciálisan ha $v \in A$ izolált csúcs, akkor

$$\tilde{T}_H(x, y) = x \tilde{T}_{H-v}(x, y).$$

Hasonlóan ha $v \in B$ izolált csúcs, akkor

$$\tilde{T}_H(x, y) = y \tilde{T}_{H-v}(x, y).$$

0.4. Lemma. Ha $H = (A, B, E)$ páros gráf, akkor legyen $H' = (B, A, E)$ az a gráf, amit úgy kapunk, hogy megcseréljük H két színosztályát. Ekkor

$$\tilde{T}_H(x, y) = \tilde{T}_{H'}(y, x).$$

0.5. Lemma. Ha H nem tartalmaz izolált csúcsot, akkor

$$\tilde{T}_H(x, y) = \frac{1}{m} \sum_{v \in V(H)} \tilde{T}_{H-v}(x, y).$$

0.6. Lemma. Legyen $\tilde{T}_H(x, y) = \sum_{i,j} t_{ij} x^i y^j$. Ha H összefüggő, és $t_{ij} > 0$ valamely i, j indexekre, akkor $t_{i'j'} > 0$ minden $i' \leq i, j' \leq j, (i', j') \neq (0, 0)$ esetén.

0.7. Lemma. Legyen $v(H) = m$, és legyenek $X_1, X_2, \dots, X_m$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók $X_i \sim U(0, 1)$ eloszlással. Legyen $I(A) = |\{v \in A | X_v \geq X_{v'} \forall v' \in N_H(v)\}|$, valamint $I(B) = |\{v \in B | X_v \geq X_{v'} \forall v' \in N_H(v)\}|$. Ekkor

$$\mathbb{P}(I(A) = i, I(B) = j) = t_{i,j}(H).$$

Az eredeti Tutte-polinommal való kapcsolatot az alábbi összefüggés adja:

0.8. Lemma. A G gráf tetszőleges T feszítőfájára legyen $H[T]$ az a páros gráf, amelynek egyik színosztályában szereplő csúcsok a T élei, a másikban szereplő csúcsok pedig azok az élek, amelyek nem szerepelnek T -ben. Az e feszítőfaélnak és az f nem feszítőfaélnak megfelelő csúcsokat pontosan akkor kössük össze éllel $H[T]$ -ben, ha f szerepel a T és e által meghatározott vágásban. Ekkor

$$T_G(x, y) = \sum_{T \in \mathcal{T}(G)} \tilde{T}_{H[T]}(x, y),$$

ahol az összegzés G feszítőfáinak a $\mathcal{T}(G)$ halmazára történik.

A permutációs Tutte-polinom együtthatóiról az alábbi eredményeket láttuk be:

0.9. Lemma. Legyen $H = (A, B, E)$ izolált csúcsot nem tartalmazó páros gráf. Legyen $|A| = a$, $|B| = b$ és $\tilde{T}_H(x, y) = \sum t_{ij} x^i y^j$. Ekkor $t_{a0} = t_{0b}$

0.10. Lemma. Legyen $H = (A, B, E)$ páros gráf. Legyen $|A| = a$, $|B| = b$ és $\tilde{T}_H(x, y) = \sum t_{i,j} x^i y^j$. Ha A -ban r , B -ben pedig ℓ izolált csúcs van, akkor

$$t_{a,\ell} = t_{r,b}.$$

0.11. Definíció. Legyen $H = (A, B, E)$ páros gráf. Legyen $|A| = a$ és $|B| = b$. Jelölje r az A -beli, ℓ pedig a B -beli izolált csúcsok számát. Legyen

$$\text{alt}(H) = t_{a,\ell} = t_{r,b}.$$

0.12. Lemma. Tetszőleges $H = (A, B, E)$ páros gráfra, amelynek nincs B -ben izolált csúcsa,

$$\text{alt}(H) = \frac{1}{m} \sum_{v \in A} \text{alt}(H - v).$$

Hasonlóan ha H -nak nincs A -beli izolált csúcsa, akkor

$$\text{alt}(H) = \frac{1}{m} \sum_{v \in B} \text{alt}(H - v).$$

0.13. Lemma. Ha $H = (A, B, E)$ páros gráf m csúcson, akkor

$$\tilde{T}_H(2, 2) = \text{alt}(H) 2^m.$$

0.14. Lemma. Legyen $H = (A, B, E)$ páros gráf. Ekkor $\text{alt}(H)$ megegyezik a $0 \leq x_i \leq 1$ ($1 \leq i \leq m$), $x_i + x_j \leq 1$ ($(i, j) \in E$) egyenlőtlenségek által definiált politóp térfogatával.

A következő definíció a [2] cikkből származik.

0.15. Definíció. Legyen P egy út a G gráfban, amelyre teljesül, hogy P minden belső pontjának a G -beli foka 2. Legyen u és v a P út két végpontja, és jelöljük z -vel v -nek a szomszédját P -n. A G gráf KC -transzformáltját, amelyet $KC(G, P, u, v)$ -vel jelölünk, úgy kapjuk G -ből, hogy minden $\{v, w\}$ ($w \neq z$) élt lecserélünk az $\{u, w\}$ élre. Vegyük észre, hogy $KC(G, P, u, v)$ és $KC(G, P, v, u)$ izomorf gráfok.

Bebizonyítottuk, hogy erre a transzformációra teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

0.16. Lemma. *Tetszőleges G gráfra $\text{alt}(KC(G, P, u, v)) \geq \text{alt}(G)$.*

0.17. Következmény. (1) *Legyen G olyan gráf, ami nem út, és vannak levelei. Ekkor létezik olyan G' gráf, aminek szigorúan kevesebb levele van, mint G -nek, és $\text{alt}(G') \leq \text{alt}(G)$.*
 (2) *Legyen G egy n csúcsú fa. Ekkor $\text{alt}(G) \geq \text{alt}(P_n)$.*
 (3) *Legyen G egy összefüggő gráf n csúccsal és n éllel. Ekkor $\text{alt}(G) \geq \text{alt}(C_n)$, ahol C_n jelöli az n csúcsú kört.*
 (4) *Legyen G tetszőleges n csúcsú gráf. Ekkor $\text{alt}(G) \leq \text{alt}(S_n)$, ahol S_n is jelöli az n csúcsú csillagot.*

0.18. Lemma. *Legyen $H = (A, B, E)$ fa m csúcson, és legyen $\tilde{T}_H(x, y) = \sum_{k, \ell} t_{k, \ell} x^k y^\ell$. Ekkor*

$$t_{01} + t_{10} = 2t_{01} \geq 2^{m-1},$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha H egy út.

0.19. Lemma. *Legyen $H = (A, B, E)$ páros gráf, amelyre $|A| = a$ és $|B| = b$. Legyen $\tilde{T}_H(x, y) = \sum_{k, \ell} t_{k, \ell} x^k y^\ell$. Ha H nem tartalmaz izolált csúcsot, akkor*

$$b \cdot t_{a,0} = \sum_j t_{a-1,j}.$$

Az [1] cikkben Brylawski lineáris összefüggéseket bizonyított a Tutte-polinom együtthatóira. A Brylawski-azonosságok szerint ha

$$T_G(x, y) = \sum_{i,j} t_{ij} x^i y^j,$$

akkor $t_{01} = t_{10}$, ha G -nek legalább egy éle van, $t_{20} - t_{11} + t_{02} = t_{10}$, ha G -nek legalább két éle van, és általánosan

$$\sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^{h-i} \binom{h-i}{j} (-1)^j t_{ij} = 0,$$

ha G -nek legalább h éle van. A dolgozatban adtunk egy rövidebb, egyszerű bizonyítást Brylawski eredeti tételére, valamint a permutációs Tutte-polinomra vonatkozó analóg állításra is. Ezen kívül kiterjesztjük a Brylawski-azonosságokat arra az esetre, amikor $h \geq m$:

0.20. Tétel (A permutációs Tutte-polinomra vonatkozó Brylawski-azonosságok). *Legyen H páros gráf m csúcson, és $\tilde{T}_H(x, y) = \sum_{i,j} t_{ij} x^i y^j$ a H -nak a permutációs Tutte-polinomja. Ekkor*

tetszőleges $h < m$ egész szám esetén

$$\sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^{h-i} \binom{h-i}{j} (-1)^j t_{ij} = 0.$$

Továbbá ha $h = m + k$, $0 \leq k \in \mathbb{Z}$, akkor

$$\sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^{h-i} \binom{h-i}{j} (-1)^j t_{ij} = (-1)^{b_{\text{alt}}(H)} \cdot \binom{b+k}{k}.$$

0.21. Tétel (Általánosított Brylawski-azonosságok). *Legyen G egy n csúcsú, m élű gráf, és legyen $T_G(x, y) = \sum_{i,j} t_{ij} x^i y^j$ a G -nek a Tutte-polinomja. Ekkor tetszőleges $h \geq m$ egész szám esetén*

$$\sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^{h-i} \binom{h-i}{j} (-1)^j t_{ij} = (-1)^{m-n+c} \binom{h-n+c}{h-m}$$

és tetszőleges $0 \leq h < m$ egész szám esetén

$$\sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^{h-i} \binom{h-i}{j} (-1)^j t_{ij} = 0.$$

A 0.21 tétel matroidokra is teljesül, ezért megfogalmazzuk ezt az általánosabb verziót is.

0.22. Tétel (Általánosított Brylawski-azonosságok matroidokra). *Legyen M matroid az S alaphalmazon. Jelölje m az S méretét, és r az S rangját. Legyen $T_M(x, y) = \sum_{i,j} t_{ij} x^i y^j$ az M -nek a Tutte-polinomja. Ekkor tetszőleges $h \geq m$ egész szám esetén*

$$\sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^{h-i} \binom{h-i}{j} (-1)^j t_{ij} = (-1)^{m-r} \binom{h-r}{h-m},$$

és tetszőleges $0 \leq h < m$ egész szám esetén

$$\sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^{h-i} \binom{h-i}{j} (-1)^j t_{ij} = 0.$$

A másik híres probléma, amit vizsgáltunk, a Merino-Welsh sejtés. Merino és Welsh azt sejtette, hogy ha a G gráf nem tartalmaz sem hurokét, sem elvágó élt, akkor

$$\max(T_G(2, 0), T_G(0, 2)) \geq T_G(1, 1).$$

Később Conde és Merino megfogalmazták a sejtés egy erősebb változatát is, miszerint

$$T_G(2, 0) + T_G(0, 2) \geq 2T_G(1, 1),$$

valamint

$$T_G(2, 0)T_G(0, 2) \geq T_G(1, 1)^2.$$

Megfogalmaztuk az analóg sejtést $\tilde{T}_H(x, y)$ -ra:

$$\tilde{T}_H(2, 0)\tilde{T}_H(0, 2) \geq \tilde{T}_H(1, 1)^2 = 1$$

minden izolált csúcsot nem tartalmazó H páros gráfra. Megmutattuk, hogy reguláris páros gráfok permutációs Tutte-polinomjaira igaz a sejtés, valamint belátjuk, hogy

$$\tilde{T}_H(3,0)\tilde{T}_H(0,3) \geq \tilde{T}_H(1,1)^2$$

fennáll minden izolált csúcsot nem tartalmazó H páros gráfra. Ezzel egy új bizonyítást nyerünk az ismert Jackson-egyenlőtlenségre, miszerint

$$T_G(3,0)T_G(0,3) \geq T_G(1,1)^2$$

fennáll minden olyan G gráfra, amelyben nincsenek sem hurokélek, sem elvágó élek.

Ezekhez az eredményekhez segítségünkre volt az alábbi lemma:

0.23. Lemma. *Legyen d_i az i csúcs fokszáma. Tegyük fel, hogy $0 \leq x \leq 1$ és $y \geq 1$, vagy $0 \leq y \leq 1$ és $x \geq 1$. Ekkor*

$$\tilde{T}_H(x,y) \geq \prod_{i \in A} \left(1 + \frac{x-1}{d_i+1}\right) \cdot \prod_{j \in B} \left(1 + \frac{y-1}{d_j+1}\right).$$

Viszont az alábbi egyenlőtlenségeket sikerült megmutatni a dolgozatban:

0.24. Lemma. *Ha a $H = (A,B,E)$ páros gráf nem tartalmaz izolált csúcsot, akkor*

$$\tilde{T}_H(2,0) \geq \frac{2^a}{\binom{a+b}{a}};$$

$$\tilde{T}_H(0,2) \geq \frac{2^b}{\binom{a+b}{a}}.$$

0.25. Következmény. *Ha a $H = (A,B,E)$ páros gráf nem tartalmaz izolált csúcsot, akkor $\tilde{T}_H(2,0) \geq \tilde{T}_H(1,1)$, ha $\frac{a+b}{a} \leq 1.29$, és $\tilde{T}_H(0,2) \geq \tilde{T}_H(1,1)$, ha $\frac{a+b}{b} \leq 1.29$.*

HIVATKOZÁSOK

- [1] Thomas Brylawski és James Oxley. „The Tutte polynomial and its applications”. *Matroid applications* 40 (1992), 123–225. old.
- [2] Péter Csikvári. „On a poset of trees”. *Combinatorica* 30 (2010), 125–137. old.
- [3] William Thomas Tutte. „A contribution to the theory of chromatic polynomials”. *Canadian journal of mathematics* 6 (1954), 80–91. old.