

Körgráfok véletlen módosításainak aszimptotikus spektrálanalízise

Beke Márton, Borbényi Márton, Szemerédi Levente

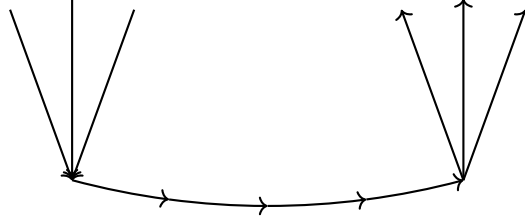
2021

Kivonat

Dolgozatunkban véletlen Markov-láncok konvergenciasebességével, illetve sajátértékeivel foglalkozunk. Célunk az n pontú körgráfon történő véletlen bolyongásnak, mint Markov-láncnak, a konvergenciasebességének gyorsítása a gráf a módosításával. Erre Gerencsér és Hendrickx adtak egy véletlenített konstrukciót, melynek a vizsgálatát folytattuk. Bebizonyítottuk, hogy n -et növelve a konstrukció sajátértékeinek abszolútértéke egyenletesen 1-hez tart aszimptotikusan 1 valószínűséggel, melyekről ismert, hogy legfeljebb 1 abszolútértékű komplex számok. Továbbá beláttuk a gyökök argumentumainak aszimptotikusan egyenletes eloszlását is.

1. Bevezetés

Dolgozatunkban azt vizsgáljuk, hogyan lehet felgyorsítani egy körgráfon való bolyongás konvergenciáját a gráf kis módosításával. Legyen C_n az n pontú körön levő szimmetrikus Markov-lánc, mely keverési sebessége $\min\{1 - |\lambda| \mid \lambda \neq 1 \text{ a Markov-lánc egy sajátértéke}\}$ (lásd az 1.3 definíciót). Utóbbi azt méri, milyen gyorsan közelíti meg a Markov-lánc a stacionárius eloszlását. A C_n esetén ez az érték $O(\frac{1}{n^2})$. A témakörben az egyik első eredmény [1, Diaconis, Holmes és Neal]-hez köthető: megmutatták, hogy egy n hosszú úton levő szimmetrikus bolyongáson a visszafordulás korlátozásával a konvergencia-sebesség nő, ezzel további irányokat felvetve: hogyan és miért segíti a visszafordítás korlátozása a keveredést a Markov-láncon. 2019-ben [2, Gerencsér és Hendrickx] megadtak egy konstrukciót, mellyel a körgráfon való bolyongást gyorsították: néhány élet letöröltek, néhány újat berajzoltak, és az eredetiket egyirányúvá tették. Ezzel az ötlettel n -et k egy polinomjaként megadva tetszőleges $\gamma > 4$ esetén $\Omega\left(\frac{k}{n \log^\gamma(k)}\right)$ -ra tudtak gyorsítani. Vettük ezt a konstrukciót, és megpróbáltuk megérteni, hogyan működik, milyen a sajátértékeinek az eloszlása. Dolgozatunkban [2] jelöléseit fogjuk követni, és folytatjuk az abban megkezdett munkát a két



1. ábra. Egy 5 hosszú ív a környezetével

ott definiált Markov-lánc (1.1, 1.2 definíciók), illetve a hozzájuk tartozó $q(z)$ Laurent-polinomok vizsgálatával ((1) egyenlet).

1.1. Definíció. Legyen $B_n(k)$ véletlen gráfok következő eloszlása. Vegyünk egy irányított n csúcsú körgráfot és ennek k élet egyenletesen választva (az összes él- k as közül). A kiválasztott éleket töröljük. A megmaradó k ív rendre $L_1, L_2, \dots, L_k$ pontból áll (ezek közül néhány lehet 1 is). Majd minden ív végpontjából az összes ív kezdőpontjába rajzoljunk be egy élet $1/k$ súllyal.

1.2. Definíció. Defináljuk a $B(L, k)$ gráfeloszlást a következő módon. Legyenek $L_1, L_2, \dots, L_k$ független geometriai eloszlású valószínűségi változók L várható értékkel. Vegyünk k diszjunkt $L_1, L_2, \dots, L_k$ hosszú ívet, és kössük össze az összes végpontját az összes kezdőpontjával $1/k$ súllyal.

Az első modell természetesebb, de nehezebb vele számolni. Így a másodikat fogjuk vizsgálni, és megmutatjuk, mi a kettő közt a kapcsolat: amit elsőre gondolnánk, az igaz is. $L = n/k$ esetén ha vesszük $B(L, k)$ -t azzal a feltétellel, hogy $\sum_{i=1}^k L_i = n$, majdnem $B_n(k)$ -t kapjuk. Pontosabban: vegyünk egy gráfot $B(L, k)$ -ből, illetve egy pontot egyenletesen C_n -ből. Kezdjük el a gráf építését ebből: vegyünk egy L_1, L_2 , stb. hosszú ívet, és a szükséges módosításokat végezzük el a végpontokon. Ekkor amit kapunk, az pontosan $B_n(k)$ (lásd [2, Proposition 13]).

1.3. Definíció. Egy P áttérési mátrixú Markov-lánc λ keverési sebessége legyen

$$\lambda = \min\{1 - |\mu| : \mu \neq 1 \text{ a } P \text{ mátrix sajátértéke}\}.$$

Ki szeretnénk számolni, vagy legalább megbecsülni a keverési sebességet. Ehhez a következő függvény lesz segítségünkre:

$$q(z) = \sum_{i=1}^k z^{-L_i}. \quad (1)$$

Az alábbi tétellel tudjuk q -t a sajátértékekkel összekötni:

1.4. Tétel (Gerencsér, Hendrickx [2]). *Nézzünk egy pure drift Markov-láncot egy $B(L, k)$ -ből való véletlen gráfon. Ekkor $0 \neq \mu \in \mathbb{C}$ pontosan akkor sajátértéke a P áttérési mátrixnak, ha $q(\mu) = k$.*

□

A 1.4 tétel következményeként egy $B(L, k)$ -ból vagy $B_n(k)$ -ből való gráfú pure drift Markov-lánc λ keverési sebességét a következő módon karakterizálhatjuk:

1.5. Következmény. *Legyen μ a $q(z) = k$ egyenlet 1-től különböző gyökei közül a legnagyobb abszolút értékű. Ekkor $\lambda = 1 - |\mu|$.* $\square$

Innentől kezdve a $q(z) = k$ egyenletet fogjuk vizsgálni az előbb definiált Markov-láncok keverési sebességének becsléséhez.

2. Technikai lemmák

A $a_n \sim b_n$ jelölést akkor fogjuk használni, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = 1$. Ebben a fejezetben $L_1, L_2, \dots, L_k$ pozitív értékű i.i.d. valószínűségi változók $p = \frac{k}{n}$ paraméterű geometriai eloszlásból. A dolgozat során k , illetve n a végtelenbe fog tartani úgy, hogy $A > \frac{\log n}{\log k} > 2 + \varepsilon$ valamely $A, \varepsilon > 0$ -ra. Most bebizonyítunk néhány technikai lemmát, melyre később szükség lesz.

2.1. Lemma. *A fenti feltevésekkel élve*

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^k L_i = n\right) \geq \frac{1}{n}.$$

Bizonyítás. Lásd [2, Lemma 15]. $\square$

2.2. Lemma. *Az L vektor eloszlása a $\sum_i L_i = n$ feltétel mellett az egyenletes eloszlás az összes lehetséges szám-kason.*

Bizonyítás. $\mathbb{P}(L_1 = l_1, \dots, L_k = l_k) = p^k (1-p)^{\sum (l_i-1)} = p^k (1-p)^{n-k}$. $\square$

2.3. Lemma. *Tetszőleges $C > 1$ és $p > 2$ esetén*

$$\mathbb{P}(\max L_i \geq Cp \log k) = O(k^{1-C}).$$

Bizonyítás. Lásd [2, Lemma 7]. $\square$

2.4. Lemma. *Legyen $C > A + 1$. Ekkor*

$$\mathbb{P}\left(\max L_i \leq CL \log k \mid \sum L_i = n\right) \rightarrow 1.$$

Bizonyítás. A 2.3 lemma szerint

$$\mathbb{P}(\max L_i \geq CL \log k) = O(k^{1-C}).$$

A feltétel valószínűsége a 2.1. lemma szerint legalább $\frac{1}{n}$, így

$$\mathbb{P}\left(\max L_i \geq CL \log k \mid \sum L_i = n\right) = n \cdot O(k^{1-C}),$$

ami 0-hoz tart, amint $n, k \rightarrow \infty$. $\square$

2.5. Lemma. Legyen a_n, b_n két pozitív egészekből álló sorozat, melyek végtelenhez tartanak, illetve $b_n^2 = o(a_n)$. Ekkor

$$\binom{a_n}{b_n} \sim \frac{a_n^{b_n}}{b_n!}.$$

Bizonyítás. Elegendő megmutatni, hogy

$$\frac{(a_n - b_n + 1) \cdots a_n}{a_n^{b_n}} \rightarrow 1$$

vagy azt, hogy a logaritmus 0-hoz tart.

$$\begin{aligned} 0 &> \log \left(\frac{(a_n - b_n + 1) \cdots a_n}{a_n^{b_n}} \right) = \log \left(1 - \frac{b_n - 1}{a_n} \right) + \log \left(1 - \frac{b_n - 2}{a_n} \right) + \dots + \log \left(1 - \frac{0}{a_n} \right) \geq \\ &- \left(2 \frac{b_n - 1}{a_n} \right) - \left(2 \frac{b_n - 2}{a_n} \right) - \dots - \left(2 \frac{0}{a_n} \right) = - \frac{(b_n - 1)b_n}{a_n} = o(1) \end{aligned}$$

kihasználva, hogy $\exists \varepsilon > 0$ úgy, hogy amint $0 < x < \varepsilon$, akkor $-2x \leq \log(1 - x)$. $\square$

3. Alsó becslések a gyökökre

Ebben a fejezetben belátunk néhány egyenlőtlenséget a gyökökre vonatkozóan.

3.1. Tétel. Legyen $C > \alpha + 1$ tetszőleges konstans, ahol $\alpha \geq \frac{\log n}{\log k}$. Ekkor aszimptotikusan majdnem biztosan (a.m.b.)

$$|\lambda_2| \geq 1 - \frac{1}{C} \frac{k}{n}$$

teljesül az 1.2-ben definiált Markov-lánc λ_2 második legnagyobb sajátértékére.

Bizonyítás. Az 1.4. tételben belátták, hogy a nem nulla sajátértékek pontosan a

$$\sum_i z^{-L_i} = k$$

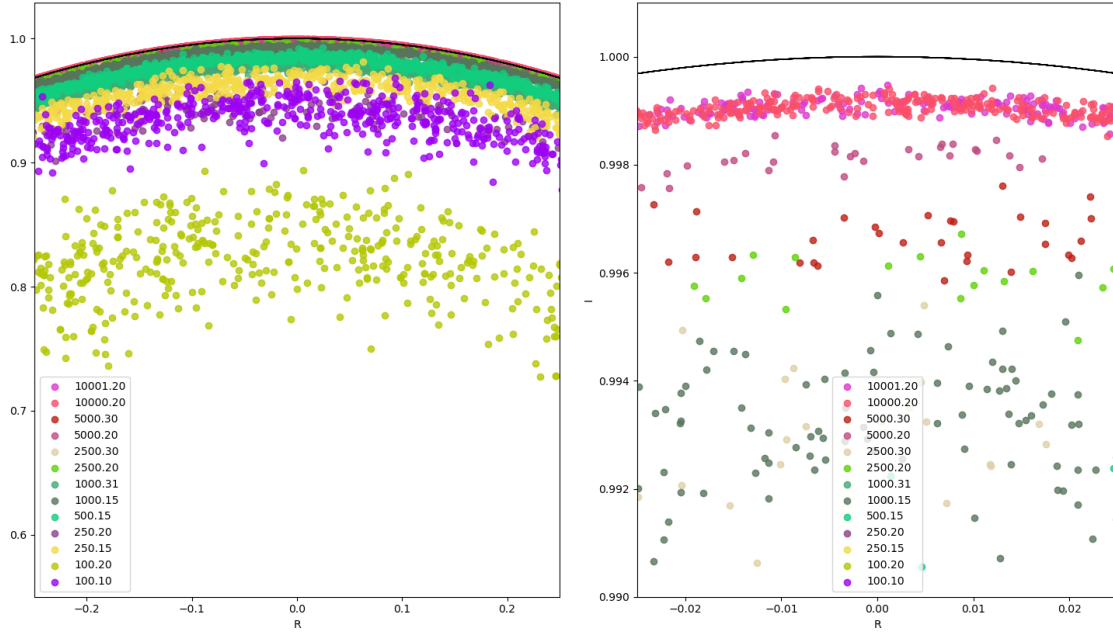
egyenlet megoldásai. Felszorozva $z^{L_1^*}$ -vel polinommá tesszük a kifejezést ($L_1^* := \max_i L_i$). Tehát a Viète-formulák szerint $|\lambda_2| \geq \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{L_1^* - 1}}$.

A 2.4 lemma szerint $\mathbb{P}(L_1^* \leq C \frac{n}{k} \log k) \rightarrow 1$ ha $C > \alpha + 1$, így aszimptotikusan feltehetjük hogy L_1^* legfeljebb $C \frac{n}{k} \log k$, ebből pedig $|\lambda_2| \geq \left(\left(\frac{1}{k}\right)^{1/(L_1^* - 1)}\right) \geq \left(\frac{1}{k}\right)^{1/(C \frac{n}{k} \log k)} = \exp\left(-\frac{k}{nC}\right) \geq 1 - \frac{k}{nC}$. $\square$

Ez az egyenlőtlenség csak a második legnagyobb sajátértékre teljesül, azonban állíthatunk valamit az összesről együtt is.

3.2. Tétel. Legyen $\alpha > 3$, $n \geq k^\alpha$ és tartson $n, k \rightarrow \infty$ egyszerre. Ekkor tetszőleges $c \in (0, 1)$ -re a Markov-lánc nem nulla sajátértékei legalább c abszolútértékűek a.m.b.

Ehelyett egy erősebb, kvantitatív verziót fogunk megmutatni:



2. ábra. A második legnagyobb sajátértékek elhelyezkedése különböző n és k értékekre az i körül. A paraméterek növelésével a számok egyre közelebb kerülnek az egységkörhöz, a paramétereket $n.k$ formátumban jelenítettük meg.

3.3. Tétel. Legyen $n > k^2$ és $l = o(n)$. Ekkor igaz a

$$\mathbb{P}\left(\exists z : q(z) = k, |z|^l \leq \frac{1}{3}\right) \leq 2l \frac{k^3}{n}$$

egyenlőtlenség.

A tétel bizonyítása némi előkészítést igényel.

3.4. Lemma. Ha $i \neq j$ esetén $|L_i - L_j| \geq l$, illetve $0 < |z| \leq 1$, $|z|^l \leq \frac{1}{3}$ teljesül, akkor z nem lehet megoldása a

$$\sum_{i=1}^k z^{-L_i} = k$$

egyenletnek.

Az eddigi jelölést kiterjesztve a továbbiakban legyen L_i^* az L_i sorozat csökkenő sorrendben.

Bizonyítás.

$$\left| \sum z^{-L_i} \right| \geq |z^{-L_1^*}| - |z^{-L_2^*}| - \dots - |z^{-L_k^*}| \geq |z^{-L_1^*}| (1 - |z|^l - |z|^{2l} - \dots - |z|^{(k-1)l}) \geq \frac{1}{3} |z^{-L_1^*}| > k.$$

Ahol felhasználtuk, hogy $|z|^{L_1^*} \leq |z|^{lk} \leq (|z|^l)^k \leq \left(\frac{1}{3}\right)^k < \frac{1}{3k}$. $\square$

Egyszerűen szólva tehát a $z^{-L_1^*}$ tag domináns és legalább k nagyságrendű. Ez adja a bizonyítás ötletét. Az alábbi állításban látni fogjuk, hogy magas valószínűséggel az L_i -k távol lesznek egymástól, következésképp ha $|z|$ kicsi, akkor z nem lehet megoldás, ezzel belátva a 3.3.tételt.

3.5. Állítás. *Legyen $1 \leq a, b \leq k$ és $l = o(n)$. Ekkor kellően nagy k esetén*

$$\mathbb{P}\left(|L_a - L_b| \leq l \mid \sum_{i=1}^k L_i = n\right) \leq 2l \cdot \frac{k-1}{n-1}.$$

Bizonyítás. Az L_i -k szimmetriája miatt elegendő az $a = 1$, $b = 2$ esetre szorítkoznunk. A 2.2 lemma szerint az $(L \mid \sum L_i = n)$ feltételes eloszlás egyenletes. Egy m -et lerögzítve látjuk, hogy

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=3}^k L_i = m \mid \sum_{i=1}^k L_i = n\right) = \frac{\mathbb{P}(\sum_{i=3}^k L_i = m) \mathbb{P}(L_1 + L_2 = n - m)}{\mathbb{P}(\sum_{i=1}^k L_i = n)}.$$

Ha $\sum_{i=3}^k L_i = m$ akkor $L_1 + L_2 = n - m$, tehát $n - m - 1$ darab (L_1, L_2) párt kaphatunk, közülük l -re teljesül az $|L_1 - L_2| \leq l$ feltétel. Eszerint annak a valószínűsége hogy L_1 és L_2 legfeljebb l távolságra vannak egymástól $\min\{1, \frac{l}{n-m-1}\}$. Ezeket felhasználva adódik, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|L_1 - L_2| \leq l \mid \sum_{i=1}^k L_i = n) &= \sum_{m=k-2}^{n-2} \min\left\{1, \frac{l}{n-m-1}\right\} \frac{\mathbb{P}(\sum_{i=3}^k L_i = m) \mathbb{P}(L_1 + L_2 = n - m)}{\mathbb{P}(\sum_{i=1}^k L_i = n)} = \\ &= \sum_{m=k-2}^{n-2} \min\left\{1, \frac{l}{n-m-1}\right\} \frac{\binom{m-1}{k-3} p^{k-2} (1-p)^{m-k+2} \cdot \binom{n-m-1}{1} p^2 (1-p)^{n-m-2}}{\binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}} = \\ &= \frac{l}{\binom{n-1}{k-1}} \cdot \sum_{m=k-2}^{n-l-1} \binom{m-1}{k-3} + \frac{1}{\binom{n-1}{k-1}} \sum_{m=n-l}^{n-2} (n-m-1) \cdot \binom{m-1}{k-3} = \\ &= l \cdot \frac{\binom{n-l-k+2}{k-2}}{\binom{n-1}{k-1}} + \frac{-(l-1) \binom{n-l}{k-2} + \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-l+1}{k-1}}{\binom{n-1}{k-1}} \leq l \cdot \frac{\binom{n-l-k+2}{k-2}}{\binom{n-1}{k-1}}. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőtlenséghez vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} -(l-1) \binom{n-l}{k-2} + \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-l+1}{k-1} &= -(l-1) \binom{n-l}{k-2} + \sum_{i=1}^{l-1} \binom{n-i}{k-2} \\ &\leq \sum_{i=1}^{l-1} \left(\binom{n-i}{k-2} - \binom{n-l}{k-2} \right) \leq 0. \end{aligned}$$

Folytatva az egyenlőtlenségeket:

$$\begin{aligned} l \cdot \frac{\binom{n-l-k+2}{k-2}}{\binom{n-1}{k-1}} &\sim l \cdot \frac{\frac{(n-l-k+2)^{k-2}}{(k-2)!}}{\frac{(n-1)^{k-1}}{(k-1)!}} = \\ &= l \cdot \frac{k-1}{n-1} \cdot \left(1 - \frac{l+k-1}{n-1}\right)^{k-2} \sim l \cdot \frac{k-1}{n-1} \cdot e^{-\frac{(l+k-1)(k-2)}{n-1}} \leq l \cdot \frac{k-1}{n-1}. \end{aligned}$$

Az első becsléshez a 2.5 lemmát használjuk, a másodikhoz a feltevést, hogy $l = o(n)$. □

A 3.3. tétel bizonyítása. Mint az imént láttuk, annak a feltételes valószínűsége, hogy bármely két L_i közelebb van l -nél egymáshoz legfeljebb $2l^{\frac{k-1}{n-1}}$, ezért $\mathbb{P}(\exists i, j : |L_i - L_j| \leq l \mid \sum L_i = n) \leq \binom{k}{2} 2l^{\frac{k-1}{n-1}}$ teljesül egy szokásos összeg-becsléses érvelés szerint. 3.4. lemma szerint kapjuk az állított eredményt, hiszen csak akkor lehetnek $(\frac{1}{3})^{1/l}$ vagy nagyobb abszolútértékű gyökök ha két hatványkitevő közel van. $\square$

Összevetve az 1.4-es tétellel látjuk, hogy a Markov-lánc sajátértékei a.m.b. egy körgyűrűben helyezkednek el.

4. A karakterisztikus polinom és q kapcsolata

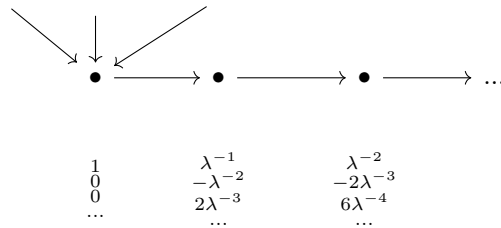
Ebben a fejezetben bebizonyítjuk a következő tételt az (1)-ben definiált $q(z)$ és a pure drift Markov-lánc áttérési mátrixának (ezt A -val jelöljük) karakterisztikus polinomja $p(z)$ között.

4.1. Tétel. *A $q(\lambda) = k$ egyenlet megoldásai multiplicitással megegyeznek a $p(\lambda) = 0$ egyenlet nemnulla gyökeivel.*

4.2. Lemma. *Minden $\lambda \neq 0$ sajátértéknek A -ban 1 a geometriai multiplicitása.*

Bizonyítás. Egy sajátvektor minden él-kezdőpontnak megfelelő indexben egyenlő koordinátával rendelkezik. Ezt az értéket normalizálhatjuk 1-é, most már a sajátvektort egyértelműen meghatározza a sajátértéke. Tehát az i . íven a sajátvektorban sorra $1, \lambda^{-1}, \dots, \lambda^{-L_i+1}$ -et látunk és pont ezt akartuk. $\square$

Következményként látjuk, hogy minden sajátértékhez pontosan egy Jordan-blokk tartozik az A mátrix normálalakjában. Most már beláthatjuk a 4.1 tételt.



3. ábra. A v_1, v_2, v_3 első három koordinátája egy íven.

A 4.1. tétel bizonyítása. Tudjuk, hogy $\lambda \neq 0$ sajátérték pontosan akkor, ha $q(\lambda) = k$. Most tegyük fel, hogy λ algebrai multiplicitása legalább $m - 1$ és $v_1, \dots, v_{m-1}$ a Jordan-blokkjához tartozó bázis egy része. Itt v_1 koordinátái $(1, \lambda^{-1}, \dots)$ minden íven, továbbá $v_i = \frac{d}{d\lambda} v_{i-1} / (i - 1) = \frac{d^{i-1}}{d\lambda^{i-1}} v_1 / (i - 1)!$ teljesül. Egyszerűen látszik ebből, hogy v_m koordinátája egy ív t . pontjában

$\binom{-t}{m-1}\lambda^{-t-m+1}$. Állítjuk, hogy λ multiplicitása p -ben legalább m pontosan akkor, ha q -ban is. Ez pontosan akkor áll fenn, ha létezik egy v_m , melyre

$$Av_m = \lambda v_m + v_{m-1} \quad (2)$$

teljesül, hiszen ez kiegészítené a Jordan-blokk bázisát. Az egyik irányhoz tegyük fel, hogy létezik v_m ami teljesíti (2)-t. Ismét látjuk, hogy v_m -nek is minden ív-kezdőpontban ugyanaz a koordinátája, hiszen a (2) szerint

$$v_m = \frac{Av_m - v_{m-1}}{\lambda}, \quad (3)$$

és a jobboldalon mindkét tag ilyen. v_{m-1} indukció szerint, Av_{m-1} -ben pedig az összes végpont átlaga szerepel az ív-kezdőpontokon: jelöljük ezeket a csúcsokat a_i -vel. Mivel $v_1 \in \ker(A - \lambda I)$, eltolhatjuk v_m -et, hogy az a_i -kben nulla legyen. Az A áttérési mátrix csupán eltolja a koordinátákat minden íven eggyel, tehát (3) szerint látjuk, hogy a t . és a $t+1$. csúcsában egy ívnek

$$(v_m)_{t+1} = \frac{(v_m)_t - \binom{-t}{m-2}\lambda^{-t-m+2}}{\lambda}$$

teljesül. Indukcióból látjuk, hogy v_m valóban teljesíti a rekurziót, mellyel megadtuk a $v_1, \dots, v_{m-1}$ vektorokat. Az (2) azonosságból kapunk egy-egy egyenletet az a_i ív-kezdőpontokon. Az A konstrukciójából

$$\frac{\sum_{i=1}^m \binom{-L_i+1}{m-1} \lambda^{-L_i-m+2}}{m} = \lambda(v_m)_0 + (v_{m-1})_0$$

adódik, ahol $(v_i)_0 = \delta_{1i}$ jelöli a közös értéket az ív-kezdőpontokon. A nevezőt egyszerűen kiszámolhatjuk:

$$\frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{d^{m-1}(zq)}{dz^{m-1}}(\lambda) \right) = \frac{1}{(m-1)!} \lambda \left(\frac{d^{m-1}q}{dz^{m-1}}(\lambda) \right) + \frac{1}{(m-1)!} (m-1) \left(\frac{d^{m-2}q}{dz^{m-2}}(\lambda) \right).$$

Az indukciós feltevés szerint a második tag eltűnik, hiszen $\lambda \neq 0$. Az első tagnak el kell tűnnie hogy teljesüljön az egyenlőség, tehát λ -nak legalább m a multiplicitása p -ben. A másik irány teljesen hasonlóan kapható meg az eddigi számolás megfordításával. Ha $q(\lambda) = k$ legalább m multiplicitással, akkor definiálhatjuk a v_i vektorokat mint előbb és megfelelő részleges bázist alkotnak A normálalakjához. $\square$

Vizsgálódásaink során nem láttunk nem nulla sajátértéknek egyáltalán 1-től különböző multiplicitást, innen az alábbi sejtés:

4.3. Sejtés. $p(z)$ nemnulla gyökeinek a multiplicitása 1 a.m.b.

5. A gyökök gyenge konvergenciája

Ebben a fejezetben polinomsorozatok gyökeinek konvergenciáját tanulmányozzuk.

5.1. Definíció. Legyen $p(x)$ egy n -edfokú polinom, a gyökei multiplicitással $r_1, r_2, \dots, r_n$. Defináljuk továbbá a

$$\mu_p = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \delta_{r_m}$$

Borel-mértéket, ahol δ_{a_m} az a_m -ben koncentrált Dirac-mérték.

5.2. Tétel. Legyen $p_n(x) = x^{d(n)} + a_1^{(n)} x^{d(n)-1} + \dots + a_{d(n)}^{(n)}$ egy polinomsorozat $r_1^{(n)}, \dots, r_{d(n)}^{(n)}$ gyökökkel, melyre teljesülnek a következő feltételek:

1. $|r_k^{(n)}| \leq 1$,
2. $\forall t \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{d(n)} \sum_1^{d(n)} |r_i^{(n)}| \rightarrow 1$,
3. $\forall r \in \mathbb{N} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d(n)} \sum_{j=1}^{d(n)} \left(r_j^{d(n)}\right)^r = 0$, ekvivalensen $\forall r \in \mathbb{N} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_r^{(n)} = 0$.

Ekkor a $\mu_n := \mu_{p_n}$ mértéksorozat gyengén konvergál az egységkör μ Haar-mértékéhez.

Bizonyítás. Jelölje D a zárt egységkörlapot $\mathbb{C}$ -ben, $C(D, \mathbb{C})$ a körlapon értelmezett komplex értékű folytonos függvények terét. A Stone-Weierstrass tételből tudjuk, hogy z -ben és $\bar{z}$ -ban felírt polinomok egy sűrű részhalmazát alkotják ennek a térnek, ezért a gyenge konvergenciához elegendő látni, hogy $\forall a, b \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int z^a \bar{z}^b d\mu_n = \int z^a \bar{z}^b d\mu.$$

μ_n, μ konjugálásra invariánsak, így elegendő az $a \geq b$ esetet vizsgálni. Világos, hogy

$$\int z^a \bar{z}^b d\mu = \delta_a^b.$$

Az $a = b$ esetben

$$\int (z\bar{z})^a d\mu_n = \frac{1}{d(n)} \sum_{k=1}^{d(n)} |r_k^{(n)}|^{(2a)},$$

ez pedig 1-hez tart a 2. feltétel szerint. Ha $a > b = 0$, akkor

$$\int z^a d\mu_n = \frac{1}{d(n)} \sum_{k=1}^{d(n)} \left(r_k^{(n)}\right)^a.$$

Ez a kifejezés pedig a Newton-Girard formulákból és a 3. feltételből könnyen láthatóan nullához tart. Végül ha $a > b > 0$, akkor

$$\int (z\bar{z})^b z^{a-b} d\mu_n = \int z^{a-b} d\mu_n + \int (1 - (z\bar{z})^b) z^{a-b} d\mu_n,$$

ahol $\int z^{a-b} d\mu_n = o(1)$. Ebből adódóan

$$\left| \int (1 - (z\bar{z})^b) z^{a-b} d\mu_n \right| \leq \int |1 - (z\bar{z})^b| |z^{a-b}| d\mu_n \leq \int |1 - (z\bar{z})^b| d\mu_n = o(1).$$

□

6. Az $q(z) = k$ egyenlet gyökeinek aszimptotikus eloszlása

A 3. fejezetben a gyökök abszolútértékeit becsültük alulról, pontosabban megmutattuk, hogy a gyökök abszolút értékei nagyobbak, mint egy alsó korlát aszimptotikusan majdnem biztosan. Ezeknél nem kellett, hogy a Markov-láncok ugyanabból a valószínűségi mezőből jöjjenek, csak az, hogy $\mathbb{P}_n(E_n) \rightarrow 1$, ahogy $n \rightarrow \infty$. Ettől eltérően ebben a fejezetben gyökök gyenge konvergenciáját fogjuk vizsgálni. Ehhez szükségünk lesz véletlen Markov-láncok egy sorozatára, illetve egy nagyobb valószínűségi mezőre, ahonnan ezek a Markov-láncok származtathatóak.

6.1. Definíció. Legyen $\hat{q}$ a következő, q -ból származtatott polinom: $\hat{q}(z) = kz^{L_1^*} - \sum_i z^{L_1^* - L_i}$, továbbá f a karakterisztikus polinom a 0 gyökök nélkül: $f(z) = \frac{p_A(z)}{z^h}$. A 4. fejezetből tudjuk, hogy ez a két polinom skalár szorzó erejéig megegyezik. Ezeknek a gyökeit nevezzük $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ -nek.

6.2. Megjegyzés. Tudjuk, hogy a 0 multiplicitása nagy. A 4. fejezetben beláttuk, hogy ez $L_k^* + L_{k-1}^* + \dots + L_2^* = n - L_1^*$, ami azt jelenti, hogy a legtöbb gyök 0, ami vezethetne ahhoz, hogy a karakterisztikus polinomhoz asszociált mértékek gyengén δ_0 -hoz tartanak.

6.3. Tétel. Legyenek k_v és n_v szigorú monoton növekvő sorozata egészeknek úgy, hogy valamely $\varepsilon > 0$ -ra $k_v^{2+\varepsilon} < n_v$ teljesül. Legyen továbbá Ω a $B(L_v, k_v)|_{n_v}$ terek szorzata, ahol $L_v = k_v/n_v$. Ekkor a következő állítások teljesülnek:

1. tetszőleges $r \in \mathbb{N}$ esetén 1 valószínűséggel $\frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^m |\lambda_i|^r \right) \rightarrow 1$, ahogy $v \rightarrow \infty$,
2. tetszőleges $r \in \mathbb{N}$ esetén 1 valószínűséggel $\frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i^r \right) \rightarrow 0$, ahogy $v \rightarrow \infty$.

6.4. Megjegyzés. Az állítás motivációja a Benjamini-Schramm konvergencia. A bizonyítás ötleteiből nem nehéz levezetni, hogy ez a sorozat (Benjamini-Schramm értelemben) konvergál az egyeneshez (a csúcsok $\mathbb{Z}$, az élek $\{(a, a+1) \mid a \in \mathbb{Z}\}$).

A következőkben a v indexeket elhagyjuk az egyszerűbb követhetőség kedvéért.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy mindegyik gyök abszolútértéke legfeljebb 1. A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alapján tudjuk, hogy

$$\left(\prod_i |\lambda_i|^r \right)^{\frac{1}{m}} \leq \frac{\sum_i |\lambda_i|^r}{m} \leq 1.$$

Tehát elegendő belátnunk, hogy 1 valószínűséggel $(\prod_i |\lambda_i|^r)^{\frac{1}{m}} \rightarrow 1$ teljesül. Ez igaz, mivel $\prod_i |\lambda_i|^r = \left(\frac{a}{k}\right)^r$, ahol a a konstans tag $\hat{q}$ -ből, ami pontosan $\#\{i \mid L_i = L_1^*\}$, ami egész. Így

$$\left(\prod_i |\lambda_i|^r \right)^{\frac{1}{m}} \geq \left(\frac{1}{k} \right)^{r/L_1^*} \geq \left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{r}{k}} \rightarrow 1.$$

Ezek az egyenlőtlenségek Ω -n nem csak majdnem mindig, hanem mindig teljesülnek.

Most jön a bizonyítás második része. Ehhez egy erősebb állítást látunk be:

6.5. Lemma.

$$\sum_i \lambda_i^r \rightarrow 0$$

tetszőleges $r \in \mathbb{N}$ esetén majdnem biztosan.

Bizonyítás. $\sum \lambda_i^r$ a G gráfbeli visszatérő séták súlyozott száma, ahol G a Markov-lánchoz tartozó súlyozott, irányított gráf. A visszatérő séta kezdőpontja csak olyan íven lehet, ami legalább r hosszú. Ezen pontok száma $\sum_{L_i \leq r} L_i$. Megmutatjuk, hogy minden u csúsból (az i -ik ív j -ik csúcsa) kiindulva a visszatérő séták súlyozott száma $1/k$. Ez igaz, mivel pont ennyi az $r-j$ hosszú séták száma u -ból a_i -be, ami pont az $1/k$ -szorosa az u -ból valamely végpontba menő $r-j-1$ hosszú sétáknak, ami legfeljebb 1. Tehát tudjuk, hogy

$$\sum \lambda_i^r \leq \frac{1}{k} \sum_{L_i \leq r} L_i \leq \frac{r}{k} \sum_{L_i \leq r} 1.$$

Tehát már csak azt kell megmutatni, hogy $\frac{1}{k} \sum_{L_i \leq r} 1 \rightarrow 0$ majdnem biztosan. Legyen $\varepsilon > 0$. Most $\mathbb{P}(\#\{i \mid L_i \leq r\} \geq k\varepsilon)$ valószínűséget fogjuk felülről becsülni. Legyen $l = \lceil k\varepsilon \rceil$. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\#\{i \mid L_i \leq r\} \geq k\varepsilon) &= \mathbb{P}(\#\{i \mid L_i \leq r\} \geq l) \leq \\ &\leq \binom{k}{l} \mathbb{P}(\forall i \in \{1, 2, \dots, l\} : L_i \leq r) \leq \\ &\leq \binom{k}{l} r^l \mathbb{P}(\forall i \in \{1, 2, \dots, l\} : L_i = 1). \end{aligned}$$

Az egyenlőtlenséghez azt használjuk, hogy $\{L_i\}$ és $\{L_{\sigma(i)}\}$ eloszlása azonos tetszőleges $\sigma \in S_k$ permutációra. A második egyenlőtlenség teljesül, mivel tetszőleges $r', r'' \in \{1, \dots, r\}^l$ esetén ha $r' \leq r''$, akkor $\mathbb{P}(\forall i \in \{1, 2, \dots, l\} : L_i = r''_i) \leq \mathbb{P}(\forall i \in \{1, 2, \dots, l\} : L_i = r'_i)$. Az utolsóhoz:

$$\mathbb{P}(\forall i \in \{1, 2, \dots, l\} : L_i = 1) = \frac{\binom{n+k-l-1}{k-l-1}}{\binom{n+k-1}{k-1}} = \frac{(k-1)(k-2) \cdots (k-l)}{(n+k-1)(n+k-2) \cdots (n+k-l)} \leq \left(\frac{k}{n}\right)^l.$$

Ebből látható, hogy

$$\mathbb{P}(\#\{i \mid L_i \leq r\} \geq k\varepsilon) \leq \left(\frac{k^2 r}{n}\right)^l \leq \left(\frac{k^2 r}{n}\right)^{k\varepsilon}$$

olyan nagy v -re, hogy $\frac{k^2 r}{n_v} < 1$ teljesüljön.

Ez a sorozat v -ben összegezzhető, így a Borel-Cantelli lemmából kapjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \left(\sum_{L_i \leq r} 1\right) \leq \varepsilon\right) = 1.$$

Ebből már adódik, hogy $\sum \lambda_i^r \rightarrow 0$ teljesül 1 valószínűséggel tetszőleges, rögzített r -re. $\square$

6.6. Tétel. Legyenek k_v , n_v szigorú monoton növekvő sorozatai egészeknek úgy, hogy $k_v^{2+\varepsilon} < n_v$ teljesüljön valamely $\varepsilon > 0$ -ra. Legyen Ω a $B(L_v, k_v)|_{n_v}$ terek szorzata, ahol $L_v = k_v/n_v$. Továbbá legyen μ_v a $B(L_v, k_v)|_{n_v}$ nem nulla sajátértékeihez asszociált tapasztalati mérték. Ekkor $\mu_v \xrightarrow{w} \mu$, ahol μ az egységkör Haar-mértéke.

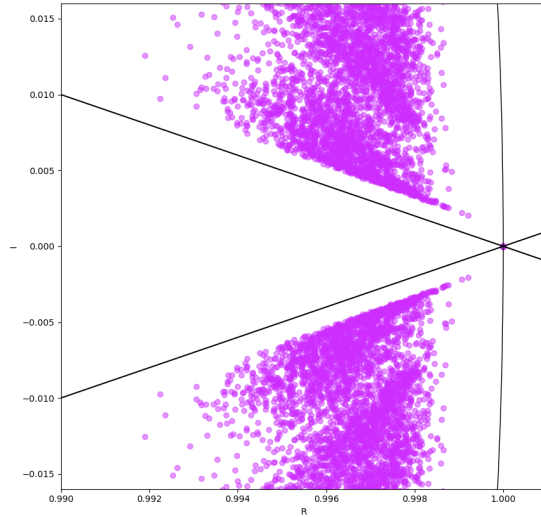
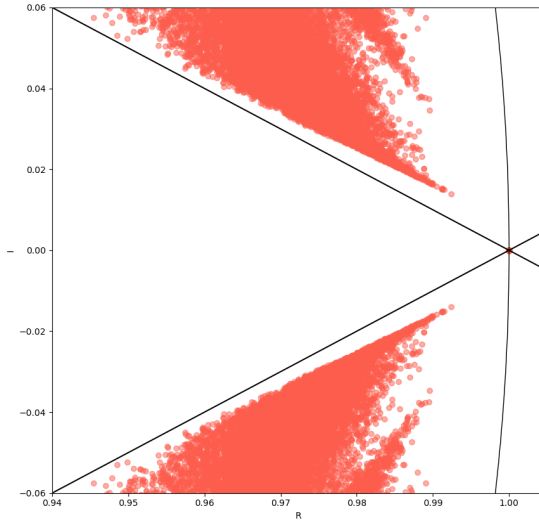
Bizonyítás. A 6.3. tétel alapján a 5.2. tétel feltételei majdnem biztosan teljesülnek. $\square$

6.7. Következmény. Legyen ϕ a $[0, 2\pi)$ egy intervalluma. Ekkor $\frac{\#\{\lambda \text{ gyök} \mid \arg(\lambda) \in \phi\}}{\#\{\lambda \text{ gyök}\}} \rightarrow \frac{|\phi|}{2\pi}$.

Bizonyítás. Legyen $U = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z) \in \phi\}$. Ekkor $\mu(\partial U) = 0$, így a gyenge konvergenciából kapjuk, hogy $\mu_v(U) \rightarrow \mu(U) = \frac{|\phi|}{2\pi}$. $\square$

7. Összegzés

Számos megválaszolatlan kérdés maradt. Bár láttuk ezeknek a Markov-láncoknak az aszimptotikus viselkedését, néhány lokális jelenséget nem tudtunk megmagyarázni. Ezek közül a leginkább szembeötlő, a sajátértékeket ábrázolva, egy nyílhegy forma kialakulása az 1 körül.



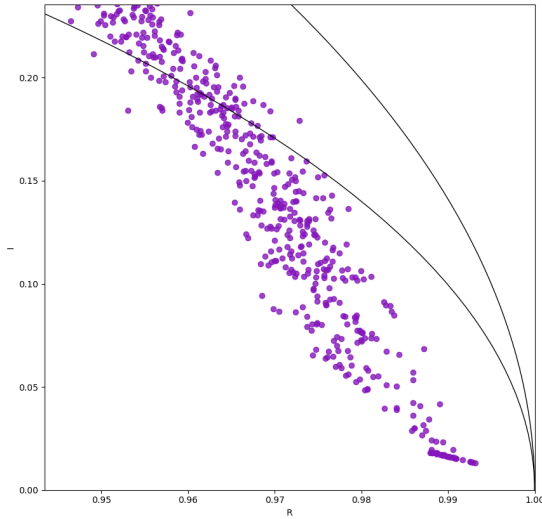
4. ábra. $n = 1000$, $k = 31$.

5. ábra. $n = 5000$, $k = 20$.

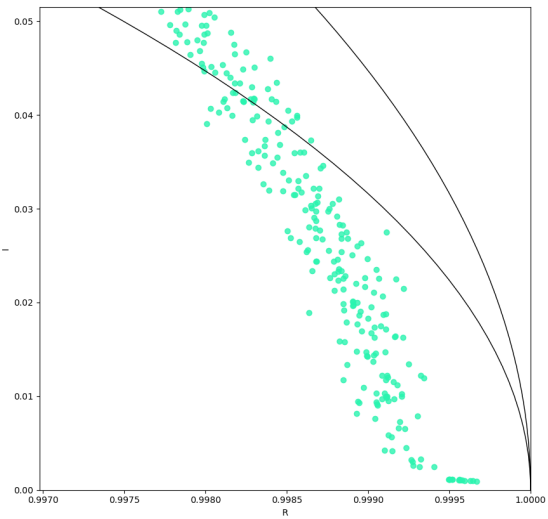
A nyílhegy két különböző esetben. Az egyenesek a valós tengelyt 1-ben metszik, ± 1 meredekséggel.

Egy további javítási lehetőség lehet a következő. Módosítsuk az íveken a determinisztikus részt úgy, hogy egy kis valószínűséggel léphessünk 'visszafelé' is, azaz valamely $0 \leq q \leq 1$ -re a mátrix $qA + (1-q)A^T$ alakú legyen. Amint [2]-ben tárgyalásra kerül, erről tényleg úgy tűnik, hogy további javítását adja a keverési sebességnek, de a 4. fejezetben levő szép tulajdonságokat elveszítjük, ami

a vizsgálatot még nehezebbé teszi. Azt reméltük, hogy ha a visszalépés helyett csak a megállás lehetőségét adjuk meg, azaz a Markov-lánc mátrixa $qA + (1-q)I$, akkor azzal már tudunk számolni. Megmutatható, hogy ahhoz, hogy ezzel a módosítással javítsunk, szükséges, hogy az eredeti lánc második legnagyobb abszolútértékű λ_2 sajátértéke a $|z - 0,5| = 0,5$ egyenletű körön kívül legyen, így valahogy ki akarjuk innen zárni a sajátértékeket. Szimulációs eredmények alapján az esetek egy kis részében esik λ_2 a nem megengedett tartományba. Azt is megsejtettük továbbá, hogy λ_2



6. ábra. $n = 1000$, $k = 31$, $r \approx 3,22\%$.



7. ábra. $n = 10000$, $k = 20$, $r \approx 1,23\%$.

A második legnagyobb sajátértékek kirajzolva 1 körül az egységkörrel és a tiltott határával.

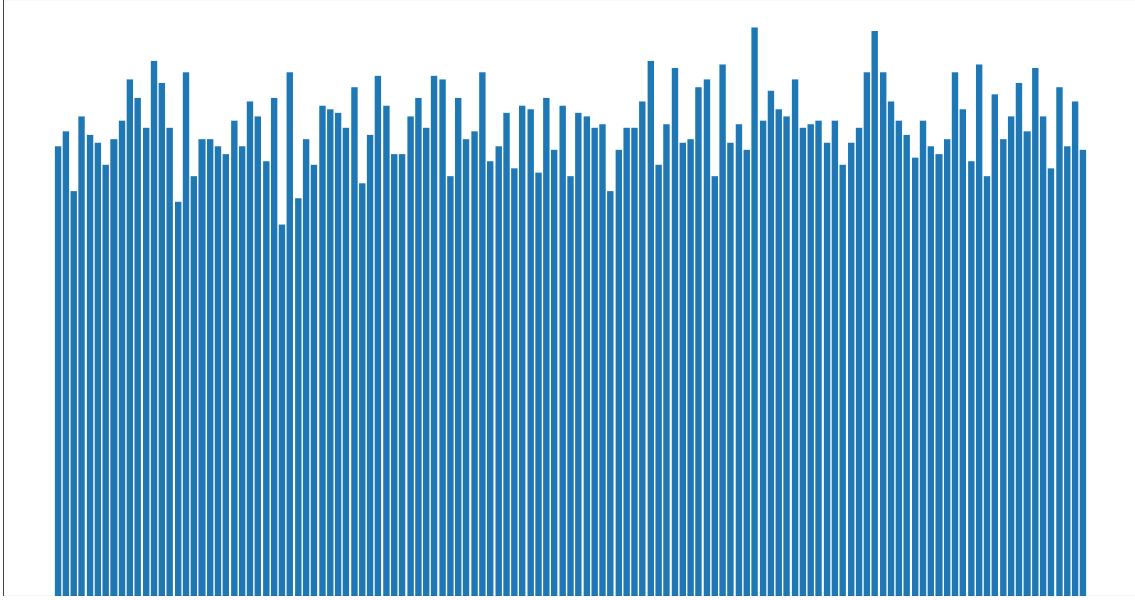
$$r = \frac{\#\{\lambda_2 \text{ belül van a körön}\}}{\#\{\lambda_2\}}$$

szögének eloszlása az egyenleteshez tart, bár ez lehet, hogy nem igaz (lásd a lenti ábrát). Viszont emiatt vizsgáltuk az összes sajátérték szögének eloszlását, amiről kiderült, hogy valóban egyenletes.

Köszönetnyilvánítás

Hálásak vagyunk témavezetőnknek, Gerencsér Baláznak az iránymutatásért.

Köszönjük továbbá a Rényi REU 2021 programjának kutatómunkánk támogatását. A második szerző részben az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-21-2 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával dolgozott.



8. ábra. A $\arg(\lambda_2)$ értékeket ábrázoló oszlopdiagramm 0-tól π -ig. $n = 10000$, $k = 20$

Hivatkozások

- [1] P. DIACONIS, S. HOLMES, AND R. M. NEAL, *Analysis of a nonreversible markov chain sampler*, Annals of Applied Probability, **10** (2000), pp. 726–752.
- [2] B. GERENCSÉR AND J. M. HENDRICKX, *Improved mixing rates of directed cycles by added connection*, Journal of Theoretical Probability, **32** (2019), pp. 684–701. Az arXivon elérhető (1509.01431) verzió számozását használtuk.