

Új eredmények a stabil hipergráf párosítás, a stabil többtermékes folyam és kapcsolódó problémák számítási bonyolultságáról

Csáji Gergely Kál

2022. június 29.

Ez a dolgozat az intézeti TDK-n bemutatott angol nyelvű pályamunka fordítása. Az eredeti dolgozathoz egy cikk is készült, melynek egy régebbi verziója elérhető a <http://bolyai.cs.elte.hu/egres/tr/egres-21-11.pdf> linken.

Kivonat

A dolgozatban a stabil párosítás feladat különböző általánosításainak számítási bonyolultságával foglalkozom. Ilyenek például a stabil hipergráf párosítás, illetve a többtermékes stabil folyam feladat, illetve a teljes mértékben gyakorlati motiváltságú Kórház-Rezidens allokáció házaspárokkal. A dolgozat fő eredményei, hogy ezen feladatok NP, illetve PPAD nehézségét bizonyítom még nagyon speciális esetekre is. Belátom például, hogy a többtermékes stabil folyam feladat még akkor is NP-teljes, ha csak 2 termék van, minden csúcs kifokának és befokának összege legfeljebb 3, minden forrás és terminál ugyanaz, és nincsenek termékfüggő kapacitások. Hasonlóan, bizonyítom a stabil hipergráf feladat törtverziójának PPAD-teljességét, még akkor is, ha minden hiperél legfeljebb 3 méretű és minden fok legfeljebb 3, ami egyben szépen karakterizálja azt is, hogy honnantól válik a probléma hatékonyan megoldhatóvá és honnantól lesz nehéz. Ezen eredményből aztán azt is bebizonyítom, hogy a Kórház-Rezidens allokáció házaspárokkal feladatban is nehéz stabil törtmegoldást találni, ami gyakorlati szempontból is igen releváns eredmény, hiszen algoritmus kiindulásnak egy tört stabil megoldást keres, ám ezek a módszerek így várhatóan nem tudnak hatékonyak lenni. Végezetül mutatok pár pozitív eredményt is, például adok hatékony algoritmusokat a stabil hipergráf párosítás feladat különféle speciális eseteire.

1. Bevezetés

A stabil párosítások elmélete a matematika, a számítástudomány és a közgazdaságtan egy rendkívül érdekes és számos alkalmazással rendelkező területe. Ezek segítségével olyan piacokat tudunk modellezni, ahol a résztvevő ügynököknek preferenciái vannak a többi résztvevőn. Például, az amerikai National

rezidens Matching Program (NRMP) esetén a résztvevők a kórházak és a rezidensek, utóbbiakat úgy szeretnénk beosztani, hogy elkerüljük az olyan kórház-rezidens párok létezését, ahol a rezidens is szívesebben menne az adott kórházba és a kórházban is tartózkodik a kórház számára kevésbé kedvező rezidens, hisz az ilyen párok destabilizálnák a piacot. Emellett persze számos egyéb alkalmazás is létezik, például a nemzetközi vesecseré programokban is használnak stabil párosítási mechanizmusokat.

A stabil párosítás elmélet alapfeladata a következőképpen fogalmazható meg. Adott egy páros gráf, amelynek egyik oldalát nevezzük fiúknak, a másikat lányoknak. Minden résztvevőnek van egy szigorú rendezése a másik oldal résztvevőin. Az előbbi példához hasonlóan itt is egy olyan párosítást keresünk, amire nézve nincs olyan fiú-lány pár, akik kölcsönösen jobban kedvelik egymást a párjuknál (ezeket hívjuk blokkoló pároknak). Egy ilyen párosítást stabil párosításnak hívunk. Gale és Shapley (a terület alapítói) megmutatták, hogy az említett feladatban mindig létezik stabil párosítás, és található is ilyen hatékonyan, még hozzá a páros gráf élszámában lineáris időben.

A terület az elmúlt 50 évben a matematika egy rendkívül gazdag és alkalmazásokkal teli részévé vált, és számtalan kutatás és cikk alapjául szolgált. Ennek következtében az alapfeladatnak számos általánosítását is vizsgálták. Ilyen általánosítások például, hogy a résztvevőknek megengedek kapacitásokat, vagy a rendezéseknek megengedem, hogy tartalmazzanak döntetleneket is, vagy akár (mint a házaspárok esetében is lesz) megengedek együttes preferenciákat is. Egy másik fajta kiterjesztési lehetőség, hogy a mögöttes struktúrát relaxáljuk, azaz páros gráf helyett tetszőleges gráfokat, vagy akár hipergráfokat is megengedünk, így kapjuk a stabil hipergráf párosítás feladatot. Például diákokat szeretnénk a preferenciák alapján szobákba vagy csapatokba osztani.

Egy kissé absztraktabb, de szintén gyakorlati szempontból is releváns általánosítás, ha gráfok helyett irányított hálózatokat vizsgálunk. Ezek olyan piacok modellezésére alkalmasak, ahol nem párosítani akarjuk a résztvevőket, hanem az ügynökök valamilyen termékekkel kereskednek. Azaz az ügynökök itt egy irányított gráf csúcsainak feleltethetők meg, a rendezéseik pedig az alapján határozhatók meg, hogy egy adott terméket kitől vásárolnak meg/kinek adnak el szívesebben. Több termék esetén itt már maguknak az éleknek is nagyobb szerep tulajdonítható, melyek itt most például az ügynökök közt a termékeket szállító szolgáltatónak felelnek meg, hisz neki is lehetnek preferenciái például azon, hogy milyen termékeket szállít. A feladat ezen általánosítását nevezzük a többtermékes stabil folyam feladatnak.

A legtöbb ilyen jellegű feladatban sajnos NP-nehéz stabil megoldásokat találni, s ebből következően gyakran nem is létezik ilyen. Viszont, a terület egy nagyon mély, gyönyörű tételének köszönhetően stabil törtmegoldások már majdnem mindig léteznek. Ezen törtmegoldásoknak is tulajdonítható számos alkalmazás, például ha az ügynökök több kapcsolatban is részt vehetnek, valamilyen időbeosztás szerint, vagy akár nagy piacok jellemzése, ahol a tört értékek azt jellemzik, hogy adott különböző típusú ügynökök közt milyen arányban jön létre egy adott kapcsolat. Illetve, egy másik ígéretes alkalmazása ezeknek, hogy a kikerekítésük segítségével tudunk találni úgynevezett közel-megengedett stabil

megoldásokat. A közel megengedett itt azt takarja, hogy a résztvevők (pl kórházak, egyetemek) kapacitásait módosíthatjuk egy kevéssel annak érdekében, hogy már létezzen stabil megoldás. Például a Kórház-Rezidens allokáció házaspárokkal feladat (röviden HRC) esetén Nguyen és Vohra [16] megmutatta, hogy ha a kórházak kapacitásait legfeljebb 2-vel módosíthatjuk, akkor már garantáltan létezik stabil megoldás. Az ilyeneket találó algoritmusok viszont majdnem mindig egy stabil törtmegoldás keresésével kezdenek, majd azt kerekítik ki ügyesen. Sajnos, a dolgozat egyik új eredményének következtében, miszerint a HRC feladatban PPAD-nehéz stabil törtmegoldást találni, ilyen típusú algoritmusok valószínűleg nem tudnak hatékonyak lenni, tehát valamilyen teljesen új megközelítésre van szükség, mely mellesleg egy másik érdekes kutatási feladat.

1.1. Kapcsolódó irodalom

A PPAD osztályt Papadimitriou vezette be 1994-ben. [17]. Ez egy olyan keresési problémákat tartalmazó osztály, ahol mindig van megoldás, aminek a létezése párossági érveléssel alapszik egy irányított gráfban. Az általános feltevés szerint a PPAD-teljes problémák nem oldhatók meg hatékonyan.

A Scarf Lemma egy gyönyörű és mély fixpont tétel, amit Scarf bizonyított be 1967-ben [20]. A bizonyítása ráadásul algoritmikus volt, és erre az algoritmusra mint Scarf algoritmus fogunk hivatkozni.

A stabil párosításokat Gale és Shapley vezette be 1962-ben [7].

Aharoni és Fleiner [1] voltak azok, akik először vizsgálták a stabil párosítás általánosítását hipergráfokra. Bebizonyították a Scarf lemma használatával, hogy mindig létezik egy stabil törtpárosítás. Kintali et al. [10] bebizonyították, hogy a probléma PPAD-teljes. Később Ishizuka és Kamiyama [9] megmutatták, hogy PPAD-teljes marad még akkor is, hogyha a maximális foksám a hipergráfban 3. Azt is belátták, hogy abban az esetben, amikor a maximum foksám 2, a probléma megoldható lesz polinomiális idő alatt.

A kórház-rezidens allokáció házaspárokkal feladatot (HRC) szintén sok szerző tanulmányozta, például Roth [19], Mcdermid et al. [14], Biró et al [2], [3], illetve Nguyen és Vohra [16]. Biró et al. bebizonyították, hogy annak az eldöntése, hogy létezik-e stabil allokáció egy HRC feladatban NP-teljes, még akkor is, ha a preferencia listák legfeljebb kettő hosszúak és minden kórház kapacitása egy. Később 2016-ban [3] azt is belátták, hogy egy stabil törtpárosítás megtalálása visszavezethető egy domináns vektor megtalálására egy Scarf lemma adott példányában.

A stabil család feladatot Knuth vezette be [12] és később Ng és Hirschberg [15], valamint Huang is vizsgálta [8], akik bebizonyították, hogy a feladat NP-teljes, még megszorított preferenciák esetében is.

A stabil folyamatok bevezetése Fleiner [6] nevéhez köthető, aki a stabil allokáció feladatot visszavezetve egy polinomiális algoritmust is adott rá. Nguyen et al. [13] megmutatták, hogy még általánosabb folyam függvények esetén is létezik mindig stabil folyam a Scarf lemma-ra visszavezetve.

Végül, a többtermékes stabil feladatot Király és Pap [11] vezette be a stabil folyam feladat kiterjesztéseként. Itt már az élekek is lesz rendezése, ami a

szállító cég preferenciájának felel meg. Azt is megmutatták, hogy mindig létezik tört stabil többtermékes folyam, de PPAD-nehéz találni ilyet. Később Cseh et al. [5] belátták, hogy az egészértékű stabil megoldás létezésének eldöntése pedig NP-teljes.

1.2. Eredmények

Ebben a dolgozatban számos stabil párosítási probléma PPAD illetve NP nehézségét bizonyítom, illetve néhány hatékony algoritmust is adok speciális esetekre. Például belátom, hogy a stabil hipergráf párosításban PPAD-teljes tört stabil megoldást találni, még akkor is ha minden hiperél mérete és minden fok is legfeljebb 3. Bármelyik feltételt ezek közül tovább relaxálva a feladat megoldhatóvá válik, az egyik esetben azért, mert a hipergráf gráf lesz, a másikban pedig Ishizuka és Kamiyama [9] algoritmusa talál egy megoldást. Azonban megmutatom, hogy egész megoldást találni még kettő fokszám esetén is NP nehéz.

A stabil többtermékes folyam feladattal kapcsolatban is mutatok új komplexitási eredményeket. Király és Pap, a stabil többtermékes folyam feladat tört megoldásának létezésére adott bizonyítása egy poliéder tarka csúcsának létezésén alapszik. De mivel ennek a poliédernek exponenciálisan sok lapja volt, így nagyobb hálózatokban reménytelennek tűnt egy tört stabil folyam találása. Ebben a dolgozatban egy új bizonyítást adok erre az eredményre, mely visszavezeti a feladatot a Scarf lemma-ra. Továbbá a redukció polinomiális és csak egy lineáris méretű mátrixot használ (a termékek, csúcsok és élek számában), ami egyrészt a PPAD-beli tartalmazást is bizonyítja, másrészt egy jóval hatékonyabb algoritmust is eredményez. Ezután a többtermékes stabil folyam feladat számos nagyon szigorú speciális esetének NP; illetve PPAD- nehézségét is bizonyítom, mellyel több nyitott kérdést is megválaszolok. Például megmutatom, hogy az egész megoldás találása már 2 termék és legfeljebb 3 kifok plusz befok esetén is NP-nehéz.

Egy gyakorlati szempontból is releváns eredmény, hogy bebizonyítom a HRC és a stabil család feladat PPAD-teljességét. Ahogy korábban is említettem, mivel a közel elfogadható stabil megoldást találó algoritmusok egy tört stabil megoldás keresésével szoktak kezdeni, ezért ezen eredmény következményeként az ilyen módszerek valószínűleg nem tudnak hatékonyak lenni.

Dolgozatom végén pedig mutatok pár polinomiális algoritmust is a stabil hipergráf párosítás feladat speciális eseteire.

1.3. A dolgozat felépítése

A dolgozat további részének a tematikája a következő: a 2. fejezetben az alapvető fogalmakat és definíciókat ismeretem. A 3. fejezetben egy új bizonyítást mutatok a tört stabil többtermékes folyam létezésére azzal, hogy visszavezetem a problémát Scarf Lemma-ra SCARF. A 4. fejezetben bebizonyítom számos stabil tört párosítási problémáról hogy PPAD-nehéz. Ezután az 5. fejezetben megmutatom a stabil többtermékes folyam NP-teljességét már 2 termék

esetén is. A 6. fejezetben tárgyalom a stabil hipergráf párosítás néhány speciális esetére adott algoritmusomat.

2. Elméleti alapok

Először ismertetünk egy nagyon fontos Lemmát, mely rengeteg tört stabil párosítással kapcsolatos tétel hátterében áll.

2.1. Lemma (Scarf [20]). *Legyen Q egy $n \times m$ nemnegatív mátrix, és tegyük fel, hogy Q minden sora tartalmaz nemnulla elemet. Legyen továbbá $q \in \mathbf{R}_+^n$ egy nemnegatív vektor. Tegyük fel, hogy Q minden i sorának van egy $>_i$ szigorú rendezése azon j oszlopokon, amikre $Q_{ij} > 0$. Ekkor a $\{Qx \leq q, x \geq 0\}$ poliédernek létezik olyan extrém pontja, ami minden oszlopot dominál valamelyik sorban, ahol egy $x \geq 0$ vektor akkor dominál egy j oszlopot egy i sorban, ha $Q_i x = q_i$ és $j \leq_i k$ minden olyan $k \in [m]$ -re, amire $Q_{ik} x_k > 0$.*

Egy, a lemmában szereplő, minden oszlopot domináló x pontot *domináns pontnak* nevezzük.

A Lemmához tartozó keresési feladat:

SCARF

Input: Egy Q nemnegatív mátrix és q nemnegatív vektor, valamint minden sorra egy $>_i$ szigorú rendezés a nemnulla elemeken.

Output: Egy olyan $x \in \mathbb{R}^m$ extrém pontja $\{Qx \leq q, x \geq 0\}$ -nak, ami minden oszlopot dominál.

A PPAD bonyolultsági osztály

A PPAD bonyolultsági osztályt Papadimitriou vezette be [17]. Ez az osztály olyan keresési feladatokat tartalmaz, melyekben a keresett objektum létezése garantált. Egy híres PPAD-teljes probléma például Nash-egyensúly keresése kétszemélyes játékokban. Szintén PPAD-teljes a fent definiált SCARF keresési feladat is. Az általános feltételezés az, hogy a PPAD-nehéz problémákra nincs hatékony algoritmus.

A PPAD-nehéz problémák közti visszavezetéshez két olyan polinom időben számolható f és g függvényt kell találnunk, amire f az A feladat egy I_A példányához hozzárendeli a B feladat egy I_B példányát, g pedig az $I_B = f(I_A)$ feladat egy y megoldásából kiszámol az I_A feladat egy $g(y, I_A)$ megengedett megoldását. Hisz ekkor, ha a B problémára létezne egy hatékony algoritmus, ami talál egy megoldást, akkor ezen két függvény segítségével az A problémára is tudnánk gyártani egyet az f és g függvények segítségével.

A stabil hipergráf párosítás feladat

A stabil hipergráf párosítás feladatban adott egy $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráf, minden $v \in V$ csúcsra egy $k_v \in \mathbb{Z}$ kapacitás és egy $>_v$ szigorú rendezés a v -t tartalmazó hiperéleken. Azt, hogy egy v csúcs számára egy e hiperél jobb, mint egy f hiperél azt úgy fogjuk jelölni, hogy $e >_v f$.

2.2. Definíció. Egy $M : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvény egy (megengedhető) törtpárosítás, ha $\sum_{e:v \in e} M(e) \leq k_v$ minden $v \in V$ -re.

2.3. Definíció. Egy M törtpárosítás esetén egy f hiperél blokkoló, ha $M(f) < k_f$ és minden $v \in f$ -re, vagy v telítetlen M -ben vagy létezik egy $f_v \in \mathcal{E}$ hiperél, amire $v \in f_v$, $M(f_v) > 0$ és $f_v <_v f$.

2.4. Definíció. Az M törtpárosítás *stabil*, ha nincs rá nézve blokkoló hiperél. Szemléletesen, semelyik hiperél (koalíció) sem olyan, hogy minden tagja hajlandó lenne nagyobb arányban részt venni benne, mert telítetlen vagy számára rosszabb koalíciókba is be van osztva.

Definiálhatunk egy keresési problémát a következőképp:

F-SHM

Input: Egy $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráf $k_v \in \mathbb{Z}$ kapacitásokkal és $>_v$ rendezésekkel

Output: Egy M stabil törtpárosítás.

Az F-SHM itt a fractional stabil hipergráf matching rövidítéséből jön. Kintali és szerzőtársai [10] bebizonyították, hogy mindig létezik stabil törtpárosítás, azonban találni egyet PPAD-teljes.

2.5. Tétel (Kintali et al.). *Az F-SHM probléma PPAD-teljes csupa 1 kapacitások esetén is.*

A stabil család feladat

A következő feladat amivel a dolgozat foglalkozik az úgynevezett stabil család feladat. Ez valójában a stabil hipergráf párosítás egy sokat vizsgált speciális esete, méghozzá amikor minden kapacitás 1, illetve a hipergráf 3-uniform és 3-osztályú. Más nézőpontból nézve ez akár a stabil párosítás feladat 3-dimenziós általánosításaként is felfogható. Az elnevezés onnan származik, hogy a szakirodalomban a 3 osztályt férfiaknak, nőknek és kutyáknak szokták interpretálni. Ismert, hogy az egész stabil megoldás létezésének eldöntése NP-teljes [15], míg (mivel az előző probléma speciális esete) stabil törtmegoldás mindig van. A dolgozatban megmutatjuk, hogy a feladat tört verziója is nehéz, azaz, hogy PPAD-teljes stabil törtmegoldást találni.

Az ehhez tartozó keresési feladat:

F-SFP

Input: Egy I stabil család feladat.

Output: Egy M stabil törtpárosítás.

Kórház-rezidens allokáció párokkal

Egy szép, gyakorlati alkalmazásból fakadó általánosítás az úgynevezett Kórház-rezidens allokáció párokkal feladat, vagy röviden HRC (kórház-rezidens-pár probléma). Itt egy kétoldali piacunk van, egyik oldalon a kórházakkal, melyek halmazát $\mathcal{H}$ -val jelöljük, másik oldalon pedig a rezidensekkel. A rezidensek között

azonban lehetnek házaspárok is, akiknek együttes preferenciái vannak. Az egyéni rezidensek halmazát $\mathcal{D}$ -vel, a házaspárok halmazát $\mathcal{C}$ -vel jelöljük. Minden h kórháznak van egy k_h kapacitása, és egy $>_h$ szigorú rendezése a rezidenseken (azaz az egyéni rezidensek és a házaspárok tagjainak unióján, vagy legalábbis ezek egy részhalmazán). Minden d egyéni rezidensnek van egy szigorú preferenciája a kórházakon (vagy azok egy részhalmazán), és minden c párnak van egy szigorú preferenciája a kórház-párokon (azaz $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ -n). Ha egy kórház rajta van egy rezidens preferencialistáján, azt úgy tekintjük, hogy a rezidens elfogadhatónak tartja az adott kórházat, hasonlóan fordítva is. Mindig feltesszük, hogy ez az elfogadási reláció szimmetrikus, azaz, ha egy kórház (vagy kórház pár) elfogadható egy rezidensnek (párnak), akkor a rezidens (pár) is elfogadható a kórháznak (a kórház pár minden tagjának). Azt is feltesszük, hogy minden résztvevő számára minden elfogadható koalíció jobb annál, mintha egyedül maradna, és minden nem elfogadható rosszabb.

Ha a kórházak, rezidensek, illetve párok preferencialistái rendre legfeljebb α , β , γ hosszúak, abban az esetben a (α, β, γ) -HRC feladatról beszélünk. Ha nincsenek egyéni rezidensek, akkor csak simán (α, γ) -HRC-vel jelöljük.

A stabilitás definiálásához először azt vizsgáljuk meg, hogy ennél a feladatnál hogy nézhet ki egy blokkoló koalíció. Egy adott M hozzárendelés esetén $M(h)$ -vel jelöljük az M szerint h -hoz kerülő rezidensek halmazát, $M(d)$, illetve $M(c)$ -vel pedig azt a kórházat/ kórházpárt, ahova a d rezidens, illetve c pár került, ha van ilyen, különben $\emptyset$.

2.6. Definíció. Legyen M egy HRC párosítás (azaz a rezidensek és párok valamilyen allokációja a kórházakhoz).

1. Egy (d, h) (egyéni) rezidens-kórház pár *blokkol*, ha d jobban kedveli h -t, mint $M(d)$ -t és h vagy telítetlen (azaz $|M(h)| < k_h$), vagy van egy olyan r rezidens h -nál, aki rosszabb h -nak, mint d .
2. Egy (c, h, h') koalíció *blokkol*, ahol $h \neq h'$ és $c = (c^f, c^m)$, ha $(h, h') >_c M(c)$, h telítetlen, vagy van egy olyan r rezidens h -nál, aki legfeljebb olyan jó, mint c^f (azért nem szigorúan, mert előfordulhat, hogy c^f már eleve h -nál van) illetve h' is vagy telítetlen, vagy van egy legalább olyan r' rezidens nála, mint c^m .
3. Végül, egy (c, h, h) koalíció *blokkol* ha $(h, h) >_c M(c)$ illetve c^f és c^m is benne van az $M(h) \cup \{c^f\} \cup \{c^m\}$ halmaz h számára legjobb k_h darab rezidensében (azaz h mindettejüket felvenné, ha odamennének).

2.7. Definíció. Egy M hozzárendelés *stabil* ha megengedhető (azaz kórház minden kórház legfeljebb k_h embert vesz fel, és minden ember legfeljebb egy helyre van felvéve) valamint nincs M -re nézve blokkoló koalíció.

Ebben a dolgozatban főleg a feladat törtverziójával fogunk foglalkozni. Azaz olyan $x_{(d,h)}$ és $x_{(c,h,h')}$ súlyokat fogunk keresni a koalíciókra, amire egyrészt teljesülnek az alábbi kapacitási feltételek.

$$\begin{aligned}
\sum_{d \in D} x_{(d,h)} + \sum_{c \in C} \sum_{h' \neq h} (x_{(c,h,h')} + x_{(c,h',h)}) + \sum_{c \in C} 2x_{(c,h,h)} &\leq k_h \quad \forall h \in \mathcal{H} \\
\sum_{h \in \mathcal{H}} x_{(d,h)} &\leq 1 \quad \forall d \in D \\
\sum_{h,h' \in \mathcal{H}} x_{(c,h,h')} &\leq 1 \quad \forall c \in C
\end{aligned}$$

Törtpárosítások esetén a blokkolás definícióját is szükséges némileg módosítanunk. Az egyszerűség kedvéért minden kórház preferencialistáját az egyes koalíciókon (ami már nem egy szigorú rendezés, hisz lehet több olyan koalíció is, ahol h ugyanazt a rezidentet kapja) kiterjesztjük a következőképpen. Egyrészt továbbra is megtartjuk azt a rendezést, hogy ha egy kórház egy koalícióban jobb rezidentet kap, akkor azt szigorúan jobban kedveli. Ha viszont ugyanazt a rezidentet kapja, akkor ez a rezidens egy pár tagja kell, hogy legyen és a döntetlent úgy törjük fel, hogy a kórház számára is az a koalíció lesz jobb a kettő közül, ami az adott párnak jobb. (azaz $(c, h, h') >_h (c, h, h'')$ akkor és csak akkor, ha $(h, h') >_c (h, h'')$). Mostmár jóval egyszerűbben definiálhatjuk a blokkolás fogalmát.

2.8. Definíció. Legyen x egy HRC törtpárosítás. Egy (d, h) , (c, h, h') vagy (c, h, h) *blokkolja* x -et, ha a koalíció minden tagja vagy telítetlen x által, vagy van egy olyan koalíció, ami x -ben pozitív súlyú, de kevésbé kedveli. Az x törtpárosítás *stabil*, ha nincs rá nézve blokkoló koalíció.

Bíró Péter és szerzőtársai [3] belátták, hogy a HRC feladat polinomiálisan visszavezethető a SCARF-ra, aminek következtében mindig létezik stabil törtmegoldás.

2.9. Lemma (Bíró et al. [3]). *Az F-HRC feladat polinomiálisan visszavezethető a SCARF-ra, így PPAD-ben van.*

Ismét csak definiálhatunk egy keresési problémát, amit majd vizsgálni fogunk.

F-HRC

Input: A HRC feladat egy I példánya.

Output: Egy stabil törtmegoldás x .

A többtermékes stabil folyam feladat

Az utolsó probléma, amivel foglalkozni fogunk a többtermékes stabil folyam feladat. Itt most egy $D = (V, E)$ irányított gráfunk van, továbbá minden $i = 1, \dots, n$ termékre adottak valamilyen s_i források és t_i terminálok. Minden $v \in V$ csúcsra és minden $j \in [n]$ termékre adottak $>_v^j$ szigorú rendezések a v -re illeszkedő éleken. (Ezeket a rendezéseket akár tovább oszthatnánk két részre a kimenő és a bemenő élekre, de ennek nem lesz jelentősége). Azaz minden

ügynök minden termékre rangsorolja, hogy kikkel kereskedik az adott termékkel szívesebben. Az $e \in E$ élekre adottak egyrészt $c(e)$ és $c^j(e)$ kapacitások, minden $j \in [n]$ -re, ahol $c(e)$ az él összkapacitása, $c^j(e)$ pedig a j -edik termék szállítására vonatkozó kapacitása, illetve $>_e$ szigorú rendezések a termékeken, ez felel meg az élhez tartozó szállító ügynök preferenciáinak.

Egy $f = (f^1, \dots, f^n) : E^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezést *többtermékes folyam*nak nevezünk, ha minden $i \in [n]$ -re teljesül, hogy minden $v \neq s_i, t_i$ -re $\delta^j(v) = \rho^j(v)$, ahol $\delta^j(v)$ a $\sum_{vu \in E} f^j(uv)$, és $\rho^j(v) = \sum_{uv \in E} f^j(uv)$ a kimenő, illetve bemenő éleken vett összértékek. Ha továbbá minden e élre és minden j termékre teljesül, hogy $0 \leq f^j(e) \leq c^j(e)$, illetve $\sum_{j=1}^n f^j(e) \leq c(e)$, akkor a többtermékes folyam *megengedett*.

A blokkolás definíciója most a következő lesz.g

2.10. Definíció. Egy $W = (v_1, a_1, \dots, v_k)$ séta *blokkoló a j termékre nézve*, ha a következő 4 feltétel mindegyike teljesül:

1. $f^j(a_i) < c^j(a_i)$, $i = 1, \dots, k$,
2. $v_1 = s^j$ vagy létezik olyan $u \in V$ amire $f^j(v_1u) > 0$ és $v_1u <_{v_1}^j v_1v_2$, azaz a kezdőpont vagy a forrás, aki egyszerűen csak tud többet küldeni a termékből, vagy ha nem, akkor van egy olyan él amerre v_1 küld folyamot, de kevésbé kedveli azt a partnert, mint v_2 -t,
3. hasonlóan $v_k = t^j$ vagy van olyan $w \in V$, hogy $f^j(wv_k) > 0$ és $wv_k <_{v_k}^j v_{k-1}v_k$,
4. Ha $\sum_{l=1}^n f^l(a_i) = c(a_i)$, akkor létezik olyan $j' \neq j$ termék, amire $f^{j'}(a_i) > 0$ és $j' <_{a_i} j$, tehát ha az út egy éle telített, akkor a transzporter ügynök számára is lennie kell olyan terméknek amiből már szállít valamennyit, de kevésbé kedveli, mint j -t,

2.11. Definíció. Egy többtermékes folyam *stabil*, ha megengedhető és semelyik termékre nézve sem létezik rá nézve blokkoló séta.

A stabil többtermékes folyam feladattal kapcsolatban az alábbi keresési, illetve eldöntési problémát fogjuk vizsgálni.

SMF

Input: A többtermékes stabil folyam feladat egy I példánya.

Output: Egy tört stabil többtermékes folyam f .

ISMF

Input: A többtermékes stabil folyam feladat egy I példánya.

Kérdés: Létezik-e egész többtermékes stabil folyam?

Ha a termékek száma valamilyen fix konstans k , akkor a két megfelelő feladatot k -SMF illetve k -ISMF-el jelöljük.

3. Az SMF probléma visszavezetése a SCARF-ra

Ebben a szekcióban mutatjuk be a legtöbb eredmény alapjául szolgáló visszavezetést, mely a többtermékes stabil folyam feladat törtváltozatát vezeti vissza a SCARF feladatra. Ami már ismert volt Király és Pap cikke alapján [11], hogy a többtermékes stabil folyam feladatnak mindig létezik tört stabil megoldása, az viszont nem volt ismert, hogy a feladat PPAD-ben van. A dolgozat visszavezetése a létezés mellett ezt is bizonyítani fogja.

3.1. Tétel. *Az SMF feladat polinomiális időben visszavezethető a SCARF-ra, következésképpen a feladat PPAD-ben van és mindig létezik megoldása.*

Bizonyítás. A visszavezetés fő eleme, hogy konstruálunk egy mátrixot (illusztráció a 1 ábrán), majd megmutatjuk, hogy a mátrix által definiált poliéderre alkalmazva a Scarf Lemmát, egy így talált domináns megoldásból tudunk konstruálni egy stabil többtermékes folyamat az eredeti feladatban. Vegyük az SMF feladat egy I példányát. A fő nehézség az, hogy nem vehetjük az irányított gráf incidenciamátrixát Q -ba, mert a Scarf Lemma feltételeihez szükséges, hogy a mátrix elemei nemnegatívak legyenek. Legyen Q a következő mátrix: Q -nak $n|E| + 2n(|V| - 2)$ oszlopa és $(n + 1)|E| + 2n(|V| - 2)$ sora van. Az első $n|E|$ oszlop az e_i^j , $i = 1, \dots, |E|$, $j = 1, \dots, n$ él-termék párokhoz tartozik az ezekhez tartozó értékekből fogjuk majd megkapni az $f^j(e)$ folyamértékeket. A maradék $2n|V|$ oszlopokat $v_i^{j,in}$, $i = 1, \dots, |V|$, $j = 1, \dots, n$ illetve $v_i^{j,out}$, $i = 1, \dots, |V|$, $j = 1, \dots, n$ címkékkel indexeljük, ezek segítségével tudjuk majd garantálni a $\delta^j(v) = \rho^j(v)$ folyamfeltételek teljesülését. A sorok a következők lesznek:

1. Minden $e_i \in E$ élre veszünk egy e_i -vel indexelt sort. Minden sorban n darab 1-es van, még hozzá $Q_{e_i, e_i^j} = 1$ minden $j \in [n]$ -re, a sor többi eleme 0. A jobboldali q vektor megfelelő elemei pedig a $c(e_i)$ kapacitások. Végül az e_i sor rendezését az e_i él rendezéséből kapjuk a termékeken. Azaz az e_i^j oszlop jobb, mint az $e_i^{j'}$ akkor és csak akkor, ha $j >_{e_i} j'$.
2. A következő $n|E|$ sort úgy kapjuk, hogy minden e_i^j , $e_i \in E, j \in [n]$ -re veszek egy sort, amikben csak egy darab nemnulla elem lesz, mégpedig a $Q_{e_i^j, e_i^j} = 1$. A jobboldali korlátvektor megfelelő elemei most a $c(e_i^j)$ kapacitások lesznek. Rendezésre most nyilvánvalóan nincs szükség, hisz egy nemnulla elem van.
3. Ezentúl minden $j \in [n]$ -re és $v_i \in V \setminus \{s^j, t^j\}$ -re van egy $v_i^{j,in}$ -vel indexelt sor is. A sor elemeit úgy definiáljuk, hogy az első $n|E|$ oszlop esetén $Q_{v_i^{j,in}, e^{j'}} = 1$ akkor és csak akkor, ha $e = uv_i$ valamilyen $u \in V$ csúcsra és $j = j'$, különben 0. Továbbá, $Q_{v_i^{j,in}, v_i^{j,in}} = 1$, illetve $Q_{v_i^{j,in}, v_i^{j,out}} = 1$, a sor minden más eleme 0. A jobboldali vektor megfelelő elemét egy olyan $q(v_i)$ számnak választjuk, amire teljesül, hogy $x_{v_i^{j,in}}$ és $x_{v_i^{j,out}}$ legalább az egyik koordinátának szigorúan pozitívnak kell lennie tetszőleges olyan

	E^1	E^2	E^n	$V^{1,in}V^{1,out}$		$V^{n,in}V^{n,out}$					
E	I	I		I	0				$\leq$	$c(E)$	
E^1	I	0		0						$c^1(E)$	
E^n	0	0		I						$c^n(E)$	
$V^{1,in}$	A^{in}	0		0	I	I		0	0	$q(V)$	
$V^{1,out}$	A^{out}	0		0	I	I		0	0	$q(V)$	
$V^{n,in}$	0	0		A^{in}	0	0		I	I	$\leq$	$q(V)$
$V^{n,out}$	0	0		A^{out}	0	0		I	I		$q(V)$

1. ábra. A visszavezetéshez használt poliédert leíró egyenlőtlenségek. A^{in} jelöli a digráf be-incidencia mátrixát A^{out} pedig a ki-incidencia mátrixát.

megoldás esetén, ami az adott sor feltételét egyenlőséggel teljesíti. (Például $q(v_i) = \sum_{e|v \in e} c(e) + 1$ triviálisan elég lesz). A sor szigorú rendezését úgy definiáljuk, hogy a $v_i^{j,in}$ sor legrosszabb eleme $v_i^{j,out}$, a legjobb eleme $v_i^{j,in}$ az él-termék párokhoz tartozó oszlopok pedig ezek közt vannak rangsorolva az eredeti $>_{v_i}^j$ rendezések szerint.

- Végezetül minden $j \in [n]$ -re és $V \setminus \{s^j, t^j\}$ -re is veszünk egy $v_i^{j,out}$ -al indexelt sort. A sor elemeit az előzőkhöz hasonlóan úgy definiáljuk, hogy $Q_{v_i^{j,out}, e^{j'}} = 1$ akkor és csak akkor, ha $e = v_i u$ valamilyen $u \in V$ -re és $j = j'$, valamint $Q_{v_i^{j,out}, v_i^{j,out}} = 1$ és $Q_{v_i^{j,out}, v_i^{j,in}} = 1$, a többi elem 0. TA korlátozó vektorok is ugyanazok a $q(v_i)$ számok. A rendezés csak annyiban tér el, hogy a $v_i^{j,out}$ sorok kendvence az azonos címkéjű $v_i^{j,out}$ oszlop, a legrosszabja a $v_i^{j,in}$ oszlop a többi pedig szintén a $>_{v_i}^j$ preferenciák alapján van rendezve.

Tehát definiáltunk egy $\{Qx \leq q, x \geq 0\}$ poliédert, ami teljesíti a Scarf Lemma feltételeit. Következésképp, létezik egy x^* domináns megoldás. Most megmutatjuk, hogy az $f^j(e) = x_{e^j}^*$ által definiált $f = (f^1, \dots, f^n)$ folyam megengedett és stabil.

3.2. Lemma. *Az x^* -ból kapott f folyam megengedett, azaz $\delta^j(v) = \rho^j(v)$ minden $j \in [n]$ és $v \in V \setminus \{s_j, t_j\}$ -re, $f^j(e) \leq c^j(e)$ minden $e \in E$, $j \in [n]$ -re, valamint $\sum_{j=1}^n f^j(e) \leq c(e)$ minden $e \in E$ -re.*

Bizonyítás. A kapacitásfeltételek teljesülése nyilvánvaló, hisz x^* teljesíti az $(n +$

1) $|E|$ egyenlőtlenség feltételeit. A nehezebb feladat a folyamfeltételek teljesülésének megmutatása. Ehhez vegyünk egy tetszőleges j terméket és v_i csúcsot. Ekkor, mivel x^* domináns, ezért dominálja mind a $v_i^{j,in}$, mind a $v_i^{j,out}$ oszlopot. Ezt csak a $v_i^{j,in}$, vagy $v_i^{j,out}$ sorban teheti. Két eset van.

a) Ha a két oszlop más sorban van dominálva, akkor definíció szerint mindkét sorban egyenlőség van. Következésképp $\delta^j(v_i) = \rho^j(v_i) = q(v_i) - x_{v_i^{j,out}}^* - x_{v_i^{j,in}}^*$.

b) Ha egy sorban vannak dominálva, szimmetria miatt tegyük fel, hogy $v_i^{j,in}$ -ben, akkor mivel a $v_i^{j,in}$ oszlop a sor legjobbjára, ezért minden más nemnulla elemhez tartozó koordinátának nullának kell lennie. Tehát $x_{v_i^{j,in}}^* = q(v_i)$. Ebből következik, hogy a $x^* \geq 0$, és $Q_{v_i^{j,out}} x^* \leq q(v_i)$ feltételek csak úgy teljesülhetnek, ha a $v_i^{j,out}$ sorban is minden más nemnulla elemhez tartozó koordináta 0. Azt kapjuk tehát, hogy ekkor $\delta^j(v_i) = \rho^j(v_i) = 0$, tehát a folyamfeltételek ekkor is teljesülnek. $\square$

3.3. Lemma. *Az x^* -ból kapott f többtermékes folyam stabil.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy f nem stabil. Ekkor létezik egy $W = (v_1, a_1, \dots, v_k)$ blokkoló séta valamilyen j termékre nézve.

Tudjuk, hogy x^* minden oszlopot dominál valamelyik sorban. Először is vegyük észre, hogy az a_i^j oszlopok nem lehetnek az a_i^j sorban dominálva, hiszen $f^j(a_i) = x_{a_i^j}^* < c^j(a_i) = q_{a_i^j}$. Hasonlóan, az a_i sorban sem lehetnek dominálva, mert ekkor meg azt kapnánk, hogy $\sum_{l=1}^n f^l(a_i) = c(a_i)$ és minden $j' \neq j$ amire $f^{j'}(a_i) > 0$, a_i jobban kedveli $a_i^{j'}$ -t a_i^j -nél, tehát W, j -re nem teljesülne a blokkolás 4. feltétele.

Vizsgáljuk meg, hogy a_1^j hol van dominálva. Amennyiben $v_1 \neq s^j$ és a_1^j a $v_1^{j,out}$ sorban van dominálva, akkor a $v_1^{j,out}$ sor minden kevésbé kedvelt nemnulla eleméhez tartozó koordináta 0 x^* -ban, ami azt jelenti, hogy nincsen olyan $v_1 u \in E$, amire $f^j(v_1 u) > 0$ és $v_1 u <_{v_1}^j v_1 v_2$, ismét ellentmondásban W blokkolásával j -re nézve. Ha $v_1 = s^j$, akkor nincs is a mátrixban $v_1^{j,out}$ sor, tehát a_1^j nyilván ekkor sem lehet dominálva itt.

Azt kaptuk tehát, hogy a_1^j a $v_2^{j,in}$ sorban kell legyen dominálva. Ekkor $x_{v_2^{j,out}}^* = 0$ kell legyen, hisz az az oszlop rosszabb a_1^j -nél. $q(v_2)$ választása miatt tehát $x_{v_2^{j,in}}^* > 0$, hisz legalább az egyiküknek pozitívnak kell lennie, mivel a dominálás miatt egyenlőség van az adott sorban. Következésképp a_2^j (ami szintén nem lehet a_2 -nél vagy a_2^j -nél dominálva, se $v_2^{j,out}$ -nál, mivel annak $v_2^{j,in}$ a legrosszabb, de $x_{v_2^{j,in}}^* > 0$) $v_3^{j,in}$ -nél kell legyen dominálva. Ezt az érvelést iterálva kapjuk, hogy az a_{k-1}^j oszlop $v_k^{j,in}$ -nél kell legyen dominálva. Ha $v_k = t^j$, akkor nincs is ilyen sor, ellentmondás. Különben pedig minden olyan $uv_k \in E$, amire $f^j(uv_k) > 0$ teljesül, hogy $uv_k <_{v_k}^j v_{k-1} v_k$ a dominancia miatt, ismét csak ellentmondásban W blokkolásával.

Tehát f stabil. $\square$

Azt kaptuk tehát, hogy egy tetszőleges x^* domináns megoldásból vissza tudunk kapni egy tört stabil többtermékes folyamatot, tehát visszavezettük a feladatot SCARF-ra, amiből már azonnal következik, hogy mindig létezik megoldás és $\text{SMF} \in \text{PPAD}$. $\square$

4. Tört stabil párosítási feladatok PPAD-teljessége

Ebben a fejezetben mutatom be a dolgozat PPAD-nehézségi eredményeit, különböző tört stabil párosítási feladatokra. Mindenekelőtt kimondok pár ismert eredményt, melyeket a későbbiekben használni fogok.

4.1. Lemma. *Kintali et al. [10] A SCARF feladat polinomiális időben (PPAD-) visszavezethető az F-SHM-re.*

4.2. Tétel (Király and Pap [11]). *Az F-SHM feladat polinomiálisan (PPAD-) visszavezethető az SMF feladat 0-1 kapacitásos esetére.*

4.3. Megjegyzés. Mivel a 4.2 tétel szerint az SMF feladat 0-1 kapacitásokra is PPAD nehéz, ezért a későbbi visszavezetések során feltehető, hogy $q(v) \leq |E| + 1$, azaz $q(v)$ mérete polinomiális az input méretében, azaz $q(v)$ darab példány készítése bizonyos csúcsokból vagy élekből szintén kivitelezhető polinomiális időben.

A fontosabb tételek bizonyítása előtt belátunk egy hasznos Lemmát.

4.4. Lemma. *Minden $k \in \mathbb{N}$, a k -SMF, illetve k -ISMF feladat egy tetszőleges példányából tudunk készíteni polinomiális időben a k -SMF illetve k -ISMF egy olyan példányát, ahol minden forrás és terminál ugyanaz, egy adott v csúcs $>_v^j$ rendezései megegyeznek minden j termékre, nincsenek termékfüggő $c^j(e)$ kapacitások, továbbá $\rho(v) + \delta(v) \leq 3$ minden $v \neq s, t$ csúcsra úgy, hogy a két feladatpéldány stabil folyamai közt egyértelmű megfeleltetés létezik, ami megőrzi az egésszéget.*

Bizonyítás. A visszavezetéshez először is felhasználjuk Cseh és Matuschke redukcióját [5] (a konstrukció részletei megtalálhatók a hivatkozott cikkben, nekünk nem lesz rá szükségünk), mely segítségével a kapunk egy olyan példányt, ami teljesíti az első három feltételt, ezt fogjuk tovább transzformálni. Legyen $v \neq s, t$ egy csúcs és legyenek $e_1 >_v e_2 \cdots >_v e_k$, illetve $f_1 >_v f_2 \cdots >_v f_l$ a bemenő, illetve kimenő élek (a kezdeti redukció után). Ezután v -t helyettesítjük egy gadget-tel, melyet G_v -vel jelölünk. G_v egy irányított út lesz, melynek csúcsai $v'_1, \dots, v'_k$ és $v''_1, \dots, v''_l$. Minden i -re veszünk egy $v'_i v'_{i-1}$ és egy $v''_i v_{i+1}$ (irányított) élt továbbá egy $v'_1 v''_1$ élt. Ezek kapacitását elég nagynak választjuk ahhoz, hogy ne válhassanak telítetté (például $\sum_{i=1}^k c(e_i) + 1$ jó lesz). Ezen élek minden terméket tudnak szállítani, a preferenciájuk a termékeken pedig tetszőleges lehet. Ezután minden $e_i = uv$, $i = 1, \dots, k$ eredeti élhez veszünk egy $e'_i = u'_j v'_i$ aminek a kapacitása és rendezése megegyezik e_i -ével, ahol j az e_i helye u preferencialistáján. Hasonlóan, minden eredeti $f_j = vw$ élre készítünk egy $f'_j = v''_j w'_i$ élt, ahol i az f_j rangja w preferencialistájában.

Az új csúcsok rendezése pedig legyen a következő: $e'_i >_{v'_i} v'_{i+1} v'_i$ minden $i \in [k]$ és $f'_j >_{v''_j} v''_j v''_{j+1}$ minden $j \in [l]$.

Az eredeti feladat egy f folyamát kiterjeszthetjük az új feladat egy f' folyamává természetes módon, illetve visszafele is, egy f' folyamból a G_v gadgetek összehúzásával kaphatunk egy f folyamot az eredetiben, hisz a G_v gadgetbe belépni és kilépni is csak eredeti élek másolatain tud a folyam. Az is világos, hogy ez egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés és megőrzi a folyam egészségét is (ahogy a kezdeti lépésnek használt Cseh-Matuschke redukció is). Az kell tehát csak, hogy a stabilitást is megőrzi mindkét irányban.

Tegyük fel, hogy f stabil, de f' nem az. Ekkor létezik egy $W' = (v'_1, a_1, \dots, v'_k)$ blokkoló séta valamilyen j termékre nézve. De ekkor ismét csak az egy gadgeten belüli részutakat összehúzva kapnánk az eredetiben is egy f -et blokkoló sétát. Ugyanis minden él telítetlen j szerint, hisz ezek élei voltak W' -nek is, illetve ha telítettek akkor van rajtuk rosszabb termék is, továbbá a kezdő és végpont blokkolási feltételei is teljesülnek, mivel ha a v'_1 csúcs nem s , akkor mivel küld a rosszabbik élén is tovább folyamot j -ből, az már csak az eredetiben is rosszabb élén távozhat a gadgetből és hasonlóan a séta végpontjára is ugyanígy kapjuk a szükséges feltételt.

A másik irányban, ha f' stabil, de f nem, akkor létezik egy $W = (v_1, a_1, \dots, v_k)$ blokkoló séta valamilyen j termékre nézve. Ezt a sétát természetes módon ki-egészítve a gadgeteken belül kapunk egy W' sétát az új gráfban, melynek kezdő csúcsa v_1 a_1 kimenő élhez tartozó példánya, végpontja pedig v_k a_{k-1} élhez tartozó példánya. Ekkor egyrészt minden él telítetlen j szerint W' -ben, hisz az eredeti élek azok voltak, a gadget élek pedig túl nagy kapacitásúak, hogy telítettek legyenek. Hasonlóan a telített éleken fut folyam rosszabb j' termékből. Az pedig, hogy v_1 küld rosszabb irányba folyamot az új gráfban pont azt jelenti, hogy az a_1 kimenő élhez tartozó példány a gadgetben még küld tovább folyamot a csúcshoz tartozó irányba, ami definíció szerint rosszabb neki. Ugyanígy a séta végpontja is kap rosszabb helyről a j termékből, tehát W' blokkolna, ellentmondás. □

4.5. Lemma. *Az SMF feladat polinom időben (PPAD-) visszavezethető az F-SFP feladatra.*

Bizonyítás. Kiindulásképp újból elkészítjük a SCARF problémára való visszavezetésnél használt mátrixot, lásd a 1 ábrát. $q = q(v) = \max_i \{q(v_i)\}$ választással feltehető, hogy minden $q(v_i)$ érték egyenlő, ezt jelöljük mostantól q -vel. Az egyszerűség kedvéért feltehető (egy szuperforrás és egy szupernyelő bevezetésével), hogy minden forrás és terminál ugyanaz, illetve a 4.2 tétel alapján, hogy minden kapacitás 1.

A fő észrevétel, hogy a visszavezetés Q mátrixa felfogható egy hipergráf incidenciamátrixának is, ahol az oszlopok felelnek meg a hiperéleknek. Az első probléma, hogy a $v^{j,in}$ és $v^{j,out}$ oszlopokhoz tartozó hiperéleknél nincs a jobboldalt 1 korlát, így ezen hiperélek súlya akár nagyobb is lehet 1-nél, amit a stabil hipergráf párosítás feladatban nem engedünk meg. Ezért minden ilyen oszlopot szétszedünk q darab oszlopra, jelöljük ezeket egy v csúcsra $v_l^{j,out}$, $v_l^{j,in}$, $l = 1, \dots, q$ -val. A sorokat úgy terjesztjük ki, hogy egy elem akkor és csak akkor

	E^1	E^2	...	E^n	$V_1^{1,in}$	$V_2^{1,in}$	$V_{q(v)}^{1,in}$	$V_1^{1,out}$	$V_{q(v)}^{1,out}$	$V_1^{2,in}$	$V_{q(v)}^{2,in}$	$V_1^{n,in}$	$V_{q(v)}^{n,in}$	$V_1^{n,out}$	$V_{q(v)}^{n,out}$		
E	I	I		I	0	0		0	0		0		0		0	$\leq$	1
$V^{1,in}_{q(v)}$	A^{in}	0		0	I	I		I	I		0		0		0		
$V^{1,out}_{q(v)}$	A^{out}	0		0	I	I		I	I		0		0		0		
																$\leq$	$q(v)$
$V^{n,in}_{q(v)}$	0	0		A^{in}	0	0		0	0		0		I		I		
$V^{n,out}_{q(v)}$	0	0		A^{out}	0	0		0	0		0		I		I		
$V^{1,in}_1$	0				I												
$V^{1,in}_{q(v)}$																$\leq$	1
$V^{n,out}_{q(v)}$																	
E^1																	
E^n																	
$V^{1,in}_1$																$\leq$	1
$V^{n,out}_{q(v)}$																	

2. ábra. A lemma 4.5 bizonyításában használt mátrix a sorcserék után.

lesz 1, ha egy olyan oszlop példánya, ahol eredetileg 1-es állt, különben 0. A rendezéseket pedig úgy terjesztjük ki, hogy továbbra is a $v_l^{j,in}$ és $v_l^{j,out}$ oszlopok lesznek a legjobb illetve legrosszabb helyeken, ezeket az oszlopokat egymást közt pedig index alapján rendezzük, azaz például a $v_1^{j,in} > v_2^{j,in} > \dots > v_q^{j,in}$.

Ezután minden $v_l^{j,in}$ és $v_l^{j,out}$ -hez hozzáadunk 2 új sort a mátrixhoz. Mindkét sorban csak egy darab 1-es lesz, a megfelelő oszlophoz tartozó helyen. Azaz a sorokat is ugyanígy címkézve $Q_{v_l^{j,in}, v_l^{j,in}} = 1$, $Q_{v_l^{j,out}, v_l^{j,out}} = 1$, minden más elem 0. Minden ilyen sor jobboldali korlátozó vektora 1 lesz. Aztán hozzáadunk a mátrixhoz még $s^{i,out}$ és $t^{i,in}$ sorokat is minden $i \in [n]$ -re, amiknek csak a megfelelő kimenő, illetve bemenő éleknél lesznek nemnulla elemei a mátrixban, saját $s^{j,out}$, $t^{j,in}$ oszlopokat nem kapnak. Ezen sorok korlátozó vektorait úgy választom, hogy elég nagyok legyenek ahhoz, hogy ne lehessen olyan megoldás, ahol a megfelelő feltételek egyenlőséggel teljesülnek. Például a többi csúcshoz tartozó sor q korlátozó értéke megfelelően nagy lesz. Az így kapott mátrixvektor pár a 2 ábrán látható.

Azt, hogy a régi és az új poliéder domináns megoldásai megfeleltethetők egymásnak a következőképpen láthatjuk be. Az egyik irányban, ha van egy x' domináns megoldásom az új rendszerhez, akkor abból minden $v_l^{j,in}$ és minden $v_l^{j,out}$ koordinátát összegezve kapok egy megoldást az eredetiben. Mivel minden koordináta legfeljebb 1 volt korlátozó feltételek miatt, így az összegük legfeljebb q . Továbbá, ha minden $v_l^{j,in}$ (vagy $v_l^{j,out}$) komponens az újonnan hozzáadott sorokban van dominálva, akkor az összegük q , így az eredetiben az oszlop azonos címkéjű sorban dominálva lesz. Ha valamelyik a $v_l^{j,in}$ (vagy $v_l^{j,out}$) sorban volt dominálva, az pedig pont azt jelenti, hogy minden nemnulla komponenshez tartozó oszlop jobb a sornak és egyenlőség van, azaz a szummázott x megoldásban is dominálva lesz itt a $v_l^{j,in}$ (vagy $v_l^{j,out}$) oszlop. Az élekhez tartozó oszlopok triviálisan dominálva maradnak.

A másik irányhoz pedig egy x domináns megoldásból úgy kapunk egy x' új domináns megoldást, hogy a $v_l^{j,in}$ és $v_l^{j,out}$ komponenseket $l = 1, 2, \dots, q$ sorrend szerint töltöm fel. Az élekhez tartozó oszlopok most is nyilván dominálva maradnak. Ha egy $v_l^{j,in}$ koordinátát teljesen feltöltöttünk (azaz $x_{v_l^{j,in}} = 1$), akkor az dominálva lesz az azonos címkéjű sorban (hisz ott ez az egy nemnulla elem van). Ha nem töltöttük teljesen fel, akkor $x_{v_l^{j,in}} < q$ volt, s emiatt ez az oszlop csak a $v_l^{j,out}$ sornál lehetett dominálva (mert $v_l^{j,in}$ -nek legjobb). Ez azt jelenti, hogy a $v_l^{j,out}$ sor egyenlőséggel teljesül x' -vel is, tehát ekkor $v_l^{j,in}$ és minden nagyobb indexű példánya (akik még rosszabbak, de nekik már az x' koordinátája 0, hisz sorban töltöttünk fel) dominálva van itt. A $v_l^{j,out}$ oszlopokra ugyanez az érvelés működik.

Most a következőket figyelhetjük meg az új mátrixunkról:

1. A sorokat felcserélhetjük úgy, hogy a mátrix alja egy nagy négyzetes identitásmátrix legyen, csupa 1 korlátozó vektorral.
2. A mátrix identitás feletti része pedig nem más, mint egy 3-uniform, 3-osztályú hipergráf incidenciamátrixa. Hiszen, ha az oszlop e^j alakú, $e = uv$, akkor három nemnulla elem van, melyek az e , a $v_l^{j,out}$ és a $v_l^{j,in}$ sorokban találhatók, a $v_l^{j,in/out}$ típusú oszlopok esetén pedig szintén mindig három nemnulla elem van, a $v_l^{j,in}$, $v_l^{j,out}$, illetve $v_l^{j,in/out}$ sorokban. Továbbá ebből már azt is megfigyelhetjük, hogy a hipergráf csúcshalmaza valóban három részre particionálható úgy, hogy minden hiperél mindegyikből pontosan egyet tartalmazzon. A három osztály a E és $v_l^{j,in/out}$ sorok, a $v_l^{j,in}$ sorok illetve a $v_l^{j,out}$ sorokhoz tartozó csúcshalmazok.

Tehát a mostani feladatunk már valóban megfeleltethető egy stabil hipergráf párosítási feladatnak aminek a megoldásaiból kaphatunk egy x domináns megoldást (hisz az, hogy egy f hiperél blokkol itt épp azzal lesz ekvivalens, hogy minden hozzá tartozó sorban vagy nincs egyenlőség, vagy van rosszabb oszlophoz tartozó pozitív koordináta, azaz az f -hez tartozó oszlop nincs dominálva), hisz az első megfigyelés alapján mostmár minden hiperél kapacitása 1. Továbbá ezen felül az is teljesül, hogy a hipergráf 3-osztályú, 3-uniform. Ahhoz, hogy egy stabil család feladatot kapjunk viszont még arra is szükség van, hogy minden csúskapacitás is 1 legyen.

Ezt úgy érjük el, hogy a hipergráfunkat tovább módosítjuk. Jelölje a hipergráf három osztályát Z , U és V , ahol Z felel meg az élekhez és $v_l^{j,in/out}$ típusú sorokhoz tartozó csúcsoknak. Ekkor X -ben minden csúcs kapacitása már eleve 1, a V és U -beli csúcsoké pedig q .

Ezután készítsünk minden $u \in U$ és $v \in V$ csúcsból q darab példányt (emlékezzünk rá, hogy feltehető, hogy q polinomiális az input méretében, és az is hogy egész), illetve minden $e = (z, u, v)$ hiperél helyett vegyünk be (z, u_i, v_j) hiperéleket, minden $i, j = 1, \dots, q$ -ra. A preferenciákat pedig olyan módon terjesztjük ki az új hiperélekre szigorúan, hogy ha $(x, u, v) >_x (x, u', v')$, akkor $(z, u_i, v_j) >_z (z, u'_k, v'_l)$ minden $i, j, k, l = 1, \dots, q$ -ra, ha $(z, u, v) >_u (z', u, v')$ akkor $(z, u_i, v_j) >_{u_i} (z', u_i, v'_l)$ minden $i, j, l = 1, \dots, q$ -ra és hasonlóan v -kre is.

Ez megtehető például az eredeti preferenciák kiterjesztésével, a döntetlenek indexek vagy indexpárok szerint lexikografikus feltörésével. Az így kapott stabil hipergráf párosítási feladatban már azon felül, hogy a hipergráf 3-uniform és 3-osztályú az is teljesül, hogy minden kapacitás 1, így ez már megfelel a stabil család feladat egy példányának is.

Tegyük fel, hogy találtunk egy x' stabil törtpárosítást ebben a hipergráfban. Elég belátnunk, hogy ebből a módosított mátrix által definiált hipergráfban is kapunk egy stabil törtpárosítást, hiszen azt már láttuk, hogy annak a stabil törtpárosításai épp a domináns megoldásoknak felelnek meg. Vegyük tehát azt a hipergráf párosítást, ahol egy (z, u, v) hiperél súlya $x_{(z,u,v)} = \sum_{i,j=1}^q x'_{(z,u_i,v_j)}$. Ez egy megengedett párosítás, hiszen minden szumma hiperéleiben van egy közös z csúcs, aminek a kapacitása 1, így $x_{(z,u,v)} \leq 1$ minden hiperélre. Tegyük fel, hogy létezik egy (z, u, v) blokkoló hiperél x -re nézve. Ekkor z telítetlen, vagy létezik olyan (z, u', v') hiperél pozitív súllyal, amit kevésbé kedvel. Hasonlóan u telítetlen, vagy létezik olyan (z', u, v') hiperél pozitív súllyal, amit kevésbé kedvel és ugyanígy v -re is. De ebből az következik, hogy z telítetlen x' -ben vagy pedig a rosszabb (z, u', v') hiperélnek van olyan (z, u'_i, v'_j) példánya is, aminek pozitív a súlya x' -ben. Továbbá, az u csúcs minden u_i példánya és a v csúcs minden v_j példánya vagy telítetlen x' -ben, vagy van rajta át egy számára rosszabb hiperél pozitív súllyal. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan i, j pár, hogy a (z, u_i, v_j) élre teljesül, hogy mindhárom csúcsa vagy telítetlen, vagy van rajta át számára rosszabb hiperél pozitív súllyal x' -ben, ami ellentmond x' stabilitásának. $\square$

4.6. Lemma. *Az SMF feladat polinom időben (PPAD-) visszavezethető az F-HRC-re.*

Bizonyítás. A bizonyítás most is hasonló lesz. Induljunk ki az előző redukcióban közbülső lépésben kapott 3-osztályú, 3-uniform hipergráfból, melynek mátrixa a 2 ábrán is illusztrálva van. Most azzal, hogy egyes csúcsoknak nagyobb, mint 1 a kapacitása nem lesz problémánk, hisz a kórházaknál ez megengedett.

Nevezzük a hipergráf 3 osztályát ismét Z , U és V -nek. Láttuk, hogy minden $z \in Z$ kapacitása 1. Ezek fognak megfelelni a pároknak, U és V csúcsai pedig a kórházaknak. Mivel minden hiperél mindhárom osztályból pontosan egy csúcsot tartalmaz, így minden jelentkezés tartalmaz U és V -beli kórházat is. Ez felfogható úgy is, hogy vannak olyan kórházak, ahová csak a párok férfitagjai, míg másokba csak a női tagjai jelentkezhetnek, mely a feladat egy fontos speciális esete.

A házaspárok rendezése egyértelműen adódik a csúcsok hiperéleken vett rendezéséből. Ahol óvatosabbnak kell lenni, az a kórházak rendezései, hisz ezeknek a házaspárokon kell egy szigorú rendezést alkotnia, nem a hiperéleken. De azt a kulcsmegfigyelést tehetjük, hogy tetszőleges 2 olyan csúcs esetén, ahol az egyik X -ből a másik $U \cup V$ -ből van, legfeljebb 1 olyan hiperél létezik, ami mindkettőt tartalmazza. Például, egy $(uv^j, u^{j,out})$ páron csak a $(uv^j, u^{j,out}, v^{j,in})$ hiperél mehet, hisz az első két csúcs az él végpontját és a terméket is egyértelműen meghatározza, valamint egy $(v_l^{j,out}, v^{j,in})$ párt is csak a $(v_l^{j,out}, v^{j,in}, v^{j,out})$ hi-

perél tartalmazhat. Hasonlóan egyszerű a többi eset ellenőrzése is. Ebből azt kapjuk tehát, hogy minden kórház esetén a hiperéleken való rendezést meg tudunk feleltetni egy szigorú rendezésnek a párokon, hisz egy kórházhoz egy pár legfeljebb egy hiperélben jelentkezik.

Tegyük fel, hogy van egy stabil törtpárosításunk az így kapott F-HRC-ben. Az kell, hogy ebből kaphatunk egy x domináns megoldást az eredetiben. De könnyű meggondolni, hogy x -et pontosan a hiperélek értékei szerint beállítva egy domináns megoldást kapunk, hisz egy nem dominált oszlop éppen azt jelentené, hogy mindhárom hozzá tartozó sor telítetlen vagy van pozitív kordináta rosszabb nemnulla elemhez tartozva is, tehát az oszlop hiperéléhez tartozó koalíció blokkolna a F-HRC feladatban, ellentmondás.

□

Ezen lemmák egyenes következményei az alábbi tételek:

4.7. Tétel. *A F-HRC PPAD-teljes, sőt még azon duális változata is, ahol a kórházak halmaza két részre partícionálható úgy, hogy az egyikben lévő kórházakba csak a párok férfi a másikkban lévőkébe pedig csak a női tagjai jelentkezhetnek.*

4.8. Tétel. *Az F-SFP feladat PPAD-teljes.*

4.9. Tétel. *Az SMF feladat PPAD-teljes.*

Most belátjuk a stabil hipergráf párosítás feádat törtveziójának nehézségét még nagyon szigorú feltételek mellett is.

4.10. Tétel. *Az F-SHM PPAD-teljes, még akkor is, ha minden kapacitás 1, minden hiperél legfeljebb 3 méretű, mindek fok legfeljebb 3 és a hipergráf polinomiális időben 3-élszínezhető (azaz a hiperélek színezhetőek úgy, hogy semelyik csúcson át se menjen két azonos színű hiperél).*

Bizonyítás. Először is, mivel beláttuk, hogy az F-SFP probléma is PPAD-teljes, ezért elég ezt visszavezetni az F-SHM a tételben szereplő speciális esetére. Ehhez elég lesz Ishizuka és Kamiyama [9] konstrukcióját használnunk, amivel egy tetszőleges stabil hipergráf párosítás feladatot visszavezethetünk egy olyanra, ahol minden fok legfeljebb 3. Tehát csak azt kell megmutatnunk, hogy a konstrukció megőrzi a maximális hiperélméretet, illetve, hogy minden stabil család hipergráf esetén egy polinom időben 3-élszínezhető gráfot kapunk. Ishizuka és Kamiyama visszavezetése a következő: Legyen $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ egy hipergráf. Ebből készítünk egy új $\mathcal{H}' = (V', \mathcal{E}')$ hipergráfot, melynek csúcshalmaza $V' = \{v_i : v \in V, i = 1, \dots, \deg(v)\} \cup \{v'_i : v \in V, i = 1, \dots, \deg(v) - 1\}$. Azaz minden eredeti v csúcs fog kapni $2\deg(v) - 1$ példányt. $\mathcal{H}'$ élhalmazát úgy kapjuk, hogy először is minden $e \in \mathcal{E}$ hiperél helyett veszünk egy $e' = \{v_{r(v,e)} : v \in e\}$ hiperélt, ahol $r(v, e)$ jelöli azt, hogy e hányadik legjobb hiperél v preferencialistájában. Azaz szemléletesen minden e hiperélhez készítünk egy e' hiperélt, mely az eredeti hiperél csúcsainak azon indexű példányait tartalmazza, ahányadik legjobb volt nekik. Legyen $E' = \{e' : e \in \mathcal{E}\}$. Ekkor a $\mathcal{H}'$ hipergráf élhalmaza: $\mathcal{E}' = E' \cup \{\{v_i, v'_i\}, \{v'_i, v_{i+1}\} : v \in V, i = 1, \dots, \deg(v) - 1\}$

lesz. A konstrukcióban szereplő csúcsok preferenciái most nem fontosak számunkra, így azokra nem térünk ki külön. Ami fontos, hogy minden $e \in \mathcal{E}$ mérete pontosan akkor, mint e' mérete, illetve a többi hiperél mérete 2, így ha egy 3-uniform hipergráfból vezetünk vissza, akkor így egy olyan hipergráfot kapunk, ahol egyrészt minden fok legfeljebb 3 (hisz egy v_i vagy v'_i csúcson át csak egy e' hiperél és legfeljebb két $\{v_i, v'_i\}, \{v'_i, v_{i+1}\}$ alakú él megy) és minden hiperél mérete is legfeljebb 3. Tehát már csak azt kell megmutatnunk, hogy a hiperéleket polinom időben tudjuk 3-élszínezni. Ezt pedig a következőképpen tehetjük meg: legyenek E' élei pirosak, a $\{v_i, v'_i\}$ alakúak zöldek, a $\{v'_i, v_{i+1}\}$ alakúak pedig kékek. Könnyű ellenőrizni, hogy ez a színezés valóban megfelelő. $\square$

Most megmutatjuk, hogy az SMF feladat PPAD-nehéz marad 3 termék esetén is.

4.11. Tétel. *A 3-SMF feladat PPAD-teljes, még akkor is ha minden kapacitás 0 vagy 1, minden forrás és terminál egybeesik, és az egyes termékeket szállítani tudó élek részgráfja (belül) pontdiszjunkt st utakból áll.*

Bizonyítás. Itt most Király és Pap konstrukcióját [11] javítjuk kicsit tovább, amivel megmutatták, hogy az SMF általános verziója PPAD-teljes. Mivel a 4.10 tételben beláttuk, hogy az F-SHM feladat akkor is PPAD-teljes, ha az élek polinom időben 3-színezhetőek, így elég azt visszavezetnünk.

Vegyük tehát az F-SHM feladat egy ilyen speciális I példányát. Legyen az ebben szereplő hipergráf $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. A kulcslépés az, hogy mielőtt még visszavezetnénk a feladatot egy folyamfeladatra, kiszínezzük az éleket 3 színnel. A 3 szín fog megfelelni a 3 terméknek a visszavezetésben. Plusz csúcsok és hiperélek bevitelével az is feltehető, hogy a hipergráf 3 uniform és minden fok is 3, de erre csak az egyszerűség kedvéért van szükség, a konstrukcióhoz csak a 3-élszínezhetőség a fontos.

A 3-SMF feladat I' példányát úgy kapjuk $\mathcal{H}$ -ból, hogy minden $v_i \in V$ csúcs-hoz készítünk egy v'_i és egy v''_i csúcsot. Ezen felül még hozzáadunk egy s forrást és egy t nyelőt. A gráf irányított élei pedig a következők lesznek: minden i -re veszünk egy $e_i = v'_i v''_i$ élt 1 összkapacitással, és 1 termékkapacitásokkal minden termékre az $<_{e_i}$ rendezéseket pedig a v_i csúcs $>_i$ preferenciája alapján állítjuk be (mivel egy csúcson csak különböző színű élek mennek, így a hiperéleken való rendezés indukál egy rendezést a színeken, amik most épp a termékek). Továbbá, minden $e = \{v_j, v_k, v_l\} \in \mathcal{E}$ hiperélre (plusz csúcsok hozzáadásával feltehető, hogy $\mathcal{H}$ 3 uniform), ahol $j < k < l$ hozzáadunk a gráfhoz $sv'_j, v'_j v'_k, v'_k v'_l$ és $v''_l t$ éleket, melyek összkapacitása szintén 1, viszont ezek már csak az e színének megfelelő terméket tudják továbbítani (azaz az ehhez tartozó termékkapacitás 1, a többihez tartozó 0). Ezeknek az éleknek emiatt nem is lesz szükség preferenciákra, csak egy termék elfogadható számukra. A csúcsoknak szintén lényegtelen a preferenciája, hisz a forrásnak és terminálnak nincsen (definíció szerint), a többi v'_i és v''_i csúcsok pedig mind olyanok, hogy egy adott j termékre csak legfeljebb egy bemenő és egy kimenő él van, ami az adott terméket szállítani tudja.

A konstrukció helyességéhez vegyük észre, hogy tetszőleges termékre (színre), azok az élek amik az adott terméket szállítani tudják (belül) pontdiszjunkt st utakból áll, hisz minden v'_i és v''_i befoka és kifoka is legfeljebb 1 (mivel egy csúcsra csak egy hiperél illeszkedett ebből a színből), és ha az egyik 1 akkor a másik is (az élek definíciója miatt). Továbbá, ezek az utak épp az adott színű hiperéleknek felelnek meg, azaz minden ilyen színű $e = \{v_j, v_k, v_l\} \in \mathcal{E}$ hiperélhez tartozik egy st út az e_j, e_k, e_l éleken át, melyek rendezése pedig épp a megfelelő csúcsok rendezése. Továbbá, két hiperélnek egy v_i csúcs közös csúcsa, akkor és csak akkor, ha a két hiperélhez tartozó útnak e_i közös éle.

Ebből már következik, hogy az így kapott SMF feladatban egy tetszőleges többtermékes folyamban egy adott termékhez tartozó st folyamok csak az adott színű hiperélekhez tartozó utakon folyhatnak. És fordítva is, egy (tört) hipergráf párosításból könnyen kapunk egy megengedett folyamot úgy, hogy minden hiperél útján a megfelelő termékből egy pontosan akkora méretű folyamot küldünk, amekkora a hiperél súlya volt. Mivel I' -ben csak az e_i élek rendezése mérvadó, a hiperél és megfelelő st utak metszési relációja is megegyezik, és a lehetséges blokkoló utak is csak hiperélekhez tartozó st utak lehetnek (hisz a csúcsok rendezései triviálisak), így az is világos, hogy a I' -ben stabil többtermékes folyamok a stabil törtpárosításoknak felelnek meg I -ben és fordítva is. Továbbá ez a kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés az egésztséget is megőrzi. $\square$

5. A 2-ISMF feladat NP-teljessége

Ebben a fejezetben főleg a többtermékes stabil folyam feladat egész változatával fogunk foglalkozni, és bizonyítunk be nehézségi eredményeket. Először is fontos megemlíteni, hogy az ISMF feladat általános alakjáról is ismert már, hogy NP-ben van (minden j termékre és u, v csúcspárra ellenőrizni tudjuk, hogy van-e mind a 4 feltételt kielégítő uv séta), így az egyes speciális esetek NP-teljességéhez elég lesz a nehézséget bizonyítanunk.

5.1. Lemma (Király and Pap [11]). *Az ISMF feladat NP-ben van.*

Szükségünk lesz az alábbi tételre is, mely a HRC feladat egy nagyon speciális esetének NP-nehézségéről szól :

5.2. Tétel (Biró et al. [2]). *A $(2,2)$ -HRC feladat NP-teljes, még az alábbi megszorítások esetén is:*

- I) Minden kórház (és így minden csúcs) kapacitása 1,
- II) Egy adott kórház legfeljebb egyszer szerepel egy adott pár preferencialistáján,
- III) nincsenek egyéni rezidensek,
- IV) A kórházak 3 részre partícionálhatóak úgy, hogy az egyik rész kórházaiba csak a párok férfi tagjai, a másikba csak a párok női tagjai jelentkezhetnek (nevezzük ezeket férfi; illetve női kórházaknak), a harmadik csoport kórházai pedig olyan (h_1^i, h_2^i, h_3^i) hármasokból állnak, melyekbe minden jelentkezés csak valamely c_1^i, c_2^i, c_3^i érkezik, ezen hármasok preferenciái pedig az akábbiak:

$$\begin{aligned}
c_1^i &: (*, *) > (h_1^i, h_2^i) \\
c_2^i &: (*, *) > (h_2^i, h_3^i) \\
c_3^i &: (*, *) > (h_3^i, h_1^i) \\
h_1^i &: c_3^i > c_1^i \\
h_2^i &: c_1^i > c_2^i \\
h_3^i &: c_2^i > c_3^i,
\end{aligned}$$

ahol a $*$ jelölés egy férfi vagy női kórházat jelöl. Továbbá, minden első vagy második partíció belüli kórház legfeljebb egy olyan jelentkezést kap, amely valamelyik ilyen hármas egy párjától érkezik.

Mivel szükségünk lesz a tételhez használt konstrukcióra, ezért itt is bemutatjuk. A visszavezetés a (2,2)-E3-SAT feladatból történik, mely a SAT feladat azon verziója, ahol minden klóz pontosan 3 literált tartalmaz, és minden változó pontosan 4-szer fordul elő: 2-szer pozitív, 2-szer negatív alakban.

Legyen $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ a változók, $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ pedig a klózek halmaza. Definiálunk négy halmazt. $A = \{(a_i^r, b_i^r) : r = 1, 2, i = 1, \dots, n\}$, $B = \{(c_j^s, d_j^s) : s = 1, 2, 3, j = 1, \dots, m\}$, $H = \{h_i^r : r = 1, \dots, 6, i = 1, \dots, n\}$ és $T = \{t_j^r : r = 1, \dots, 6, j = 1, \dots, m\}$. A HRC feladat párvai az $A \cup B$ halmaz elemei, a kórházai pedig a $H \cup T$ halmaz elemei lesznek. Definiáljuk $h(d_j^s)$ -t h_i^{2r+1} -nek, ha a v_i literál r -edik előfordulása van a c_j klóz s -edik pozíciójában, illetve h_i^{2r+2} -nek, ha a $\bar{v}_i$ literál r -edik előfordulása van a c_j klóz s -edik pozíciójában. Hasonlóan legyen $d(h_i^{2r+1})$ d_j^s , ha v_i r -edik előfordulása a c_j klóz s -edik helyén van, $d(h_i^{2r+2})$ pedig d_j^s , ha $\bar{v}_i$ r -edik előfordulása a c_j klóz s -edik helyén van. A preferencialisták a következők. A pároké:

$$\begin{aligned}
(a_i^1, b_i^1) &: (h_i^1, h_i^3) > (h_i^2, h_i^4) \\
(a_i^2, b_i^2) &: (h_i^2, h_i^5) > (h_i^1, h_i^6) \\
(c_j^1, d_j^1) &: (t_j^4, h(d_j^1)) > (t_j^3, t_j^1) \\
(c_j^2, d_j^2) &: (t_j^5, h(d_j^2)) > (t_j^1, t_j^2) \\
(c_j^3, d_j^3) &: (t_j^6, h(d_j^3)) > (t_j^2, t_j^3)
\end{aligned}$$

A kórházaké:

$$\begin{aligned}
h_i^1 &: a_i^2 > a_i^1 \\
h_i^2 &: a_i^1 > a_i^2 \\
h_i^3 &: b_i^1 > d(h_i^3) \\
h_i^4 &: b_i^1 > d(h_i^4) \\
h_i^5 &: b_i^2 > d(h_i^5) \\
h_i^6 &: b_i^2 > d(h_i^6) \\
t_j^1 &: c_j^1 > d_j^2 \\
t_j^2 &: c_j^2 > d_j^3 \\
t_j^3 &: c_j^3 > d_j^1 \\
t_j^4 &: d_j^1 \\
t_j^5 &: d_j^2 \\
t_j^6 &: d_j^3
\end{aligned}$$

5.3. Tétel. *A 3-ISMF NP-nehéz még akkor is, ha minden kapacitás 0 vagy 1, minden forrás és terminál ugyanaz és az egyes termékekhez tartozó élek rész-*

gráfja pontdiszjunkt st utakból áll.

Bizonyítás. Azt fogjuk megmutatni, hogy az előbb részletezett konstrukcióval kapott HRC feladat valójában tekinthető egy 3-uniform F-SHM feladatnak is, illetve, hogy ennek éleit polinom időben tudjuk 3-színezni. Innen a 4.11 tétel konstrukcióját használva kész is vagyunk, hisz arra a visszavezetésre az is teljesült, hogy pontosan akkor van egész stabil megoldás a hipergráfban, ha van egész többtermékes stabil folyam.

Tekintsük tehát a konstrukcióban egy φ (2,2)-E3-SAT formulából kapott HRC feladatot. Mivel minden jelentkezés olyan, hogy a pár két tagja két különböző kórházba jelentkezik, így ezek a jelentkezések kezelhetők 3 méretű hiperélekként is, tehát természetes módon kapunk egy $\mathcal{H}$ 3-uniform hipergráfot így $A \cup B \cup H \cup T$ csúcshalmazon. Mivel az a feltétel is teljesült, hogy egy kórházhoz egy párból csak legfeljebb egy ember jelentkezik, és az is csak legfeljebb egyszer, így a kórházak preferenciája a párokon egyértelműen definiál egy (szigorú) preferencialistát a rá illeszkedő hiperéleken is. A párok eleve kórházpárokat rangsoroltak, így ott szintén könnyen megfeleltethetjük a rendezésüket a hiperélek egy rendezésének. Annyit kell még észrevennünk, hogy a stabil allokációk a HRC-ben és a stabil párosítások a hipergráfban szintén egybeesnek, hisz egy blokkoló (c, h, h') koalíció épp azt jelenti, hogy a (c, h, h') hiperél blokkol és mivel minden hiperél (c, h, h') alakul, így minden blokkoló hiperél egy blokkoló koalíciót definiál.

Tehát csak annyi teendőnk maradt, hogy megmutassuk, hogy $\mathcal{H}$ hiperélei polinom időben 3-színezhetők. Ehhez mutatunk egy jó 3-színezést. Először a (c_j^s, d_j^s) alakú párokat tartalmazó hiperéleket színezzük. Azt állítjuk, hogy ezek kiszínezhetők úgy, hogy minden olyan hiperél, ami tartalmaz h_i^3, h_i^4, h_i^5 vagy h_i^6 kórházat zöld vagy piros legyen. Ehhez vegyük észre, hogy a (c_j^s, d_j^s) párokat szét tudjuk osztani hármas csoportokba (j szerint) úgy, hogy bármely ilyen párt tartalmazó hiperél csak olyan hiperéleket metsz, ami szintén tartalmaz az adott hármas párjából egyet, vagy különben egyáltalán nem tartalmaz (c_j^s, d_j^s) alakú párt, és utóbbi esetben a metszéspont mindig egy csúcs, mely a $h_i^3, h_i^4, h_i^5, h_i^6$ kórházak egyike, valamilyen i -re. Az is teljesül, hogy a h_i^r alakú kórházak legfeljebb egy (c_j^s, d_j^s) alakú párt tartalmazó hiperélben vannak. Tehát meg tudjuk azt tenni, hogy minden j -re kiszínezzük a három $((c_j^s, d_j^s), t_j^{s+3}, h(d_j^s))$ alakú hiperélből $s = 1, 2$ esetén zöldre és $s = 3$ esetén pirosra. Ezután könnyű ellenőrizni, hogy az adott j -hez tartozó többi élt $((c_j^1, d_j^1), t_j^3, t_j^1), ((c_j^2, d_j^2), t_j^1, t_j^2)$ és $((c_j^3, d_j^3), t_j^2, t_j^3)$ is ki tudjuk színezni piros, zöld és kék színek felhasználásával úgy, hogy a színezés jó legyen. (pl $((c_j^1, d_j^1), t_j^3, t_j^1)$ kék, $((c_j^2, d_j^2), t_j^1, t_j^2)$ piros és $((c_j^3, d_j^3), t_j^2, t_j^3)$ zöld jó lesz).

A maradék hiperélek ezután beoszthatóak négyes csoportokba i szerint $((a_i^1, b_i^1), h_i^1, h_i^3), ((a_i^2, b_i^2), h_i^2, h_i^5), ((a_i^1, b_i^1), h_i^2, h_i^4)$ és $((a_i^2, b_i^2), h_i^1, h_i^6)$ úgy, hogy különböző négyesek hiperélei nem metszik egymást, csak a már kiszínezett hiperéleket, és azokat is csak valamilyen $h_i^{\geq 3}$ pontban. Azt is tudjuk, hogy h_i^3, h_i^4, h_i^5 és h_i^6 -on át csak piros vagy zöld hiperél megy. Azaz elég azt belátni, hogy minden ilyen hiperél négyest ki tudunk egészíteni, bárhog is vannak már "foglalt"

piros és zöld színek a $h_i^3, h_i^4, h_i^5, h_i^6$ csúcsokon. Minden eset egyszerűen leellenőrizhető, például ha h_i^3 -on és h_i^4 -en a piros a foglalt h_i^5 -ön és h_i^6 -on a zöld akkor a $((a_i^1, b_i^1), h_i^1, h_i^3), ((a_i^2, b_i^2), h_i^2, h_i^5)$ kék, $((a_i^1, b_i^1), h_i^2, h_i^4)$ zöld, valamint $((a_i^2, b_i^2), h_i^1, h_i^6)$ piros színezés jó lesz. $\square$

5.4. Megjegyzés. Ezzel a visszavezetéssel azt is bebizonyítottuk, hogy eldönteni, hogy létezik-e egy stabil hipergráf párosítás (SHM) feladatban, hogy van-e egész stabil megoldás már akkor is NP-teljes, ha minden kapacitás 1, minden fok legfeljebb 2, és minden hiperél legfeljebb 3 méretű, sőt a hiperélek még hatékonyan 3-színezhetőek is.

Most megmutatjuk, hogy 2 termék esetén, ha $s_1 = s_2 = s$ és $t_1 = t_2 = t$, valamint a termékekhez tartozó részgráfok diszjunkt st utak uniói, akkor mindig létezik stabil többtermékes folyam és meg is található hatékonyan. Speciálisan, mivel minden 2 élszínezhető hipergráf egy ilyen folyamfeladatra vezetődik vissza a 4.11 tétel konstrukciója alapján, így ott is mindig tudunk találni egy egész stabil párosítást.

5.5. Lemma. *A 2-ISMF és 2-SMF feladatok polinom időben megoldhatóak, ha a két forrás és két terminál megegyezik és a termékekhez tartozó részgráfok diszjunkt st utak uniói.*

Bizonyítás. A bizonyításhoz az alább bemutatott pszeudokódú algoritmus 1-ről mutatjuk meg, hogy mindig talál egy stabil egész megoldást.

Mivel egy ilyen hálózatban csak st utak lehetnek blokkoló séták, ezért csak ezeket kell ellenőriznünk. Tegyük fel, hogy egy st út blokkol az 1-es termékre nézve. Ekkor volt egy olyan lépés, amikor csökkentettük az úton az 1-es termék értékét. De az utolsó ilyen lépésben egy olyan él, ami 2-es terméket szereti jobban, telítette kellett, hogy váljon az úton, ami ellentmondás. A 2-es termékre nézve sem blokkolhat, hisz ha blokkolna, akkor a while ciklus még növelt volna az értékén, hisz telítetlen és teljesíti a feltételt. $\square$

Algorithm 1

Telítsünk minden megfelelő st utat az 1-es termékkel.
 Legyen $P_1, \dots, P_k$ a 2-es termékhez tartozó diszjunkt st utak.
for $i = 1, \dots, k$ **do**
 while P_i telítetlen a 2-es termék szerint és minden $e \in P_i$, amin folyik 1-es termék is jobban szereti a 2-es terméket **do**
 Növeljük a 2-es termék értékét 1-es P_i -n,
 A túltelítetté vált utakon csökkentjük az 1-es termék értékét 1-el.
end while
end for

Egyből következik tehát az alábbi tétel.

5.6. Tétel. *Ha egy stabil hipergráf párosítás feladatban a hiperélek 2 színezhetőek, akkor tetszőleges méretű hiperélek és kapacitások esetén mindig tudunk találni egész stabil párosítást.*

5.7. Megjegyzés. Ishizuka és Kamiyama algoritmus [9] is működik a 2-élszínezhető esetre, viszont egyrészt csak akkor, ha minden kapacitás 1, másrészt az sokszor csak egy tört megoldást talál, holott egész is van. Az algoritmus röviden a következő: ha egy hiperél mindenkinek legjobb, akkor bevesszük és a csúcsait, valamint a metsző hiperéleket töröljük és ezt iteráljuk, amíg van olyan hiperél, ami mindenkinek legjobb. Ezután minden maradék hiperélt beveszünk $\frac{1}{2}$ súllyal. Például egy C_4 kör esetén, ha ciklikusak a preferenciák, akkor hiába van egész megoldás, az algoritmus egy félegészetet fog adni.

Most megmutatjuk, hogy ha elengedjük az utak diszjunkságáról szóló feltételt, akkor már a 2-ISMF feladat is NP-teljesse válik.

5.8. Tétel. *A 2-ISMF feladat NP-teljes, még 0-1 kapacitásokkal is.*

Bizonyítás. A bizonyításhoz a (2,2)-HRC 5.2 beli speciális verzióját fogjuk visszavezetni. Legyen I a HRC feladat egy ilyen speciális esete. Nevezzünk egy c párt *simának*, ha c^m csak férfi-kórházakba, c^w pedig csak női-kórházalba jelentkezik, ahol c^m a pár férfi, c^w pedig a női tagja.

Konstruálunk egy I' kéttermékes folyamfeladatot. Először is, felveszünk egy s forrást és egy t nyelőt, mely mindkét termék közös termináljai lesznek. Ezután minden $c = (c^m, c^w)$ párra készítünk két $v(c^m)$ és $v(c^w)$ csúcsot, valamint egy $e(c) = v(c^m)v(c^w)$ élet $c(e(c)) = c^1(e(c)) = c^2(e(c)) = 1$ kapacitásokkal. Amennyiben c egy sima pár, akkor $e(c)$ preferenciáját állítsuk be $1 >_{e(c)} 2$ -re. A többi párhoz tartozó élt majd később állítjuk be.

Majd készítünk minden h férfi-kórházhoz egy $v(h)$ csúcsot és egy $e(h) = sv(h)$ élet $c(e(h)) = c^1(e(h)) = c^2(e(h)) = 1$ kapacitásokkal. Ezután hozzáadunk egy vagy két $v(h)v(c^m)$ alakú élet azon párok férfi tagjához tartozó csúcsaiba, amelyek jelentkeznek h -hoz, 1 összkapacitással. Ha c sima pár, akkor a $v(h)v(c^m)$ él csak 1-es terméket tud szállítani, hogyha h a c első jelentkezősében van, és csak 2-es terméket különben. A nem sima párok esetét később részletezzük, de azoknál is a $v(h)v(c^m)$ él csak garantáltan ez egyik terméket fogja tudni szállítani.

Ezután a h kórház rendezését úgy valósítjuk meg a folyamfeladatban, hogy amennyiben a két $v(h)v(c^m)$ él azonos terméket tud csak szállítani, akkor a $v(h)$ csúcs rendezését használjuk arra, hogy a jobb rezidens felé menő élt kedvelje jobban, ha pedig különböző terméket tudnak szállítani, akkor az $e(h)$ élen rendezzük a két terméket úgy, hogy a jobb rezidens felé menő élen továbbjutó terméket kedvelje jobban.

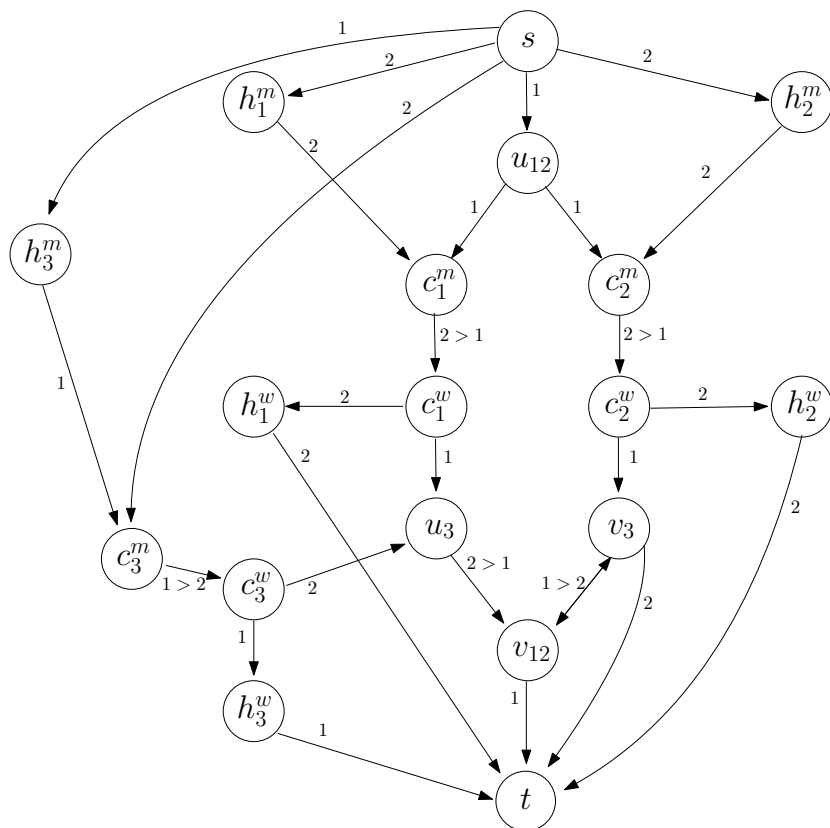
Ehhez hasonlóan minden női kórházhoz is készítünk $v(h)$ csúcsokat, illetve $v(h)t$ és $v(c^w)v(h)$ éleket, melyek kapacitásait és rendezéseit ugyanígy definiáljuk.

Láttuk, hogy a nem sima párok, illetve a nem férfi vagy női kórházak hármasokba oszthatóak, jelöljük ezeket (c_1, c_2, c_3) -al, illetve (h_1, h_2, h_3) -al. Nem sima párok minden ilyen (c_1, c_2, c_3) rendezett hármasa esetén egy G gadgetet készítünk, mely konstrukciója a következő. A gadget a 3 ábrán van illusztrálva a digráfba való beilleszkedésének ábrázolásával együtt.

Először is veszünk négy u_{12}, v_{12}, u_3, v_3 csúcsot, su_{12} , $u_{12}v(c_1^m)$, $u_{12}v(c_2^m)$, $v(c_1^w)u_3$, $v(c_2^w)v_3$ és $v_{12}t$ élekkel. Minden ilyen e élre $c(e) = c^1(e) = 1$, $c^2(e) = 0$. Aztán hozzáadunk még $sv(c_3^m)$, $v(c_3^w)u_3$, v_3t éleket is $c(e) = c^2(e) = 1$, $c^1(e) = 0$ kapacitásokkal. Végül, hozzáadunk még egy u_3v_{12} élt $c(u_3v_{12}) = c^1(u_3v_{12}) = c^2(u_3v_{12}) = 1$ kapacitásokkal, és $2 > 1$ rendezéssel, valamint egy speciális kétirányú $v_{12}v_3$ élt, ami v_{12} felé csak az egyes terméket, v_3 felé pedig csak a 2-es terméket tudja szállítani $c(v_{12}v_3) = c^1(v_{12}v_3) = c^2(v_{12}v_3) = 1$ kapacitásokkal és $1 > 2$ rendezéssel. Ezt a speciális élt egy szubgadgettel tudjuk kivitelezni: vegyünk fel két új v'_3 és v'_{12} csúcsot, és a $v_{12}v_3$ él helyett $v_3v'_3$, $v'_{12}v_{12}$, $v_{12}v'_3$ és $v'_{12}v_3$ éleket. $v_{12}v_3$ és $v'_{12}v_{12}$ 1 kapacitású és csak 1-es terméket tud szállítani, $v_{12}v'_3$ és $v'_{12}v_3$ pedig csak 2-es terméket. Végül adjunk még hozzá a szubgadgethez egy $v'_3v'_{12}$ élt, $c(v'_3v'_{12}) = c^1(v'_3v'_{12}) = c^2(v'_3v'_{12}) = 1$ kapacitásokkal és $1 > 2$ rendezéssel. Ezen a gadgeten át az egyes termékek csak a megfelelő irányban tudnak átmenni, de mindkét irányban használniuk kell az $1 > 2$ rendezésű $v'_3v'_{12}$ élt. És mivel ezen él összkapacitása is 1, így legfeljebb az egyik irányban folyhat át a folyam. A későbbiekben ezt a szubgadgetet egyetlen, kétirányú $v_{12}v_3$ élnek tekintjük majd. A gadget dedikált éleire úgy fogunk hivatkozni mint *gadget-élek*. A hármashoz tartozó G gadget csúcsai közül csak u_{12} és v_{12} számára kell megadni preferenciát, hisz a többi csúcson minden termékhez legfeljebb egy kimenő és egy bemenő él tartozik. Legyen ez a két rendezés $u_{12}v(c_1^m) >_{u_{12}} u_{12}v(c_2^m)$ és $u_3v_{12} >_{v_{12}} v_3v_{12}$.

Mostmár rátérhetünk a nem sima párokhoz tartozó rendezésekre és kapacitásokra. Ha egy c_j nem sima pár első helyen lévő jelentkezője (h_j, h'_j) , akkor a $v(h_j)v(c_j^m)$ és $v(c_j^w)v(h'_j)$ csak 2-es terméket tudnak szállítani, ha $j = 1, 2$ illetve csak 1-es terméket, ha $j = 3$. Továbbá a $v(c_j^m)v(c_j^w)$ élek preferenciája legyen $2 > 1$, $j = 1, 2$ -re és $1 > 2$, $j = 3$ -ra (azaz itt is a jobb jelentkezéshez tartozó terméket kedvelik jobban, viszont itt az nem mindig az 1-es).

A hálózat folyamjait és a HRC allokációit a következőképp feleltethetjük meg egymásnak. Ha egy sima pár $e(c)$ élén 1-es termék folyik, akkor c -t a jobb jelentkezéséhez allokáljuk, ha 2-es akkor a rosszabbikhoz, különben sehova. Speciálisan ekkor a megfelelő folyam csak egy $v(h)v(c^m)$ élén érkezik és egy $v(c^w)v(h')$ élén távozik, ahol h, h' a jelentkezéshez tartozó kórházak. A nem sima párok esetén is hasonlóan járunk el. Ha a jobb termék folyik át az élükön, akkor a jobb helyükre kerülnek, ha pedig a rosszabb, akkor a rosszabbhoz, különben sehova. Ami fontos különbség, hogy a rosszabb jelentkezéshez tartozó folyam ekkor nem kórházakhoz tartozó éleken érkezik és távozik, hanem gadget-éleken. Fordítva, ha egy sima pár a (h, h') párhoz van allokálva, akkor a $s \rightarrow v(h) \rightarrow v(c^m) \rightarrow v(c^w) \rightarrow v(h') \rightarrow t$ úton küldünk egy 1 méretű folyamatot a megfelelő termékből, hasonlóan akkor is, ha c nem sima, de egy (h, h') férfi, illetve női-kórház párhoz került. Ha a rosszabbikhoz került, akkor attól függően, hogy c hanyadik a megfelelő (c_1, c_2, c_3) hármashoz, a $s \rightarrow u_{12} \rightarrow v(c_1^m) \rightarrow v(c_1^w) \rightarrow u_3 \rightarrow v_{12} \rightarrow t$ úton küldünk 1 méretű folyamatot az első termékből, ha $c = c_1$; a $s \rightarrow u_{12} \rightarrow v(c_2^m) \rightarrow v(c_2^w) \rightarrow u_3 \rightarrow v_{12} \rightarrow t$ úton az 1-es termékből, ha $c = c_2$, illetve a $s \rightarrow v(c_3^m) \rightarrow v(c_3^w) \rightarrow u_3 \rightarrow v_{12} \rightarrow v_3 \rightarrow t$ úton a 2-es termékből, ha $c = c_3$.



3. ábra. A 5.8 tételben használt gadget. A h_i^m és h_i^w kórházak c_i első helyen lévő kórházai. Az 1 címke egy élen azt jelenti, hogy $c^1(e) = 1$, $c^2(e) = 0$, hasonlóan a 2-es címke, hogy $c^1(e) = 0$, $c^2(e) = 1$, a míg $1 > 2$, $2 > 1$ címkék az élek rendezéseit jelentik, amennyiben mindkét terméket továbbítani tudják.

5.9. Lemma. *Ha M egy megengedhető párosítás $\mathcal{I}$ -ben, akkor a belőle konstruált f folyam megengedhető $\mathcal{I}'$ -ben és fordítva.*

Bizonyítás. Legyen M egy megengedhető párosítás. Ekkor minden pár legfeljebb egy helyre van felvéve, és minden kórháznál legfeljebb egy rezidens van. Ebből már azonnal következik, hogy minden nem gadget élen legfeljebb 1 méretű folyam megy, és olyan termékből amiből szabad. Továbbá, mivel a c_1, c_2, c_3 hármashból egyszerre csak egy lehet felvéve a három hozzájuk tartozó h_1, h_2, h_3 kivételes kórházak valamelyikébe, ezért a gadgeteken át is csak egy darab, egy méretű megengedett folyam folyik, így f valóban megengedett.

A másik irányhoz pedig azt használjuk, hogy mivel minden párhoz tartozó él kapacitása 1, így csak egy helyre lehetnek felvéve, és hasonlóan a férfi; illetve női-kórházak is csak legfeljebb egy jelentkezőt kapnak. A többi kórház megengedettségéhez pedig azt kell csak észrevenni, hogy a gadgeteken belüli $s \rightarrow u_{12} \rightarrow v(c_1^m) \rightarrow v(c_1^w) \rightarrow u_3 \rightarrow v_{12} \rightarrow t$, $s \rightarrow u_{12} \rightarrow v(c_2^m) \rightarrow v(c_2^w) \rightarrow u_3 \rightarrow v_{12} \rightarrow t$ és $s \rightarrow v(c_3^m) \rightarrow v(c_3^w) \rightarrow u_3 \rightarrow v_{12} \rightarrow v_3 \rightarrow t$ utak közül is csak legfeljebb az egyiken folyhat folyam, hisz bármely kettőnek van közös éle, így minden (c_1, c_2, c_3) hármashból legfeljebb az egyik pár tagjai vétetnek fel a h_1, h_2, h_3 kórházak valamelyikébe, és még hozzá a két tag különböző helyre. $\square$

5.10. Lemma. *M stabil akkor és csak akkor, ha a belőle kapott f stabil.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy M stabil, de f nem az. Ekkor létezik egy W blokkoló út egy $l \in \{1, 2\}$ termékre nézve (csak út lehet, mert mindkét termék esetén azon élek, amelyen haladnak aciklikus részgráfot alkotnak).

a) eset W nem tartalmaz gadget élet.

a1) aleset W egy st út.

Ekkor W tartalmaz $sv(h^m)$ élt, egy $e(c)$ élt és egy $v(h^w)t$ élt is. Mind-egyik vagy telítetlen, vagy rosszabb termék folyik rajtuk, azaz c, h^m és h^w mind szigorúan javulna a (c, h^m, h^w) koalícióban, ellentmondásban M stabilitásával.

a2) aleset W nem st út.

Ekkor W vagy egy $v(h^m)$ csúcsban kezdődik, vagy egy $v(h^w)$ csúcsban végződik, vagy mindkettő, mivel nincs más olyan csúcs ahonnan/ahová lenne két azonos terméket szállítani tudó kimenő/bemenő él s, t -n kívül. Ha W $v(h^m)$ -ből indul, akkor $v(h^m)$ -ből folyik a megfelelő termékből egy rosszabb él felé, tehát h -nál egy rosszabb rezidens van, mint amit W -n kap, ha s -ből, akkor pedig h^m üres. Szimmetrikus érvelés működik a W -beli h^w -re is. A W -ban lévő $e(c)$ él párja is vagy nem került sehová, vagy rosszabb helyre került, mint ahova W szerint kerülne. Tehát a (c, h^m, h^w) koalíció ekkor is blokkoló lenne, ellentmondás.

b) eset W tartalmaz gadget-élt.

A gadgetek konstrukciója miatt ekkor az (W, l) pár csak négyféle lehet. Az első, hogy $W = s \rightarrow u_{12} \rightarrow v(c_1^m) \rightarrow v(c_1^w) \rightarrow u_3 \rightarrow v_{12} \rightarrow t$ és $l = 1$, amiből következik, hogy c_1 nincs beosztva sehova (hisz a $v(c_1^m)v(c_1^w)$ élnek 1 a rosszabb termék), továbbá nem folyik a 2-es termékből folyam a gadgeten, mert akkor $(W, 1)$ nem blokkolna az u_3v_{12} miatt, aminek $2 > 1$. Tehát c_3 nincs (h_3, h_1) -hez felvéve, de ekkor meg (c_1, h_1, h_2) blokkolna, ellentmondás.

A második, hogy $W = u_{12} \rightarrow c_1^m \rightarrow c_1^w \rightarrow v_{12}$, $l = 1$. Ekkor c_1 ugyanúgy munkanélküli maradt, c_2 fel van véve (mert folyik u_{12} -n folyam), tehát c_3 nem lehet (h_3, h_1) -hez felvéve, azaz ismét csak (c_1, h_1, h_2) blokkol.

A harmadik, hogy $W = s \rightarrow u_{12} \rightarrow v(c_2^m) \rightarrow v(c_2^w) \rightarrow v_3 \rightarrow v_{12} \rightarrow t$, $l = 1$. Ekkor c_1 nincs (h_1, h_2) -nél (hisz su_{12} telítetlen kell legyen), c_2 pedig nincs felvéve sehova. De ekkor (c_2, h_2, h_3) blokkol, ellentmondás.

A negyedik opció pedig, hogy $W = s \rightarrow v(c_3^m) \rightarrow v(c_3^w) \rightarrow u_3 \rightarrow v_{12} \rightarrow v_3 \rightarrow t$, $l = 2$. Ebből következik, hogy c_3 nincs felvéve sehova, illetve nem folyik 1-es termékű folyam a $s \rightarrow u_{12} \rightarrow v(c_2^m) \rightarrow v(c_2^w) \rightarrow v_3 \rightarrow v_{12} \rightarrow t$ úton át, hisz ekkor W nem blokkolna a v_3v_{12} 1 > 2 rendezése miatt. Azaz c_2 nincs (h_2, h_3) -nál, tehát (c_3, h_3, h_1) blokkol, ismét csak ellentmondás.

Most nézzük a másik irányt. Ehhez tegyük fel, hogy f stabil, de a hozzá tartozó M nem az, vagyik létezik egy (c, h, h') blokkoló koalíció.

a) eset c sima pár.

Ekkor következésképp $h = h^m$ és $h' = h^w$ valamilyen férfi; és női kórházakra. Mivel c (h^m, h^w) jobb, ezért vagy nincs folyam $e(c)$ -n (és így $v(c^m)$ -be menő, illetve $v(c^w)$ -ből induló éleken sem) vagy 2-es termék folyik rajta, amit kevésbé kedvel. A kórházak szintén felvennék c -t, ami a megfelelő csúcsaik és éleik rangsorának definíciója miatt azt jelenti, hogy vagy nincs folyam a $e(h^m/w)$ éleiken, vagy ha van akkor az szintén 1-es termék és rosszabb élen halad tovább/rosszabb élen jön. Könnyű meggondolni, hogy mindegyik esetből azt kapnánk, hogy a $s \rightarrow v(h^m) \rightarrow v(c^m) \rightarrow v(c^w) \rightarrow v(h^w) \rightarrow t$ egy részútja egy blokkoló út lenne az 1-es termékre nézve.

b) eset c nem sima pár.

Ha h és h' most is rendre férfi; és női kórházak, akkor ugyanaz az érvelés működik. Ellenkező esetben három lehetőségünk van.

Ha $(c, h, h') = (c_1, h_1, h_2)$, akkor c_1 nincs felvéve sehova, c_3 pedig nincs (h_3, h_1) , tehát nincs folyam 2-es termékűből a gadgeten át. 1-es termék ugyan folyhat a $s \rightarrow u_{12} \rightarrow v(c_2^m) \rightarrow v(c_2^w) \rightarrow v_3 \rightarrow v_{12} \rightarrow t$ úton át, de mivel $u_{12}v(c_1^m) >_{u_{12}} u_{12}v(c_2^m)$ és $u_3v_{12} >_{v_{12}} v_3v_{12}$, ezért a $W = s \rightarrow u_{12} \rightarrow v(c_1^m) \rightarrow v(c_1^w) \rightarrow u_3 \rightarrow v_{12} \rightarrow t$ vagy a $W = u_{12} \rightarrow v(c_1^m) \rightarrow v(c_1^w) \rightarrow u_3 \rightarrow v_{12}$ út mindenképp blokkolni fog az 1-es termékre nézve, ellentmondás.

Ha $(c, h, h') = (c_2, h_2, h_3)$, akkor c_2 nincs felvéve és c_1 nem lehet (h_1, h_2) -nél, tehát a gadgeten át csak 2-es termék folyhat, de ettől függetlenül a $W = s \rightarrow u_{12} \rightarrow v(c_2^m) \rightarrow v(c_2^w) \rightarrow u_3 \rightarrow v_{12} \rightarrow t$ út blokkol az 1-es termékkel, ellentmondás.

Végül, ha $(c, h, h') = (c_3, h_3, h_1)$, akkor c_3 nem került sehova és c_2 nincs (h_1, h_2) -nél, tehát 1-es termék csak a $s \rightarrow u_{12} \rightarrow v(c_1^m) \rightarrow v(c_1^w) \rightarrow v_{12} \rightarrow t$ úton folyhat, azaz a $W = s \rightarrow v(c_3^m) \rightarrow v(c_3^w) \rightarrow u_3 \rightarrow v_{12} \rightarrow v_3 \rightarrow t$ út blokkol a 2-es termékkel. $\square$

Ezzel beláttuk, hogy $\mathcal{I}$ -ben van egész stabil allokáció akkor és csak akkor, ha $\mathcal{I}'$ -ben van egész stabil 2-termékes folyam, amiből következik, hogy a 2-ISM feladat NP-teljes. $\square$

A 4.4 lemmát használva, a 4.11 tétel és a 5.8 tétel alábbi, erősebb verzióját

is megkaphatjuk.

5.11. Tétel. *A 2-ISMF feladat NP-teljes, a 3-SMF pedig PPAD-teljes még akkor is, ha minden forrás és minden terminál egybeesik, a $>_v^i$ preferenciák ugyanazok minden i -re tetszőleges $v \in V$ esetén, nincsenek termékfüggő kapacitások, valamint $\rho(v) + \delta(v) \leq 3$ minden nem s, t csúcsra.*

5.1. A stabil hipergráf feladat néhány hatékonyan kezelhető esete

Ebben a szekcióban a stabil hipergráf párosítás SHM feladat pár speciális esetére adok hatékony algoritmusokat. Először is szükségünk lesz pár definícióra.

5.12. Definíció. Egy $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráf *részfa hipergráf*, ha létezik egy $T = (V, E)$ fa a V alaphalmazon úgy, hogy minden hiperél egy részfának felel meg.

5.13. Definíció. Egy G gráf egy *szuperorientációja* az élek egy olyan megírnyítása, ahol egy élt akár mindkét irányban megírányíthatunk (de attól még egy élnek tekintjük).

5.14. Definíció. G egy szuperorientációja *klikk-aciklikus*, ha tetszőleges K klikkre a K által feszített $G[K]$ gráfban nincs csak egyfelé irányított éleket tartalmazó egyirányú kör.

5.15. Definíció. Egy G szuperorientált gráfnak egy $K \subset V$ csúcshalmaza *kernel*, ha K pontjai irányítatlan értelemben függetlenek, továbbá minden $v \notin K$ csúcsra létezik olyan $u \in K$, amire uv (egy esetleg kétirányú) él.

5.16. Definíció. Egy G gráf *perfekt*, ha tetszőleges feszített részgráfjában a maximális klikk mérete megegyezik a kromatikus számával.

A perfekt gráfok egy fontos részosztályát alkotják a merevkörű gráfok.

5.17. Definíció. Egy G gráf *merevkörű*, ha tetszőleges legalább 4 hosszú feszített köre tartalmaz átlót.

Az alábbi egy jól ismert tétel:

5.18. Tétel. *Ha egy G gráf merevkörű, akkor előáll egy $\mathcal{H}$ fametszet hipergráf élgráfjaként. Fordítva, minden $\mathcal{H}$ fametszet hipergráf élgráfja merevkörű.*

A kernelekkel kapcsolatos egyik legfontosabb tétel a következő:

5.19. Tétel. *Boros és Gurvich [4] Tetszőleges perfekt gráf tetszőleges klikk aciklikus szuperorientációjában van kernel.*

Az alábbi pedig egy viszonylag új és érdekes eredmény.

5.20. Tétel. *[18] (Pass-Lanneau) Létezik olyan polinomális algoritmus, amely egy merevkörű gráf tetszőleges szuperorientációja esetén talál egy kernelt.*

Most megmutatjuk, hogy csupa 1 kapacitások esetén részfa hipergráfokra a SHM hatékonyan megoldható.

5.21. Tétel. *Ha $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ részfa hipergráf, és minden kapacitás 1, akkor tetszőleges szigorú rendezések esetén létezik egész stabil párosítás, ami meg is található polinomiális időben.*

Bizonyítás. Visszavezetjük a problémát egy kernel keresésére egy klikk-aciklikusan irányított merevkörű digráfban, mely a 5.1 tétel alapján polinom időben megoldható. Vegyük H élgráfját, azaz azt a gráfot, aminek v_F csúcsai $\mathcal{H}$ F hiperéleinek felelnek meg, és két csúcs pontosan akkor van összekötve, ha a megfelelő hiperélek metszik egymást. Mivel H részfa hipergráf, ezért a 5.18 tétel alapján az élgráfja merevkörű.

Most definiálunk egy szuperorientációt az éleken. Vegyünk egy $v_E v_F$ élet. Ha $E \cap F$ minden közös csúcsa E -t kedveli jobban, mint F -et, akkor az élt v_F -felé irányítjuk. Ha minden közös csúcs F -et preferálja, akkor v_E -felé. Különbö pedig mindkét irányba. Ez a szuperorientáció klikk aciklikus, hisz egy fa részfái Helly tulajdonságúak, azaz ha $F_1, \dots, F_k$ közül bármely kettő metszi egymást, akkor az összesnek van közös pontja. Ekkor egy ilyen közös pont rendezése alapján legjobb hiperélhez tartozó csúcsba nem mehet egyirányú él, tehát nem lehet benne egyirányú körben, és hasonló érvelést alkalmazva minden részklikkre is kapjuk, hogy minden klikk klikk-aciklikus lesz.

Tegyük fel, hogy találtunk ebben a szuperorientált élgráfban egy K . Megmutatjuk, hogy a K -beli csúcsokhoz tartozó hiperélek egy stabil párosítást alkotnak. Először is, mivel K pontjai függetlenek, így az így kapott M élhalmaz valóban egy párosítás. Másrészt, ha lenne egy F blokkoló él M -re nézve, az azt jelentené, hogy F minden csúcsa vagy nem párosított vagy rosszabb hiperélt kapott. Ha egyik csúcs sem párosított, akkor V_F -be nem lépne él K -ból, ellentmondás. Különbö pedig minden F -et metsző $E \in M$ élre $F \cap E$ pontjai F -et kedvelik jobban, azaz minden olyan $u \in K$ -ra, amire van uv_F él az élgráfban az u felé van irányítva, ismét csak ellentmondásban azzal, hogy K kernel. $\square$

Egy természetesen felmerülő kérdés, hogy vajon akkor is megoldható marad-e a probléma, ha nem csak csupa 1 kapacításokat engedélyezünk. Sajnos a válasz nem, már nagyon speciális esetekben is.

5.22. Tétel. *Annak eldöntése, hogy létezik-e egész stabil megoldás egy SHM feladatban NP-teljes még akkor is, ha a hipergráf részfa hipergráf, és egy csúcs kivételével minden kapacitás 1.*

Bizonyítás. A stabil család feladatot fogjuk visszavezetni. Legyenek H csúcsai a stabil család feladat hipergráfjának csúcsai egy x új csúccsal kiegészítve. Továbbá a hiperéleket úgy kapjuk, hogy minden eredeti hiperélt kibővítünk x -el. Az eredeti csúcsok kapacitása továbbra is 1 lesz, x kapacitása pedig a hiperélek száma plusz 1. Ekkor könnyű meggondolni, hogy az új x csúcsnak semmilyen jelentősége sem lesz a stabilitás és megengedettség szempontjából, így a két feladat egész (és tört) stabil megoldásai egybeesnek. Továbbá, ez az új hipergráf

már részfa hipergráf lesz, hisz ha T -t egy x csúcsú csillagnak választjuk, akkor mivel minden hiperél tartalmazza x -et, így mind egy részfat definiál. $\square$

5.23. Megjegyzés. Ugyanezzel a konstrukcióval az is belátható, hogy a 5.22 tételben szereplő hipergráfokra már tört stabil megoldás keresése is PPAD-teljes.

Végezetül megmutatjuk, hogy amennyiben a hipergráf lamináris, (azaz bármely két metsző hiperél közül az egyik tartalmazza a másikat) akkor mindig létezik egész stabil megoldás tetszőleges kapacitások esetén is, továbbá egy ilyen található is hatékonyan.

Algorithm 2

```

 $\mathcal{S} := \emptyset$   $\triangleright \mathcal{S}$  lesz az aktuális párosítás
 $\mathcal{C} := \emptyset$   $\triangleright \mathcal{C}$  lesz a már ellenőrzött hiperélek halmaza
while  $\mathcal{E} \setminus \mathcal{C} \neq \emptyset$  do
    Vegyünk egy tartalmazásra nézve minimális  $F \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{C}$  hiperélet.
    if  $F$  nem blokkoló a  $(V, \mathcal{S} \cup F)$  hipergráfban  $\mathcal{S}$ -re nézve then
         $\mathcal{C} := \mathcal{C} \cup \{F\}$ 
         $\mathcal{S} := \mathcal{S}$ 
    else if  $F$  blokkoló  $\mathcal{S}$ -re nézve then
         $\mathcal{C} := \mathcal{C} \cup \{F\}$ 
         $\mathcal{S} := \mathcal{S} \cup \{F\}$ 
        Ha  $F$  egyes csúcsai túltelítetté váltak, akkor minden ilyen csúcsnak
        vegyük a legrosszabb hiperélét és ezek halmazából dobjuk ki a tartalmazásra
        nézve maximálisokat.
    end if
end while

```

5.24. Lemma. *Az algoritmus polinomiális futásidejű, továbbá a talált $\mathcal{S}$ párosítás stabil.*

Bizonyítás. Mivel minden olyan alkalommal, amikor egy csúcs túltelítetté válik kidobunk egy őt tartalmazó hiperélt, így a kapacitásfeltételek nyilván teljesülnek, tehát $\mathcal{S}$ megengedett.

Tegyük fel, hogy van egy F blokkoló hiperél $\mathcal{S}$ -re nézve.

Ha F sose került be $\mathcal{S}$ -be, akkor amikor az algoritmusban sorra került, volt egy v csúcs, ami telített volt számára jobb hiperélekkel. Mivel az algoritmus mindig egy tartalmazásra nézve minimális hiperélt választ, ezért minden olyan F után jövő hiperél, ami tartalmazza v -t, tartalmazza F -et is. Ezáltal, ha v -ről eltűnik egy hiperél $\mathcal{S}$ -ből az csak azért lehet, mert jött egy olyan F -et tartalmazó hiperél, ami jobb volt v -nek valamelyik hiperélénél, így F -nél is. Továbbá v végig telített marad, hisz amikor túltelítetté válik mindig csak egy hiperél dobódik ki róla, hisz egy lamináris rendszer maximális elemei partíciót alkotnak. Azaz v az algoritmus végén is telített van F -nél jobb hiperélekkel, ellentmondás.

Ha F benne volt $\mathcal{S}$ -ben, de kikerült onnan, akkor az csak azért lehetett, mert egy túltelítetté vált v csúcs legrosszabb hiperéle volt. Ugyanazt az érvelést

használva megmutatható, hogy ez a v csúcs ekkor az algoritmus végén is telítve lesz jobb élekkel, ismét ellentmondás.

Mivel minden iterációban egy nem ellenőrzött hiperél ellenőrzötté válik, így az iterációk száma legfeljebb $|\mathcal{E}|$. Az egyes iterációk pedig szintén polinom időben végrehajthatóak, hisz egy hiperél blokkolásának eldöntése, illetve a legrosszabb hiperélek megtalálása is könnyen megy lineáris időben.

□

6. Zárszó és nyitott kérdések

Ebben a dolgozatban a stabil párosítás probléma különféle általánosításainak nehézségét vizsgáltuk és mutattunk pozitív és negatív bonyolultsági eredményeket, utóbbiakat még nagyon szigorú megkötések mellett is.

Láttuk, hogy ezen eredmények azt is implikálják, hogy az olyan egész stabil megoldások keresésére, amelyeknél a kapacitások kicsit módosíthatóak, egy tört stabil megoldás kikerekítése valószínűleg nem tud hatékony lenni, így teljesen más megközelítésre lenne szükség, mely egy érdekes jövőbeli kutatási irány. Szintén nyitott maradt például, hogy az SMF probléma PPAD-nehéz marad-e 2 termék esetén is.

Hivatkozások

- [1] Ron Aharoni és Tamás Fleiner. “On a lemma of Scarf”. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 87.1 (2003), 72–80. old. ISSN: 0095-8956. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0095-8956\(02\)00028-X](https://doi.org/10.1016/S0095-8956(02)00028-X). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S009589560200028X>.
- [2] P. Biró, D. Manlove és Iain McBride. “The Hospitals / Residents Problem with Couples: Complexity and Integer Programming Models”. *ArXiv abs/1308.4534* (2014).
- [3] Péter Biró, Tamás Fleiner és Robert W Irving. “Matching couples with Scarf’s algorithm”. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* 77.3 (2016), 303–316. old.
- [4] Endre Boros és Vladimir Gurvich. “Perfect graphs, kernels, and cores of cooperative games”. *Discrete mathematics* 306.19-20 (2006), 2336–2354. old.
- [5] Ágnes Cseh és Jannik Mattuschke. “New and Simple Algorithms for Stable Flow Problems”. *Algorithmica* 81 (2019. jan.). DOI: 10.1007/s00453-018-00544-7.
- [6] Tamás Fleiner. “On Stable Matchings and Flows”. 7. köt. 2010. jún., 51–62. old. DOI: 10.1007/978-3-642-16926-7_7.

- [7] D. Gale és L. S. Shapley. “College Admissions and the Stability of Marriage”. *The American Mathematical Monthly* 69.1 (1962), 9–15. old. DOI: 10.1080/00029890.1962.11989827. eprint: <https://doi.org/10.1080/00029890.1962.11989827>. URL: <https://doi.org/10.1080/00029890.1962.11989827>.
- [8] Chien-Chung Huang. “Two’s company, three’s a crowd: Stable family and threesome roommates problems”. *European Symposium on Algorithms*. Springer. 2007, 558–569. old.
- [9] Takashi Ishizuka és Naoyuki Kamiyama. “On the Complexity of Stable Fractional Hypergraph Matching”. *ISAAC*. 2018.
- [10] Shiva Kintali és tsai. “Reducibility among Fractional Stability Problems”. *SIAM Journal on Computing* 42.6 (2013), 2063–2113. old. DOI: 10.1137/120874655. eprint: <https://doi.org/10.1137/120874655>. URL: <https://doi.org/10.1137/120874655>.
- [11] Tamás Király és Julia Pap. “Stable Multicommodity Flows”. *Algorithms* 6 (2013. márc.), 161–168. old. DOI: 10.3390/a6010161.
- [12] DE Knuth. “Mariages stables et leurs relations avec d’autres problemes combinatoires, Les Presses de l’Universite de Montreal (1976), English translation by M. Goldstein: Stable Marriage and its Relation to other Combinatorial Problems”. *CRM Proceedings and Lecture Notes*. 10. köt. 1997.
- [13] Young-San Lin és Thanh Nguyen. “On Variants of Network Flow Stability”. (2017. okt.).
- [14] Eric J McDermid és David F Manlove. “Keeping partners together: algorithmic results for the hospitals/residents problem with couples”. *Journal of Combinatorial Optimization* 19.3 (2010), 279–303. old.
- [15] Cheng Ng és Daniel S. Hirschberg. “Three-Dimensional Stable Matching Problems”. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 4.2 (1991), 245–252. old. DOI: 10.1137/0404023. eprint: <https://doi.org/10.1137/0404023>. URL: <https://doi.org/10.1137/0404023>.
- [16] Thành Nguyen és Rakesh Vohra. “Near-Feasible Stable Matchings with Couples”. *American Economic Review* 108.11 (2018. nov.), 3154–69. old. DOI: 10.1257/aer.20141188. URL: <https://www.aeaweb.org/articles?id=10.1257/aer.20141188>.
- [17] Christos H Papadimitriou. “On the complexity of the parity argument and other inefficient proofs of existence”. *Journal of Computer and system Sciences* 48.3 (1994), 498–532. old.
- [18] Adèle Pass-Lanneau, Ayumi Igarashi és Frédéric Meunier. “Perfect graphs with polynomially computable kernels”. *Discrete Applied Mathematics* 272 (2020), 69–74. old.

- [19] Alvin E. Roth. “The Evolution of the Labor Market for Medical Interns and Residents: A Case Study in Game Theory”. *Journal of Political Economy* 92.6 (1984), 991–1016. old. DOI: 10.1086/261272. eprint: <https://doi.org/10.1086/261272>. URL: <https://doi.org/10.1086/261272>.
- [20] Herbert E Scarf. “The core of an N person game”. *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1967), 50–69. old.