

TARKA TURÁN-SZÁMOK

IMOLAY ANDRÁS

KIVONAT. A dolgozatban a Turán-féle tiltott részgráf probléma és a Ruzsa-Szemerédi probléma egy természetes általánosításával foglalkozunk. Jelöljük $\text{ex}_F(n, G)$ -vel a maximális számú éldisjunkt F -másolatok számát, amit el tudunk helyezni n csúcson úgy, hogy ne keletkezzen G -vel izomorf részgráf, aminek minden éle különböző F -másolatból való. Meghatározzuk az $\{F, G\}$ párokat, melyekre $\text{ex}_F(n, G)$ kvadratikusan nagyságrendű, továbbá aszimptotikus eredményeket bizonyítunk, felhasználva számos eszközt, beleértve a regularitási lemmát, szuperszaturációs, illetve gráf pakolással kapcsolatos eredményeket.

1. BEVEZETÉS

Ez a TDK dolgozat a [22] cikk alapján készült, ami közösen íródott Karl Jánossal, Nagy Zoltán Lóránttal és Váli Benedekkel. A kutatást támogatta a magyar REU program. Ezúton is szeretném megköszönni a témavezetőmnek, Nagy Zoltán Lórántnak a rengeteg segítségét.

A dolgozatban egy olyan problémával foglalkozunk, ami a Turán-típusú problémáknak egy természetes általánosítása. Az eredeti Turán-probléma azt kérdezi, hogy legfeljebb hány éle lehet egy n csúcsú egyszerű gráfnak, ami nem tartalmaz egy előre rögzített G gráfot részgráfként. Ebben a dolgozatban tetszőleges F és G gráf esetén szeretnénk meghatározni a legnagyobb számot, amennyi F -másolatot el tudunk helyezni n csúcson úgy, hogy ne keletkezzen olyan G -vel izomorf részgráf, amelynek az élei páronként különböző F -másolatokból kerülnek ki. Rendeljünk minden lehelyezett F -másolathoz egy saját színt, ekkor a megtiltott konfiguráció egy tarka G részgráf, azaz aminek minden éle különböző színű. Ezt a keresett maximumot $\text{ex}_F(n, G)$ -vel jelöljük, és úgy nevezzük, hogy ez az F -tarka Turán száma G -nek, vagy egyszerűen a tarka Turán-száma G -nek, ha F világos a kontextusból. Végig feltesszük, hogy F és G nem tartalmaz izolált csúcsot.

Figyeljük meg, hogy amikor F egy él ($F = K_2$), akkor az eredeti Turán-problémát kapjuk vissza. A Turán-féle tiltott részgráf problémával kapcsolatban Füredi és Simonovits [14] illetve Keevash [23] remek összefoglaló cikkeket írt.

Számos színes verzióját vizsgálták a Turán-problémának mostanában. Alon, Jiang, Miller és Pritikin [1] kezdett el azzal a problémával foglalkozni, hogy egy G gráf szivárvány példányát tiltják meg egy n csúcsú teljes gráf színezésében, melyben minden szín minden csúcs mellett legfeljebb m alkalommal szerepel. Az úgynevezett szivárvány Turán-problémát (rainbow Turán problem) pedig Keevash, Mubayi, Sudakov és Verstaëte [24] vezette be, akik a maximális élszámot akarták meghatározni egy olyan n csúcsú gráfban, melynek van egy jó színezése szivárvány H részgráf nélkül. Keevash, Saks, Sudakov és Verstaëte azt a problémát vizsgálta, hogy legfeljebb hány éle lehet egy n csúcsú multigráfnak, amelynek van egy egyszerű k -élszínezése mely nem tartalmazza H -nak egy szivárvány példányát [25]. Továbbá Conlon és Tyomkyn [6] egy olyan variánst vizsgáltak,

Az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-21-2 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült. Továbbá a szerzőt támogatja a NKFIH pályázat KH130371.

ahol a színek számát kell minimalizálni egy jól színezett egyszerű teljes gráfban, feltéve, hogy nem tartalmaz egy bizonyos F részgráfot ugyanazzal a színezési mintázattal.

A mi problémánk vizsgálatának számos motivációja van. Amellett, hogy általánosítása a klasszikus Turán-problémának, a fent említett extrémális színezési problémák gazdag családjához is hozzátartozik. Figyeljük meg, hogy a pontos vagy aszimptotikus eredmény erősen függhet attól, hogy a G -t kihagyó extrémális gráfok felbonthatóak-e (pontosan vagy aszimptotikusan) éldiszjunkt F -másolatokra. Ez összekapcsolja a kérdésünket egy újabb témakörrel az extrémális gráfelmélet területén belül. Az egyik legfontosabb motiváció, mint majd később látni fogjuk, hogy a problémánk szorosan kapcsolódik a Turán-féle hipergráf problémákhoz is, például a híres Ruzsa-Szemerédi $(6, 3)$ -problémához [31] és általánosításaihoz. Emiatt nem lenne meglepő, ha a számelmélet módszereit is tudnánk alkalmazni, illetve az eredményeket a számelmélet területén hasznosítani. Egy újabb kapcsolatra világít rá az extrémális hipergráfok témakörével az az eset, amikor F és G is klikk. Speciálisan az $\text{ex}_{K_3}(n, K_r)$ értékre pontos eredmény kaphatunk egy STS(n) Steiner-rendszer minimális független halmazának vizsgálatával, ha r elég nagy. Végül, mint látni fogjuk, bizonyos F és G párok esetén az eredmények hozzásegíthetnek Turán-típusú problémákban bizonyos korlátok javításához. Ezt a kapcsolatot az 5. fejezetben részletezzük.

Az alábbiakban formalizáljuk a problémánkat, majd a cikkünk fő eredményeit mutatjuk be.

1.1. Jelölés.

$$\text{ex}_F(n, G) = \max\{k \mid \dot{\bigcup}_{i=1}^k F_i \subseteq K_n, F_i \sim F, \nexists G \subseteq \bigcup_{i=1}^k F_i, \text{ hogy } |E(G) \cap E(F_i)| \leq 1\}.$$

Az a célunk, hogy meghatározzuk adott F és G gráfok esetén a függvény nagyságrendjét, és minél több esetben aszimptotikus, illetve pontos eredményt adjunk. Könnyen látható, hogy $\text{ex}_F(n, G)$ mindig felülről becsülhető az $\text{ex}(n, G)$ Turán-számmal. Bebizonyítjuk, hogy $\text{ex}_F(n, G)$ és $\text{ex}(n, G)$ nagyságrendje megegyezik, amennyiben $\liminf \frac{\text{ex}(n, G)}{\text{ex}(n, F)} > 1$, ezáltal a gráfokból álló (F, G) párok egy nagy családjára meghatározva a függvény nagyságrendjét.

Ebben az irányban a fő eredményünk a következő:

1.2. Tétel. *Pontosan akkor teljesül, hogy $\text{ex}_F(n, G) = \Theta(n^2)$, ha nincs gráfhomomorfizmus G -ből F -be. Amennyiben létezik homomorfizmus G -ből F -be, akkor $\text{ex}_F(n, G) = o(n^2)$.*

Bizonyítottunk egy aszimptotikára vonatkozó tételt is:

1.3. Tétel.

$$\text{ex}_F(n, G) \sim \frac{\text{ex}(n, G)}{e(F)} \sim \frac{1 - \frac{1}{\chi(G)-1}}{2e(F)} n^2,$$

amennyiben $\chi(F) < \chi(G)$.

Most megmutatjuk a kapcsolatot a híres Ruzsa-Szemerédi $(6, 3)$ -probléma és a tarka Turán-probléma egyik esete között. A Ruzsa-Szemerédi probléma, melyet $(6, 3)$ -problémának is szoktak nevezni, azt vizsgálja, hogy legfeljebb hány éle lehet egy n csúcsú gráfnak, melyben minden élet pontosan egy háromszög tartalmaz. Ez lényegében ekvivalens azzal, hogy legfeljebb hány hiperéle lehet egy 3-uniform hipergráfnak n csúcson, ha nincs 6 olyan csúcs, ami 3 vagy több élet feszít. Egyszerű igazolni, hogy a fenti két megfogalmazásra adott válasz mindössze egy lineáris összeadandóban térhet el. Figyeljük meg, hogy elég nagy n esetén egy ilyen extrémális hipergráf szükségszerűen lineáris, és ekkor a kizárt konfiguráció megegyezik a tarka Turán-probléma $F = G = K_3$ esetével.

Mégpedig az nem fordulhat elő, hogy 6 csúcs feszít három háromszöget, melyek páronként egy különböző csúcsban metszik egymást. Brown, Erdős és Sós kérdését, Ruzsa és Szemerédi megválaszolta, a következő tételt bizonyították, a mi jelöléseinket használva.

1.4. Tétel (Ruzsa, Szemerédi [31]).

$$n^2 \exp(-O(\sqrt{\log n})) < \text{ex}_{K_3}(n, K_3) = o(n^2).$$

A dolgozat felépítése a következő: A 2. fejezetében tisztázzuk a legfontosabb jelöléseket, illetve bizonyítunk néhány általános, egyszerű eredményt a tarka Turán-függvénnyel kapcsolatban. Emellett bemutatjuk az 1.2 tétel bizonyításához szükséges eszközöket, többek között a híres Szemerédi-féle regularitási lemmát. A 3. fejezetben bebizonyítjuk az 1.2 és 1.3 tételeket. Ezek után becsléseket adunk néhány érdekes F és G gráf esetében a 4. fejezetben. Többek között megvizsgáljuk a lineáris hipergráf Turán-probléma és tarka Turán-probléma közti szoros kapcsolatot, miszerint $\text{ex}_r^{\text{lin}}(n, G) = \text{ex}_{K_r}(n, G)$, ahol a bal oldal a Berge- G -mentes, lineáris, r -uniform Turán-számot jelöli. A dolgozatot néhány lehetséges alkalmazással és nyitott kérdéssel zárjuk.

2. ELŐZETES ISMERETEK

2.1. Jelölések. Ebben a dolgozatban csak egyszerű gráfokkal foglalkozunk. Egy G gráf esetén jelölje $e(G)$, $v(G)$, $\alpha(G)$ és $\chi(G)$ rendre az élek számát, csúcsok számát, a legnagyobb független halmaz méretét illetve a kromatikus számot a G gráfban. Az index mindig a csúcsok számára utal: P_n , C_n és K_n rendre az n csúcsú utat, kört és teljes gráfot jelöli, $K_{a,b}$ a teljes páros gráfot jelöli a és b méretű csúcsosztályokkal, míg $T_{n,m}$ az n csúcsú Turán-gráf m osztályjal. Legyen $\text{EX}(n, G)$ az olyan n csúcsú és $\text{ex}(n, G)$ élű gráfok halmaza, melyeknek nincs G -vel izomorf részgráfjuk.

Az $e(X, Y)$ jelölést fogjuk használni az X és Y között futó élek számára a $G = (V, E)$ gráfban, ahol X és Y diszjunkt részhalmazai V -nek. Legyen $d(X, Y)$ az X és Y -hoz tartozó élsűrűség (lásd 2.6. definíció). Továbbá $\deg_G(v)$ fogja jelölni a v csúcs fokát a G gráfban.

Most definiáljuk a gráf felfűjtjét. Legyen tetszőleges R gráf és t pozitív egész esetén $R[t]$ az a gráf, melyet úgy kapunk, hogy az R minden v csúcsát egy t -elemű A_v halmazzal helyettesítjük, és $xy \in E(R[t])$ pontosan akkor, ha $uv \in E(R)$, ahol $x \in A_u$ és $y \in A_v$. Az $R[t]$ gráfot az R gráf t -felfűjtjának nevezzük.

Szükségünk lesz Haxell és Rödl egy tételére gráf pakolásokkal kapcsolatban [21]. Ugyanazokat a jelöléseket használjuk, mint az említett cikk, ezeket itt röviden összefoglaljuk. Legyen F és H két gráf. Ekkor $\binom{G}{H}$ a G összes H -val izomorf részgráfjának halmazát jelöli. Egy $\mathcal{A} \subset \binom{G}{H}$ részhalmazt H -pakolásnak nevezünk, ha $\mathcal{A}$ bármely két különböző eleme éldiszjunkt. Legyen $\nu_H(G)$ a legnagyobb H -pakolás mérete. Egy $\psi : \binom{G}{H} \rightarrow [0, 1]$ függvényt töredékes H -pakolásnak nevezünk, ha minden $e \in E(G)$ esetén $\sum_{e \in H' \in \binom{G}{H}} \psi(H') \leq 1$. Ekkor legyen $|\psi| = \sum_{H' \in \binom{G}{H}} \psi(H')$. Egy töredékes H -pakolást maximálisnak nevezünk, ha $|\psi|$ maximális, jelölje ezt a maximumot $\nu_H^*(G)$.

Végül jelölje $\text{ex}(n, H, G)$ a H -val izomorf részgráfok maximális számát egy G -mentes n csúcsú gráfban.

2.2. Alapvető eredmények. Figyeljük meg a tarka Turán-számok monotonitási tulajdonságait.

2.1. Állítás. *Teljesül a monotonitás F -ben, G -ben és n -ben is a következő módon.*

(1) *Ha F az F' egy részgráfja, és G tetszőleges gráf, akkor*

$$\text{ex}_{F'}(n, G) \leq \text{ex}_F(n, G).$$

(2) Ha G_1 a G_2 részgráfja, és F tetszőleges gráf, akkor

$$\text{ex}_F(n, G_1) \leq \text{ex}_F(n, G_2).$$

(3) Ha F és G tetszőleges gráfok, és $n_1 < n_2$, akkor

$$\text{ex}_F(n_1, G) \leq \text{ex}_F(n_2, G).$$

Mutatja a kapcsolatot a problémánk és az eredeti Turán-probléma között, ha F' egy él az (1) egyenlőtlenségben.

2.2. Következmény. Tetszőleges F és G gráfok esetén

$$\text{ex}_F(n, G) \leq \text{ex}(n, G).$$

2.3. Állítás. $\text{ex}_F(n, G) \geq \frac{1}{e(F)} (\text{ex}(n, G) - \text{ex}(n, F)).$

Bizonyítás. Legyen $H \in \text{EX}(n, G)$, és mohón pakoljunk bele annyi F -másolatot, amennyit tudunk. Ekkor legfeljebb $\text{ex}(n, F)$ fedetlen él maradhat, mivel különben még tudnánk lerakni F -másolatot. Ez a konstrukció tehát bizonyítja a lemmát. $\square$

2.3. Fontos lemmák és fogalmak. Ebben a részben összefoglaljuk az ismert lemmákat és tételeket, amiket később használni fogunk.

Szükségünk lesz Erdős és Simonovits [7] következő szuperszaturációs eredményére.

2.4. Tétel (Erdős–Simonovits). Legyen G egy gráf $\chi(G)$ kromatikus számmal. Ekkor tetszőleges $c > 0$ esetén létezik $c' > 0$, hogy ha $\mathcal{G}_n$ egy n csúcsú gráf, melyre $e(\mathcal{G}_n) > (1 - \frac{1}{r-1} + c) \binom{n}{2}$, akkor $\mathcal{G}_n$ legalább $c'n^{v(G)}$ darab G -vel izomorf részgráfot tartalmaz.

Szintén használni fogunk egy pakolással kapcsolatos tételt, melyet Haxell és Rödl [21] bizonyított.

2.5. Tétel (Haxell–Rödl). Legyen H egy rögzített szám és $\eta > 0$ konstans. Ekkor létezik egy N szám, melyre minden $n > N$ csúcsú G gráf esetén

$$\nu_H^*(G) - \nu_H(G) \leq \eta n^2.$$

Az egyik legerősebb eszköz a bizonyításainkban a Szemerédi-féle regularitási lemma lesz. A [26] cikkben szereplő tételeket és jelöléseket használjuk, de a szükséges definíciókat és eredményeket itt is összefoglaljuk.

2.6. Definíció (Sűrűség). Legyen $\mathcal{G} = (V, E)$ egy gráf, és $X, Y \subset V$ két diszjunkt részhalmaz. Ekkor az X és Y -hoz tartozó (él)sűrűséget a következő formula adja meg:

$$d(X, Y) = \frac{e(X, Y)}{|X| \cdot |Y|}.$$

2.7. Definíció (Regularitási feltétel). Legyen $\varepsilon > 0$. Adott a $\mathcal{G} = (V, E)$ gráf és $A, B \subset V$ diszjunkt halmazok. Azt mondjuk, hogy az (A, B) pár reguláris, ha minden $X \subset A$ és $Y \subset B$ részhalmazokra, melyekre $|X| > \varepsilon|A|$ és $|Y| > \varepsilon|B|$, az is teljesül, hogy

$$|d(X, Y) - d(A, B)| < \varepsilon.$$

Most kimondjuk a híres Szemerédi-féle regularitási lemmát.

2.8. Tétel (A Szemerédi-féle regularitási lemma fokos alakja). Minden $\varepsilon > 0$ számra létezik egy M , hogy minden $\mathcal{G}$ gráf és $0 \leq d \leq 1$ esetén a $\mathcal{G}$ csúcsainak létezik egy $V_0, V_1, \dots, V_k$ partíciója, illetve létezik egy $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ részgráf a következő tulajdonságokkal.

(1) $k \leq M$,

(2) $|V_0| \leq \varepsilon|V|$, $|V_i| = m$ minden $1 \leq i \leq k$ számra és valamilyen m konstansra,

- (3) $\deg_{G'}(v) > \deg_G(v) - (d + \varepsilon)|V|$ minden $v \in V(\mathcal{G})$ csúcsra,
 (4) $e(\mathcal{G}'(V_i)) = 0$ minden $i \geq 1$, és minden $1 \leq i < j \leq k$ párra $\mathcal{G}'(V_i, V_j)$ ε -reguláris 0, vagy legalább d sűrűséggel.

Könnyű látni (és szerepel a [26] cikkben is), hogy ekkor a $\mathcal{G}'' = \mathcal{G}' - V_0$ gráfra

$$e(\mathcal{G}'') > e(\mathcal{G}) - (d + 3\varepsilon)\frac{n^2}{2}.$$

Végül szükségünk lesz az úgynevezett kulcs lemmára, ami gyakran előkerül a regularitási lemmával együtt.

2.9. Lemma (Kulcs lemma). *Adott egy $d > \varepsilon > 0$, egy R gráf és egy m pozitív egész szám. Az R gráf segítségével definiáljunk egy $\mathcal{G}$ gráfot úgy, hogy R minden v csúcsát egy m -elemű A_v halmazzal helyettesítjük, és minden $uv \in E(R)$ esetén úgy rakunk be éleket $\mathcal{G}$ -be, hogy (A_u, A_v) ε -reguláris legyen legalább d sűrűséggel, és ezek mellett nincs több éle $\mathcal{G}$ -nek, azaz $\mathcal{G} \subset R[m]$, ahol $R[m]$ az m -felfűjtja az R gráfnak. Legyen H egy gráf $\Delta > 0$ maximális fokszámmal, melyre $H \subset R[t]$ valamilyen t konstansra. Legyen továbbá*

$$\varepsilon_0 = \frac{(d - \varepsilon)^\Delta}{2 + \Delta}.$$

Tegyük fel, hogy $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ és $t - 1 \leq \varepsilon_0 m$. Ekkor a $\mathcal{G}$ gráf H -val izomorf részgráfjainak a száma legalább $(\varepsilon_0 m)^{v(H)}$.

3. A FŐ TÉTELEINK BIZONYÍTÁSA

Az 1.3. tétel bizonyítása. Azt szeretnénk megmutatni, hogy $\chi(F) < \chi(G)$ esetén

$$\text{ex}_F(n, G) \sim \frac{\text{ex}(n, G)}{e(F)} \sim \frac{1 - \frac{1}{\chi(G)-1}}{2e(F)} n^2.$$

Nekünk csak az első aszimptotikus ekvivalenciát kell bizonyítani, mivel a második az Erdős-Stone-Simonovits tétel [8] következménye.

A bizonyítás fő ötlete a következő. Vegyünk $\text{EX}(n, G)$ -beli extrémális gráfot. Az alsó becsléshez ebbe a gráfba pakolunk F -másolatokat, míg a felső becsléshez szupersaturációt alkalmazunk.

Az alsó becsléssel kezdjük. Legyen $r = \chi(G)$ és $\varepsilon > 0$ adott. Erdős és Simonovits [14] aszimptotikus struktúratétele szerint a $T_{n,r-1}$ Turán-gráf közel van (módosítási távolság szerint, azaz hogy hány élet kell kicserélni) az összes n csúcsú, G -mentes extrémális konstrukcióhoz. Ha a $T_{n,r-1}$ osztályai nem egyenlő méretűek, akkor töröljük minden nagyobb osztályból egy csúcsot a rájuk illeszkedő élekkel együtt.

Nevezzük ezt a gráfot $\mathcal{G}_{n'}$ -nek. Kevesebb, mint $n(r-1)$ élet töröltünk $T_{n,r-1}$ -ből, így az Erdős-Stone-Simonovits tétel [8] szerint $e(\mathcal{G}_{n'}) > \text{ex}(n, G) - \varepsilon n^2$, ha n elég nagy.

Most belátjuk, hogy $\mathcal{G}_{n'}$ majdnem lefedhető éldiszjunkt F -másolatokkal. Ehhez a 2.5. tételt fogjuk alkalmazni. Tekintsük $\mathcal{G}_{n'}$ összes F -fel izomorf részgráfját, ilyen létezik, ha $n > (r-1)v(F)$. A $\mathcal{G}_{n'}$ gráf szimmetriája miatt minden élt pontosan ugyanannyi F -másolat fed, nevezzük ezt a számot m -nek. Legyen $\psi = \frac{1}{m}$ minden F -másolatra, ezzel $\nu_F^*(\mathcal{G}_{n'}) = \frac{e(\mathcal{G}_{n'})}{e(F)}$, mivel ennél világos, hogy nem lehet nagyobb.

Így a Haxell-Rödl tétel (2.5. tétel) szerint, ha n elég nagy, akkor létezik egy legalább $\nu_F^*(\mathcal{G}_{n'}) - \varepsilon n^2$ méretű F -pakolása a $\mathcal{G}_{n'}$ gráfnak. Ezzel kaptunk egy olyan konstrukciót, amiben nincs tarka G -másolat, mivel egyáltalán nincs benne G -másolat. Tehát elég nagy n esetén

$$\text{ex}_F(n, G) \geq \nu_F^*(\mathcal{G}_{n'}) - \varepsilon n^2 = \frac{e(\mathcal{G}_{n'})}{e(F)} - \varepsilon n^2 \geq \frac{\text{ex}(n, G)}{e(F)} - 2\varepsilon n^2,$$

így $\text{ex}_F(n, G) \geq \frac{\text{ex}(n, G)}{e(F)} - o(n^2)$ ahogy $n \rightarrow \infty$.

Most rátérünk a felső becslés bizonyítására. Legyen $k = \text{ex}_F(n, G)$, és legyen $\mathcal{G}_n$ egy extrémális konstrukció, mely k darab F -másolatból épül fel. Indirekten tegyük fel, hogy létezik egy $c > 0$ konstans, melyre nagy n mellett $e(\mathcal{G}_n) = k \cdot e(F) > (1 - \frac{1}{r-1} + c) \binom{n}{2}$.

Ekkor a 2.4. tétel miatt létezik egy $c' > 0$, hogy $\mathcal{G}_n$ legalább $c'n^{v(G)}$ darab G -vel izomorf részgráfot tartalmaz.

Számoljuk meg a $(H, \{e, f\})$ rendezett párokat, ahol H egy G -vel izomorf részgráfja $\mathcal{G}_n$ -nek, és $\{e, f\}$ egyszínű élek H -ban. Nevezzük l -nek az ilyen párok számát. Az indirekt feltevésünk szerint nincs tarka G -másolat, így minden G -másolatban van legalább egy egyező színű élpár, tehát $l \geq c'n^{v(G)}$.

Most becsüljük meg máshogy is ezt a mennyiséget. Összesen $k \binom{e(F)}{2}$ egyszínű élpár van $\mathcal{G}_n$ -ben, és tetszőleges élpár végpontjai legalább 3 csúcst meghatároznak, így tetszőleges élpár esetén legfeljebb $n^{v(G)-3}$ darab G -vel izomorf részgráf lehet $\mathcal{G}_n$ -ben, mely mindkét élet tartalmazza. Emiatt $l \leq k \binom{e(F)}{2} n^{v(G)-3}$. A két becslést összevetve kapjuk, hogy

$$c'n^3 \leq k \binom{e(F)}{2}.$$

Vegyük észre, hogy $n^2 \geq e(\mathcal{G}_n) = ke(F)$, így

$$c'n^3 \leq \frac{n^2}{e(F)} \binom{e(F)}{2},$$

ami nagy n számokra nem igaz, ellentmondás.

Tehát $\text{ex}_F(n, G) \leq \frac{1 - \frac{1}{r-1}}{2e(F)} n^2 + o(n^2)$ ahogy $n \rightarrow \infty$, és éppen ezt akartuk. $\square$

Az 1.2. tétel bizonyítását két részre bontjuk.

3.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy F és G olyan gráfok, hogy nincs G -ből F -be menő homomorfizmus. Ekkor*

$$\text{ex}_F(n, G) \geq \frac{1}{v(F)^2} n^2 - o(n^2).$$

Bizonyítás. Vegyünk egy m pozitív egész számot, és tekintsük az $F[m]$ felfújtját az F gráfnak. Ekkor $F[m]$ -nek nincs G -vel izomorf részgráfja, mivel az megadna egy homomorfizmust G -ből F -be. Nagy F -pakolást szeretnénk $F[m]$ -be, amit a 2.5. tétel segítségével gyártunk le. Egyszerű maximális töredékes F -fedést adni a következő módon. Legyen $\mathcal{A}$ azon $F[m]$ -beli feszítő részgráfok halmaza, melyeket egy olyan csúcshalmaz feszít, ami $F[m]$ minden osztályát pontosan egy csúcsban metszi. Világos, hogy minden $\mathcal{A}$ -beli részgráf F -fel izomorf, és minden élt pontosan ugyanannyi $\mathcal{A}$ -beli részgráf tartalmaz. Tehát tudunk minden $\mathcal{A}$ -beli részgráfra ugyanakkora súlyt rakni, és minden másra 0-t úgy, hogy minden élen 1 legyen az összeg. Így

$$\nu_F^*(F[m]) = \frac{e(F[m])}{e(F)} = m^2.$$

Most használjuk a 2.5. tételt, amiből $\nu_F(F[m]) = m^2 - o((m \cdot v(F))^2)$. Emiatt ha $v(F) \mid n$, akkor

$$\text{ex}_F(n, G) \geq \nu_F \left(F \left[\frac{n}{v(F)} \right] \right) = \frac{n^2}{v(F)^2} - o(n^2) = \Theta(n^2),$$

és innen az $\text{ex}_F(n, G)$ függvény monotonitása miatt következik az állítás. $\square$

3.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy G és F olyan gráfok, hogy létezik homomorfizmus G -ből F -be. Ekkor $\text{ex}_F(n, G) = o(n^2)$.*

Bizonyítás. Egyszerűség kedvéért legyen $t = v(G)$. Indirekten tegyük fel, hogy létezik $c > 0$, hogy minden n_0 esetén van egy $\mathcal{G}_n$ gráf $n > n_0$ csúccsal és legalább cn^2 éllel, mely éldiszjunkt F -másolatok uniójaként épül fel, és nem tartalmaz tarka, G -vel izomorf részgráfot. Azt bizonyítjuk, hogy ekkor létezik egy $c' > 0$, melyre $\mathcal{G}_n$ legalább $c'n^t$ darab G -másolatot tartalmaz. Elég ezt igazolni, innentől ugyanúgy ellentmondást kapunk, mint az 1.3. tételben a felső becslés bizonyításában.

Figyeljük meg, hogy pontosan akkor létezik homomorfizmus G -ből F -be, ha G az $F[s]$ felfűjt gráf részgráfja valamilyen $s > 0$ esetén. Ráadásul ebben az esetben G az $F[t]$ gráfnak is részgráfja. A regularitási lemmát és a kulcs lemmát szeretnénk használni, amihez először megválasztjuk a d és ε konstansokat. Legyen $d = \frac{c}{e(F)}$. Az ε esetén a következő 3 feltételt akarjuk teljesíteni.

- (1) $0 < \varepsilon < d$.
- (2) $\varepsilon \leq \frac{(d-\varepsilon)^\Delta}{2+\Delta}$, ahol $\Delta = \Delta(G)$ a G gráf maximális fokát jelöli. Vegyük észre, hogy

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{(d-\varepsilon)^\Delta}{2+\Delta} = \frac{d^\Delta}{2+\Delta} > 0,$$

így ez teljesül elég kis $\varepsilon > 0$ esetén.

- (3) $\varepsilon < \frac{c}{3e(F)}$.

Válasszunk egy elég kicsi $\varepsilon > 0$ konstanst, melyre mindhárom feltétel teljesül. Legyen

$$\varepsilon_0 = \frac{(d-\varepsilon)^\Delta}{2+\Delta},$$

ahogy a kulcs lemmában. Legyen M a konstans, ami ε -ra van definiálva a regularitási lemma állításában. Legyen továbbá

$$n_0 = \frac{(t-1)M}{(1-\varepsilon)\varepsilon_0}.$$

Látni fogjuk, hogy ez a választás garantálja a $t-1 \leq \varepsilon_0 m$ feltételt, ami szükséges a kulcs lemmához. Legyen $\mathcal{G}_n$ egy olyan gráf, amit fent leírtunk, $n > n_0$ csúccsal. Használjuk a regularitási lemma fokos alakját (2.8. tétel) a $\mathcal{G}_n$ gráfra, és használjuk ugyanazokat a jelöléseket. Azaz legyen $V_0, V_1, \dots, V_k$ a csúcsok megfelelő partíciója, ahol $|V_i| = m$ minden $i \geq 1$ esetén. Továbbá legyen $\mathcal{G}'$ a regularitási lemmában definiált gráf, és $\mathcal{G}'' = \mathcal{G}' \setminus V_0$. Definiáljuk az R gráfot, melyet úgy kapunk, hogy a csúcsai a $V_1, V_2, \dots, V_k$ halmazokhoz tartoznak, és két csúcs akkor van összekötve, ha köztük pozitív a sűrűség $\mathcal{G}'$ -ben. Speciálisan $\mathcal{G}''$ az $R[m]$ felfűjt gráf részgráfja.

A d és ε választása miatt $\frac{d+3\varepsilon}{2} < \frac{c}{e(F)}$, továbbá a regularitási lemma után kimondott következmény miatt $e(\mathcal{G}'') > e(\mathcal{G}_n) - \frac{(d+3\varepsilon)n^2}{2}$. Az indirekt feltevés szerint $e(\mathcal{G}_n) \geq cn^2$, ezeket összevetve kapjuk, hogy

$$e(\mathcal{G}'') > e(\mathcal{G}_n) - \frac{(d+3\varepsilon)n^2}{2} > e(\mathcal{G}_n) - \frac{c}{e(F)}n^2 \geq \frac{e(F)-1}{e(F)}e(\mathcal{G}_n).$$

Ez azt jelenti, hogy valamelyik F -másolatot tartalmazza a $\mathcal{G}'$ gráf. Ebből következik, hogy létezik egy homomorfizmus F -ből R -be. Tudjuk, hogy létezik egy homomorfizmus G -ből F -be, így tranzitivitás miatt G -ből R -be is van homomorfizmus, tehát $G \subset R[t]$.

Vegyük észre, hogy a $\mathcal{G}''$ gráf úgy kapható meg R -ből, ahogy a kulcs lemmában megkaptuk a G -t R -ből, így egyedül a $t - 1 \leq \varepsilon_0 m$ feltételt kell ellenőrizni, hogy tudjuk használni a kulcs lemmát.

$$m = \frac{n - |V_0|}{k} \geq \frac{(1 - \varepsilon)n}{M},$$

mivel $k \leq M$ és $|V_0| \leq \varepsilon n$. Így n_0 definíciója szerint

$$t - 1 = \frac{n_0(1 - \varepsilon)\varepsilon_0}{M} < \varepsilon_0 \cdot \frac{n(1 - \varepsilon)}{M} \leq \varepsilon_0 m.$$

Tehát tényleg teljesülnek a kulcs lemma feltételei, azaz van legalább

$$(\varepsilon_0 m)^t \geq \left(\frac{(1 - \varepsilon)n\varepsilon_0}{M} \right)^t$$

részgráfja $\mathcal{G}''$ -nek, ami G -vel izomorf, így $\mathcal{G}_n$ -ben is van legalább ennyi G -másolat. Következésképpen a $c' = \left(\frac{(1 - \varepsilon)\varepsilon_0}{M} \right)^t$ választás megfelelő. □

A 1.2. tétel bizonyítása. A tétel a 3.1 és 3.2 tételek következménye. □

4. EREDMÉNYEK KONKRÉT GRÁF PÁROK ESETÉN

Érdemes megvizsgálni amikor F vagy G teljes gráf, teljes páros gráf, út vagy körgráf, mivel ilyen esetekben sokszor pontosabb eredményeket is kaphatunk. Először azzal foglalkozunk, amikor G egy $K_{1,s}$ csillag és F tetszőleges gráf. Érdekes módon ebben az esetben a pontos eredmény mindössze F csúcsszámától függ, és független az élek elhelyezkedésétől.

4.1. Állítás. *Ha n elég nagy, akkor*

$$\text{ex}_F(n, K_{1,s}) = \left\lfloor \frac{n(s-1)}{v(F)} \right\rfloor.$$

Bizonyítás. Amennyiben $n = v(F)^{s-1}$, definiáljunk egy $v(F)$ -uniform, $(s-1)$ -reguláris hipergráfot n csúcson a következőképpen. Legyen

$$V = \{(a_1, \dots, a_{s-1}) : 1 \leq a_i \leq v(F) \ \forall i \in [1, s-1]\},$$

és $v(F)$ csúcs pontosan akkor alkot egy hiperélt, ha egy kivételével az összes koordinátájuk megegyezik. Éppen az állítást kapjuk n -re, ha a hipergráf minden élére rakunk egy F -másolatot.

Ha $n = m \cdot v(F)^{s-1} + r$, ahol $m \geq v(F)^{s-1}(s-1)$ és $v(F)^{s-1} > r \geq 0$, akkor készítsünk m diszjunkt másolatot a fenti, $v(F)^{s-1}$ csúcsú konstrukcióból, majd töröljünk egy F -másolatot ezek közül $r(s-1)$ -ben. Ekkor r csúcs egy F -másolatban sem szerepel, $r(s-1)v(F)$ csúcs pontosan $s-2$ darab F -másolatban szerepel, a többi csúcsot pedig $s-1$ darab F -másolat tartalmazza. Ezek után adjunk még hozzá olyan F -másolatokat, amik egyet tartalmaznak az r eddig fedetlen csúcs közül, és $v(F)-1$ különböző csúcsot a többi közül. Így végül minden csúcs $s-1$ darab F -másolatban lesz, kivéve $r(s-1)$ csúcs, ami csak $(s-2)$ -ben. Adjunk még ehhez tetszőleges csúcdiszjunkt F -másolatokat, amíg kevesebb, mint $v(F)$ csúcs marad, amit s -nél kevesebb F -másolat fed. Ez a konstrukció bizonyítja az alsó becslést $n \geq v(F)^{2s-2}(s-1)$ esetén.

Megfordítva, ha van egy csúcs, amit legalább s darab F -másolat tartalmaz, akkor van benne tarka $K_{1,s}$. Tehát minden csúcsot legfeljebb $s-1$ darab F -másolat tartalmazhat, ami bizonyítja a becslés élességét. □

A 2.3. állítás egyszerű alsó becslést ad $\text{ex}(n, F)$ és $\text{ex}(n, G)$ segítségével, ám $\text{ex}(n, F) > \text{ex}(n, G)$ esetén semmitmondó. Így érdemes megvizsgálni néhány ilyen esetet, amikor $G = P_t$. Erdős és Gallai extrémális konstrukciója, ami diszjunkt kis klikkeken alapszik, természetes módon általánosodik, és jó jelölt néhány F esetén extrémális konstrukciónak, ám bizonyos F gráfok esetén teljesen más konstrukciók a befutók.

4.2. Állítás. *Legyen F egy gráf. Ekkor*

- (i) $\text{ex}_F(n, P_3) \sim \frac{n}{v(F)}$
- (ii) $\text{ex}_F(n, P_4) \geq \left\lfloor \frac{n - \alpha(F)}{v(F) - \alpha(F)} \right\rfloor$.
- (iii) *Legyen q a legkisebb szám, melyre K_q tartalmaz $t - 2$ éldiszjunkt F -másolatot. Ekkor $\text{ex}_F(n, P_t) \geq \lfloor \frac{n}{q} \rfloor (t - 2)$.*

Bizonyítás. Az $\text{ex}_F(n, P_3)$ esetet a 4.1. állításban vizsgáltuk. Az (ii) bizonyításához tekintsük F egy S maximális független halmazát, és tekintsünk olyan F -másolatokat, melyek csúcshalmazának metszete éppen S minden F -másolat esetén. Végül (iii) bizonyításához vegyünk $\lfloor \frac{n}{q} \rfloor$ darab q elemű halmazt, és válasszunk $t - 2$ éldiszjunkt F -másolatot minden halmazból. Világos, hogy ez egy tarka P_t nélküli konstrukciót ad. $\square$

Az (iii) állítását $F = K_r$ és $F = P_r$ esetén, valamint Tarski [32] útfelbontással kapcsolatos eredményét használva a következő eredményt kapjuk.

4.3. Következmény. *Legyen $r \geq t - 3$. Ekkor*

$$\text{ex}_{K_r}(n, P_t) \geq (t - 2) \left\lfloor \frac{n}{(t - 2)(r - (t - 1)/2 + 1)} \right\rfloor.$$

Tegyük fel, hogy $r, t \geq 3$. Ekkor

$$\text{ex}_{P_r}(n, P_t) \geq \begin{cases} (t - 2) \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor, & \text{ha } r/2 > t - 2 \\ (t - 2) \left\lfloor \frac{n}{\lceil \sqrt{2(t-2)(r-1)+1} \rceil} \right\rfloor, & \text{különben.} \end{cases}$$

4.1. Kapcsolat a lineáris hipergráf Turán-problémával. Egy $\mathcal{H}$ hipergráf a G gráf Berge-másolata, röviden Berge- G , ha ki tudunk választani $\mathcal{H}$ minden hiperéléből két csúcst, hogy egy G -vel izomorf gráfot kapjunk. Egy $\mathcal{H}$ hipergráfot Berge- G -mentesnek nevezünk, ha nem tartalmaz Berge- G részhipergráfot. Az eredeti Turán-probléma egy aktívan kutatott variánsa (lásd például [16, 17, 28]), hogy mi a maximális $\text{ex}_r(n, G)$ élszám, amennyit egy r -uniform, n csúcsú, Berge- G -mentes hipergráf tartalmazhat. Ennek egy természetes változata, amikor lineáris, r -uniform, n csúcsú hipergráfokra keressük a maximális $\text{ex}_r^{\text{lin}}(n, G)$ élszámot, amennyit egy Berge- G -mentes hipergráf tartalmazhat, ahol a linearitás azt jelenti, hogy bármely két hiperél legfeljebb egy csúcsban metsz. A következőkben megmutatjuk ennek a problémának a kapcsolatát a tarka Turán-problémával, majd áttekintjük az $\text{ex}_r^{\text{lin}}(n, G)$ értékével kapcsolatos főbb eredményeket.

A következő állítás mondja ki a fent említett kapcsolatot.

4.4. Állítás.

$$\text{ex}_{K_r}(n, G) = \text{ex}_r^{\text{lin}}(n, G).$$

Számos eredmény ismert a lineáris, Berge- G -mentes Turán-problémával kapcsolatban, ezekből a következő eredményeket kapjuk.

4.5. Tétel (Ergemlidze, Győri és Methuku [9]).

$$\text{ex}_{K_3}(n, C_4) = \frac{1}{6}n^{3/2} + O(n).$$

és

$$\text{ex}_{K_3}(n, C_5) = \frac{1}{3\sqrt{3}}n^{3/2} + O(n)$$

4.6. Tétel (Füredi, Özkahya [13]).

$$\text{ex}_{K_3}(n, C_{2k+1}) \leq 2kn^{1+1/k} + 9kn$$

4.7. Tétel (Collier-Cartaino, Graber és Jiang [4]).

$$\text{ex}_{K_3}(n, C_k) = O\left(n^{1+\left\lceil\frac{1}{k}\right\rceil}\right).$$

4.8. Tétel (Gerbner, Methuku és Vizer [15]).

$$\text{ex}_{K_r}(n, K_{2,t}) = (1 - o_t(1)) \frac{\sqrt{(t-1)}}{6} n^{3/2}.$$

Rödl és Phelps [29], valamint Sinajova [30] a maximális független halmaz minimális méretét vizsgálták Steiner rendszerekben, illetve általánosabban részleges Steiner r -rendszerekben (lásd még [18, 12]). Be lett bizonyítva általuk a következő tétel.

4.9. Tétel. *A maximális független halmaz minimális mérete egy n rendű Steiner-rendszerben $\Theta(\sqrt{n \log n})$.*

Ebből éles eredményeket bizonyítunk tarka Turán-számokról, amennyiben $F = K_3$ és G egy elég nagy klikk.

4.10. Állítás. *Létezik egy $c > 0$ konstans, melyre $\text{ex}_{K_3}(n, K_t) = \frac{1}{3}\binom{n}{2}$ amennyiben $t > c\sqrt{n \log n}$, és $n \equiv 1, 3 \pmod{6}$.*

Bizonyítás. Létezik n rendű Steiner-rendszer, mivel $n \equiv 1, 3 \pmod{6}$. A 4.9. tétel miatt, ha $t > c\sqrt{n \log n}$ egy megfelelően választott c konstansra, akkor van egy Steiner-rendszer, melyben nincs t méretű független halmaz. Színezzük meg különböző színekkel a Steiner-rendszer halmazait, majd tekintsük a (színezett) árnyékukat, azaz a háromszögeket, amiket meghatároznak. Ekkor nincs többszínű K_t a kapott gráfban, ami bizonyítja a tételt. $\square$

Figyeljük meg, hogy elég nagy t és $n \equiv 5 \pmod{6}$ esetén mindössze egy konstant méretű hiba jelenik meg, mivel majdnem minden él fedhető diszjunkt háromszögekkel. Ezzel ellentétben páros n esetén lineáris méretű hiba keletkezik, mivel minden csúcs mellett legalább egy él fedetlen lesz, ha éldiszjunkt háromszögeket rakunk le.

5. ÖSSZEFOGLALÓ MEGJEGYZÉSEK ÉS NYITOTT KÉRDÉSEK

Ebben a részben felvetünk néhány nyitott kérdést, és meggondoljuk a lehetséges alkalmazásokat.

5.1. Probléma. *Határozzuk meg a gráf párokat, melyekre $\text{ex}_F(n, G) \sim \frac{\text{ex}(n, G)}{e(F)}$.*

Wilson alaptétele szerint [33] elég nagy n esetén a K_n teljes gráf felbontható éldiszjunkt F -másolatokra, feltéve az oszthatósági feltételeket F és K_n élszámával, illetve F fokainak legnagyobb közös osztójával kapcsolatban. Ez azt sugallja, hogy majdnem minden F gráf esetén a tarka Turán-szám $\frac{\text{ex}(n, G)}{e(F)}$, ha G elég nagy fa, hasonlóan, mint a (majdnem) extrémális konstrukció, mely diszjunkt $v(G) - 1$ méretű klikkekből áll.

Azt is sejtjük, hogy $\text{ex}_{K_{1,2}}(n, C_4) = (1 + o(1))\frac{\text{ex}(n, C_4)}{2}$ érvényes. Ha ez igaz lenne, akkor ez Ergemlidze, Győri, Methuku és Salia [11] $\text{ex}(n, C_3, C_5)$ általánosított Turán-száma

vonatkozó bizonyításának javítását jelentené. Bizonyításuk egy pontján ugyanis azt állítják, hogy egy éldiszjunkt cseresznyéből álló halmaz minden eleméből egy él törlése C_4 -mentes gráfot eredményez. Valójában jó lenne egy felső korlátot kapni a többszínű négyszöget nem létrehozó cseresznyék számára, feltételezve, hogy a cseresznyék halmaza nem hoz létre 5-hosszú köröket. Úgy véljük, hogy ilyen feltétel mellett lényegében ugyanúgy lehet extrémális konstrukciókat nyerni, mint ahogyan azt Bollobás és Győri [3] leírja, ami úgy tekinthető, mint a projektív sík incidenciagráfjának kis módosítása, melyben minden egyenesnek megfelelő csúcsot megduplázunk. Itt egy él képe egy cseresznye lesz $(K_{1,2})$. Megjegyezzük, hogy a felső korlátra vonatkozó bizonyításuk óta elérték néhány javítást [10].

5.2. Probléma. *Határozzuk meg az (F, G) gráf párokat, melyekre $\text{ex}_F(n, G) \sim \frac{1}{v(F)^2} n^2$.*

Vegyük észre, hogy ezek pontosan azok a gráfok, ahol a 3.1. tétel alsó becslése aszimptotikusan éles. Úgy gondoltuk, hogy az $F = C_5, G = C_3$ pár példaként szolgál erre a párosztályra, így az extrémális konstrukció lényegében megegyezik a híres Erdős-féle ötszögprobléma megoldásával [19, 20]. Azóta ez a sejtés igazolva is lett a témavezetőm, Nagy Zoltán Lóránt által.

5.3. Probléma. *Határozzuk meg a párokat, melyekre $\text{ex}_F(n, G) = \Theta(\text{ex}(n, G))$.*

A klikkek tarka Turán-számát illetően a nagyságrend nyitott kérdés, ha $F = G$, míg az $F \subset G$ klikkek esetében a végtelen sok n -re vonatkozó pontos eredményt csak akkor ismerjük, ha G nagy, a 4.10 tétel szerint. A következő természetes kérdés vetődik fel.

5.4. Probléma. *Rögzített r esetén határozzuk meg a legkisebb $k = f(r)$ számot, melyre $\text{ex}_{K_r}(n, K_k) = \binom{n}{2} / \binom{r}{2} - O(n)$.*

Érdekes lenne alsó becslést kapni $\text{ex}_{K_r}(n, K_k)$ értékére $r > k$ esetén $n^{2-o(1)}$ alakban is, ami a $(6, 3)$ -problémára vonatkozó eredmény általánosítását adná.

HIVATKOZÁSOK

- [1] Alon, N., Jiang, T., Miller, Z., Pritikin, D. (2003). Properly colored subgraphs and rainbow subgraphs in edge-colorings with local constraints. *Random Structures Algorithms*, 23(4), 409-433.
- [2] Alon, N., Shikhelman, C. (2016). Many T copies in H-free graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*. 121, 146-172
- [3] Bollobás, B., Győri, E. (2008). Pentagons vs. triangles. *Discrete Mathematics*. 308.19, 4332–4336.
- [4] Collier-Cartaino, C., Graber, N., and Jiang, T. (2018). Linear Turán numbers of linear cycles and cycle-complete Ramsey numbers. *Combinatorics, Probability and Computing*, 27(3), 358-386.
- [5] Conlon, D., Gishboliner, L., Levanzov, Y., Shapira, A. (2019). A New Bound for the Brown–Erdős–Sós Problem. *arXiv preprint arXiv:1912.08834*.
- [6] Conlon, D., Tyomkyn, M. (2020). Repeated patterns in proper colourings. *arXiv preprint arXiv:2002.00921*.
- [7] Erdős, P., Simonovits, M. (1983). Supersaturated graphs and hypergraphs. *Combinatorica*, 3(2), 181-192.
- [8] Erdős, P. and Stone, A. H. (1946). On the structure of linear graphs, *Bulletin of the American Mathematical Society* 52, 1087–1091.
- [9] Ergemlidze, B., Győri, E., Methuku, A. (2019). Asymptotics for Turán numbers of cycles in 3-uniform linear hypergraphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 163 163-181.
- [10] Ergemlidze, B., Methuku, A. (2018). Triangles in C_5 -free graphs and Hypergraphs of Girth Six. *arXiv preprint arXiv:1811.11873*.
- [11] Ergemlidze, B., Methuku, A., Salia, N., Győri, E. (2019). A note on the maximum number of triangles in a C_5 -free graph. *Journal of Graph Theory*, 90(3), 227–230.

- [12] Füredi, Z. (1991). Maximal independent subsets in Steiner systems and in planar sets. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 4(2), 196-199.
- [13] Füredi, Z., Özkahya, L. (2017). On 3-uniform hypergraphs without a cycle of a given length. *Discrete Applied Mathematics*, 216, 582-588.
- [14] Füredi, Z., Simonovits, M. (2013). The history of degenerate (bipartite) extremal graph problems. In *Erdős Centennial* (pp. 169-264). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [15] Gerbner, D., Methuku, A., Vizer, M. (2019). Asymptotics for the Turán number of Berge- K_2 , t. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 137, 264-290.
- [16] Gerbner, D., Patkós, B. (2018). *Extremal finite set theory*. CRC Press.
- [17] Győri, E., Lemons, N. (2012). Hypergraphs with no cycle of a given length. *Combinatorics, Probability and Computing*, 21(1-2), 193-201.
- [18] Grable, D. A., Phelps, K. T., Rödl, V. (1995). The minimum independence number for designs. *Combinatorica*, 15(2), 175-185.
- [19] Grzesik, A. (2012). On the maximum number of five-cycles in a triangle-free graph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 102(5), 1061-1066.
- [20] Hatami, H., Hladký, J., Král, D., Norine, S., Razborov, A. (2013). On the number of pentagons in triangle-free graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 120(3), 722-732.
- [21] Haxell, P. E. Rödl, V. (2001). Integer and fractional packings in dense graphs, *Combinatorica* 21, no. 1, 13-38.
- [22] Imolay, A., Karl, J., Nagy, Z. L., Váli, B. (2021). Multicolor Turán numbers. arXiv preprint arXiv:2110.02367.
- [23] Keevash, P. (2011). Hypergraph Turán problems. *Surveys in combinatorics*, 392, 83-140.
- [24] Keevash, P., Mubayi, D., Sudakov, B. and Verstraëte, J. (2007). Rainbow Turán problems. *Combinatorics, Probability and Computing*, 16(1), 109-126.
- [25] Keevash, P., Saks, M., Sudakov, B. and Verstraëte, J. (2004). Multicolour Turán problems. *Advances in Applied Mathematics*, 33(2), 238-262.
- [26] Komlós, J., Simonovits, M. Szemerédi's regularity lemma and its applications in graph theory, *Combinatorics, Paul Erdős is eighty, Vol. 2* (Keszthely, 1993), János Bolyai Math. Soc., Budapest, 1996, pp. 295-352.
- [27] Naor A. and Verstraëte, J. A note on bipartite graphs without $2k$ -cycles, *Combinatorics, Probability and Computing* 14 (2005), no. 5/6, 845-849.
- [28] Palmer, C., Tait, M., Timmons, C. and Wagner, A. Z. (2019). Turán numbers for Berge-hypergraphs and related extremal problems. *Discrete Mathematics*, 342(6), 1553-1563.
- [29] Phelps, K. T., Rödl, V. (1986). Steiner triple systems with minimum independence number. *Ars Combin*, 21, 167-172.
- [30] Rödl, V., Šinajová, E. (1994). Note on independent sets in Steiner systems. *Random Structures & Algorithms*, 5(1), 183-190.
- [31] Ruzsa, I. Z., Szemerédi, E. (1978). Triple systems with no six points carrying three triangles. *Combinatorics* (Keszthely, 1976), Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 18, 939-945.
- [32] Tarsi, M. (1983). Decomposition of a complete multigraph into simple paths: nonbalanced handcuffed designs. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 34(1), 60-70.
- [33] Wilson, R. (1975). Decompositions of complete graphs into subgraphs isomorphic to a given graph. In *Proc. 5th British Combinatorial Conf.*, 1975.