

KNESER-GRÁFOK XOR SZORZATÁNAK KLIKKSZÁMA

IMOLAY ANDRÁS ÉS KOCSIS ANETT

KIVONAT. Ebben a dolgozatban egy gráfelméleti illetve egy vele ekvivalens extrémális halmazelméleti problémát járunk körbe. Hasonló kérdéseket vizsgált cikkében Katona O.H. Gyula [13], és szintén ő vetette fel az általunk vizsgált kérdést. Gráfelméleti megfogalmazásban két izomorf, $KG(N, k)$ Kneser gráf Xor szorzatának klikkszámát vizsgáljuk. Erre az értékre az $f(k, N)$ jelölést vezetjük be. Alsó és felső becsléseket adunk $f(k, N)$ -re, kizárólag k -tól függő additív konstanstól eltekintve megválaszoljuk a kérdést, és kellően nagy N -re kiszámoljuk $f(2, N)$ pontos értékét. Bebonyítjuk, hogy $f(k, k^2)$ asszimptotikusan k^2 -tel egyezik meg.

1. BEVEZETÉS

Ez az OTDK dolgozat a szerzők és Schweitzer Ádám cikke [11] alapján készült.

A kivonatban röviden megfogalmaztuk a vizsgált kérdést gráfelméleti formájában. Most bevezetünk néhány definíciót, amik elengedhetetlenek a probléma megértéséhez.

1.1. Definíció (Kneser-gráf). A $KG(N, k)$ Kneser gráfot a következőképpen definiáljuk: feleltessük meg a csúcsokat egy N elemű halmaz k elemű részhalmazainak. Két csúc között pontosan akkor megy él, ha a nekik megfelelő k elemű halmazok diszjunktak.

Definiáljuk gráfok Xor szorzatát, amit többek között Thomason is vizsgált cikkében [17].

1.2. Definíció (Xor szorzat). Adott két gráf, G és H . Jelöljük $V(G)$ -vel és $V(H)$ -val a csúcsaik, illetve $E(G)$ -vel és $E(H)$ -val az éleik halmazát. A $G \cdot H$ -val jelölt Xor szorzatuk csúcshalmaza legyen $V = V(G) \times V(H)$ (ahol $V(G) \times V(H)$ jelöli a csúcshalmazok Descartes-szorzatát), és a (g, h) illetve (g', h') csúcsok között pontosan akkor megy él, ha $gg' \in E(G)$ és $hh' \in E(H)$ közül pontosan egy teljesül.

1.3. Definíció (Klikkszám). Legyen $G = (V, E)$ egy egyszerű gráf. Egy $H \subset V$ részhalmazt akkor nevezünk klikknek, ha bármely két H -beli csúc között megy él az eredeti G gráfban. G klikkszáma legyen a maximális klikk mérete, ezt $\omega(G)$ -vel jelöljük.

A fenti definíciók birtokában kimondjuk a dolgozatban vizsgált fő kérdést.

1.4. Probléma. Mi $\omega(KG(N, k) \cdot KG(N, k))$ értéke?

A pontos érték meghatározása minden (k, N) párra elérhetetlennek tűnik. Mi alsó és felső becsléseket adunk $f(k, N)$ -re, illetve bizonyos (k, N) párokra kiszámoljuk $f(k, N)$ pontos értékét.

A kérdéshez hasonló problémákat a Xor szorzatnál konvencionálisabb gráf szorzatokra (Descartes, tenzor és erős szorzatra) már sokan vizsgálták, például az alábbi cikkben [5]. Esetünkben a klikkszám értékének meghatározása a megszokott gráfszorzatokban egyszerűnek bizonyul, erre részletesbben az 1.4 alszekcióban térünk ki. Egy korábbi

Az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-21-2 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült. Az első szerzőt támogatja az NKFIH pályázat KH130371.

eredményt szolgáltat a következő cikk [2], amelyben gráfok Xor szorzatának függetlenségi és klikkszámának limeszét tanulmányozták.

Mint korábban említettük, a probléma extremális kombinatorikai kérdésként is megfogalmazható. Eredetileg Katona O.H. Gyula is ebben a formában vetette fel nekünk a kérdést.

Legyenek k és N rögzített pozitív egészek, legyenek továbbá A és B diszjunkt halmazok, melyekre fennáll $|A| = |B| = N$. Az $A \cup B$ részhalmazainak egy családját fogjuk vizsgálni. A jelölések egyszerűsítése végett bevezetjük az alábbi jelölést.

1.5. Definíció. A dolgozatban egy $S \subset A \cup B$ halmazra az $S \cap A$ -t S_A -val, míg $S \cap B$ -t S_B -vel fogjuk jelölni.

1.6. Definíció (Féligmetsző család). $A \cup B$ alaphalmaz egy $\mathcal{S}$ halmazcsaládját *féligmetszőnek* nevezzük, ha teljesülnek a következők:

- $|S_A| = |S_B| = k$ minden $S \in \mathcal{S}$ esetén, és
- $S_A \cap T_A = \emptyset$ pontosan akkor ha $S_B \cap T_B \neq \emptyset$ minden $S \neq T \in \mathcal{S}$ esetén.

A második feltételt máshogy fogalmazva, két halmaz az $\mathcal{S}$ halmazcsaládból pontosan az egyik oladalon metsz, vagyis $S \cap T \neq \emptyset$, és vagy $S \cap T \subset A$, vagy $S \cap T \subset B$.

Legyen $f(k, N) := \max\{|\mathcal{S}| : \mathcal{S} \text{ féligmetsző } k \text{ és } N \text{ paraméterekkel}\}$.

A következő állításban a két vázolt probléma ekvivalenciáját bizonyítjuk.

1.7. Állítás.

$$f(k, N) = \omega(KG(N, k) \cdot KG(N, k)).$$

Bizonyítás. A definíciókat megértve a bizonyítandó állítás könnyen adódik.

Legyen $G_1 = (V_1, E_1)$ és $G_2 = (V_2, E_2)$ a két $KG(N, k)$ Kneser-gráf, és legyenek A és B a G_1 és G_2 -höz tartozó diszjunkt, N elemű halmazok. Legyenek továbbá $u = (u_1, u_2)$ és $w = (w_1, w_2)$ a $G_1 \cdot G_2$ gráf két csúcsa. Jelöljük az u_1, u_2, w_1 és w_2 -höz tartozó k elemű halmazt rendre U_1, U_2, W_1 és W_2 -vel (azaz $U_1, W_1 \subset A, U_2, W_2 \subset B$). Definíció szerint u és w között pontosan akkor megy él a szorzatgráfban, ha az alábbiak közül pontosan egy teljesül:

- $u_1 w_1 \in E_1$ és $u_2 w_2 \notin E_2$, ami ekvivalens azzal, hogy $U_1 \cap W_1 = \emptyset$ és $U_2 \cap W_2 \neq \emptyset$.
- $u_1 w_1 \notin E_1$ és $u_2 w_2 \in E_2$, ami ekvivalens azzal, hogy $U_1 \cap W_1 \neq \emptyset$ és $U_2 \cap W_2 = \emptyset$.

Tehát ha minden (u_1, u_2) csúcshoz a $G_1 \cdot G_2$ gráfban az $U_1 \cup U_2$ halmazt rendeljük, akkor a klikkek a gráfban féligmetsző halmazcsaládoknak felelnek meg az $A \cup B$ halmazon, és ugyanígy a féligmetsző családok pedig klikkeknek. Ezzel a bizonyítást befejeztük. $\square$

Vagyis a dolgozat fő kérdése a következőképpen is megfogalmazható.

1.8. Probléma. Mi $f(k, N)$ értéke?

Számtalan hasonló kérdést vizsgáltak extremális kombinatorikában, ezek közül a legismertebb, és talán legkiemelkedőbb az Erdős-Ko-Rado tétel [6], ami egy maximális uniform metsző halmazcsalád (tehát olyan családja halmazoknak, hogy minden halmaz mérete azonos, és bármely két családban lévő halmaz metszete nemüres) méretét határozza meg. A [13] cikkben ezt a problémát vizsgálták két részes halmazrendszerek esetén. Pontosabban a maximális méretű metsző halmazrendszert vizsgálták, ahol az alaphalmaz két részre van osztva, és minden halmaz metszete a két részel előre meghatározott. Hasonló kérdésekkel foglalkoztak két részes halmazrendszerekkel kapcsolatban a [8] cikkben.

A problémánk kapcsolata metsző halmazcsaládokkal szorosabb, mint elsőre gondolnánk. A fő tételeink (2.3 és 2.4 tételek) bizonyításai szemléletesen azon alapszanak, hogy

a struktúrája egy k -uniform halmazcsaládnak elég erős metszetfeltételekkel meglehetősen hasonló egy metsző halmazcsaládéhoz, és a metsző halmazcsaládokat jól ismerjük, nem lehetnek túl bonyolultak.

A metsző halmazcsaládok struktúrája kimagaslóan fontos az extremális kombinatorikában. Az egyik leghíresebb eredményt a témakörben Hilton és Milner [10] bizonyította, akik éles felső becslést adtak egy nem triviális metsző halmazcsalád maximális méretére. A tipikus metsző halmazcsalád struktúráját vizsgálták a [3] cikkben, bizonyították, hogy bizonyos feltételek mellett majdnem minden k -uniform metsző halmazcsalád triviális. Azóta ezt az eredményt számos alkalommal javították, jelen pillanatban a legjobb ismert becslés szerint elég az $n \geq 2k + 100 \log(k)$ feltétel [4]. Többet lehet olvasni a metsző halmazcsaládok struktúrájáról például a [14] cikkben.

Vizsgálták majdnem metsző halmazcsaládok maximális méretét is [7], azaz amikor minden halmaz legfeljebb l másikat nem metsz. Ez a probléma erősen kapcsolódik a fő tételünk bizonyításának ötletéhez.

A dolgozatban csak azokat az eseteket vizsgáljuk, amikor a két Kneser-gráf izomorf. A bizonyításaink nagy része természetes módon általánosodik különböző Kneser-gráfokra is, ám ez sokkal technikásabbá tenné a megfontolásainkat.

1.1. A dolgozat felépítése. A következő alszekcióban a dolgozat során később használt jelöléseket és hasznos előzetes ismereteket közlünk. Olyan definíciókat és tételket fogunk kimondani, amikre szükségünk lesz a következő fejezetekben. Ezután megvizsgáljuk a maximális klikkszámot szokványosabb gráfszorzatokra.

A 2. fejezetben felső becslésekről fogunk értekezni. Először két könnyebb bizonyítást közlünk, amit a későbbiekben is fel fogunk használni. Ezután megválaszoljuk a feltett kérdést csak k -tól függő additív konstanssal való eltérés erejéig, és pontos eredményt adunk $k = 2$ és kellően nagy N esetén.

Ezt követően a 3. fejezetben alsó becsléseket adunk, más szóval konstrukciókat mutatunk olyan esetekre, amikor N és k között valamilyen összefüggés van. Ezen kívül néhány más algebrai és kombinatorikai témával való kapcsolatra is rávilágítunk, és ezeket felhasználva jó, sőt néhol éles becslést adunk. Továbbá nagy N -re jobb alsó becslést mutatunk, mint a triviális.

A 4. fejezetben összehasonlítjuk a 2. és 3. fejezet becsléseit, és összefoglaljuk az eredményeinket.

Végül az 5. fejezetben néhány nyitott kérdést teszünk fel a témával kapcsolatban.

1.2. Jelölések. Ha mást nem mondunk, akkor mindig a k és N konstansokat, illetve az A és B alaphalmazokat használjuk a féligmetsző családok tárgyalásában. A jelölések könnyítése végett az 1.5 definícióban már bevezettük $S_A = S \cap A$ és $S_B = S \cap B$ jelöléseket használjuk minden $S \subset A \cup B$ halmazra.

Egy 1-dimenziós affin alteret *affin egyenesnek* nevezünk. Egy 2 dimenziós vektortér affin egyeneseit *párhuzamossági osztályokba* soroljuk, mégpedig a következőképpen: két affin egyenes pontosan akkor van egy párhuzamossági osztályban, ha a hozzájuk tartozó lineáris alterek megegyeznek. Részletesebb definíciót az 1.13 definícióban, és az azt követő bekezdésben adunk.

Minden esetben kaligrafikus betűvel jelöljük a halmazok, vagy párhuzamossági osztályok egy családját. Nagy betűt használunk halmazok, és kis betűt elemek jelölésére.

$\text{MOLS}(n)$ a maximális száma a páronként ortogonális latin négyzeteknek, ezt az 1.11 definícióban fejtjük ki.

$\pi(x)$ jelöli az x -nél nem nagyobb pozitív prímszámok számát.

$\sim$ -ot használunk, ha függvények asszimptotikus ekvivalenciáját akarjuk közölni. Vagyis ha adott két függvény, mindkettő a pozitív valósakon vagy a pozitív egészekben van

értelmezve, akkor azt mondjuk, hogy $f(x) \sim g(x)$ pontosan akkor, ha

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

A kis ordó jelölést is használni fogjuk. Két pozitív valósokon definiált $f(x)$ és $g(x)$ függvényre akkor mondjuk, hogy $f(x) = o(g(x))$, ha minden $\varepsilon > 0$ -ra létezik K , amire fennáll, hogy

$$|f(x)| < \varepsilon g(x)$$

minden $x > K$ esetén. $o(g(x))$ -szel jelöljük azon $f(x)$ függvényeket, amelyekre fennállnak a fentiek. Akkor mondjuk, hogy $o(g(x)) = o(h(x))$, ha az $o(g(x))$ -hez és $o(h(x))$ -hez tartozó függvények családja megegyezik.

1.3. Előzetes ismeretek. A 3. fejezetben adott konstrukcióinkban használni fogunk néhány algebrai, kombinatorikai és számelméleti fogalmat. Most ezen fogalmakat, és a kapcsolódó tételeket vezetjük be.

A következő négy jól ismert matematikai definíciót, és hozzájuk kapcsolódó tételeket fogjuk használni: véges testeket, véges projektív geometriákat, páronként ortogonális latin négyzeteket és affin altereket.

A test definícióját ismertnek tekintjük. Véges test alatt olyan testet értünk, melynek véges sok eleme van. Használjuk a következő nevezetes állítást.

1.9. Tétel. *Pontosan akkor van n elemű véges test, ha n prímszám.*

[15] részletes bevezetést ad véges testekhez.

A véges projektív geometriákat is ismertnek tekintjük. A téma átfogó ismertetését adja az [1] könyv. Szükségünk lesz az alábbi tételre.

1.10. Tétel. *Ha n prímszám, akkor van n -ed rendű véges projektív sík.*

1.11. Definíció (Páronként ortogonális latin négyzetek). Egy $n \times n$ -es négyzetet, amelynek celláit n különböző szimbólummal töltjük ki úgy, hogy minden szimbólum pontosan egyszer szerepel minden sorban és minden oszlopban latin négyzetnek nevezzük. Két latin négyzetet ortogonálisnak mondunk, ha a két kitöltést az egyes cellákba írt szimbólumokból álló rendezet pároknak tekintve minden rendezett pár pontosan egyszer szerepel. Latin négyzetek egy családja páronként ortogonális, ha bármely két latin négyzet a családból ortogonális.

A szokásos $\text{MOLS}(n)$ jelölést használjuk a páronként ortogonális latin négyzetek maximális számára $n \times n$ méretű táblázatok esetén.

Páronként ortogonális latin négyzeteket gyakran vizsgálnak kombinatorikán belül. Az alábbi áttekintő cikkben [12] a szerzők egy széleskörű ismertetést adnak a jelenleg ismert legjobb konstrukciókról. Szükségünk lesz az alábbi kapcsolódó tételre.

1.12. Tétel. *Pontosan akkor létezik $n - 1$ páronként ortogonális $n \times n$ -es méretű latin négyzet, ha létezik n -ed rendű véges projektív sík.*

Végül definiáljuk egy vektortér affin altereit.

1.13. Definíció (Affin alterek). Legyen V egy vektortér. V egy *affin altere* alatt egy $x + U$ alakú halmazt értünk, ahol x egy vektor V -ben, U pedig V egy lineáris altere.

Egy adott lineáris alterhez tartozó affin alterekre párhuzamossági osztályként fogunk hivatkozni. Egy párhuzamossági osztály elemei páronként diszjunktak.

Csak a kétdimenziós esetben fogjuk használni ezeket a definíciókat. Ebben az esetben igazoljuk az alábbi hasznos tulajdonságot.

1.14. Állítás. *Egy kétdimenziós V vektortérben bármely két különböző egydimenziós lineáris altérhez tartozó affin altérnek a metszete pontosan egy vektorból áll.*

Bizonyítás. Legyen a két affin egyenes $U_1 = L_1 + p_1$ és $U_2 = L_2 + p_2$, ahol L_1 és L_2 két lineáris altér. Vegyük észre elsőként, hogy bármely két nemnulla vektor a két különböző lineáris altérből lineárisan független, tehát válasszunk két nemnulla vektort úgy, hogy $x \in L_1, y \in L_2$. Ezek függetlensége miatt minden vektor előáll ezek lineáris kombinációjaként, vagyis $U_1 = L_1 + a_1x + b_1y = L_1 + b_1y$ és $U_2 = L_2 + a_2x + b_2y = L_2 + a_2x$. Ebből következik, hogyha az L_1 és L_2 lineáris altereinket az $a_2x + b_1y$ vektorral toljuk el, akkor szintén az U_1 és U_2 affin egyeneseket kapjuk, hiszen $x \in L_1$ és $y \in L_2$. Mivel az L_1 és L_2 lineáris alterek egyetlen metszete az origó volt, így az eltoljaik egyetlen közös pontja az $a_2x + b_1y$ lesz. $\square$

A 3. fejezet végén használni fogjuk a jól ismert prímszámtételt.

1.15. Tétel (Prímszámtétel). *Jelölje $\pi(x)$ az x -nél nem nagyobb pozitív prímszámok számát. (A függvény értelmezési tartományának tekinthetjük a valós számokat.) Ekkor*

$$\pi(k) = \frac{k}{\log(k)} + o\left(\frac{k}{\log(k)}\right).$$

1.4. További gráfszorzatok. Dolgozatunk fő kérdését megfogalmazhatjuk úgy, mint a Kneser-gráfok Xor szorzatának klikkszámának kiszámítása. Ebben a szekcióban megvizsgáljuk a klikkszámot más gráfszorzatokban. Elsőként definiáljuk a három leggyakrabban használt gráfszorzatot. A következő három definícióban G_1 és G_2 egyszerű gráfokat jelölnek.

1.16. Definíció (Descartes-szorzat). Legyen $G_1 \square G_2$ egy gráf a $V_1 \times V_2$ csúcshalmazon (ahol $V_1 \times V_2$ az eredeti gráfok csúcshalmazainak Descartes-szorzata), és a (g, h) és (g', h') csúcsok között pontosan akkor fusson él, ha vagy $g = g'$, és h illetve h' össze vannak kötve G_2 -ben, vagy ha g illetve g' között megy él G_1 -ben, és $h = h'$.

1.17. Definíció (Tenzor szorzat). Legyen $G_1 \times G_2$ egy gráf a $V_1 \times V_2$ csúcshalmazon, és a (g, h) és (g', h') csúcsok között pontosan akkor fusson él, ha g és g' között, és h és h' között is fut él rendre a G_1 és G_2 gráfban. Megjegyezzük, hogy sem G_1 -ben sem G_2 -ben nincs olyan csúcs, ami önmagával össze lenne kötve.

1.18. Definíció (Erős szorzat). Legyen $G_1 \boxtimes G_2$ egy gráf a $V_1 \times V_2$ csúcshalmazon, és a (g, h) és (g', h') csúcsok között pontosan akkor fusson él, ha vagy $g = g'$, és h illetve h' között fut él G_2 -ben, vagy $h = h'$, és g illetve g' között fut él G_1 -ben, vagy g és g' , illetve h és h' között is fut él rendre G_1 -ben és G_2 -ben. Megjegyezzük, hogy az erős szorzat az előző két gráfszorzat uniója.

Ezen gráfszorzatok esetén a klikkszám kiszámítása triviális, nem csak Kneser, de általános gráf esetén is, ezt fogalmazzuk meg a következő állításokban.

1.19. Állítás. $\omega(G \square G) = \omega(G)$

Bizonyítás. Vegyünk egy maximális elemszámú klikket $G \square G$ -ben. Az általánosság megkötése nélkül feltehető, hogy (v, u_1) és (v, u_2) elemei ennek a maximális klikknek. Vegyük észre, hogy az olyan csúcsoknak $G \square G$ -ben, amelyek (v, u_1) -gyel és (v, u_2) -vel is össze vannak kötve, az első koordinátája v kell, hogy legyen. Vagyis minden elem első koordinátája a klikkből v , így a második koordinátáknak klikket kell alkotniuk G -ben, vagyis $\omega(G \square G) \leq \omega(G)$.

Másrésről legyen A maximális klikk G -ben. Ekkor rögzített v -re és $a \in A$ -ra a (v, a) alakú elemei $G \square G$ -nek klikket alkotnak, amiből következik, hogy $\omega(G \square G) = \omega(G)$. $\square$

1.20. Állítás. $\omega(G \times G) = \omega(G)$

Bizonyítás. Nincs két olyan (v, u_1) és (v, u_2) alakú csúcs, amelyek össze lennének kötve, mivel v nincs önmagával összekötve. Vagyis minden $v \in G$ legfeljebb egyszer fordulhat elő, mint első koordináta. Azonban azon $v \in G$ -nek, amik első koordinátaként előfordulnak a klikkben, páronként összekötöttek kell lenniük az eredeti gráfban, vagyis egy klikket alkotnak G -ben. Így $\omega(G \times G) \leq \omega(G)$.

Megmutatjuk, hogy egyenlőség áll fenn. Egy $\omega(G)$ méretű A klikket véve G -ben a (v, v) alakú elemek, ahol $v \in A$, megfelelő méretű klikket alkotnak $G \times G$ -ben. $\square$

1.21. Állítás. $\omega(G \boxtimes G) = \omega(G)^2$

Bizonyítás. Vegyünk egy $G \boxtimes G$ -beli maximális méretű klikket, és tekintsük csak az első koordinátákat. Vegyük észre, hogy ekkor minden csúcspárra vagy ugyanaz az első koordináta, vagy össze vannak kötve, így legfeljebb $\omega(G)$ -féle első koordináta van. Ugyanez elmondható a második koordinátára is, vagyis $\omega(G \boxtimes G) \leq \omega(G)^2$.

Megmutatjuk hogy egyenlőség áll fenn, konstruálunk egy megfelelő méretű klikket. Vegyünk egy maximális méretű A klikket G -ben, és vegyük az (u, v) alakú elemekből álló klikket, ahol $u, v \in A$. $\square$

2. FELSZŐ BECSLÉSEK

Mint ahogy a bevezetőben közöltük, először két egyszerű lemmát bizonyítunk, amik meglepően éles becslésekkel szolgálnak bizonyos esetekben.

2.1. Lemma.

$$f(k, N) \leq 2k \left(\left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor - 1 \right) + 1.$$

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{S}$ egy féligmetsző család, és legyen $S \in \mathcal{S}$. Felső becslést akarunk adni az olyan $T \in \mathcal{S}$ halmazok számára, ahol $T \neq S$ és $S_A \cap T_A \neq \emptyset$. Jelöljük az ilyen tulajdonságú halmazok családját $\mathcal{T}$ -vel.

Vegyük észre, hogy minden $a \in A$ -ra legfeljebb $\left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor$ olyan $H \in \mathcal{S}$ halmaz van, amelyre $a \in H$, hiszen bármely két ilyen H halmaz A -ban metsz, vagyis B -ben diszjunktak kell lenniük. Ezt felhasználva, minden $u \in S_A$ -ra legfeljebb $\left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor - 1$ olyan $T \in \mathcal{S}$ halmaz van, amelyre $u \in T$. $|S_A| = k$, és minden $T \in \mathcal{T}$ -re $u \in T$ valamely $u \in S_A$ -ra, vagyis

$$|\mathcal{T}| \leq k \left(\left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor - 1 \right).$$

Az A és B közti szimmetria miatt ez felső becslést szolgáltat azon halmazok számára is, amelyek S -et B -ben metszik. Mivel minden halmaznak el kell metszenie S -et vagy A -ban, vagy B -ben, az állítás következik. $\square$

2.2. Lemma.

$$f(k, N) \leq \left\lfloor \frac{N \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor}{k} \right\rfloor.$$

Bizonyítás. Kettős leszámolásal fogunk bizonyítani. Legyen $\mathcal{S}$ egy féligmetsző halmazcsalád. Használva ugyanazt az észrevételt, mint a 2.1. lemmában, megállapíthatjuk, hogy legfeljebb $\left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor$ olyan eleme van $\mathcal{S}$ -nek, ami tartalmaz egy rögzített $a \in A$ elemet. Következésképp, az olyan rendezett (a, S) párok száma, ahol $a \in A$, $S \in \mathcal{S}$ és $a \in S$

legfeljebb $N \lfloor \frac{N}{k} \rfloor$. Másrészt, az ilyen párok száma megegyezik $|\mathcal{S}| \cdot k$ -val, hiszen minden $S \in \mathcal{S}$ -nek pontosan k eleme van A -ban.

Ezeket összevetve kapjuk, hogy:

$$|\mathcal{S}| \leq \left\lfloor \frac{N \lfloor \frac{N}{k} \rfloor}{k} \right\rfloor.$$

□

Most rátérünk annak az esetnek a vizsgálatára, amikor N kellően nagy. A $k = 2$ esetet külön fogjuk kezelni, mert ekkor pontos eredményünk van $f(k, N)$ értékére. A következő tétel egy éles felső becslés, melynek élességét a következő fejezetben látjuk be, általánosabb formában.

A következő két tételben használni fogjuk a Ramsey-számok fogalmát. A Ramsey-tétel [16] állítása szerint minden pozitív egész a és b értékekre létezik egy $R(a, b)$ -vel jelölt (Ramsey-számnak nevezett) pozitív egész, ami rendelkezik a következő tulajdonsággal: tetszőleges $R(a, b)$ csúcsú egyszerű gráfban vagy van a méretű klikk, vagy van b méretű független halmaz. A továbbiakban használni fogjuk az $R(a, b)$ jelölést a Ramsey-számokra.

2.3. Tétel. Ha $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor \geq R(7, 7)$, akkor

$$f(2, N) \leq \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + 4.$$

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{S}$ egy maximális elemszámú féligmetsző halmazcsalád. A triviális alsó becslés miatt tudjuk, hogy $|\mathcal{S}| \geq \lfloor \frac{N}{2} \rfloor \geq R(7, 7)$.

Tekintsük azt a gráfot, melynek csúcsai az $\mathcal{S}$ -beli halmazok, és két $S, T \in \mathcal{S}$ csúcs pontosan akkor vannak összekötve, ha $S_A \cap T_A \neq \emptyset$.

Ramsey-tételt használva kapjuk, hogy az imént definiált gráfban található egy legalább 7 csúcsú klikk, vagy egy legalább 7 csúcsú független halmaz.

Az első esetben tehát van 7 halmaz, amelyek páronként A -ban metszenek, míg a második esetben 7 olyan halmazt találunk, amik páronként diszjunktak A -ban, így B -ben metszenek. Az A és B közti szimmetria miatt feltehető, hogy az az eset áll fenn, amikor találunk 7 páronként A -ban metsző halmazt. Jelölje ezt a 7-elemű részcsaládot $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$.

Nevezzük egy 2 elemű $P \subset A$ részhalmazt *fogónak*, ha van legalább 3 olyan $S_1, S_2, S_3 \in \mathcal{S}$ halmaz, melyekre $(S_1)_A = (S_2)_A = (S_3)_A = P$ teljesül. Vegyük észre, hogy ha valamely $T \in \mathcal{S}$ -re $T_A \cap P = \emptyset$ teljesül, akkor T -nek S_1 -et, S_2 -t és S_3 -at is B -ben kell elmetesznie, ami lehetetlen, hiszen S_1, S_2 és S_3 diszjunktak B -ben, és $|T_B| = 2$. Következésképp minden $T \in \mathcal{S}$ -nek el kell metsznie P -t. Ez egy jól használható feltétel, így a továbbiakban fogó halmazokat fogunk keresni A -ban.

Két lehetőséget különböztethetünk meg aszerint, hogy van-e olyan $c \in A$ elem, amelyre $c \in T$ minden $T \in \mathcal{T}$ -re. Amikor találunk ilyet, azt az **1.** és **2. eset**ben tárgyaljuk. Ha viszont nincs ilyen c elem A -ban, akkor a T_A ($T \in \mathcal{T}$) részhalmazai A -nak $\{c, d\}$, $\{d, e\}$ és $\{c, e\}$ alakú halmazok közül kerülnek ki (lásd **3. eset**).

1. eset: Tegyük fel, hogy találunk egy olyan $c \in A$ elemet, amit minden $T \in \mathcal{T}$ tartalmaz, továbbá $c \in S$ minden $S \in \mathcal{S}$ -re. Mivel minden $\mathcal{S}$ -beli halmaz A -ban metsz, így B -ben diszjunktaknak kell lenniük, amiből következik, hogy $|\mathcal{S}| \leq \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$.

2. eset: Tegyük fel, hogy találunk egy olyan $c \in A$ elemet, amit minden $T \in \mathcal{T}$ tartalmaz, de $c \notin S$ valamely $S \in \mathcal{S}$ -re. Válasszunk egy tetszőleges ilyen S -et, és legyen $S_A = \{d, e\}$. Mivel a $\mathcal{T}$ -beli halmazok diszjunktak B -ben, így $S \in \mathcal{S}$ csak kettőt tud elmeteszni közülük B -ben. Így S_A -nak legfeljebb kettő kivételével minden $\mathcal{T}$ -beli halmazt

el kell metszenie. Emiatt legalább 5 $\mathcal{T}$ -beli halmaznak tartalmaznia kell d -t vagy e -t, tehát feltehető, hogy találunk 3 olyat közülük amik d -t tartalmazzák. Vegyük észre, hogy ekkor $\{c, d\} \subset A$ egy fogó halmaz.

3. eset: $T_A = \{c, d\}, \{c, e\}$ vagy $\{d, e\}$ minden $T \in \mathcal{T}$ esetén, vagyis az általánosság megkötése nélkül feltehetjük, hogy $\{c, d\}$ legrább 3 alkalommal felvétetik. Ekkor $\{c, d\}$ egy fogó halmaz.

Vagyis a **2.** és **3.** esetben is arra jutottunk, hogy $P := \{c, d\}$ egy fogó halmaz. Definiáljuk a $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ halmazt a következőképp: $C \in \mathcal{C}$ pontosan akkor, ha $c \in C$ és $d \notin C$. Ha $|\mathcal{C}| \leq 4$, akkor legfeljebb 4 kivételével az összes halmaz $\mathcal{S}$ -ben tartalmazza d -t, és mivel ezeknek mind diszjunktak kell lennie B -ben, így $|\mathcal{S}| \leq \lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 4$.

Eszerint feltehető, hogy $|\mathcal{C}| > 4$. Hasonlóan, legyen $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ azon $D \in \mathcal{S}$ halmazok családja, amelyekre $c \notin D$ és $d \in D$. Az előzőek miatt az is feltehető, hogy $|\mathcal{D}| > 4$. Válasszunk egy tetszőleges D elemét a nemüres $\mathcal{D}$ -nek, és legyen $D_A = \{d, e\}$.

Minden $\mathcal{C}$ -beli halmaz diszjunkt B -ben, vagyis D legfeljebb kettőt metszhet B -ben. Következésképp legalább 3-at A -ban metsz, és így találunk $C_1, C_2, C_3 \in \mathcal{S}$ halmazokat, amelyekre $(C_1)_A = (C_2)_A = (C_3)_A = \{c, e\}$ teljesül. Eszerint $Q := \{c, e\}$ is fogó részhalma A -nak.

$S_A \cap P \neq \emptyset$ és $S_A \cap Q \neq \emptyset$ minden $S \in \mathcal{S}$ -re, tehát $c \in S_A$ vagy $S_A = \{d, e\}$. Ha kevesebb, mint 3 halmazra teljesül, hogy $S_A = \{d, e\}$, akkor ezeket kivéve minden $\mathcal{S}$ -beli halmaz tartalmazza c -t, vagyis diszjunktak B -ben, így $|\mathcal{S}| < \lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 3$.

A másik lehetőség, hogy $R := \{d, e\}$ is fogó halmaz. Ekkor $S_A \cap P \neq \emptyset$, $S_A \cap Q \neq \emptyset$ és $S_A \cap R \neq \emptyset$ minden $S \in \mathcal{S}$ -re. Ez csakis akkor lehetséges, ha $S_A = P, Q$ vagy R minden $S \in \mathcal{S}$ -re. Ebben az esetben minden halmaz páronként metsz A -ban, így diszjunktak B -ben, amiből következik, hogy $|\mathcal{S}| \leq \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$. Ezzel a bizonyítást befejeztük. $\square$

Most ismertetjük dolgozatunk legfontosabb és legérdekesebb tételét. Megválaszoljuk a kérdést egy N -től független additív konstanssal való eltérés erejéig.

2.4. Tétel. *Minden k -ra létezik egy (csak k -tól függő) c konstans, melyre $f(k, N) \leq \lfloor \frac{N}{k} \rfloor + c$ minden N -re.*

2.5. Megjegyzés. A dolgozat születése óta Füredi Zoltán belátta, hogy $c = \Theta(4^k \sqrt{k})$.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{S}$ egy féligmetsző halmazcsalád valamilyen k, N konstansokkal. Elsőként két lemmát fogunk bizonyítani.

2.6. Lemma. *Tegyük fel, hogy $C \subset A$ olyan részhalma, melyre $1 \leq |C| \leq k-1$, továbbá $S_1, S_2, \dots, S_{2k+1} \in \mathcal{S}$ olyan halmazok, hogy bármely kettő metszete éppen C . Ekkor $\mathcal{S}$ bármely elemének el kell metszenie C -t.*

Bizonyítás. Mivel $S_1, S_2, \dots, S_{2k+1}$ mind A -ban metszenek, így B -ben páronként diszjunktak. Tegyük fel indirekten, hogy valamely $S \in \mathcal{S}$ -re $S \cap C = \emptyset$. Mivel $S_i \cap S_j = C$ minden i, j -re, így $S_i \setminus C$ és $S_j \setminus C$ diszjunktak. S -nek mind a $2k+1$ darab S_i halmazt el kell metszenie A -ban, vagy B -ben. Tudjuk, hogy $(S_i)_B$ és $(S_j)_B$ diszjunktak minden i, j -re, következésképp S sem A -ban, sem B -ben nem tud több, mint k halmazt el metszeni, hiszen mind A -ban mind B -ben csak k eleme van, így ellentmondásra jutottunk. $\square$

Definiálunk két rekurzív sorozatot, amik fontos szerepet kapnak majd a 2.8. lemma bizonyításában.

2.7. Definíció. Legyen

$$r_1 := k + 1,$$

és legyen

$$r_i := R(m_{i-1}, 2k + 1)$$

minden $i \geq 2$ -re. Továbbá, minden $i \geq 1$ esetén legyen

$$m_i = r_i \cdot i.$$

Vegyük észre, hogy a rekurzív sorozatunk jól definiált, hiszen a két sorozat tagjai sorban meghatározzák egymást: r_1 adott, r_i meghatározza m_i -t, és m_i -ből kapjuk r_{i+1} -et.

2.8. Lemma. *Létezik egy $m \in \mathbb{N}$ érték, amely csak k -tól függ, és tetszőleges $\mathcal{Z} \subset \mathcal{S}$ részcsaládra, melyre $|\mathcal{Z}| \geq m$, létezik $Z \in \mathcal{Z}$ úgy, hogy a következőkből valamelyik teljesül:*

- $Z_A \cap S_A \neq \emptyset$ minden $S \in \mathcal{S}$, vagy
- $Z_B \cap S_B \neq \emptyset$ minden $S \in \mathcal{S}$.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy $m = R(m_k, m_k)$ egy megfelelő választás. A bizonyítás során használni fogjuk a 2.7. definícióban bemutatott rekurzív r_i és m_i sorozatokat.

Tegyük fel, hogy $\mathcal{Z} \subset \mathcal{S}$ részcsaládnak legalább $m = R(m_k, m_k)$ eleme van.

A 2.3. tétel bizonyításának elejéhez hasonlóan definiáljuk a következő gráfot: a csúcsok legyenek $\mathcal{Z}$ -beli halmazok, és pontosan akkor fusson két halmaz között él, ha A -ban metszenek. Mivel feltettük, hogy $|\mathcal{Z}| \geq R(m_k, m_k)$, így Ramsey tétel miatt a most definiált gráfunk vagy tartalmaz m_k méretű klikket, vagy tartalmaz m_k méretű független halmazt. Vagyis találunk egy $\mathcal{M}_k \subset \mathcal{Z}$ részcsaládot, melyre $|\mathcal{M}_k| \geq m_k$, és vagy $X_A \cap Y_A$ nemüres minden $X, Y \in \mathcal{M}_k$ -ra, vagy $X_B \cap Y_B$ is nemüres minden $X, Y \in \mathcal{M}_k$ -ra. A és B szimmetriája miatt feltehető, hogy az első eset teljesül. Vegyünk egy tetszőleges $X \in \mathcal{M}_k$ halmazt. Mivel $Y_A \cap X_A$ nemüres minden $Y \in \mathcal{M}_k$ -ra, és mivel $|\mathcal{M}_k| \geq m_k = k \cdot r_k$ definíció szerint, így találunk egy olyan z_1 elemét X_A -nak, melyre legalább r_k darab $\mathcal{M}_k$ -beli halmaz tartalmazza z_1 -et. Formálisan:

$$\mathcal{R}_k := \{M \in \mathcal{M}_k : z_1 \in M_A\}$$

Szeretnénk megkonstruálni halmazcsaládok egy leszálló rendszerét

$$\mathcal{Z} \supset \mathcal{M}_k \supset \mathcal{R}_k \supset \mathcal{M}_{k-1} \supset \mathcal{R}_{k-1} \supset \mathcal{M}_{k-2} \supset \dots \supset \mathcal{R}_1$$

úgy, hogy teljesüljenek a következők:

- $|\mathcal{M}_l| \geq m_l$ és $|\mathcal{R}_l| \geq r_l$ minden $1 \leq l \leq k$ -ra,
- Minden $1 \leq l \leq k$ -ra létezik $z_1, z_2, \dots, z_{k-l} \in A$, amelyekre $\{z_1, z_2, \dots, z_{k-l}\} \subset M$ minden $M \in \mathcal{M}_l$ -re, és $\{z_1, z_2, \dots, z_{k-l}\} \subsetneq M \cap N$ minden $M, N \in \mathcal{M}_l$ -re.
- Minden $1 \leq l \leq k$ -ra létezik $z_1, z_2, \dots, z_{k-l+1} \in A$, amelyekre $\{z_1, z_2, \dots, z_{k-l+1}\} \subset R$ minden $R \in \mathcal{R}_l$ -re.

Indukcióval bizonyítunk. Az alapesetet már igazoltuk, hiszen megkonstruáltunk az $\mathcal{M}_k$ és $\mathcal{R}_k$ halmazcsaládokat, és könnyen ellenőrizhetően teljesülnek a megkövetelt feltételek. Az indukciós lépés igazolásához tegyük fel, hogy már megkonstruáltuk az $\mathcal{M}_l$ és $\mathcal{R}_l$ ($2 \leq l \leq k$) halmazcsaládokat, és ezek alapján szeretnénk kapni olyan $\mathcal{M}_{l-1}$ és $\mathcal{R}_{l-1}$ halmazokat, melyek teljesítik a feltételeket.

Az indukciós feltevés miatt tudjuk, hogy $\{z_1, z_2, \dots, z_{k+1-l}\} \subset X$ minden $X \in \mathcal{R}_l$ -re és $|\mathcal{R}_l| \geq r_l$.

Definiáljuk a következő gráfot: legyenek a csúcsok $\mathcal{R}_l$ -beli halmazok, és pontosan akkor fusson X és Y halmaz között él, ha $\{z_1, z_2, \dots, z_{k+1-l}\} \subsetneq X_A \cap Y_A$. Mivel $|\mathcal{R}_l| \geq r_l = R(m_{l-1}, 2k + 1)$, így vagy találunk egy legalább m_{l-1} méretű klikket, vagy egy legalább $2k + 1$ méretű független halmazt.

A második esetben a 2.6. lemmát fogjuk használni. A $2k + 1$ méretű független halmaz létezése az imént definiált gráfban ekvivalens azzal, hogy a független halmaz csúcsaihoz tartozó halmazok pontosan $\{z_1, z_2, \dots, z_{k+1-l}\}$ -ben metszenek. Így a lemmát

használva kapjuk, hogy minden $X \in \mathcal{S}$ -re, $X_A \cap \{z_1, z_2, \dots, z_{k+1-l}\} \neq \emptyset$, vagyis mivel $\{z_1, z_2, \dots, z_{k+1-l}\} \subset Z$, így $Z_A \cap X_A \neq \emptyset$, ebben az esetben teljesül a 2.8. lemma állítása.

Az első esetben legyen $\mathcal{M}_{l-1}$ az a részcsaládja $\mathcal{R}_l$ -nek, melyre minden $X, Y \in \mathcal{M}_{l-1}$ -re teljesül, hogy $\{z_1, z_2, \dots, z_{k+1-l}\} \subsetneq X_A \cap Y_A$, és az ilyen tulajdonságúak között $\mathcal{M}_{l-1}$ egy maximális elemszámú. Ekkor $|\mathcal{M}_{l-1}| \geq m_{l-1}$, hiszen tudjuk hogy van legalább m_{l-1} méretű klikk a gráfban.

Definiáltuk $\mathcal{M}_{l-1}$ -et, és könnyen igazolható, hogy valóban teljesülnek a fent előírt feltételek. Most definiáljuk $\mathcal{R}_{l-1}$ -et. Ugyanazt a módszert fogjuk használni, mint az alapesetben, speciálisan amikor $\mathcal{R}_k$ -t készítettük el $\mathcal{M}_k$ ismeretében.

Vegyünk egy tetszőleges $X \in \mathcal{M}_{l-1}$ halmazt. Minden $M \in \mathcal{M}_{l-1}$ halmaz elmentszi $X_A \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_{k+1-l}\}$ -t, és $|X_A \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_{k+1-l}\}| = l - 1$. Definíció szerint $m_{l-1} = r_{l-1} \cdot (l - 1)$, vagyis találunk olyan $z_{k+1-(l-1)}$ elemet X_A -ban, melyre legalább r_{l-1} darab $\mathcal{M}_{l-1}$ -beli halmaz tartalmazza őt. Itt használtuk, hogy $k + 1 - l < k$, hiszen emiatt tudtunk egy $z_1, z_2, \dots, z_{k+1-l}$ -től különböző elemét kiválasztani X_A -nak. Legyen tehát

$$\mathcal{R}_{l-1} := \{M \in \mathcal{M}_{l-1} : z_{k+1-(l-1)} \in M_A\}.$$

Így kapjuk halmazok egy olyan $\mathcal{R}_{l-1}$ családját, melyre $\{z_1, z_2, \dots, z_{k+1-(l-1)}\} \subset X$ minden $X \in \mathcal{R}_{l-1}$ -re, és $|\mathcal{R}_{l-1}| \geq r_{l-1}$. Ezzel a megkövetelt feltételek teljesülnek $\mathcal{R}_{l-1}$ -re, amivel az indukciós lépést igazoltuk.

Ha az indukció során valamely lépésnél a definiált gráfban $2k + 1$ méretű független halmazt találunk, akkor a lemmát igazoltuk.

Ha viszont mindig klikket találunk, akkor eljutunk addig az esetig, amikor $l = 1$, és kapunk egy $\mathcal{R}_1$ halmazcsaládot, és $z_1, z_2, \dots, z_k \in A$ elemeket, melyekre $|\mathcal{R}_1| \geq r_1 = k + 1$, továbbá minden $X \in \mathcal{R}_1$ -re $\{z_1, z_2, \dots, z_k\} \subset X_A$. Vagyis valójában minden $\mathcal{R}_1$ -beli X halmazra $X_A = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$. Ekkor azonban minden $S \in \mathcal{S}$ halmaznak el kell metszenie $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ -t, hiszen különben az összes $\mathcal{R}_1$ -beli halmazt B -ben kéne metszenie, ami lehetetlen, mivel ezek páronként diszjunktak B -ben. Tetszőleges $Z \in \mathcal{R}_1$ esetén $\{z_1, z_2, \dots, z_k\} \subset Z$, vagyis Z -t választva igazoltuk a lemmát. □

Most rátérünk a 2.4. tétel bizonyítására. Belátjuk, hogy $|\mathcal{S}| \leq \lfloor \frac{N}{k} \rfloor + m - 1$.

Tegyük fel indirekten, hogy $|\mathcal{S}| \geq m + \lfloor \frac{N}{k} \rfloor$. Ekkor $|\mathcal{S}| \geq m$, vagyis alkalmazhatjuk a 2.8. lemma állítását a $\mathcal{Z} = \mathcal{S}$ halmazcsaládra, miszerint találunk egy olyan $Z \in \mathcal{Z}$ halmazt, hogy $Z_A \cap S_A \neq \emptyset$ minden $S \in \mathcal{S}$ -re, vagy $Z_B \cap S_B \neq \emptyset$ minden $S \in \mathcal{S}$ -re. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy az előbbi teljesül. Defináljuk a következő halmazcsaládot:

$$\mathcal{F} = \{X \in \mathcal{S} : X_A \cap S_A \neq \emptyset \text{ minden } S \in \mathcal{S} \text{ esetén}\}.$$

Tudjuk, hogy $F_A \cap G_A$ nemüres minden $F, G \in \mathcal{F}$ -re, következésképp páronként diszjunktak B -ben, tehát $|\mathcal{F}| \leq \lfloor \frac{N}{k} \rfloor$.

Ebből kifolyólag $|\mathcal{S} \setminus \mathcal{F}| \geq m$, vagyis újra alkalmazhatjuk a 2.8. lemmát, immár a $\mathcal{Z} = \mathcal{S} \setminus \mathcal{F}$ halmazcsaládra. Vegyük észre, hogy A és B halmazok szerepe már nem szimmetrikus, tehát két esetet kell megvizsgálnunk.

1. eset: Létezik egy olyan $X \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{F}$ halmaz, melyre $S_A \cap X_A \neq \emptyset$ minden $S \in \mathcal{S}$ -re. Vegyük észre azonban, hogy ez volt az $\mathcal{F}$ halmazcsalád definíciója, és X nem $\mathcal{F}$ -beli, így ellentmondásra jutottunk.

2. eset: Létezik egy olyan $X \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{F}$ halmaz, melyre $S_B \cap X_B \neq \emptyset$ minden $S \in \mathcal{S}$ -re. Válasszunk egy tetszőleges $\mathcal{F}$ -beli F halmazt. $F \neq X$, hiszen $F \in \mathcal{F}$ és $X \notin \mathcal{F}$. Vegyük észre, hogy $F_A \cap X_A \neq \emptyset$ az $\mathcal{F}$ halmazcsalád definíciója miatt, továbbá $F_B \cap X_B \neq \emptyset$ az X halmaz definíciója miatt. Ez azonban ellentmond $\mathcal{S}$ féligmetsző mivoltának, így a 2.4. tételt igazoltuk.

□

3. ALSÓ BECSLÉSEK

Három egyszerű észrevétellel indítjuk a fejezetet.

Először is, $\lfloor \frac{N}{k} \rfloor$ egy triviális alsó becslés. Ugyanis tekintsük azt az $\mathcal{S}$ családot, melyre $S_A = T_A$ és $S_B \cap T_B = \emptyset$ minden különböző $S, T \in \mathcal{S}$ esetén. Ez az alsó becslés, bár elsőre gyengének tűnhet, a 2.4. tétel rácsáfol erre.

Második egyszerű megfigyelésünk, hogy N -ben monoton a függvény, azaz ha $N_1 < N_2$ akkor $f(k, N_1) \leq f(k, N_2)$, mivel egy féligmetsző család (k, N_1) paraméterekkel tekinthető (k, N_2) féligmetszőnek is, egyszerűen nem használjuk az utolsó $N_2 - N_1$ elemet.

A harmadik észrevétel egy kicsit komplexebb, így egy lemma formájában mondjuk ki.

3.1. Lemma. *Tegyük fel, hogy adott egy $\mathcal{S}$ féligmetsző család (k, N) paraméterekkel. Legyen $g : A \cup B \rightarrow \mathbb{Z}^+$ egy függvény a következő tulajdonságokkal: Létezik egy N' konstans, melyre*

$$\sum_{a \in A} g(a) = \sum_{b \in B} g(b) = N',$$

és létezik egy k' konstans, melyre

$$\sum_{s \in S_A} g(s) = \sum_{s \in S_B} g(s) = k'$$

minden $S \in \mathcal{S}$ -re. Ekkor $f(k', N') \geq |\mathcal{S}|$.

Bizonyítás. Ha megértjük a tétel tartalmát, a bizonyítás könnyen adódik. Szemléletesen az állítás azt jelenti, hogy egy adott p pont helyett $g(p)$ darab pontot veszünk.

Minden $c \in A \cup B$ elemhez rendeljük egy H_c halmazt, melyre $|H_c| = g(c)$, és minden különböző $i, j \in A \cup B$ esetén $H_i \cap H_j = \emptyset$. Legyen $A' = \bigcup_{a \in A} H_a$ és $B' = \bigcup_{b \in B} H_b$. Minden $S \in \mathcal{S}$ esetén legyen $S' = \bigcup_{s \in S} H_s$, és jelölje $\mathcal{S}'$ az ezen halmazok által alkotott családot.

A lemma feltételeiből tudjuk, hogy $|A'| = |B'| = N'$ és $|S'_A| = |S'_{B'}| = k'$ minden $S' \in \mathcal{S}'$ esetén, és $\mathcal{S}$ féligmetsző, így világos, hogy $\mathcal{S}'$ is az. Következésképpen

$$f(k', N') \geq |\mathcal{S}'| = |\mathcal{S}|.$$

□

3.2. Következmény. *Ha $d \mid k$ és $d \mid N$ akkor $f(k, N) \geq f(\frac{k}{d}, \frac{N}{d})$.*

Bizonyítás. Használjuk a 3.1. lemmát egy maximális elemszámú, $(\frac{k}{d}, \frac{N}{d})$ paraméterekkel rendelkező $\mathcal{S}$ féligmetsző családra, és a $g \equiv d$ konstans függvényre. Ez éppen a bizonyítandót adja. □

Most a féligmetszőséghez egy extra kikötést hozzávéve az $N = k^2$ speciális esetet fogjuk megvizsgálni.

3.3. Definíció. Nevezzünk egy $\mathcal{S}$ féligmetsző halmazt latinnak, ha $N = k^2$, és B -t fel tudjuk partícionálni a k -elemű $B_1, B_2, \dots, B_k$ halmazokra úgy, hogy minden $S \in \mathcal{S}$ esetén $S_B = B_i$ valamely $1 \leq i \leq k$ esetén, továbbá minden $1 \leq i \leq k$ számra vagy nincs $S \in \mathcal{S}$, melyre $S_B = B_i$, vagy pontosan k ilyen van.

Első ránézésre nem látszik hasznosnak ez a definíció, ám látni fogjuk, hogy a latin féligmetsző családok szoros kapcsolatban állnak a páronként ortogonális latin négyzetekkel. Ezt fogalmazza meg precízen a következő tétel.

3.4. Tétel. Legyen $k \geq 2$. Egy (k, k^2) paraméterekkel rendelkező latin féligmetsző család maximális elemszáma éppen $k \cdot \min(\text{MOLS}(k) + 2, k)$.

Bizonyítás. Vegyünk egy $\mathcal{S}$ maximális elemszámú latin féligmetsző családot. Legyen $B_1, B_2, \dots, B_k$ a partíció a 3.3. definíció szerint. Indexeljük úgy ezeket a halmazokat, hogy éppen $1 \leq i \leq l$ esetén legyen k olyan $S \in \mathcal{S}$, melyre $S_B = B_i$, azaz nincs olyan $S \in \mathcal{S}$, melyre $S_B = B_i$ valamelyik $l+1 \leq i \leq k$ esetén. Minden $1 \leq i \leq l$ számra jelölje $\mathcal{S}_i \subset \mathcal{S}$ azon halmazok családját, melyekre $S_B = B_i$. Figyeljük meg, hogy az $\mathcal{S}_i$ -beli halmazok páronként diszjunktak A -ban, így partícionálniuk kell A -t. Továbbá $i \neq j$ esetén, ha $X \in \mathcal{S}_i$ és $Y \in \mathcal{S}_j$, akkor $X_A \cap Y_A \neq \emptyset$. Ez minden $Y \in \mathcal{S}_j$ esetén igaz, így X -nek minden $\mathcal{S}_j$ -beli halmazt 1 elembe kell metszenie. Tehát bármely két $\mathcal{S}$ -beli halmaz metszete 1-elemű, amennyiben nem tartoznak ugyanahhoz az $\mathcal{S}_i$ -hez.

Világos, hogy $l \geq 2$. Rendezzük A elemeit egy $k \times k$ -s táblázatba, melynek sorai éppen az $\mathcal{S}_1$ által meghatározott partíció halmazai, míg az oszlopai az $\mathcal{S}_2$ -höz tartozó halmazok. Ezt úgy tudjuk megtenni, hogy ha az $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ által meghatározott partíciók az A -ban rendre az $X_1, X_2, \dots, X_k$ és $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ halmazok, akkor az $(X_i)_A \cap (Y_j)_A = a \in A$ elemet rakjuk a táblázat i . sora és j . oszlopa által meghatározott mezőbe. Ezek után tetszőleges $3 \leq i \leq l$ esetén az $\mathcal{S}_i$ által meghatározott A -beli partíció minden halmaza minden sort és oszlopot egy helyen metszi, így meghatároz egy latin négyzetet. Továbbá a megfigyelt feltételek azt is garantálják, hogy ezek a latin négyzetek merőlegesek legyenek.

Megfordítva, ha adott $m \leq k - 2$ páronként ortogonális latin négyzet, akkor azokból egyszerűen legyártható egy latin féligmetsző halmaz $k \cdot (m + 2)$ halmazzal. Egyszerűen csináljunk mindent visszafelé. Helyezzük el A elemeit a $k \times k$ -s táblázatban. A sorok és oszlopok rendre meghatározzák az $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ családokat, továbbá minden latin négyzet meghatároz egy további $\mathcal{S}_i$ családot. Ezek uniója kiadja a latin féligmetsző halmazcsaládot. Az $m \leq k - 2$ feltételre azért volt szükség, mivel a B halmaz k részre van partícionálva, így csak $1 \leq i \leq k$ esetén tudunk $\mathcal{S}_i$ családokat konstruálni, még akkor is, ha $\text{MOLS}(k) > k - 2$. Ezzel a bizonyítást befejeztük. $\square$

Speciálisan a következő is kijött:

3.5. Következmény. $f(k, k^2) \geq k \cdot \min(\text{MOLS}(k) + 2, k)$.

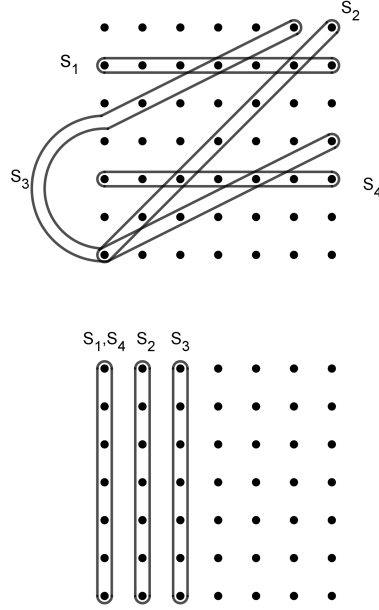
Ennek segítségével alsó becsléseket tudunk adni az $f(k, k^2)$ értékre. Elsőre a fenti becslés gyengének tűnhet, mivel a féligmetsző családok sokkal általánosabbak, mint a latin féligmetsző családok, ám ez éles lesz a 2.2. lemma miatt, ha $\text{MOLS}(k) \geq k - 2$. Speciálisan ez a becslés éles, ha létezik egy k rendű projektív sík az 1.12. tétel szerint, így az 1.10. tétel miatt a becslés éles prímhatványok esetén. Külön kimondjuk ezt az állítást, és mutatunk egy másik bizonyítást is, mivel az ötleteire szükségünk lesz későbbi lemmák és tételek bizonyításánál is.

3.6. Lemma. Legyen p prímhatvány. Ekkor

$$f(p, p^2) \geq p^2.$$

Bizonyítás. Legyen $\mathbb{F}_p$ a p -elemű test (ami létezik az 1.9. tétel szerint). Vegyünk továbbá egy D kétdimenziós vektorteret $\mathbb{F}_p$ felett. Tekintsük az affin egyeneseket D -ben (vagyis az 1-dimenziós lineáris alterekhez tartozó affin altereket), melyek $p + 1$ párhuzamossági osztályba sorolhatóak, jelöljük ezeket $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_{p+1}$ -gyel. A $\mathcal{D}_i$ halmazok mindegyike p affin egyenest tartalmaz. Különböző párhuzamossági osztályokból affin egyeneseket véve ezek pontosan 1 pontban metszik egymást az 1.14. állítás miatt.

Most konstruálunk egy $\mathcal{S}$ féligmetsző családot $k = p$ és $N = p^2$ paraméterekkel. Rendeljük hozzá A elemeit a D vektortér vektoraihoz, továbbá osszuk fel B -t a $B_1, B_2, \dots, B_p$ páronként diszjunkt p -elemű halmazokra.



1. ÁBRA. Az ábra a 3.6. lemma konstrukcióját szemlélteti a $p = 7$ esetben. Az A halmaz elemeit $\mathbb{F}_p^2$ elemeihez rendeljük. Az $(S_i)_A$ halmazok példák affin egyenesekre. A B halmazban minden A -beli párhuzamossági osztályhoz tartozik egy páronként diszjunkt részhalmaz. Az ábrán $(S_1)_A$ és $(S_4)_A$ ugyanahhoz a párhuzamossági osztályhoz tartoznak, így $(S_1)_B = (S_4)_B$.

Minden $1 \leq i \leq p$ esetén legyen

$$\mathcal{S}_i := \{B_i \cup X : X \in \mathcal{D}_i\},$$

és legyen $\mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^p \mathcal{S}_i$. Világos, hogy $|\mathcal{D}_i| = p$ minden $1 \leq i \leq p$ esetén, így $|\mathcal{S}| = p^2$. Az is látható, hogy $|S_A| = |S_B| = p$ teljesül minden $S \in \mathcal{S}$ esetén, így már csak a másik feltételét kell ellenőrizni a féligmetsző családoknak. Két esetet különböztetünk meg.

- Ha $X, Y \in \mathcal{S}_i$ valamilyen i -re, akkor $X_A \cap Y_A = \emptyset$, mivel ugyanahhoz a párhuzamossági osztályhoz tartoznak, és $X_B \cap Y_B = B_i$.
- Ha pedig $X \in \mathcal{S}_i$ és $Y \in \mathcal{S}_j$, ahol $i \neq j$, akkor $X_A \cap Y_A \neq \emptyset$, mivel különböző párhuzamossági osztályban vannak, így metszenek, és $X_B \cap Y_B = \emptyset$.

Tehát ez tényleg egy féligmetsző család p^2 halmazzal. $\square$

Ezek után 3 különböző általánosítást mutatunk ennek a lemmának. Az első önmagában is érdekes, ám egy lemmaként is fogjuk alkalmazni az ezt követő tételhez.

3.7. Lemma. *Legyen p egy prímszám, és $l \leq p + 1$ tetszőleges pozitív egész szám. Ekkor*

$$f(p, lp^2) \geq lp^2.$$

Bizonyítás. Hasonló jelöléseket használunk, mint az előző lemmában, az ott látott bizonyítást fogjuk általánosítani. Egy $\mathcal{S}$ féligmetsző családot konstruálunk (p, lp^2) paraméterekkel és lp^2 halmazzal.

Osszuk fel A elemeit l darab p^2 méretű részre, majd rendeljük hozzá ezekhez a $D^1, D^2, \dots, D^l$ $\mathbb{F}_p$ feletti 2-dimenziós affin tereket. Minden $1 \leq i \leq l$ esetén jelölje D^i párhuzamossági osztályait $\mathcal{D}_1^i, \mathcal{D}_2^i, \dots, \mathcal{D}_{p+1}^i$. Legyen $B' \subset B$ egy p^2 elemű részhalmaz, a konstrukcióban $B \setminus B'$ elemeit nem fogjuk használni. Rendeljünk B' -höz is egy E 2-dimenziós affin teret ($\mathbb{F}_p$ felett), és legyenek $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_{p+1}$ a párhuzamossági osztályok E -ben. Minden $1 \leq i \leq l$ esetén legyen $\mathcal{S}$ a 3.6. lemmában készített konstrukció, ahol

$D = D^i$ és $B_1, B_2, \dots, B_p$ az $\mathcal{E}_i$ párhuzamossági osztályban lévő halmazok. Nevezzük ezt a családot $\mathcal{S}_i$ -nek, és legyen

$$\mathcal{S} := \bigcup_{i=1}^l \mathcal{S}_i.$$

Világos, hogy $|\mathcal{S}| = lp^2$.

Ellenőrizzük le, hogy $\mathcal{S}$ tényleg féligmetsző. Az előző lemma bizonyításához hasonlóan $|S_A| = |S_B| = p$ triviális, míg a másik feltételt két eseten keresztül bizonyítjuk.

- Ha $X, Y \in \mathcal{S}_i$ valamely i esetén, akkor az előző lemma szerint (3.6. lemma) a feltétel teljesül.
- Ha $X \in \mathcal{S}_i$ és $Y \in \mathcal{S}_j$ különböző i, j számokkal, akkor X és Y A -ban diszjunktak, és B -ben metszenek, mivel a B -hez tartozó metszetük két nem párhuzamos affin egyeneshez tartozik E -ben.

Ezzel a bizonyítást befejeztük. $\square$

3.8. Megjegyzés. A lemma élességét nem tudjuk bizonyítani, ám a 2.1. lemmával kombinálva

$$lp^2 \leq f(p, lp^2) \leq 2p(lp - 1) + 1,$$

tehát a felső és alsó becslésünk mindössze egy kettes szorzóban tér el.

A következő tétel alsó becslést ad nagy N és $k = p$ esetén, ahol p prímszám. Az eredmény éles $p = 2$ esetén, ám nagyobb prímszám esetén nem az. Mindenesetre sokkal jobb eredményt kapunk, mint a triviális $\left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor$ alsó becslés.

3.9. Tétel. *Legyen p egy prímszám. Ha $N \geq p^3$, akkor*

$$f(p, N) \geq \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor - p^2 + p^3.$$

Bizonyítás. A 3.7. lemma jelöléseit használjuk. A feladat feltételei szerint legyen $N \geq p^3$, (p, N) paraméterekkel konstruálunk megfelelő féligmetsző családot. Legyen $A' \subset A$ és $B' \subset B$ p^3 elemű részhalmazok, és tekintsük a 3.7. lemma bizonyításában gyártott konstrukciót, ahol $l = p$, és $A' \cup B'$ az alaphalmaz. Jelöljük ezt a családot $\mathcal{S}_1$ -gyel.

Figyeljük meg, hogy a konstrukcióban E -nek csak p párhuzamossági osztályát használtuk fel. Legyen $E \in \mathcal{E}_{p+1}$ tetszőleges affin egyenes az eddig nem használt párhuzamossági osztályból. Tekintsünk $\left\lfloor \frac{N-p^3}{p} \right\rfloor$ páronként diszjunkt p -elemű halmazt $A \setminus A'$ -ben, nevezzük ezen halmazok családját $\mathcal{C}$ -vel. Legyen

$$\mathcal{S}_2 := \{C \cup E : C \in \mathcal{C}\}.$$

Végül legyen $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$. Ekkor

$$|\mathcal{S}| = |\mathcal{S}_1| + |\mathcal{S}_2| = p^3 + \left\lfloor \frac{N-p^3}{p} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor - p^2 + p^3.$$

A bizonyítás befejezéséhez meg kell gondolni, hogy ez egy féligmetsző család. Világos, hogy $|S_A| = |S_B| = p$ minden $S \in \mathcal{S}$ halmazra. Vegyünk két X és Y különböző elemét $\mathcal{S}$ -nek.

- Ha $X, Y \in \mathcal{S}_1$, akkor a 3.7. lemma szerint tényleg vagy csak A -ban, vagy csak B -ben metszenek.
- Ha $X \in \mathcal{S}_1$ és $Y \in \mathcal{S}_2$, akkor A -ban definíció szerint diszjunktak, ám B -ben metszenek, mert a hozzájuk tartozó metszet E két nem párhuzamos affin egyeneséhez tartozik.

- Amennyiben $X, Y \in \mathcal{S}_2$, akkor a B -vel vett metszetük megegyezik, ám A -ban diszjunktak.

□

3.10. Megjegyzés. A tétel úgy is megfogalmazható, hogy $c \geq p^3 - p^2$, ahol c a 2.4. tétel állításában szereplő c konstans $k = p$ esetén.

A 3.6. lemma utolsó általunk vizsgált általánosítása a (k, N) paraméterek egy bővebb családjára ad pontos eredményt. Ehhez az éles felső becslést a 2.2. lemma adja meg.

3.11. Tétel. *Tetszőleges p prímszám, és $p \leq k$ esetén*

$$f(k, pk) \geq p^2.$$

Bizonyítás. Használjuk a 3.1. lemmát a 3.6. lemmában látott konstrukcióra. Legyen tehát $\mathcal{S}$ a 3.6. lemma bizonyításában készített konstrukció, a jelöléseket is ebből a lemmából vesszük át. Legyen $X \in \mathcal{D}_{p+1}$ affin egyenes. Mivel $\mathcal{S}$ konstrukciójában csak az első p párhuzamossági osztályt használtuk, így $|X \cap S_A| = 1$ minden $S \in \mathcal{S}$ halmazra (használva az 1.14. állítást). Legyen $b_i \in B_i$ tetszőleges elem minden $1 \leq i \leq p$ esetén, és legyen

$$g(c) = \begin{cases} k - p + 1 & \text{ha } c \in X, \text{ vagy } c = b_i \text{ valamilyen } 1 \leq i \leq p \text{ esetén,} \\ 1 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ezzel a függvényvel szeretnénk használni a 3.1. lemmát az $\mathcal{S}$ családra, ehhez ellenőrizni kell, hogy teljesülnek a lemma feltételei. Legyen

$$C = \{c \in A \cup B : c \in X \text{ vagy } c = b_i \text{ valamilyen } 1 \leq i \leq p\}.$$

Máshogy mondva $C \subset A \cup B$ azon c elemekből áll, melyekre $g(c) = k - p + 1$. Ekkor $|X| = p$ miatt $|C \cap A| = p$, és $|C \cap B| = p$, mivel $C \cap B = \{b_1, b_2, \dots, b_p\}$. Következésképpen

$$\sum_{a \in A} g(a) = \sum_{b \in B} g(b) = (p^2 - p) + p \cdot (k - p + 1) = pk.$$

Tetszőleges $S \in \mathcal{S}$ halmazra láttuk, hogy $|S_A \cap C| = |S_A \cap X| = 1$, továbbá $|S_B \cap C| = 1$ is teljesül, mivel $S_B = B_i$ valamilyen i -re, így $S_B \cap C = \{b_i\}$. Tehát

$$\sum_{s \in S_A} g(s) = \sum_{s \in S_B} g(s) = (p - 1) + (k - p + 1) = k$$

minden $S \in \mathcal{S}$ halmazra. Tényleg teljesülnek a 3.1. lemma feltételei, ezt alkalmazva éppen a kívánt eredményt kapjuk.

□

3.12. Következmény. $f(k, k^2) \sim k^2$.

Bizonyítás. A 3.11. tételt és $f(k, N)$ monotonitását kombinálva

$$f(k, k^2) \geq f(k, pk) = p^2.$$

Továbbá a 2.2. lemmából $f(k, k^2) \leq k^2$.

Innentől hasonló indoklást használunk a prímek sűrűségére, mint [9, p. 494]. Legyen $0 < \varepsilon < 1$. Világos, hogy

$$\log(k) \sim \log(k) + \log(1 - \varepsilon),$$

mivel $\log(1 - \varepsilon)$ konstans. Emiatt

$$o\left(\frac{k}{\log(k)}\right) = o\left(\frac{(1 - \varepsilon)k}{\log(k) + \log(1 - \varepsilon)}\right) = o\left(\frac{(1 - \varepsilon)k}{\log((1 - \varepsilon)k)}\right).$$

Ezt és a prímszámtételt (1.15. tétel) alkalmazva

$$\pi(k) - \pi((1 - \varepsilon)k) = \frac{k}{\log(k)} - \frac{k - \varepsilon k}{\log(k) + \log(1 - \varepsilon)} + o\left(\frac{k}{\log(k)}\right).$$

Felhasználva a $\log(k) \sim \log(k) + \log(1 - \varepsilon)$ összefüggést,

$$\frac{k}{\log(k)} - \frac{k}{\log(k) + \log(1 - \varepsilon)} = \frac{k}{\log(k)} \cdot \left(1 - \frac{\log(k)}{\log(k) + \log(1 - \varepsilon)}\right) = o\left(\frac{k}{\log(k)}\right).$$

Tehát

$$\pi(k) - \pi((1 - \varepsilon)k) = \frac{\varepsilon k}{\log(k) + \log(1 - \varepsilon)} + o\left(\frac{k}{\log(k)}\right).$$

Létezik egy K_1 konstans, hogy $\log(k) > \log(1 - \varepsilon)$ minden $k > K_1$ esetén. Továbbá létezik egy K_2 konstans, hogy $k > K_2$ esetén

$$\pi(k) - \pi((1 - \varepsilon)k) > \frac{\varepsilon k}{\log(k) + \log(1 - \varepsilon)} - \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{k}{\log(k)}.$$

Ekkor minden $k > \max(K_1, K_2)$ számra

$$\pi(k) - \pi((1 - \varepsilon)k) > \frac{\varepsilon k}{2 \log(k)} - \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{k}{\log(k)} = 0.$$

Azt bizonyítottuk, hogy tetszőleges $0 < \varepsilon < 1$ konstansra létezik egy K szám, hogy $k > K$ esetén $\pi(k) - \pi((1 - \varepsilon)k) > 0$, azaz létezik p prím, melyre $k(1 - \varepsilon) \leq p \leq k$. Emiatt

$$k^2 \geq f(k, k^2) \geq p^2 \geq k^2(1 - \varepsilon)^2.$$

Tartsunk k -val végtelenbe:

$$1 \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(k, k^2)}{k^2} \geq (1 - \varepsilon)^2.$$

Ez tetszőleges ε esetén igaz, így

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(k, k^2)}{k^2} = 1.$$

□

4. ÖSSZEGZÉS

A 2 és 3 fejezetekben bizonyított eredményeket kombinálva elég sokat tudunk az $f(k, N)$ függvény nagyságrendjéről.

Bebizonyítottuk, hogy $f(k, N)$ legfeljebb egy N -től nem függő additív konstansal térhet el az $\left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor$ triviális alsó becsléstől. Ezzel többek között aszimptotikusan is meghatároztuk az $f(k, N)$ értéket, amennyiben k -t rögzítettnek tekintjük.

Emellett meggondoltuk, hogy $f(k, k^2) \sim k^2$ ahogy $k \rightarrow \infty$ (3.12. következmény). Továbbá a 3.11. tételből $f(k, pk) \sim p^2$, mivel $k \geq p$ esetén egyenlőség teljesül.

A következő (k, N) párok esetén bizonyítottunk pontos eredményt.

- Amennyiben $k = 2$ és $\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \geq R(7, 7)$. Ekkor a 2.3. tételből származó felső becslés, és 3.9. tételből kapott alsó becslés megegyezik, így

$$f(2, N) = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + 4.$$

- Tetszőleges k pozitív egész, és nála nem nagyobb p prímszám esetén 2.2. lemmát és 3.11. tételt kombinálva

$$f(k, pk) = p^2.$$

5. NYITOTT KÉRDÉSEK

Ebben a részben röviden összefoglaljuk az általunk érdekesnek gondolt megválaszolatlan kérdéseket.

Természetes általánosítása a vizsgált problémának a következő:

5.1. Probléma. Mit tudunk mondani egy Kneser-gráf magasabb Xor hatványainak a klikkszámáról?

Láttuk, hogy a 2.2. lemmában adott felső becslés számos $N \leq k^2$ esetén éles. Így felvetődik a következő kérdés:

5.2. Probléma. Igaz-e minden $N \leq k^2$ esetén, hogy

$$f(k, N) = \left\lfloor \frac{N \lfloor \frac{N}{k} \rfloor}{k} \right\rfloor ?$$

A problémát csak nagyon kis esetekre tudtuk ellenőrizni számítógép segítségével. Ám a féligmetsző családok struktúrájának vizsgálata alapján azt gondoljuk, hogy ez a kérdés valószínűleg igaz.

Még egy természetes kérdéskör, amivel kapcsolatban nincs lényeges eredményünk, hogy mi történik, ha N a k -nak valamilyen függvénye, ahol $N > k^2$. A legtermészetesebb kérdés az $N = dk^n$ eset. Az $n = 2$, $d = 1$ és $n = 1$, $d = p$ eseteket megoldottuk aszimptotikusan, ahol p prímszám, ám $n \geq 3$ esetben lényegében semmit nem tudunk mondani.

5.3. Probléma. Aszimptotikusan mennyi az $f(k, dk^n)$ érték, ahogy $k \rightarrow \infty$?

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Szeretnénk megköszönni a témavezetőnknek, Katona O.H. Gyulának, a probléma javaslatot, illetve a rengeteg segítséget, hasznos megjegyzést.

HIVATKOZÁSOK

- [1] A.A. Albert and R. Sandler. *An Introduction to Finite Projective Planes*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2014.
- [2] Noga Alon and Eyal Lubetzky. Codes And Xor Graph Products. *Combinatorica*, 27:13–33, 02 2007.
- [3] József Balogh, Shagnik Das, Michelle Delcourt, Hong Liu, and Maryam Sharifzadeh. Intersecting families of discrete structures are typically trivial. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 132:224–245, 2015.
- [4] József Balogh, Ramon I. Garcia, Lina Li, and Adam Zsolt Wagner. Intersecting families of sets are typically trivial, 2021.
- [5] Boštjan Brešar and Mario Valencia-Pabon. Independence number of products of Kneser graphs. *Discrete Mathematics*, 342(4):1017–1027, 2019.
- [6] Pál Erdős, Chao Ko, and R. Rado. Intersection theorems for systems of finite sets. *Q. J. Math., Oxf. II. Ser.*, 12:313–320, 1961.
- [7] Dániel Gerbner, Nathan Lemons, Cory Palmer, Balázs Patkós, and Vajk Szécsi. Almost intersecting families of sets. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 26(4):1657–1669, 2012.
- [8] Dániel Gerbner, Péter Erdős, Nathan Lemons, Dhruv Mubayi, Cory Palmer, and Balázs Patkós. Two-Part Set Systems. *The electronic journal of combinatorics*, 19, 10 2011.
- [9] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford, fourth edition, 1975.
- [10] Anthony JW Hilton and Eric C Milner. Some intersection theorems for systems of finite sets. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 18(1):369–384, 1967.
- [11] András Imolay, Anett Kocsis, and Ádám Schweitzer. Clique number of Xor products of Kneser graphs. *arXiv preprint arXiv:2104.13505*, 2021.

- [12] Charles J. Colbourn and Jeffrey H. Dinitz. Mutually orthogonal latin squares: a brief survey of constructions. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 95(1):9–48, 2001. Design Combinatorics.
- [13] Gyula OH Katona. A general 2-part Erdős-Ko-Rado theorem. *Opuscula Mathematica*, 37, 03 2017.
- [14] Gyula OH Katona. Results on intersecting families of subsets, a survey. In *New Trends In Algebras And Combinatorics-Proceedings Of The Third International Congress In Algebras And Combinatorics (Icac2017)*, page 134. World Scientific, 2020.
- [15] R. Lidl, H. Niederreiter, P.M. Cohn, G.C. Rota, B. Doran, Cambridge University Press, P. Flajolet, M. Ismail, T.Y. Lam, and E. Lutwak. *Finite Fields*. Number v. 20, pt. 1 in EBL-Schweitzer. Cambridge University Press, 1997.
- [16] Frank P Ramsey. On a problem of formal logic. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2(1):264–286, 1930.
- [17] A. Thomason. Graph products and monochromatic multiplicities. *Combinatorica*, 17:125–134, 1997.