

MEGSZORÍTOTT PÁROSÍTÁS FELADATOK

OTDK dolgozat

Tóth Sára Hanna
Alkalmazott matematikus MSc

Témavezető:
Madarasi Péter
*ELTE Matematikai Intézet,
Operációkutatási Tanszék*



Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest, 2022

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. A k-szoros párosítás feladat	4
2.1. Közelítő algoritmusok	4
2.2. Egészértékűségi hézag	6
2.3. Közelíthetlenség	7
3. A d-távolságú párosítás feladat	13
3.1. Közelíthetlenség	13
3.2. Egészértékűségi hézag és közelítő algoritmusok	14
3.3. Optimális permutációk	22
4. Nyitott kérdések	28

Kivonat

Adott egy $G = (S, T; E)$ páros gráf, melyre $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, egy d pozitív egész és egy súlyfüggvény az éleken. A d -távolságú párosítás feladatban olyan maximális súlyú M élhalmazt keresünk, amelyre minden S -beli csúcs foka legfeljebb 1, illetve ha $s_i t$, $s_j t$ benne van M -ben, akkor $|i - j| \geq d$.

A d -távolságú párosítás feladathoz szorosan kapcsolódik az úgynevezett k -szoros párosítás feladat, melyben a $G = (S, T; E)$ páros gráfban adottak az S csúcshalmaznak $S_1, S_2, \dots, S_k$ részhalmazai, melyekre $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k = S$, és egy súlyfüggvény az éleken. Olyan maximális súlyú élhalmazt keresünk, amelyet megszorítva az (S_i, T) halmazokra párosítást kapunk minden $i = 1, 2, \dots, k$ -ra.

Mindkét feladatról ismert, hogy NP-teljes annak az eldöntése, hogy van-e teljes $(S$ -et fedő) élhalmaz. A dolgozatban bebizonyítjuk a feladatok közelíthetlenségét, pontosabban azt, hogy már a súlyozatlan változatokra sem adható tetszőleges ε -ra $(1 + \varepsilon)$ -közelítő algoritmus (ha $P \neq NP$). Ezen kívül konstans-közelítő algoritmusokat adunk a k -szoros párosítás feladatra és egy felső becslést az egészértékűségi hézagra. A d -távolságú párosítás feladat kapcsán azt a kérdést is megvizsgáljuk, amelyben az S halmaz csúcsainak keressük egy olyan permutációját, melyre a maximális súlyú d -távolságú párosítás a lehető legnagyobb. Az optimális permutáció megtalálására adunk egy polinomiális algoritmust, és megmutatjuk, hogy ha az S -ben minden csúcs foka legfeljebb r lehet, akkor az optimális permutáció megtalálása NP-nehéz minden $r \geq 2$ esetén.

Egy újszerű módszert használva igazoljuk, hogy a ciklikus d -távolságú párosítás feladatra vonatkozó egészértékűségi hézag legfeljebb $2 - \frac{1}{d}$, ha S elemszáma osztható $(2d - 1)$ -gyel. Megmutatjuk, hogy ez a becslés pontos minden d esetén. Továbbá igazoljuk, hogy a nem ciklikus d -távolságú párosítás feladat esetén az egészértékűségi hézag legfeljebb $2 - \frac{2}{d}$ — ezzel javítva a korábbi legjobb ismert $2 - \frac{1}{2d-1}$ becslésen.

1. Bevezetés

Legyenek adottak az $s_1, s_2, \dots, s_n$ telefonok, a $t_1, t_2, \dots, t_k$ frekvenciák, és minden telefonhoz az, hogy mely frekvenciákon képes kommunikálni az adótoronnyal. A feladat az, hogy minél több telefonhoz rendeljünk egy-egy frekvenciát, amelyen az adott telefon kommunikálhat úgy, hogy ugyanazon frekvenciát nem használhatja egynél több telefon, hiszen ekkor zavarnák egymást. A problémának ezen egyszerű esetét jól ismerjük, a feladat az, hogy egy legnagyobb párosítást keressünk a $G = (S, T; E)$ páros gráfban, ahol $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, $T = \{t_1, \dots, t_k\}$, az élek pedig a megengedett telefon-frekvencia párok.

Természetes általánosítása a problémának, ha nem tesszük fel, hogy bármely két telefon zavarja egymást, és így bizonyosaknak — például amelyek elég messze vannak egymástól — megengedjük, hogy ugyanazt a frekvenciát használják. Az ilyen típusú feladatokat összefoglaló néven frekvencia kiosztási feladatoknak (frequency assignment problems) nevezzük, gyakorlati jelentőségük miatt számos változatuk és különböző modellezésük ismert és sokat kutatott. [1] Ebben a dolgozatban két feladatot fogunk vizsgálni, melyek megfogalmazhatóak frekvencia kiosztási problémaként is.

Ha a telefonokról feltesszük, hogy egy egyenesen helyezkednek el úgy, hogy a szomszédosak távolsága ugyanakkora, és két telefonhoz akkor nem rendel-

hetjük ugyanazt a frekvenciát, ha túl közel – egy előre adott távolságnál közelebb – vannak egymáshoz, akkor egy megengedett frekvencia kiosztás az alábbi élhalmaznak felel meg [2]:

1.1. Definíció (d -távolságú párosítás). *Adott egy $G = (S, T; E)$ páros gráf, melyre $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, és egy $d \in \mathbb{Z}_+$ szám. Egy $M \subseteq E$ élhalmazt d -távolságú párosításnak (d -distance matching) nevezünk, ha az S -beli csúcsok foka M -ben legfeljebb 1, és minden $t \in T$ -re, ha $s_i t, s_j t \in M$, akkor $|i - j| \geq d$ teljesül.*

Ha az a kérdés, hogy van-e olyan frekvencia kiosztás, amelyben minden telefonhoz tartozik frekvencia, akkor teljes d -távolságú párosítást keresünk; ha minél több telefon-frekvencia párt szeretnénk találni, akkor a maximális d -távolságú párosítás nevű optimalizálási problémát kell megoldanunk. A maximális súlyú d -távolságú párosítás feladatban adott egy $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ súlyfüggvény – jelentheti például azt, hogy az adott telefon mennyire működik jól az adott frekvencián –, és olyan M d -távolságú párosítást keresünk, amelynek az összsúlya, azaz $w(M) = \sum_{e \in M} w_e$ maximális.

A maximális d -távolságú párosítás feladat egy másik alkalmazását kapjuk, amennyiben S csúcsait egymást követő egész napos eseményeknek, T csúcsait biztonsági őröknek feleltetjük meg. Egy s nap és egy t ór között él meg, ha t beosztható az s napra. A feladat minél több naphoz hozzárendelni egy-egy ört (a teljes változatban: eldönteni, hogy minden naphoz tudunk-e ört találni), ügyelve arra, hogy valamennyi ór minden egymást követő d napon legfeljebb egyszer dolgozhat (másképp: minden munkanap után $d - 1$ pihenőnapot kell tartani). Ha az események valamilyen időközönként – mondjuk havonta – ciklikusan ismétlődnek, és az őröknek is egy ehhez igazodó állandó beosztást szeretnénk, akkor egy olyan élhalmazt keresünk, amelyben a csúcsokat nem egy egyenes, hanem egy kör mentén képzelhetjük el, ezt ciklikus d -távolságú párosításnak nevezzük [2].

1.2. Definíció (ciklikus d -távolságú párosítás). *Adott egy $G = (S, T; E)$ páros gráf, melyre $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, és egy $d \in \mathbb{Z}_+$ szám. Egy $M \subseteq E$ élhalmazt ciklikus d -távolságú párosításnak nevezünk, ha az S -beli csúcsok foka M -ben legfeljebb 1, és minden $t \in T$ -re, ha $s_i t, s_j t \in M$, akkor $|i - j| \geq d$ és $|i - j| \leq |S| - d$ is teljesül.*

Tovább általánosítható a feladat azzal, hogy az S halmazon az azonosan 1 fokszám felső korlátok helyett nagyobb felső korlátokat adunk, akár minden $s \in S$ csúcsra külön egy $b_S(s) \in \mathbb{Z}_+$ számot. Ekkor tehát az eseményekre beoszthatunk akár 1-nél több ört is (és összesen minél többet szeretnénk, hogy minél nagyobb biztonságot biztosítsunk), de eseményenként adott, hogy ott legfeljebb hány őrre lehet szükség. Ezt a változatot d -távolságú b_S -párosításnak nevezzük.

1.3. Definíció ((ciklikus) d -távolságú b_S -párosítás). *Adott egy $G = (S, T; E)$ páros gráf, melyre $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, egy $d \in \mathbb{Z}_+$ szám, valamint $b_S : S \rightarrow \mathbb{Z}_+$ fokszámkorlát függvény. Egy $M \subseteq E$ élhalmazt ((ciklikus) d -távolságú b_S -párosításnak nevezünk, ha minden $s \in S$ csúcs foka M -ben legfeljebb $b_S(s)$, és minden $t \in T$ -re, ha $s_i t, s_j t \in M$, akkor $|i - j| \geq d$ (és $|i - j| \leq |S| - d$)).*

Teljes d -távolságú b_S -párosításnak azokat a megengedett élhalmazokat nevezzük, amelyekben minden $s \in S$ csúcs foka pontosan $b_S(s)$.

A d -távolságú (b_S) -párosítás feladatok kapcsán természetesen adódó kérdés – akár a ciklikus, akár a nem ciklikus esetben –, hogy ha csak az adott, hogy melyik őr melyik eseményre osztható be (tehát egy páros gráf), akkor milyen sorrendben tartsuk meg az eseményeket ahhoz, hogy a lehető legtöbbször közülük találjunk őr a fenti feltételeknek megfelelően. Ekkor tehát az S csúcshalmaz csúcseinak egy olyan permutációját keressük, amelyre a maximális (ciklikus) d -távolságú (b_S) -párosítás a lehető legnagyobb. A kérdés persze a súlyozott esetben is értelmes, ekkor olyan permutációt keresünk, amelyre a maximális súlyú (ciklikus) d -távolságú (b_S) -párosítás a legnagyobb.

Egy (nem ciklikus) d -távolságú párosítást úgy is jellemezhetünk, mint egy olyan élhalmaz, amelyet megszorítva az $(\{s_i, s_{i+1}, \dots, s_{i+d-1}\}, T)$ csúcshalmazokra párosítást kapunk minden $i = 1, 2, \dots, (n - d + 1)$ -re. Ez a megfigyelés motiválja a d -távolságú párosítás feladat egy általánosítását, az úgynevezett k -szoros párosítás feladatot, melyet [2]-ben a d -távolságú párosítás feladat kapcsán $k = 2$ -re definiáltak.

1.4. Definíció (k -szoros párosítás). *Adott egy $G = (S, T; E)$ páros gráf és S -nek $S_1, S_2, \dots, S_k$ részhalmazai, melyekre $S_1 \cup \dots \cup S_k = S$. A G éleinek egy M részhalmazát k -szoros párosításnak nevezzük, ha az M halmazt megszorítva az (S_i, T) csúcshalmazokra párosítást kapunk minden $i = 1, 2, \dots, k$ -ra.*

A maximális súlyú k -szoros párosítás feladatban adott egy $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ súlyfüggvény, és olyan M k -szoros párosítást keressük, amelynek az összsúlya, azaz $w(M) = \sum_{e \in M} w_e$ maximális. Súlyozatlan eset alatt azt értjük, amikor $w \equiv 1$.

A k -szoros párosítás feladatra is tekinthetünk frekvencia kiosztási feladatként, ahol például azon telefonok tartoznak azonos S_i halmazba, amelyeknek valamely technikai paraméterük egyezik, ez az egyezés pedig azt okozza, hogy azonos frekvencián a telefonok zavarnák egymást.

Ha $S_1 = S_2 = \dots = S_k = S$, akkor a maximális súlyú k -szoros párosítás feladatból a klasszikus maximális súlyú párosítás feladatot kapjuk vissza, ha pedig az $S_1, \dots, S_k$ halmazok diszjunktak, akkor a keresett élhalmaz k darab egymástól független maximális súlyú (S_i, T) párosításnak felel meg. Ezekre a speciális esetekre polinom időben meg tudjuk találni az optimális élhalmazokat.

A k -szoros párosítás feladat a [3]-ban tárgyalt szimultán hozzárendelési feladat (simultaneous assignment problem) egy speciális esete. A szimultán hozzárendelési feladatban adott egy nemnegatív élkapacitásokkal ellátott gráf, valamint a gráf részgráfjainak egy halmaza, minden részgráfon a csúcsein vett foksám felső korlát függvényével. Adott ezeken kívül egy lamináris halmazrendszer a gráf csúcsein, minden halmazhoz tartozik egy foksámösszeg felső korlát. Olyan számokat szeretnénk az élekre írni, amelyek minden élen az adott él kapacitásánál nem nagyobbak, minden részgráfon minden csúcsra teljesülnek a foksám felső korlátok, valamint a lamináris halmazrendszer minden elemére teljesülnek a foksámösszeg korlátok (ahol egy csúcs foksáma alatt most a rá illeszkedő éleken szereplő számok összegét értjük). A feladat súlyozott változatában adott élsúlyozás mellett keressük a maximális súlyú megoldást (az élekhez rendelt számok élsúllyal vett súlyozásainak összegét szeretnénk maximalizálni). Ha a gráf páros, a kapacitás minden élen 1, a részgráfok minden $i = 1, \dots, k$ -ra az S_i és a T csúcsai által feszített részgráfok ($S_1, \dots, S_k \subseteq S$, $S_1 \cup \dots \cup S_k = S$), a részgráfok mindegyikén a foksámkorlát függvénye azonosan 1 és a lamináris

halmazrendszer üres, akkor adott élsúlyozásra visszkapjuk a súlyozott k -szoros párosítás feladatot.

Egy k -szoros párosításra – és így egy d -távolságú párosításra is – gondolhatunk úgy, mint egy csúcsonként adott fokszám felső korlátoknak eleget tevő élhalmaz, amelyben bizonyos konkrét részgráfok előfordulását megtiltjuk. Konkrétan a k -szoros párosításban azon $(\{s_i, s_j\}, \{t\}; \{s_i t, s_j t\})$ részgráfokat tiltjuk meg, amelyekre $s_i t, s_j t \in E$ és valamely $l = 1, \dots, k$ -ra $s_i, s_j \in S_l$. Egy ehhez hasonló ismert probléma például az úgynevezett $K_{p,p}$ -mentes p -párosítás feladat ($K_{p,p}$ -free p -matching problem), melyben egy gráfban adott egy $K_{p,p}$ -vel izomorf részgráfokból álló halmaz, valamint minden csúcsra egy $\{0, \dots, p\}$ halmazból választott fokszám felső korlát. A feladatban olyan maximális méretű élhalmazt keresünk, amely eleget tesz a fokszámkorlátoknak, valamint nem tartalmazza részgráfként az adott $K_{p,p}$ részgráfokat [4]. A mi feladatainkban a részgráfok $K_{1,2}$ -vel izomorfak, és a fokszámkorlátokra is más megkötéseink vannak.

2. A k -szoros párosítás feladat

Már $k = 2$ -re is NP-teljes az az eldöntési feladat, hogy van-e az S csúcshalmazt fedő k -szoros párosítás. Ennek bizonyításához a 3-dimenziós párosítás feladatot kell visszavezetni a k -szoros párosítás feladatra, mely visszavezetés [2]-ben olvasható.

Először a 2.1. fejezetben két egyszerű közelítő algoritmust mutatunk (egy k -közelítést minden k -ra, illetve egy $3/2$ -közelítést $k = 2$ -re). Ezt követően felírjuk a feladat egészértékű programozási modelljét, adunk egy felső becslést az egészértékűségi hézagra, és egy C++ programmal keresünk minél nagyobb egészértékűségi hézaggal rendelkező példányokat.

A maximális k -szoros párosítás feladatról eddig is ismert volt, hogy a súlyozott változatát – melyben 1 és 2 súlyok is vannak – már $k = 2$ esetben is NP-nehez α -közelíteni, ha $\alpha < \frac{760}{759}$. Ennek a bizonyítását a [3] tartalmazza, és a 2.5. Tételben mi is bemutatjuk. A súlyozatlan változat a súlyozottnak egy speciális esete (amikor $w \equiv 1$), ezért ez egy könnyebb feladat. Emiatt a súlyozott változat nehézségéből nem következik a súlyozatlan változat nehézsége. Nyitott kérdés volt tehát, hogy létezik-e polinom idejű approximációs séma a maximális 2-szeres párosítás feladat súlyozatlan változatára. A 2.4. Tételben bebizonyítjuk, hogy a válasz nem, konkrétan ha $\alpha < \frac{950}{949}$, akkor a súlyozatlan változat egy α -közelítéséből $P=NP$ következne. Mivel a maximális d -távolságú párosítás feladatra visszavezethető a 2-szeres párosítás feladat, ezért a 2.4. Tételből ennek a közelíthetetlensége is következik. A visszavezetést a 3.1. Tétel bizonyításában mutatjuk be.

2.1. Közelítő algoritmusok

A $G = (S, T; E)$ páros gráfban egy $U \subseteq S$ csúcshalmazra jelöljük $(U, T)_G$ -vel az $U \cup T$ csúcshalmaz által feszített részgráfot.

Legyen $G = (S, T; E)$ páros gráf, $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ súlyfüggvény. Az $S = S_1 \cup \dots \cup S_k$, ahol $S_1, \dots, S_k \subseteq S$. Minden $i = 1, \dots, k$ -ra $M_i \subseteq E$ legyen egy maximális súlyú párosítás az $(S_i, T)_G$ gráfon, M pedig legyen $M_1, \dots, M_k$ közül a maximális súlyú.

2.1. Állítás. Az M ekkor egy k -közelítő súlyozott k -szoros párosítás G -ben.

Bizonyítás. Az M megengedett k -szoros párosítás, hiszen M -et az (S_i, T) csúcshalmazokra megszorítva párosítást kapunk minden $i = 1, \dots, k$ -ra. Jelöljük M^* -gal a maximális súlyú k -szoros párosítást. Az M^* -ra felírhatjuk, hogy $M^* = M'_1 \cup \dots \cup M'_k$, ahol $M'_i \subseteq E$ egy $(S_i, T)_G$ részgráfon vett párosítás. Minden $i = 1, \dots, k$ -ra $w(M'_i)$ érték felülről becsülhető $w(M_i)$ -vel (hiszen M_i a maximális súlyú párosítás $(S_i, T)_G$ gráfon), amiből

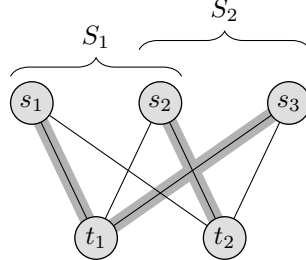
$$w(M^*) \leq w(M_1) + w(M_2) + \dots + w(M_k) \leq k \cdot w(M).$$

□

A fenti becslés pontos, ha $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$, $T = \{t\}$, minden $i = 1, 2, \dots, k$ -ra $s_i \in S_i$, de $s_i \notin S_j$ ha $j \neq i$, minden s_i szomszédos t -vel, valamint $w \equiv 1$. Ekkor a fenti eljárással kapott $w(M) = 1$, az optimális M^* -ra pedig $w(M^*) = k$.

Ha $k = 2$, akkor jobbat is tudunk mutatni. Legyen $M_1 \subseteq E$ egy maximális súlyú párosítás az $(S_1, T)_G$ gráfban, $M_2 \subseteq E$ pedig egy maximális súlyú párosítás az $(S_2, T)_G$ gráfban. Vegyünk egy-egy maximális súlyú párosítást az $(S_1 \setminus S_2, T)_G$ és $(S_2 \setminus S_1, T)_G$ gráfokon, jelölje ezeket rendre M_{12} és M_{21} . Legyen az $M \subseteq E$ a maximális súlyú élhalmaz M_1, M_2 és $(M_{12} \cup M_{21})$ közül.

2.2. Állítás. Az M ekkor egy $3/2$ -közelítő súlyozott 2 -szeres párosítás G -ben.



1. ábra. Példa egy 2-szeres párosítás feladatra, amelyben a $3/2$ -közelítő algoritmus pontos, tehát az optimum $2/3$ -át találja meg. A maximális 2-szeres párosítást kiemelés jelzi.

Bizonyítás. Az M megengedett, hiszen M_1, M_2 és $(M_{12} \cup M_{21})$ élhalmazokra is teljesül, hogy megszorítva őket az (S_1, T) és az (S_2, T) csúcshalmazokra párosításokat kapunk. Jelöljük az optimális 2-szeres párosítást M^* -gal. Az M^* felírható, mint egy $(S_1, T)_G$ gráfon vett párosítás és egy $(S_2 \setminus S_1, T)_G$ gráfon vett párosítás uniója, amiből

$$w(M^*) \leq w(M_1) + w(M_{21}),$$

hiszen M_1 és M_{21} a maximális súlyúak ezeken a részgráfokon. Hasonlóan: M^* egy $(S_2, T)_G$ gráfon és egy $(S_1 \setminus S_2, T)_G$ gráfon vett párosítás uniója, tehát

$$w(M^*) \leq w(M_2) + w(M_{12}).$$

A fenti két megállapításból pedig $2w(M^*) \leq w(M_1) + w(M_2) + w(M_{12}) + w(M_{21}) \leq 3w(M)$, tehát

$$w(M^*) \leq \frac{3}{2}w(M).$$

□

Ha $S = \{s_1, s_2, s_3\}$, $S_1 = \{s_1, s_2\}$, $S_2 = \{s_2, s_3\}$, $T = \{t_1, t_2\}$ és $G = (S, T; E)$ a 1. ábrán látható teljes páros gráf, $w \equiv 1$, akkor a fenti eljárással kapott $w(M) = 2$, az optimális $w(M^*) = 3$, tehát ekkor a fenti becslés pontos.

2.2. Egészértékűségi hézag

Írjuk fel a súlyozott k -szoros párosítás problémát mint egészértékű programozási (IP) feladat. Tartozzon minden $e \in E$ élhez egy $x_e \in \mathbb{Z}_+$ változó. A feladatban azt követeljük meg, hogy minden $t \in T$ csúcs esetén minden $i = 1, \dots, k$ -ra a t -re legfeljebb 1 olyan él illeszkedjen, amelynek másik végpontja az S_i -ben van, valamint azt is elvárjuk, hogy minden $s \in S$ csúcsnak pontosan 1 legyen a foka. A természetes modell tehát:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{e \in E} w_e x_e \\ x \in \quad & \mathbb{Z}_+^E \\ \sum_{\substack{e=ts \in E \\ s \in S_i}} x_e \leq 1 \quad & \forall t \in T \quad \forall i \in \{1, \dots, k\} \\ \sum_{e=ts \in E} x_e \leq 1 \quad & \forall s \in S \end{aligned}$$

Jelöljük OPT_{IP} -vel az optimális egészértékű megoldás értékét és OPT_{LP} -vel az egészértékűségi feltétel elhagyásával kapott lineáris programozási feladat (LP relaxált) optimális megoldásának értékét. Egészértékűségi hézagoknak (integrality gap) nevezzük maximalizálási problémák esetén az $\frac{\text{OPT}_{\text{LP}}}{\text{OPT}_{\text{IP}}}$ hányadost (minimalizálási feladatoknál $\frac{\text{OPT}_{\text{IP}}}{\text{OPT}_{\text{LP}}}$). Közelítő algoritmusok kidolgozásához gyakran használjuk a sokszor könnyebben kezelhető relaxált feladatot, az algoritmus elemzéséhez pedig az LP optimumot az egészértékű optimum becslésére. Az egészértékűségi hézagok szuprémuma így ad egy korlátot arra, hogy az adott feladatra legjobb esetben milyen közelítés adható LP optimumot használó közelítő módszerekkel, ezért értékének különböző becslései az optimalizálási problémák témaköréhez szorosan kapcsolódó fontos kérdések.

Az alábbi állításban a 2-szeres párosítás feladatra vonatkozó egészértékűségi hézagra adunk egy felső becslést.

2.1. Tétel. *A súlyozott 2-szeres párosítás probléma bármely példányára felírt IP feladatra és annak LP relaxáltjára*

$$\frac{\text{OPT}_{\text{LP}}}{\text{OPT}_{\text{IP}}} \leq \frac{3}{2}.$$

Bizonyítás. Az állítás abból az egyszerű megállapításból következik, hogy egy páros gráfban vett maximális súlyú párosítás feladat IP modelljére és annak LP relaxáltjára $\text{OPT}_{\text{IP}} = \text{OPT}_{\text{LP}}$. Ez azért igaz, mert egy páros gráf incidenciamátrixa teljesen unimoduláris, és a maximális súlyú párosításra felírt LP feladat jobb oldala is egész, ezért az erős bázismegoldások egészek lesznek [5, 149. oldal].

A súlyozott 2-szeres párosítás feladat relaxáltjának egy optimális megoldása előáll mint az $(S_1, T)_G$ gráfon és az $(S_2 \setminus S_1, T)_G$ gráfon vett relaxált maximális súlyú párosítás feladatok egy-egy megoldásának uniója. Ezen LP feladatok optimális értékei az első megállapítás alapján megegyeznek az IP optimumokkal. Ebből a 2.2. Állításban használt jelölésekkel és gondolatmenettel:

$$\text{OPT}_{\text{LP}} \leq w(M_1) + w(M_{21}),$$

valamint hasonlóan:

$$\text{OPT}_{\text{LP}} \leq w(M_2) + w(M_{12}).$$

Ezekből pedig $2\text{OPT}_{\text{LP}} \leq 3w(M) \leq 3\text{OPT}_{\text{IP}}$, hiszen M egy megengedett IP megoldás. Tehát

$$\frac{\text{OPT}_{\text{LP}}}{\text{OPT}_{\text{IP}}} \leq \frac{3}{2},$$

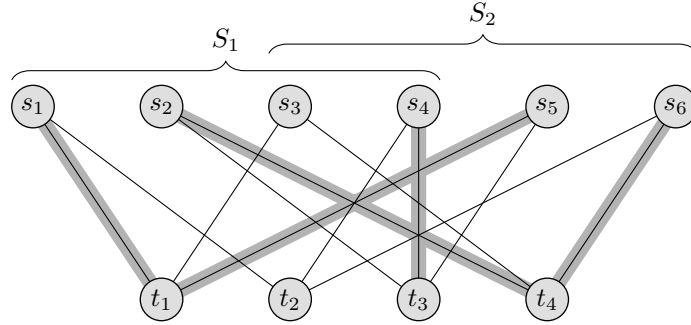
és ezt állítottuk. □

Nem tudjuk, hogy ez a felső becslés pontos-e, tehát hogy van-e olyan példánya a maximális 2-szeres párosítás feladatnak, amelyre az LP optimum és az IP optimum hányadosa pontosan $3/2$. Természetesen adódik a kérdés, hogy mi az a legkisebb szám, amit a 2.1. Tételben a $3/2$ helyére írhatunk. Mivel $\text{OPT}_{\text{LP}} \geq \text{OPT}_{\text{IP}}$ (hiszen minden IP megoldás LP megoldás is), ezért a felső becslés biztosan legalább 1. Ennek javításához egy programmal kerestük a feladatnak olyan példányát, melyre az egészértékűségi hézag minél nagyobb.

A C++ nyelven írt program alapötlete az volt, hogy egy adott $G = (S, T; E)$ páros gráfra végignéztük az S csúcsainak összes lehetséges beosztását az S_1 és S_2 halmazokba (ahol $S_1, S_2 \subseteq S$, $S_1 \cup S_2 = S$), minden beosztásra megoldottuk a IP és a relaxált LP feladatot $w \equiv 1$ súlyfüggvénnyel, majd az optimumok hányadosaként megkaptuk az adott példányhoz tartozó egészértékűségi hézagot. A gráfok implementálásához a LEMON könyvtárat [6] használtuk, a lineáris és egészértékű programozási feladatokat a CPLEX optimalizáló szoftvercsomag [7] segítségével oldottuk meg. Ezt lefuttattuk izomorfia erejéig az összes $G = (S, T; E)$ páros gráfra, melyre $|S| \leq 7$, $|T| \leq 5$ és maximumot kerestünk a kapott egészértékűségi hézagok között. A program futását párhuzamosítással gyorsítottuk. A maximális értékhez tartozó példány a 2. ábrán látható, az egészértékűségi hézag értéke erre $6/5$, mely eredmény megegyezik az eddig ismert legnagyobb korláttal [2]. A program forráskódja elérhető a [8] linken.

2.3. Közelíthetelenség

Egy páros gráfban maximális méretű párosítást keresni könnyen tudunk polinom időben, sőt, még a jóval általánosabb élsúlyozott esetre is ismert polinomiális algoritmus, akár általános gráfokon is [9]. A feladat viszont jóval nehezebbé válik, ha 2 helyett 3 csúcsosztályt veszünk, és hagyományos élek (2-uniform hiperélek) helyett 3-uniform hiperélek vannak.



2. ábra. Példa a $6/5$ nagyságú egészértékűségi hézagra. Egy optimális LP megoldás az $x \equiv 1/2$. Egy optimális IP megoldást az ábrán kiemeléssel jelöltünk.

2.2. Definíció (3-dimenziós párosítás). Adottak X, Y, Z diszjunkt csúshalmazok és $\mathcal{H} \subseteq X \times Y \times Z$ hiperélek halmaza (azaz egy 3-osztályú 3-uniform hipergráf). Az $F \subseteq \mathcal{H}$ halmazt 3-dimenziós párosításnak nevezzük, ha bármely két $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in F$ hiperélre $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$ és $z_1 \neq z_2$ teljesül.

A maximális 3-dimenziós párosítás problémában a maximális számú hiperélből álló 3-dimenziós párosítást keressük. A probléma eldöntési változata nevezetes NP-teljes feladat: egyike Karp 21 NP-teljes problémájának [10]. Optimalizálási feladatként is jól ismert, hogy a feladat APX-teljes [11]. A k -szoros párosítás közelíthetlenségét az alábbi tétel felhasználásával látjuk be, melynek bizonyítását a [12] tartalmazza.

2.3. Tétel. A maximális 3-dimenziós párosítás feladatot már 2-reguláris példányokra megszorítva is NP-nehéz α -közelíteni, ha $\alpha < \frac{95}{94}$.

A 2-regularitás alatt ebben az esetben azt értjük, hogy minden csúcs pontosan 2 hiperélben van benne. A most következő tételben belátjuk, hogy a maximális k -szoros párosítás feladatra már $k = 2$ esetben sem létezik polinom idejű approximációs séma (ha $P \neq NP$).

2.4. Tétel. A maximális 2-szeres párosítás feladatot NP-nehéz α -közelíteni, ha $\alpha < \frac{950}{949}$.

Bizonyítás. A tétel igazolásához a 2.3. Tételt használjuk fel, mely a maximális 3-dimenziós párosítás feladat közelíthetlenségéről szól 2-reguláris példányokon. Ezt a feladatot vezettjük vissza a 2-szeres párosítás feladatra egy közelíthetőség-tartó visszavezetéssel (konkrétan egy L-visszavezetéssel [13]).

Vegyünk egy 2-reguláris 3-osztályú 3-uniform hipergráf hiperéleinek $\mathcal{H}$ halmazát háromszor, legyenek ezek $\mathcal{H}_X, \mathcal{H}_Y, \mathcal{H}_Z$. Egy $e \in \mathcal{H}$ hiperél három változata legyen $e^{(X)} \in \mathcal{H}_X, e^{(Y)} \in \mathcal{H}_Y$ és $e^{(Z)} \in \mathcal{H}_Z$. Tekintsük a következő példányát a 2-szeres párosítás feladatnak: $G = (S, T; E)$ páros gráfra $S = \mathcal{H}_X \cup \mathcal{H}_Y \cup \mathcal{H}_Z$ és $T = X \cup Y \cup Z$. Minden $e \in \mathcal{H}$ -ra legyen $e^{(X)}e^{(Y)}$ és $e^{(Y)}e^{(Z)}$ $E(G)$, illetve minden $u \in U$ csúcsot, ahol $U \in \{X, Y, Z\}$ kössük össze az őt tartalmazó két hiperél $\mathcal{H}_U$ -beli változatával. Legyen $S_1 = \mathcal{H}_X \cup \mathcal{H}_Y, S_2 = \mathcal{H}_Y \cup \mathcal{H}_Z$. Egy $e = (x, y, z) \in \mathcal{H}$ -ra legyen $K_e = \{e^{(X)}e^{(Y)}, e^{(Z)}e^{(Y)}, xe^{(X)}, ye^{(Y)}, ze^{(Z)}\}$ élekből álló halmaz. A konstrukciót a 3a. és a 3c. ábra szemlélteti.

Tegyük fel, hogy létezik α -közelítő algoritmus a 2-szeres párosítás feladatra, és legyen M egy α -közelítő megoldás G -ben. A továbbiakban belátjuk,

hogy ennek felhasználásával tudunk mutatni egy $(\frac{1}{10/\alpha-9})$ -közelítő 3-dimenziós párosítást az eredeti hipergráfban, feltéve, hogy $\alpha < \frac{10}{9}$.

Hajtsuk végre M -en a következőt: minden $e \in \mathcal{H}$ -ra, ha $|K_e \cap M| < 3$, akkor töröljük ki M -ből a K_e -beli éleket, és vegyük be az $e^{(X)}e^{(Y)}$ és az $e^{(Y)}e^{(Z)}$ éleket. A módosítások során M megengedett marad és $|M|$ nem csökken, tehát M továbbra is α -közelítő. A végső M -re az is teljesül, hogy minden $e = (x, y, z) \in \mathcal{H}$ -ra vagy $|K_e \cap M| = 2$, ekkor $K_e \cap M = \{e^{(X)}e^{(Y)}, e^{(Y)}e^{(Z)}\}$, vagy $|K_e \cap M| = 3$, és ekkor $K_e \cap M = \{xe^{(X)}, ye^{(Y)}, ze^{(Z)}\}$.

Készítsük el az F 3-dimenziós párosítást M -ből úgy, hogy legyen $e \in F$ pontosan akkor, ha $|K_e \cap M| = 3$. Az F ekkor megengedett 3-dimenziós párosítás, hiszen $e_1, e_2 \in \mathcal{H}$ hiperélekre $K_{e_1} \cap M = \{x_1e_1^{(X)}, y_1e_1^{(Y)}, z_1e_1^{(Z)}\}$ és $K_{e_2} \cap M = \{x_2e_2^{(X)}, y_2e_2^{(Y)}, z_2e_2^{(Z)}\}$ egyidejűleg csak akkor teljesülhet, ha $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ és $z_1 \neq z_2$ (mert M -ben ezen csúcsok fokszáma legfeljebb 1).

A fentiek alapján bármely G -beli M 2-szeres párosításhoz tudunk konstruálni egy F 3-dimenziós párosítást, melyre fennáll, hogy

$$|M| = 3|F| + 2 \cdot (2|Z| - |F|) = |F| + 4|Z|,$$

hiszen az F -beli hiperélekhez 3, a $\mathcal{H} \setminus F$ -beliekhez 2 él tartozik M -ben. Ezt az M^* maximális 2-szeres párosításra és a hozzá tartozó F' -re alkalmazva $|M^*| = |F'| + 4|Z| \leq |F^*| + 4|Z|$ (ahol F^* a maximális 3-dimenziós párosítás). Fordítva is igaz: bármely F 3-dimenziós párosításhoz készíthető egy M 2-szeres párosítás, amelyre szintén fennáll a fenti összefüggés, tehát $|M^*| \geq |F^*| + 4|Z|$, amiből

$$|M^*| = |F^*| + 4|Z|$$

következik. Ezekből pedig az α -közelítő M -re és a hozzá tartozó F -re, valamint az optimális M^* -ra és F^* -ra

$$|M^*| - |M| = |F^*| - |F|. \quad (1)$$

Mohón választva független hiperéleket legalább $\frac{|\mathcal{H}|}{4}$ élt ki tudunk választani, tehát

$|F^*| \geq \frac{|\mathcal{H}|}{4} = \frac{|Z|}{2}$. Mivel M -ben minden S -beli csúcs foka legfeljebb 1 lehet és $|S| = 2|\mathcal{H}| + |Z| = 5|Z|$, ezért $|M^*| \leq 5|Z|$. Összefoglalva tehát

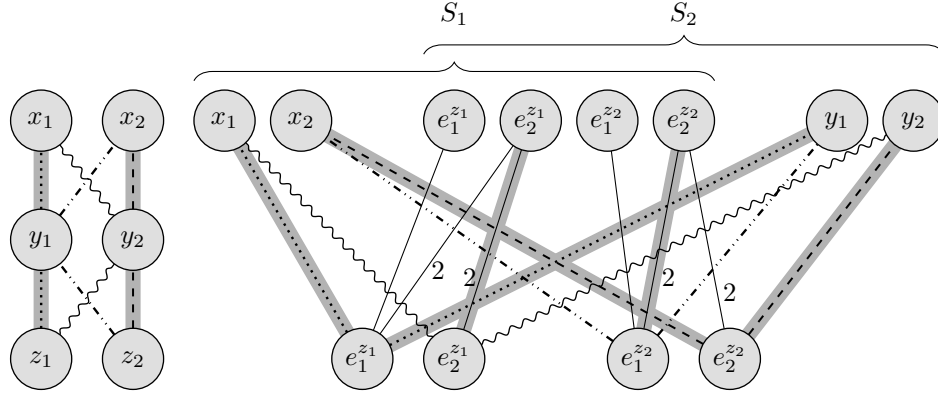
$$|M^*| \leq 5|Z| \leq 10|F^*|. \quad (2)$$

Vizsgáljuk az $\frac{|F|}{|F^*|}$ hányadost:

$$\begin{aligned} \frac{|F|}{|F^*|} &= \frac{|F^*| - (|M^*| - |M|)}{|F^*|} = 1 - \frac{|M^*| - |M|}{|F^*|} \geq \\ &\geq 1 - 10 \frac{|M^*| - |M|}{|M^*|} = 1 - 10 \left(1 - \frac{|M|}{|M^*|} \right) = 1 - 10 \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{10}{\alpha} - 9 \end{aligned}$$

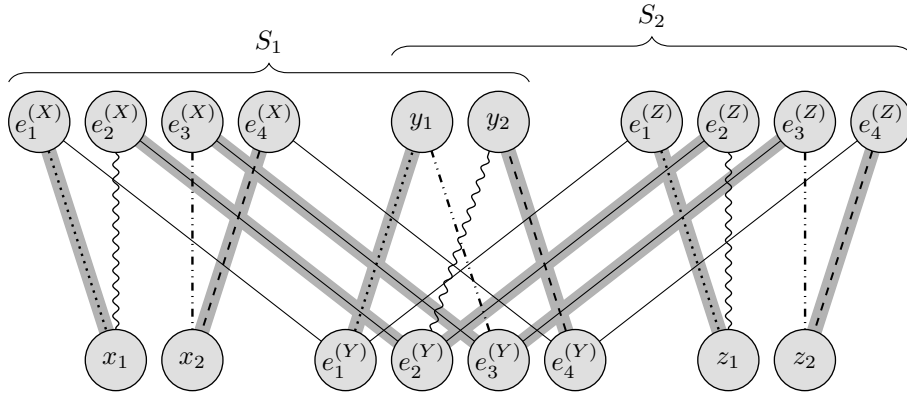
ahol az első egyenlőség (1)-ből, az egyenlőtlenség (2)-ből következik. Ha $\alpha < \frac{10}{9}$, akkor $\frac{|F^*|}{|F|} \leq \frac{1}{10/\alpha-9}$, tehát ha lenne egy α -közelítő algoritmusunk a 2-szeres párosítás feladatra, annak segítségével könnyen tudnánk mutatni egy $(\frac{1}{10/\alpha-9})$ -közelítő 3-dimenziós párosítást. Mivel a 2.3. Tétel szerint a 2-reguláris 3-dimenziós párosítás feladatot NP-nehéz β -közelíteni ha $\beta < \frac{95}{94}$, ezért a 2-szeres párosítás feladatot is biztosan NP-nehéz α -közelíteni, ha $(\frac{1}{10/\alpha-9}) < \frac{95}{94}$.

Ezt átrendezve megkaphatjuk, hogy a 2-szeres párosítás feladatát NP-nehez α -közelíteni, ha $\alpha < \frac{950}{949}$. $\square$



(a) Egy 3-dimenziós párosítás feladat.

(b) Az (a)-hoz tartozó súlyozott 2-szeres párosítás feladat. A jelöletlen élek súlya 1.



(c) Az (a)-hoz tartozó 2-szeres párosítás feladat.

3. ábra. A 2.4. Tétel bizonyításának szemléltetése. Minden hiperélhez egyedi stílusú vonal tartozik. Az (a) ábrán kiemelt 3-dimenziós párosításhoz tartozó megengedett megoldásokat a (b) ábrán is kiemelés jelzi.

Ha a feladat súlyozott változatát vizsgáljuk, akkor a közelítés nehézségét már $\alpha < \frac{760}{759}$ esetben is tudjuk bizonyítani [3].

2.5. Tétel. A maximális súlyú 2-szeres párosítás feladatát NP-nehez α -közelíteni, ha $\alpha < \frac{760}{759}$ és az élsúlyok között 1-es és 2-es is szerepel.

Bizonyítás. A 2-reguláris 3-dimenziós párosítás feladat példányaiban a z -re illeszkedő két hiperél nevezük e_1^z -nek és e_2^z -nek minden $z \in Z$ -re. Legyen a $G = (S, T; E)$ páros gráfra $S = X \cup \mathcal{H} \cup Y$, $T = \mathcal{H}$. Minden $s \in S \cap (X \cup Y)$ -ra fusson egy 1-súlyú él s és az őt tartalmazó két T -beli hiperél között; szintén 1-súlyú éllel minden $z \in Z$ -re kössük össze az $e_1^z \in S$ csúcsot $e_1^z \in T$ -vel; valamint

minden $z \in Z$ -re vezessen $e_2^z \in S$ -ből és $e_1^z \in T$ -be és $e_2^z \in T$ -be egy-egy 2-súlyú él. Legyen $S_1 = S \setminus Y$ és $S_2 = S \setminus X$.

Tegyük fel, hogy létezik α -közelítő algoritmus ($\alpha < \frac{8}{7}$) a maximális súlyú 2-szeres párosítás feladatra és legyen M egy α -közelítő megoldás. Minden $z \in Z$ -re hajtsuk végre M -en a következő módosításokat:

- 1) ha $e_1^z \in T$ és $e_2^z \in T$ is 2-fokú M -ben, akkor cseréljük le az e_2^z -re illeszkedő két élt az $e_2^z e_2^z$ élre
- 2) ha $e_1^z \in T$ és $e_2^z \in T$ közül pontosan az egyik a 2-fokú M -ben, akkor a másikat kössük össze $e_2^z \in S$ -sel és töröljük a többi rá illeszkedő élt
- 3) ha $e_1^z \in T$ és $e_2^z \in T$ közül egyik sem 2-fokú M -ben, akkor vegyük be $e_1^z e_1^z$ és $e_2^z e_2^z$ éleket M -be és töröljük a többi rájuk illeszkedő élt

A módosítások során M megengedett marad, és $w(M)$ nem csökken, tehát M továbbra is α -közelítő. A végső M -re továbbá az is teljesül, hogy minden $z \in Z$ -re $e_1^z \in T$ és $e_2^z \in T$ közül az egyikre egy 2-súlyú él illeszkedik, a másiknak pedig vagy két $S \cap (X \cup Y)$ -beli, vagy egy $S \cap \mathcal{H}$ -beli szomszédja van.

Készítsük el az F 3-dimenziós párosítást M -ből: legyen $(x, y, z) \in F$ pontosan akkor, ha valamely $i = 1, 2$ -re $xe_i^z \in M$ és $ye_i^z \in M$. Az F ekkor megengedett 3-dimenziós párosítás, hiszen M -ben az 1)-es módosítások miatt e_1^z és e_2^z közül legfeljebb az egyik lehet 2-fokú, a $t \in T$ pontok fokszáma pedig legfeljebb 1 lehet M -ben.

Ezek alapján bármely M G -beli 2-szeres párosításhoz elkészíthető az F 3-dimenziós párosítás, melyekre $w(M) = 2|Z| + 2|F| + (|Z| - |F|) = 3|Z| + |F|$ teljesül (hiszen M -ben a T -beli csúcsok felére, azaz $|Z|$ darab csúcsra 2-súlyú él illeszkedik, T másik felében pedig pontosan $|F|$ darab csúcsnak 2 a foka és $|Z| - |F|$ csúcsnak 1) és fordítva: bármely F -hez lehet konstruálni olyan M -et, melyek között ugyanez fennáll. Ebből tehát az α -közelítő M -re és a hozzá tartozó F -re

$$w(M) = 3|Z| + |F|$$

teljesül. Legyen F^* a maximális 3-dimenziós párosítás, M^* pedig a maximális súlyú 2-szeres párosítás G -ben. A fentiek miatt M^* -ra és F^* -ra is igaz, hogy

$$w(M^*) = 3|Z| + |F^*|.$$

Ezekből pedig

$$w(M^*) - w(M) = |F^*| - |F| \quad (3)$$

következik. Mivel M -ben a T -beli csúcsokra illeszkedő élek összsúlya legfeljebb 2 lehet, ezért $w(M^*) \leq 2|\mathcal{H}|$, a 3-dimenziós párosítás feladatban pedig $|F^*| \geq \frac{|\mathcal{H}|}{4}$, tehát

$$w(M^*) \leq 2|\mathcal{H}| \leq 8|F^*|. \quad (4)$$

A (3) és (4) felhasználásával a 2.4. Tétel bizonyításához hasonlóan vizsgálhatjuk az $\frac{|F|}{|F^*|}$ hányadost:

$$\frac{|F|}{|F^*|} = 1 - \frac{w(M^*) - w(M)}{|F^*|} \geq 1 - 8 \frac{w(M^*) - w(M)}{w(M^*)} = \frac{8}{\alpha} - 7$$

Ebből $\frac{|F^*|}{|F|} \leq \frac{1}{8/\alpha - 7}$ (ha $\alpha < \frac{8}{7}$), tehát ha lenne egy α -közelítő algoritmusunk a maximális súlyú 2-szeres párosítás feladatra, annak segítségével könnyen

tudnánk mutatni egy $(\frac{1}{8/\alpha-7})$ -közelítő 3-dimenziós párosítást. Mivel a 2-reguláris 3-dimenziós párosítás feladatát NP-nehéz β -közelíteni ha $\beta < \frac{95}{94}$, ezért a maximális súlyú 2-szeres párosítás feladatát is biztosan NP-nehéz α -közelíteni, ha $(\frac{1}{8/\alpha-7}) < \frac{95}{94}$. Ezt átrendezve megkaphatjuk, hogy a maximális súlyú 2-szeres párosítás feladatát NP-nehéz α -közelíteni, ha $\alpha < \frac{760}{759}$. $\square$

Ez a bizonyítás kisebb módosításokkal úgy is elmondható, hogy a 2-es súlyok helyett $(2-\varepsilon)$ súlyokat használunk, ahol ε kicsi pozitív szám. A gondolatmenet annyiban módosul, hogy amikor az 1) lépést hajtjuk végre, akkor $w(M)$ érték csökkenni fog, méghozzá minden lépésben ε -nal. A módosítások után tehát $(2-\varepsilon)|Z| + 2|F| + |Z| - |F| = (3-\varepsilon)|Z| + |F|$ lesz az M -beli élek összértéke. Viszont mivel 1) legfeljebb $|F|$ -szer történhet meg, ezért az α -közelítő M -re és a hozzá tartozó F -re

$$w(M) - \varepsilon \cdot |F| \leq (3-\varepsilon)|Z| + |F|,$$

az optimális M^* -ra és F^* -ra pedig felírhatjuk, hogy

$$(3-\varepsilon)|Z| + |F^*| \leq w(M^*),$$

melyekből

$$|F^*| - |F| \leq w(M^*) - w(M) + \varepsilon \cdot |F|.$$

Az $\frac{|F|}{|F^*|}$ becslése tehát:

$$\begin{aligned} \frac{|F|}{|F^*|} &\geq \frac{|F^*| - (w(M^*) - w(M) + \varepsilon \cdot |F|)}{|F^*|} = 1 - \frac{w(M^*) - w(M)}{|F^*|} - \varepsilon \cdot \frac{|F|}{|F^*|} \geq \\ &\geq 1 - 8 \frac{w(M^*) - w(M)}{w(M^*)} - \varepsilon \cdot \frac{|F|}{|F^*|} = \frac{8}{\alpha} - 7 - \varepsilon \cdot \frac{|F|}{|F^*|} \end{aligned}$$

Tehát $\frac{|F^*|}{|F|} \leq \frac{1+\varepsilon}{8/\alpha-7}$ (ha $\alpha < \frac{8}{7}$). Ha lenne egy α -közelítő algoritmusunk az 1 és $(2-\varepsilon)$ súlyokkal súlyozott 2-szeres párosítás feladatra, akkor rögtön tudnánk mutatni egy $(\frac{1+\varepsilon}{8/\alpha-7})$ -közelítő 3-dimenziós párosítást. Ebből az előzőhöz hasonló gondolatmenettel következik, hogy a feladatot NP-nehéz α -közelíteni, ha $\alpha < \frac{760}{94 \cdot \varepsilon + 759}$. Ennek csak legfeljebb akkora ε -ra van értelme, amire még a jobb oldal nagyobb, mint 1, amiből $\varepsilon < \frac{1}{94}$ következik. Minél kisebb tehát ε , annál nagyobb α -ra tudjuk belátni, hogy az 1 és $(2-\varepsilon)$ súlyokkal ellátott 2-szeres párosítás feladatát NP-nehéz α -közelíteni.

Azonban azt is beláttuk, hogy már a súlyozatlan esetet is nehéz α -közelíteni, ha $\alpha < \frac{950}{949}$, ezért ha $\frac{1}{1+\varepsilon} \cdot \frac{760}{759} < \frac{950}{949}$, tehát $\varepsilon > \frac{1}{470}$, akkor a súlyozatlan esetből származó becslés jobb lesz, mint a $(2-\varepsilon)$ -os bizonyításból származó.

Összefoglalva tehát beláttuk, hogy a (súlyozott vagy súlyozatlan) maximális 2-szeres párosítás feladatát NP-nehéz α -approximálni, ha $\alpha < \frac{950}{949}$ és ha a súlyozott változatot nézzük, ahol a súlyok között 1 és $(2-\varepsilon)$ is előfordul $0 \leq \varepsilon < \frac{1}{470}$ -re, akkor ennél jobbat is mondhatunk: a feladatot már akkor is NP-nehéz α -approximálni, ha $\alpha < \frac{760}{94 \cdot \varepsilon + 759}$.

3. A d -távolságú párosítás feladat

Ebben a fejezetben a d -távolságú párosítás feladattal, és annak különböző változataival foglalkozunk. Először a 3.1. fejezetben belátjuk, hogy a maximális d -távolságú párosítás feladatnak már a súlyozatlan változatát is NP-nehéz α -közelíteni, ha $\alpha < \frac{950}{949}$.

Ezt követően a 3.2. fejezetben felírjuk a feladat egészértékű programozási modelljét, megmutatjuk, hogy a súlyozott 2-szeres párosítás feladatra az LP relaxálthoz tartozó poliéder egész, ez pedig egyben egy polinomiális algoritmust is szolgáltat a feladat egzakt megoldására. Megmutatjuk, hogy ha S elemszáma osztható $(2d-1)$ -gyel, akkor a súlyozott ciklikus d -távolságú párosítás feladatra vonatkozó egészértékűségi hézag legfeljebb $2 - \frac{1}{d}$, valamint javítjuk a súlyozott d -távolságú párosítás feladatra vonatkozó egészértékűségi hézag legjobb eddig ismert felső becslését: bebizonyítjuk, hogy az egészértékűségi hézag legfeljebb $2 - \frac{2}{d}$.

A 3.3. fejezetben az S halmaz csúcsainak olyan permutációját keressük, amelyre a maximális d -távolságú párosítás a lehető legnagyobb. Megmutatjuk, hogy a ciklikus és a nem ciklikus esetben is polinom időben meg tudjuk találni ezeket az optimális permutációkat, valamint bebizonyítjuk, hogy ha S -en az azonosan 1 helyett azonosan r fokszámkorlátokat veszünk, akkor az optimális permutáció megtalálása a nem ciklikus esetben NP-nehéz.

3.1. Közelíthetatlenség

A 2.4. Tétel felhasználásával könnyen beláthatjuk a maximális d -távolságú párosítás közelítésének nehézségére vonatkozó alábbi eredményt is. A bizonyításban bemutatott visszavezetést a [2] tartalmazza.

3.1. Tétel. *A maximális d -távolságú párosítás feladatot NP-nehéz α -közelíteni, ha $\alpha < \frac{950}{949}$.*

Bizonyítás. Vezessük vissza a 2-szeres párosítás feladatot a d -távolságú párosítás feladatra. Legyen G a 2-szeres párosítás feladat egy példánya, tehát $G = (S, T; E)$ páros gráf, $S_1, S_2 \subseteq S$, $S_1 \cup S_2 = S$. Rendezzük sorba az S csúcsait úgy, hogy a sorrendben először az összes $S_1 \setminus S_2$ -beli, majd az összes $S_1 \cap S_2$ -beli és végül az összes $S_2 \setminus S_1$ -beli csúcs szerepeljen (a felsorolt 3 halmazon belül a csúcsok sorrendje tetszőleges lehet). Vegyünk még hozzá S -hez $|S_1 \setminus S_2| + |S_2 \setminus S_1|$ darab izolált csúcsot, és ezeket is illesszük be a sorrendbe: $|S_2 \setminus S_1|$ darabot az első $S_1 \cap S_2$ -beli csúcs elé és $|S_1 \setminus S_2|$ darabot az utolsó $S_1 \cap S_2$ -beli csúcs után. Nevezzük az S halmaz így kapott kibővítését S' -nek és legyen $G' = (S', T; E)$.

Vegyünk észre, hogy egyrészt S' -ben $S_1 \setminus S_2$ és $S_2 \setminus S_1$ halmazok között a sorbarendezés szerint $|S'|$ darab csúcs van, tehát egy $S_1 \setminus S_2$ -beli és egy $S_2 \setminus S_1$ -beli csúcs távolsága (indexeik különbsége) legalább $|S'| + 1$. Másrészt az $S_1 \cap S_2$ halmaz mindkét oldalán pontosan $|S_1 \setminus S_2| + |S_2 \setminus S_1|$ csúcs van, tehát egy $S_1 \cap S_2$ -beli csúcs az S' egy tetszőleges csúcsától legfeljebb $|S'| - 1$ távolságra lehet. Tehát az $s_i, s_j \in S'$ csúcsokra $|i - j| \geq |S'|$ pontosan akkor teljesül, ha s_i és s_j közül az egyik $S_1 \setminus S_2$ -ben, a másik $S_2 \setminus S_1$ -ben van. Ezek alapján ha M egy G' -beli $|S'|$ -távolságú párosítás, akkor ha egy $t \in T$ -re $s_i t, s_j t \in M$, akkor s_i és s_j közül az egyik $S_1 \setminus S_2$ -ben, a másik $S_2 \setminus S_1$ -ben van, tehát M egy 2-szeres párosítás G -ben. Fordítva is teljesül: ha M egy G -beli 2-szeres

párosítás és $s_i t, s_j t \in M$, akkor s_i és s_j G' -beli távolsága legalább $|S|$, tehát M egy $|S|$ -távolságú párosítás.

A G' -ben vett $|S|$ -távolságú párosítások és a G -beli 2-szeres párosítások tehát pontosan ugyanazok az élhalmazok. Ha létezne α -közelítő algoritmus a maximális d -távolságú párosítás feladatra valamely $\alpha < \frac{950}{949}$ -re, akkor az egyben egy α -közelítés lenne a maximális 2-szeres párosítás feladatra, amely a 2.4. Tétel miatt nem lehetséges (feltéve, hogy $P \neq NP$). $\square$

Vegyük észre, hogy ebből a ciklikus változat közelíthetlensége is következik.

3.2. Tétel. *A maximális ciklikus d -távolságú párosítás feladatot NP-nehéz α -közelíteni, ha $\alpha < \frac{950}{949}$.*

Bizonyítás. Vezessük vissza a d -távolságú párosítás feladatot a ciklikus esetre. Legyen $G = (S, T; E)$ a d -távolságú párosítás feladat egy példánya. Vegyünk hozzá d darab izolált csúcsot S -hez, a sorrendben ezek mind az utolsó csúcs után helyezkedjenek el. Legyen az így kapott gráf G' . Ekkor M pontosan akkor d -távolságú párosítás G -ben, ha M egy ciklikus d -távolságú párosítás G' -ben, hiszen ekkor bármely $s_i, s_j \in S$ -re $|S'| - |i - j| = d + |S| - |i - j| \geq d$. A 3.1. Tétel miatt tehát ha $\alpha < \frac{950}{949}$, akkor a ciklikus d -távolságú párosítás feladatot is NP-nehéz α -közelíteni. $\square$

3.2. Egészértékűségű hízag és közelítő algoritmusok

Vezessük be a következő jelölést: ha $G = (S, T; E)$ páros gráf, amelyre $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ és $d \in \mathbb{Z}_+$ adott, akkor minden i -re jelölje $R_d(s_i) \subseteq S$ azt a halmazt, amely tartalmazza az s_i csúcsot, valamint a ciklikusan vett sorrendben az s_i -t követő $d - 1$ darab csúcsot.

Írjuk fel a súlyozott d -távolságú párosítás problémát mint egészértékű programozási (IP) feladat. Tartozzon minden $e \in E$ élhez egy $x_e \in \mathbb{Z}_+$ változó. A d -távolságú párosítás feladat a k -szoros párosítás feladatnak azon speciális esete, melyre $k = n - d$ és minden $i = 1, 2, \dots, (n - d)$ -re $S_i = R_d(s_i)$. Ennek megfelelően a modell:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{e \in E} w_e x_e \\ x \in \quad & \mathbb{Z}_+^E \\ \sum_{e=ts \in E} x_e \leq 1 \quad & \forall s \in S \\ \sum_{\substack{e=ts \in E \\ s \in R_d(s_i)}} x_e \leq 1 \quad & \forall t \in T \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, (n - d)\} \end{aligned}$$

A ciklikus változat IP modellje ugyanezekből a feltételekből áll, illetve hozzá kell venni a következőket:

$$\sum_{\substack{e=ts \in E \\ s \in R_d(s_i)}} x_e \leq 1 \quad \forall t \in T \quad \forall i \in \{(n-d+1), \dots, n\}$$

Először lássuk be az alábbi, önmagában is érdekes tételt. A bizonyítás egyes részeit fel fogjuk használni a 3.5. Tétel bizonyításában is.

3.3. Tétel. *Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban, ahol $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, a $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ súlyozás mellett a maximális súlyú 2-távolságú párosítás feladat IP modelljére és annak LP relaxáltjára*

$$\frac{OPT_{LP}}{OPT_{IP}} = 1.$$

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy G teljes gráf. Rögzítsük a T -beli csúcsok egy sorrendjét, legyen $T = \{t_1, \dots, t_k\}$. A 2-távolságú párosítás feladatban olyan élhalmazt keresünk, amelyben minden $t \in T$ -re ha s_i és s_j is szomszédja t -nek, akkor $|i - j| \geq 2$, tehát s_i és s_j nem lehetnek közvetlenül egymás mellett. Írjuk fel a problémát egészértékű programozási feladatként a fenti módon és vizsgáljuk a feladathoz tartozó H mátrixot. A változók (tehát a H mátrix oszlopai) feleljenek meg a gráf éleinek. Az oszlopok sorrendje legyen a következő: először szerepeljenek a t_1 -re illeszkedő élek az S -beli végpontjuk rögzített $s_1, s_2, \dots, s_n$ sorrendjében, majd a t_2 -re illeszkedők szintén az S -beli végpontjuk $s_1, s_2, \dots, s_n$ sorrendjében, és így végig, egészen a t_k -ra illeszkedő élekig.

Mivel minden $t \in T$ -re $|S| = n$ darab él illeszkedik, ezért minden t -hez tartozzon $n - 1$ darab egyenlet, amelyekben azt követeljük meg minden $i = 1, 2, \dots, (n - 1)$ -re, hogy a ts_i és a ts_{i+1} élekhez tartozó változók összege legfeljebb 1 legyen. Ha tehát mátrixos alakban írjuk fel ezeket a feltételeket, akkor minden $t \in T$ -hez tartozik a mátrixban egy $n - 1$ sorból és n oszlopból álló blokk, amelynek az i -edik sorában pontosan 2 darab 1-es van, méghozzá az i -edik és az $i + 1$ -edik oszlopban, a sor többi eleme 0. Valamely $t \in T$ -hez tartozó ilyen blokk tehát (a 0 elemeket kihagyva):

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ezek a blokkok H -ban átlósan egymás alatt helyezkednek el. Ezen kívül azt is meg kell követelnünk, hogy minden $s \in S$ -hez az s -re illeszkedő $|T| = k$ darab élhez tartozó változók összege legfeljebb 1 legyen, a mátrixhoz tehát hozzá kell még venni n darab sort, ezek közül az i -edik pontosan k darab 1-est tartalmaz, méghozzá a $(p \cdot n + i)$ -edik oszlopban, ahol $p = 0, 1, \dots, (k - 1)$. Ez k darab $n \times n$ -es egységmátrix egymás mellé írva.

Összesítve tehát az LP feladat mátrixa (a 0 elemeket kihagyva):

$$H = \begin{bmatrix} [A_{t_1}] & & & \\ & [A_{t_2}] & & \\ & & \ddots & \\ & & & [A_{t_k}] \\ [I] & [I] & \dots & [I] \end{bmatrix}$$

Lássuk be, hogy H hálózati mátrix. Legyen az F fa a következő: vegyünk egy n darab élből álló utat, legyenek az élei az úton sorban $f_1, f_2, \dots, f_n$. Ezek az élek tartozzanak a H mátrix utolsó n darab sorához, egészen pontosan az f_i él tartozzon az $(n-1)k + i$ -edik sorhoz (tehát az f_i él az egységmátrixokból álló rész i -edik sorának felel meg). Irányítsuk az út éleit az úton végig haladva felváltva (az első élt tetszőlegesen megirányíthatjuk, ez pedig már meghatározza az út többi élének az irányát).

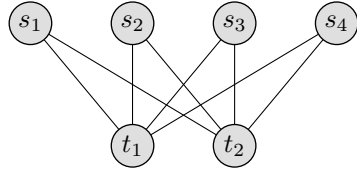
Minden $i = 1, 2, \dots, (n-1)$ -re adjunk hozzá F -hez k darab levelet az f_i és f_{i+1} élek közös pontjához ragasztva, legyenek ezek $e_1^i, e_2^i, \dots, e_k^i$. Ha f_i és f_{i+1} élek a közös pontjukba befelé mutatnak, akkor irányítsuk $e_1^i, e_2^i, \dots, e_k^i$ éleket a közös pontból kifelé, ha f_i és f_{i+1} élek a közös pontjukból kifelé mutatnak, akkor irányítsuk $e_1^i, e_2^i, \dots, e_k^i$ éleket a közös pont felé (mivel az f_i éleket felváltva irányítottuk, így csak ez a két lehetőség fordulhat elő). Tartozzanak ezek az élek a H első $(n-1)k$ darab sorához, egészen pontosan az e_j^i él az $(n-1)(j-1) + i$ -edik sorhoz (másképp: e_j^i -hez tartozik az a sor, amely az A_{t_j} mátrix i -edik sorát tartalmazza).

Ekkor minden sornak megfeleltettünk egy-egy F -beli irányított élt. Megmutatjuk, hogy minden oszlophoz fel tudunk venni egy-egy irányított élt úgy, hogy az él alapkörébe pont az adott sorban lévő 1-esekhez tartozó fabeli élek legyenek, és az alapkör körbe legyen irányítva.

Minden oszlop belemetsz valamely $j = 1, \dots, k$ -ra az A_{t_j} mátrixba. Ha az r -edik oszlop az A_{t_j} mátrix 1. oszlopa, akkor az oszlop pontosan két darab 1-est tartalmaz, egyet az A_{t_j} mátrix bal felső sarkából, amely a H -ban az e_j^1 F -beli élhez tartozó sorban van, egyet pedig az egységmátrixból, amely a H -ban az f_1 -hez tartozó F -beli élnek megfelelő sorban van. Az f_1 és az e_j^1 élek szomszédosak F -ben, sőt, irányított utat alkotnak, ezért az általuk meghatározott 2 hosszú út végpontjait összekötő él fog az r -edik oszlophoz tartozni, az él irányítása is adott. Hasonlóan: ha az r -edik oszlop valamely $j = 1, \dots, k$ -ra az A_{t_j} mátrix utolsó $(n-1)$ -edik oszlopa, akkor szintén két darab 1-est tartalmaz, melyek az e_j^{n-1} és az f_n faélekhez tartozó sorokban vannak, mely élek F -ben szintén 2 élű irányított utat alkotnak, így ezen út két végpontja meghatározza az r -edik oszlophoz tartozó élt, az út iránya pedig az irányítást. Ha az r -edik oszlop valamely $j = 1, \dots, k$ -ra az A_{k_j} mátrix i -edik oszlopa, ahol $1 < i < n$, akkor az oszlopban pontosan három darab 1-es van. Ebből kettő az A_{k_j} mátrix $(i-1)$ -edik és i -edik sorában, amely sorokhoz F -ben az e_j^{i-1} és az e_j^i élek tartoznak, a harmadik 1-es pedig a megfelelő (sorrendben a j -edik) egységmátrixban, az f_i -hez tartozó sorban. Az F -ben az e_j^{i-1} él az f_i egyik, az e_j^i él az f_i másik pontjához csatlakozik, a három él egy irányított utat alkot F -ben, amely út végpontjából a kezdőpontjába mutató él tehát megfelelő lesz az r -edik oszlophoz. Minden oszlophoz megadható tehát megfelelő él, ezzel beláttuk, hogy H hálózati mátrix.

Ha G nem teljes gráf, akkor H -ból kitörölve a G -ben nem szereplő élekhez tartozó oszlopokat, akkor megkapjuk a feladat LP modelljéhez tartozó mátrixot G -re. Világos, hogy az oszlopok törlésével kapott mátrix továbbra is hálózati lesz, hiszen csak néhány nemfaélt kell törölnünk a H -hoz tartozó hálózathoz.

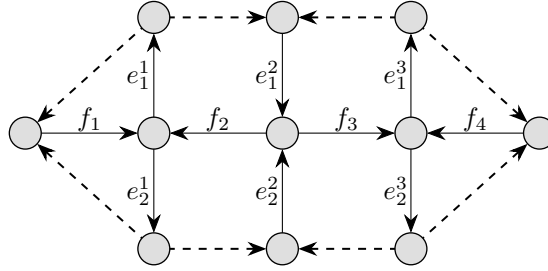
Mivel tehát a feladatunk IP felírásához tartozó mátrixról tudjuk, hogy hálózati, tehát TU mátrix, és a jobb oldal egész, ezért $\text{OPT}_{\text{LP}} = \text{OPT}_{\text{IP}}$ [5, 147-149. oldal]. $\square$



(a) $G = (S, T; E)$ gráf.

$$A_{t_i} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) A G -hez tartozó A_{t_i} blokk ($i = 1, 2$).



(c) A G -re felírt 2-szeres párosítás feladat IP modelljéhez tartozó hálózat, amelyen a sima élek a faéleknek, a szaggatott élek a nemfaéleknek felelnek meg.

4. ábra. Példa a 3.3. Tétel bizonyításában adott konstrukcióra.

A 3.3. Tételből az is következik, hogy – bár általános d -re még közelíteni is NP-nehéz a feladatot –, a maximális súlyú 2-távolságú párosítást polinom időben meg tudjuk keresni tetszőleges páros gráfban, hiszen LP feladatok megoldására létezik polinomiális algoritmus.

Az alábbiakban adunk egy éles felső becslést a ciklikus d -távolságú párosítás feladatra vonatkozó egészértékűségi hézagra azon a példányok felett, amelyekre S elemszáma osztható $(2d-1)$ -gyel. Ezt követően bizonyítunk egy felső becslést a nem ciklikus változat egészértékűségi hézagjára tetszőleges példányokon, ezzel kicsit javítunk az eddig ismert legjobb felső becslésen.

3.4. Tétel. *A maximális súlyú ciklikus d -távolságú párosítás problémára, ha $(2d-1)$ osztója az S elemszámának, akkor a feladat IP modelljére és annak LP relaxáltjára*

$$\frac{\text{OPT}_{\text{LP}}}{\text{OPT}_{\text{IP}}} \leq 2 - \frac{1}{d},$$

és ez a becslés éles.

Bizonyítás. Legyen $G = (S, T; E)$ páros gráf, melyre $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, $d \in \mathbb{Z}_+$ adott, $(2d-1)|n$, valamint $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ költségfüggvény.

Legyen minden $i = 1, 2, \dots, (2d-1)$ -re az $S_i \subseteq S$ minden $k = 0, \dots, \frac{n}{2d-1} - 1$ -re az $R_d(s_{i+k(2d-1)})$ halmazok uniója. Mivel S mérete osztható $(2d-1)$ -gyel, ezért ekkor minden i -re az S -en ciklikusan haladva felváltva követik egymást d hosszú intervallumok S_i -beli csúcsokból, és $(d-1)$ hosszú intervallumok $(S \setminus S_i)$ -beli csúcsokból. Legyen minden i -re $G_i = (S, T; E_i)$ a G -nek az a részgráfja, amely pontosan az S_i -re illeszkedő éleket tartalmazza.

Legyen minden $i = 1, 2, \dots, (2d-1)$ -re M_i a maximális súlyú ciklikus d -távolságú párosítás a G_i gráfon. Vegyük észre, hogy a G_i gráfokon a ciklikus d -távolságú párosítások pontosan azok az élhalmazok, amelyeket úgy kapunk, hogy minden az S -en lévő d -hosszú S_i -beli intervallumon egymástól függetlenül veszünk egy-egy párosítást az intervallum és T csúcsai között, hiszen tetszőleges két ilyen intervallum között van $d-1$ darab izolált csúcs. Tehát az optimális M_i élhalmazokat polinom időben meg tudjuk találni, sőt azt is tudjuk, hogy a G_i -re felírt ciklikus d -távolságú párosítás feladatára az IP optimum megegyezik a relaxált LP optimumával, hiszen a feladat felbontható maximális súlyú párosítás problémákra, amelyekre teljesül az IP és LP optimum közti egyenlőség. Legyen M_k az $M_1, M_2, \dots, M_{(2d-1)}$ élhalmazok közül a maximális súlyú.

Legyen G -ben $x \in \mathbb{R}^E$ az optimális LP megoldás. Könnyű látni, hogy G minden éle a $G_1, G_2, \dots, G_{(2d-1)}$ gráfok közül pontosan d -ben szerepel, tehát

$$\text{OPT}_{\text{LP}} = \sum_{e \in E} w_e x_e = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{2d-1} \sum_{e \in E_i} w_e x_e.$$

Ha az optimális LP megoldást valamely i -re megszorítjuk a G_i gráf éleire, akkor egy megengedett LP megoldást kapunk a G_i gráfon (hiszen G_i gráfot élelhagyásokkal kapjuk G -ből), ezért az értékét felülről becsülhetjük a G_i -beli LP optimummal, amiről viszont tudjuk, hogy megegyezik az IP optimum, azaz $w(M_i)$ értékével. Ezekből

$$\text{OPT}_{\text{LP}} \leq \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{2d-1} w(M_i) \leq \frac{2d-1}{d} \cdot w(M_k) \leq \frac{2d-1}{d} \cdot \text{OPT}_{\text{IP}},$$

hiszen M_k egy megengedett egészértékű megoldás a G gráfon. Tehát

$$\frac{\text{OPT}_{\text{LP}}}{\text{OPT}_{\text{IP}}} \leq 2 - \frac{1}{d}.$$

A bizonyítás befejezéséhez adnunk kell egy éles példát, tehát egy olyan gráfot, amelyre az egészértékű hézag egyenlő a felső becsléssel. Legyen $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{(2d-1)}\}$, $T = \{t\}$ teljes páros gráf, $w \equiv 1$. Világos, hogy az IP optimum értéke 1, hiszen S -ben tetszőleges két pont ciklikusan vett távolsága d -nél kevesebb, tehát csak 1 élt tudunk kiválasztani. Az $x \equiv \frac{1}{d}$ pedig egy optimális LP megoldás, hiszen ekkor minden d hosszú intervallumon a változók összege pontosan 1, tehát az LP optimum értéke $2 - \frac{1}{d}$, így erre a példára a fenti becslés éles.

□

A levezetésből az is látszik, hogy az M_k élhalmaz egy $(2 - \frac{1}{d})$ -közelítő megoldás, amelyet polinom időben meg tudunk találni, tehát a bizonyítás egy közelítő algoritmust is ad a maximális súlyú ciklikus d -távolságú párosítás feladat azon példányaira, amelyekre teljesül a $(2d-1)|n$ oszthatóság.

A (nem ciklikus) d -távolságú párosítás feladatra vonatkozó egészértékűségi hézag eddig ismert legjobb felső becslése a [2]-ben bizonyított $2 - \frac{1}{2d-1}$. A következő tételben ezen fogunk javítani.

3.5. Tétel. *Ha $d \geq 2$, akkor a maximális súlyú d -távolságú párosítás probléma bármely példányára felírt IP feladatra és annak LP relaxáltjára*

$$\frac{OPT_{LP}}{OPT_{IP}} \leq 2 - \frac{2}{d}.$$

Bizonyítás. Legyen $G = (S, T; E)$ páros gráf, melyre $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, $d \in \mathbb{Z}_+$ adott, valamint $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Tegyük fel először, hogy $(2d-2)|n$.

Legyen minden $i = 1, 2, \dots, (2d-2)$ -re az $S_i \subset S$ minden $k = 0, \dots, \frac{n}{2d-2} - 1$ -re az $R_d(s_{i+k(2d-2)})$ halmazok uniója. Mivel S mérete osztható $(2d-2)$ -vel, ezért ekkor minden i -re az S -en ciklikusan haladva felváltva követik egymást d hosszú intervallumok S_i -beli csúcsokból, és $(d-2)$ hosszú intervallumok $(S \setminus S_i)$ -beli csúcsokból. Legyen minden i -re $G_i = (S, T; E_i)$ a G -nek az a részgráfja, amely pontosan az S_i -re illeszkedő éleket tartalmazza. Az S csúcsainak az S_i -hez tartozó diszjunkt (nem ciklikus) intervallumait nevezzük ablakoknak (egy ablak tehát általában d darab csúcsból áll, kivétel lehet ez alól az első és az utolsó, amelyek ekkor összesen tartalmazznak d csúcsot).

3.1. Lemma. *Minden $i = 1, 2, \dots, (2d-2)$ -re a fent definiált G_i -ben a maximális d -távolságú párosítás feladat IP modelljére és annak LP relaxáltjára*

$$\frac{OPT_{LP}}{OPT_{IP}} = 1.$$

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy G teljes gráf, és rögzítsük a T -beli csúcsok sorrendjét, legyen $T = \{t_1, \dots, t_k\}$. Olyan élhalmazt keresünk, amelyben minden $t \in T$ -re ha s_i és s_j is szomszédja t -nek, akkor $|i-j| \geq d$, tehát s_i és s_j között S -ben legalább $d-1$ darab pont van. Írjuk fel a problémát egészértékű programozási feladatként, és vizsgáljuk a feladathoz tartozó L mátrixot. A változók (tehát L oszlopai) feleljenek meg G_i éleinek. Az oszlopok sorrendje legyen a következő: először szerepeljenek a t_1 -re illeszkedő élek az S -beli végpontjuk rögzített $s_1, s_2, \dots, s_n$ sorrendjében, majd a t_2 -re illeszkedők szintén az S -beli végpontjuk $s_1, s_2, \dots, s_n$ sorrendjében, és így tovább, egészen a t_k -ra illeszkedő élekig.

Egyrészt meg kell követelnünk minden $t \in T$ -re, hogy az azonos ablakba eső rá illeszkedő éleken a változók összege legfeljebb 1 legyen (hiszen minden ablak d darab csúcsot tartalmaz). Másrészt annak is teljesülnie kell minden $t \in T$ -re, hogy bármely 2 egymás melletti ablakra a bal oldali ablak jobb szélső pontja és a jobb oldali ablak bal szélső pontja nem lehet egyidejűleg t szomszédja, tehát az ezekre illeszkedő éleken a változók összege legfeljebb 1 lehet. Az L mátrixban tehát minden $t \in T$ -hez tartozik egy blokk, amely a következőképpen néz ki (a

0 elemeket kihagyva):

$$B_t = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & & \\ & & & 1 & \dots & 1 & & & \\ & & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & & & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

A B_t blokk 1. sorában a darab 1-es van, ahol $0 \leq a \leq d$ az első ablak hosszát jelöli, az utolsó sorban $d - a$ darab 1-es van, ez az utolsó ablak hossza. Ezeken kívül felváltva követik egymást a pontosan d darab 1-est és a pontosan 2 darab 1-est tartalmazó sorok. Előbbiek tartoznak a köztes ablakokhoz, utóbbiak a szomszédos ablakok szélső pontjaihoz. Minden $t \in T$ -re van egy ilyen blokk és ezek L -ben átlósan egymás alatt helyezkednek el. Ezen kívül minden S_i -beli csúcsra követeljük meg, hogy a rá illeszkedő éleken az összeg legfeljebb 1 legyen, a mátrixhoz tehát hozzá kell még venni k darab egymás mellé írt $|E_i| \times |E_i|$ méretű egységmátrixot az eddigiek alá.

Összefoglalva tehát az L mátrix a következő (a 0 elemeket megint kihagyjuk):

$$L = \begin{bmatrix} [B_{t_1}] & & & \\ & [B_{t_2}] & & \\ & & \ddots & \\ & & & [B_{t_k}] \\ [I] & [I] & \dots & [I] \end{bmatrix}$$

Bizonyítsuk be, hogy L hálózati mátrix. Vegyük észre, hogy B_t blokkok nagyon hasonlítanak a 3.3. Tétel bizonyításában használt A_t blokkokhoz. Konkrétan: töröljük ki B_t -ből az összes olyan oszlopot, amely a kettőnél több 1-est tartalmazó sorok köztes 1-eseit tartalmazza (tehát az adott sorban az összes olyan 1-est tartalmazó oszlopot töröljük, amelynek az 1-ese nem is az első és nem is az utolsó a sorban). A törlések után minden sorban pontosan két darab 1-es lesz, soronként lefelé haladva mindig eggyel elcsúsztatva. Az A_t mátrixok pont így néznek ki. Ha minden $t \in T$ -re kitöröljük L -ből a B_t mátrix r -edik oszlopát, akkor az utolsó sorokban található egységmátrixok mindegyikének r -edik sora kinullázódik, így ezt a sort ki is törölhetjük. Ebből tehát következik, hogy ha L -ből kitöröljük minden $t \in T$ -re a fent definiált oszlopokat, majd az így kinullázódó sorokat, akkor megkapjuk a 3.3. Tétel bizonyításában használt H mátrixot. A H -ról pedig tudjuk, hogy hálózati mátrix, a 3.3. Tétel bizonyításában megadtuk a hozzá tartozó irányított gráfot és annak F feszítőfáját. Módosítsuk ezeket úgy, hogy a módosítás után kapott irányított gráfra és annak feszítőfájára az L hálózati mátrix legyen.

Minden törölt oszlop pontosan két darab 1-est tartalmaz. Tegyük fel, hogy a B_{t_1} blokk r -edik oszlopát töröltük. Ebből következik persze, hogy minden $j = 1, \dots, k$ -ra a B_{t_j} blokk r -edik oszlopát is töröltük, illetve hogy az L mátrix egységmátrixainak az r -edik sorait töröltük. Legyen a B_{t_j} blokk r -edik oszlopában lévő 1-es az L mátrix azon sorában, amelyhez az e_j^r faél tartozik, vegyünk hozzá egy g_j^r élt az F fához az e_j^r él azon pontjához ragasztva, amellyel

az f_p és f_{p+1} élekhez is csatlakozik és irányítsuk meg úgy, hogy e_j^p -vel irányított utat alkossanak. Ekkor az r -edik oszlop miatt törölt sorhoz tartozik a g_j^r faél, és a g_j^r és e_j^p élekből alkotott irányított út végpontjából a kezdőpontjába mutató nemfaélhez tartozik az r -edik oszlop. Ezt minden törölt oszlopra végre tudjuk hajtani, ezzel tehát megadtuk az L -hez mint hálózati mátrixhoz tartozó irányított gráfot és feszítőfát.

Ha G nem teljes gráf, akkor L -ből kitörölve a G -ben nem szereplő élekhez tartozó oszlopokat megkapjuk a G -re vonatkozó feladat IP modelljéhez tartozó mátrixot. Világos, hogy az oszlopok törlésével kapott mátrix továbbra is hálózati lesz, hiszen csak néhány nemfaélt kell törölnünk az L -hez tartozó hálózatból.

Mivel tehát a feladatunk IP felírásához tartozó mátrixról tudjuk, hogy hálózati, tehát TU mátrix, és a jobb oldal egész, ezért minden G_i gráfon vett maximális súlyú d -távolságú párosítás feladatra $\text{OPT}_{\text{LP}} = \text{OPT}_{\text{IP}}$. Ezzel a lemmát beláttuk. $\square$

Folytassuk a 3.5. Tétel bizonyítását. Ha $(2d - 2) \nmid n$ és $n = k \cdot (2d - 2) + r$, ahol $0 < r < 2d - 2$, akkor vegyünk hozzá S -hez $2d - 2 - r$ darab izolált csúcsot az S -beli sorrend végéhez. Világos, hogy G -ben a módosítás után ugyanazok maradtak a megengedett d -távolságú párosítások, így az IP optimum és a relaxált LP optimum az extra csúcsok hozzávételével nem változott.

Legyen G -ben $x \in \mathbb{R}^E$ egy optimális LP megoldás, és legyen M egy maximális súlyú d -távolságú párosítás. Tehát ekkor $\text{OPT}_{\text{LP}} = \sum_{e \in E} w_e x_e$ és $\text{OPT}_{\text{IP}} = w(M)$. Mivel G -ben az izolált csúcsokkal kiegészített S halmaz elemszáma osztható $(2d - 2)$ -vel, ezért vehetjük a fent definiált $G_i = (S_i, T_i; E_i)$ részgráfokat. Könnyű látni, hogy G minden éle a $G_1, G_2, \dots, G_{(2d-2)}$ gráfok közül pontosan d -ben szerepel, tehát

$$\text{OPT}_{\text{LP}} = \sum_{e \in E} w_e x_e = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{2d-2} \sum_{e \in E_i} w_e x_e.$$

Legyen minden $i = 1, 2, \dots, (2d - 2)$ -re a G_i -ben vett optimális LP megoldás $x^{(i)} \in \mathbb{R}^E$, és legyen minden i -re M_i a G_i gráfon vett maximális d -távolságú párosítás. A G -ben vett optimális LP megoldást valamely i -re a G_i éleire megszorítva egy megengedett LP megoldást kapunk a G_i gráfon (hiszen a G_i gráfot élelhagyásokkal kapjuk G -ből), ezért az értékét felülről becsülhetjük a G_i -beli LP optimummal, amely a 3.1. Lemma miatt ezeken a gráfokon megegyezik az IP optimum, azaz $w(M_i)$ értékével. Legyen M_k az $M_1, M_2, \dots, M_{(2d-2)}$ élhalmazok közül a maximális súlyú. Világos, hogy ezek G gráfon is megengedettek, tehát $w(M_i) \leq w(M)$. Ezekből

$$\begin{aligned} \text{OPT}_{\text{LP}} &\leq \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{2d-2} \sum_{e \in E_i} w_e x_e^{(i)} = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{2d-2} w(M_i) \leq \\ &\leq \frac{2d-2}{d} \cdot w(M_k) \leq \frac{2d-2}{d} \cdot w(M) = \frac{2d-2}{d} \cdot \text{OPT}_{\text{IP}}, \end{aligned}$$

tehát

$$\frac{\text{OPT}_{\text{LP}}}{\text{OPT}_{\text{IP}}} \leq 2 - \frac{2}{d}.$$

$\square$

A levezetésből az is látszik, hogy az M_k élhalmaz egy $(2 - \frac{2}{d})$ -közelítő megoldás, amelyet polinom időben meg tudunk találni, tehát a bizonyítás egy approximációs algoritmust is ad a maximális súlyú d -távolságú párosítás feladatára.

Megfigyelhetjük továbbá, hogy a 3.4. Tétel, valamint a 3.5. Tétel bizonyításának minden lépése – megfelelő módosításokkal – működik a bevezetőben definiált (ciklikus) d -távolságú b_S -párosítás feladatára (1.3. Definíció) is, tehát a fenti eredmények erre az általánosabb problémára is igazak maradnak.

3.3. Optimális permutációk

A d -távolságú párosítás problémában az S halmaz csúcsainak a sorrendje rögzített. Ez a sorrend nagyon fontos a feladat szempontjából, hiszen ez alapján határozzuk meg a csúcsok távolságát, és így a megengedett élhalmazokat is. Ebben a fejezetben azzal a kérdéssel fogunk foglalkozni, melyben csak egy élköltségekkel ellátott páros gráf és egy $d \in \mathbb{Z}_+$ szám adott, a mi feladatunk pedig megadni az S halmazon egy optimális permutációt, tehát a csúcsoknak egy olyan sorbarendezését, melyre a maximális súlyú (ciklikus) d -távolságú párosítás a lehető legnagyobb.

Teljes d -távolságú párosítás létezésének eldöntése NP-teljes [2], és azt is láttuk a 3.1. Tételben, hogy a maximális súlyú d -távolságú párosítás feladatát még jól közelíteni is NP-nehéz. Ezen eredmények ismeretében elsőre meglepő lehet a következő tétel:

3.6. Tétel. *Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfra, $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ költségfüggvényre és $d \in \mathbb{Z}_+$ számra polinom időben megtalálható az S csúcshalmaz csúcsainak egy permutációja és egy ehhez tartozó d -távolságú párosítás, amely az összes permutáció összes megengedett d -távolságú párosítása közül maximális súlyú.*

A tétel bizonyításához szükségünk lesz a következő lemmára:

3.2. Lemma. *Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfra, $k, r \in \mathbb{Z}_+$ számokra és $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ súlyfüggvényre polinom időben tudunk keresni olyan maximális súlyú M élhalmazt, amelyre az alábbi feltételek teljesülnek:*

- minden S -beli csúcs foka legfeljebb 1,
- minden T -beli csúcs foka legfeljebb $k + 1$,
- T -ben legfeljebb r darab olyan csúcs van, amelyek pontosan $k + 1$ a foka.

Bizonyítás. A probléma felírható lineáris programozási feladatként. Vegyünk fel egy extra s' csúcsot, és kössük ezt össze az összes $t \in T$ csúccsal. Legyen az így kapott páros gráf G' , és legyen w' az a súlyfüggvény, amelynek az értéke minden új élen 0, a G élein pedig w . Az LP feladatban a változók feleljenek meg a G' éleinek, és legyenek az egyenletek a következők: minden $v \in S \cup T$ csúcsra követeljük meg, hogy a rá illeszkedő élekhez tartozó változók összege legfeljebb 1, ha $v \in S$, és legfeljebb $k + 1$, ha $v \in T$, továbbá az s' -re illeszkedő éleken az összeg legyen legalább $|T| - r$. Világos, hogy ezek lineáris feltételek, amelyeket mátrixos alakban felírva a G' gráf incidenciamátrixát kapjuk. Mivel a páros gráfok incidenciamátrixa TU és a jobb oldal egész, ezért lesz a w' célfüggvény szerint maximális 0-1 értékű megoldás [5, 149.oldal], amit polinom időben meg

is tudunk találni. Ez megad egy M' élhalmazt, amelyet megszorítva az eredeti G gráf E élhalmazára egy olyan M -et kapunk, amelyben az S -beli csúcsokon minden fokszám legalább 1, a T -beli csúcsokon legalább $k + 1$, de pontosan $(k + 1)$ -fokú csúcsból legfeljebb r darab lehet, hiszen legalább $|T| - r$ darab T -beli csúcs 1-1 éllel biztosan s' -höz csatlakozik. A kapott M tehát pont a keresett élhalmaz. $\square$

Térjünk rá a tétel bizonyítására:

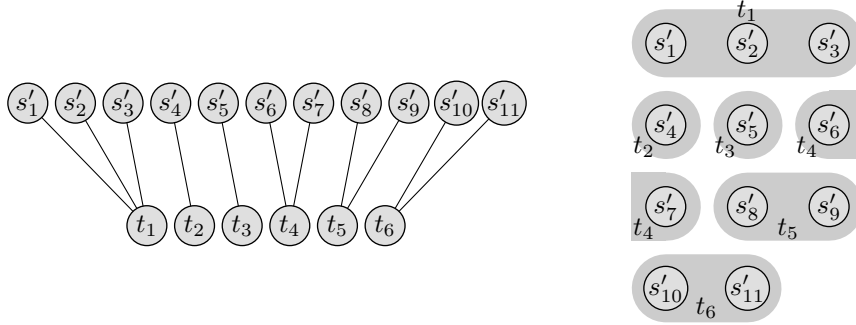
Bizonyítás (3.6. Tétel). A bizonyításhoz megadunk egy polinomiális algoritmust, amely megtalál egy optimális permutációt. Osszuk el maradékosan S elemszámát d -vel, legyen $|S| = k \cdot d + r$, ahol $r < d$. Keressünk G -ben egy olyan maximális súlyú M élhalmazt, amelyre teljesül, hogy minden S -beli csúcs foka legfeljebb 1, minden T -beli csúcs foka legfeljebb $k + 1$ és T -ben olyan csúcsból, amelynek pontosan $k + 1$ a foka legfeljebb r darab van. A 3.2. Lemma alapján tudunk ilyen M -et keresni.

Világos, hogy az optimális permutációhoz tartozó maximális W súlyú d -távolságú párosításra teljesülnek ezek a feltételek, tehát W -re és az M élhalmaz $w(M)$ súlyára biztosan igaz, hogy $w(M) \geq W$. Megmutatjuk, hogy a két érték között egyenlőség áll fent, ehhez mutatunk egy permutációt, melyre M egy megengedett d -távolságú párosítás.

Legyen $t_1, \dots, t_{|T|}$ a T -beli csúcsok egy olyan permutációja, amelyben először felsoroljuk a pontosan $(k + 1)$ -fokú csúcsokat, majd az összes olyan csúcsot, amelyeknek a foka szigorúan kisebb, mint k , végül pedig a pontosan k -fokúakat. Legyen $s'_1, \dots, s'_n$ az S -beli csúcsok egy olyan permutációja, melyben minden $t \in T$ -re a t szomszédai intervallumot alkotnak (az intervallumon belül a csúcsok sorrendje tetszőleges), és ezek az intervallumok a fent definiált $t_1, \dots, t_{|T|}$ sorrendben követik egymást.

Vegyünk egy táblázatot, amely d sorból és $k + 1$ oszlopból áll, azonban a $k + 1$ -edik oszlopban csak az első r darab mezőt használhatjuk. Ez pontosan $|S|$ darab mező. Rendezzük S csúcsait ebbe a táblázatba (tehát a táblázat minden mezőjéhez rendeljük pontosan egy S -beli csúcsot) úgy, hogy a táblázatban soronként haladva a csúcsok az $s'_1, \dots, s'_n$ sorrendben szerepeljenek. Az 5. ábrán látható egy példa a táblázat kitöltésére. Az így kapott táblázatot oszloponként kiolvassva megkapjuk az S -beli csúcsok egy másik permutációját, jelöljük ezt $s_1, \dots, s_n$ -nel. Az alábbiakban bebizonyítjuk, hogy az $s_1, \dots, s_n$ permutáció mellett M egy megengedett d -távolságú párosítás.

Minden $t \in T$ -re teljesül az alábbi három eset valamelyike. 1) A t csúcs M -szerinti foka pontosan $k + 1$. Ekkor a konstrukció miatt a t szomszédaiából álló intervallum minden eleme a táblázat első r sorában található. Mivel az első r sor $k + 1$ mezőből áll, ezért ekkor könnyű látni, hogy az oszloponként kiolvasott $s_1, \dots, s_n$ sorrendben t szomszédai közül bármely kettő között legalább $d - 1$ csúcs van. 2) A t csúcs M -szerinti foka szigorúan kisebb, mint k . Mivel a táblázat minden sora legalább k mezőből áll, valamint t szomszédai soronként nézve intervallumot alkotnak, ezért ekkor az oszloponként kiolvasott $s_1, \dots, s_n$ sorrendben t szomszédai közül bármely kettő között legalább $d - 1$ csúcs van. 3) A t csúcs M -szerinti foka pontosan k . Mivel a konstrukció szerint a táblázatban a k -fokú csúcsok szomszédaiából álló intervallumok soronként olvasva utolsókként helyezkednek el, ezért ekkor t szomszédai vagy az utolsó $d - r$ sor valamelyikében vannak (ekkor a t szomszédaiából álló intervallum foglalja



(a) A 3.2. Lemma segítségével talált M élhalmaz $d = 4$ -re. A példában $k = 2$ és $r = 3$. A csúcsok indexeléséhez a bizonyítás szerinti jelölést használjuk.

(b) A bal oldali gráfhoz tartozó táblázat. Az optimális permutáció: $s'_1, s'_4, s'_7, s'_{10}, s'_2, s'_5, s'_8, s'_{11}, s'_3, s'_6, s'_9$

5. ábra. A 3.6. Tétel bizonyításának szemléltetése.

el az egész sort), vagy legfeljebb két egymást követő sorban szerepelnek, ekkor viszont az a sor, amelyben az intervallum kezdődik biztosan $k + 1$ elemű. Az előzőekhez hasonlóan látható, hogy mindkét esetben az oszloponként kiolvasott $s_1, \dots, s_n$ sorrendben t szomszédai közül bármely kettő között legalább $d - 1$ csúcs van.

Beláttuk tehát, hogy minden $t \in T$ -re a t bármely két M -szerinti szomszédjának a távolsága az $s_1, \dots, s_n$ permutációban legalább d , tehát M egy megengedett d -távolságú párosítás. $\square$

Az optimális permutációt a ciklikus esetben is meg tudjuk keresni polinom időben, ezt látjuk be a következő tételben.

3.7. Tétel. Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfra, $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ költségfüggvényre és $d \in \mathbb{Z}_+$ számra polinom időben megtalálható az S csúcshalmaz csúcsainak egy permutációja és egy ehhez tartozó ciklikus d -távolságú párosítás, amely az összes permutáció összes megengedett ciklikus d -távolságú párosítása közül maximális súlyú.

Bizonyítás. A bizonyítás hasonló lesz az előzőhöz. Legyen továbbra is $|S| = k \cdot d + r$, ahol $r < d$ és keressünk G -ben egy olyan maximális súlyú M élhalmazt, amelyre teljesül, hogy minden S -beli csúcs foka legfeljebb 1, és minden T -beli csúcs foka legfeljebb k . Könnyű látni, hogy ilyen M -et tudunk keresni polinom időben, hiszen ez egy TU-mátrixú lineáris programozási feladat (de hivatkozhatunk akár a 3.2. Lemmára is).

Világos, hogy az optimális permutációhoz tartozó maximális W súlyú ciklikus d -távolságú párosításra teljesülnek ezek a feltételek, tehát W -re és az M élhalmaz $w(M)$ súlyára biztosan igaz, hogy $w(M) \geq W$. Megmutatjuk, hogy a két érték között egyenlőség áll fent, ehhez mutatunk egy permutációt, melyre M egy megengedett ciklikus d -távolságú párosítás.

Legyen $t_1, \dots, t_{|T|}$ a T -beli csúcsok egy olyan permutációja, amelyben először felsoroljuk a pontosan k -fokú csúcsokat, majd az összes többi csúcsot. Legyen $s'_1, \dots, s'_n$ az S -beli csúcsok egy olyan permutációja, melyben minden $t \in T$ -re a

t szomszédai intervallumot alkotnak (az intervallumon belül a csúcsok sorrendje tetszőleges), és ezek az intervallumok a fent definiált $t_1, \dots, t_{|T|}$ sorrendben követik egymást.

Vegyünk egy táblázatot, amely $d+1$ sorból és k oszlopból áll, azonban a $d+1$ -edik sorban csak az első r darab mezőt használhatjuk. Ez pontosan $|S|$ darab mező. Rendezzük S csúcsait ebbe a táblázatba úgy, hogy a táblázatban soronként haladva a csúcsok az $s'_1, \dots, s'_n$ sorrendben szerepeljenek. Az így kapott táblázatot oszloponként kiolvassva megkapjuk az S -beli csúcsok egy másik permutációját, jelöljük ezt $s_1, \dots, s_n$ -nel. Az alábbiakban bebizonyítjuk, hogy az $s_1, \dots, s_n$ permutáció mellett M egy megengedett ciklikus d -távolságú párosítás.

Minden $t \in T$ -re teljesül az alábbi két eset valamelyike. 1) A t csúcs M -szerinti foka pontosan k . Ekkor a konstrukció miatt a t szomszédaiból álló intervallum a táblázat egyik k mezőből álló sorát foglalja el teljes egészében. Ekkor könnyedén látszik, hogy az oszloponként kiolvasott $s_1, \dots, s_n$ sorrendben t szomszédai közül bármely kettő között ciklikusan nézve legalább $d-1$ csúcs van. 2) A t csúcs M -szerinti foka szigorúan kisebb, mint k . Ekkor ha t -nek két egymást követő sorban is van szomszédja, akkor vegyük észre, hogy a szomszédokból álló intervallum első és utolsó eleme között biztosan van egy oszlop, amelyben nem szerepel t -nek szomszédja. Ebből következik, hogy az oszloponként kiolvasott $s_1, \dots, s_n$ sorrendben t szomszédai közül ciklikusan nézve bármely kettő között legalább $d-1$ csúcs van. Ha t szomszédaiból álló intervallumnak minden eleme ugyanazon sorban található, akkor pedig az 1) esethez hasonlóan világos, hogy az $s_1, \dots, s_n$ permutációban teljesülnek t szomszédaira a ciklikus távolságfeltételek.

Ezzel beláttuk, hogy minden $t \in T$ -re a t bármely két M -szerinti szomszédjának ciklikusan vett távolsága az $s_1, \dots, s_n$ permutációban legalább d , tehát M egy megengedett ciklikus d -távolságú párosítás. $\square$

Láttuk tehát, hogy mind a ciklikus, mind a nem ciklikus esetben könnyű találni egy optimális permutációt, a bizonyításból továbbá az is látszik, hogy az ehhez tartozó optimális élhalmaz is megtalálható polinom időben. Vizsgáljuk ebből a szempontból a d -távolságú párosítás feladat egy általánosabb változatát, a d -távolságú b_S -párosítást, amelyben annyit módosítunk az eddigihez képest, hogy az S csúcshalmazon az eddigi azonosan 1 fokszámkorlátok helyett más felső korlátokat is adhatunk.

Az alábbiakban belátjuk, hogy ha a fokszám felső korlát azonosan 2, akkor az optimális permutációt nem tudjuk polinom időben megtalálni (ha $P \neq NP$).

3.8. Tétel. *Már $b_S \equiv 2$ -re is NP-nehéz annak eldöntése, hogy egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban van-e az S halmaz csúcsainak olyan permutációja, amelyhez van teljes d -távolságú b_S -párosítás.*

Bizonyítás. Ismert NP-nehéz feladat annak eldöntése, hogy egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban van-e olyan minden csúcsot fedő, azonosan 2-fokú élhalmaz, amelyben minden kör hossza 4-nek többszöröse (C_{4k+2} Free2Factor problem) [14]. Vezessük vissza ezt a feladatot a tételbeli problémára. Feltehetjük, hogy G -ben $|S| = |T|$, hiszen ellenkező esetben automatikusan adódik, hogy nincs a feltételeknek megfelelő élhalmaz. Adjunk a G gráfhoz $|S|$ darab diszjunkt cseresznyét (2 élből álló utat), a középső csúcsait S -hez, a szélsőket T -hez. Legyen az így kapott páros gráf $G' = (S', T'; E')$. Azt kell belátnunk, hogy G -ben pontosan akkor van csak $4k$ hosszú köröket tartalmazó, azonosan 2-fokú, és

G összes csúcsát fedő élhalmaz, ha az S' csúcsainak van olyan permutációja, amelyre G' -ben van teljes d -távolságú $b_{S'}$ -párosítás, ahol $b_{S'} \equiv 2$ és $d = |S|$.

Tegyük fel hogy S' -nek van olyan permutációja, amelyhez létezik egy $M' \subseteq E'$ d -távolságú $b_{S'}$ -párosítás. Az M' -re egyrészt teljesül, hogy minden $s \in S'$ csúcs M' szerinti foka pontosan 2. Világos, hogy ehhez M' -ben benne kell lennie az extra cseresznyék összes élének, illetve $|S| = |T|$ miatt T -ben (tehát az eredeti G gráfhoz tartozó csúcsokon) is 2 lesz minden M' szerinti fokszám. Ekkor tehát ha az M' élhalmazt megszorítjuk az eredeti G gráf E élhalmazára, akkor egy azonosan 2-fokú élhalmazt, tehát csúcsdiszjunkt körök unióját kapjuk.

Az M' -re ezen kívül teljesül, hogy ha a csúcsokat a vizsgált permutáció szerint indexeljük, akkor minden $t \in T'$ -re ha $s_i s_j \in M'$ (ekkor persze $t \in T$), akkor $|i - j| \geq |S|$. Mivel $|S'| = 2|S|$, ezért ekkor biztos, hogy i és j közül az egyik az $1, 2, \dots, |S|$, a másik az $|S| + 1, |S| + 2, \dots, 2|S|$ számok valamelyike. Szétoszthatjuk tehát az S csúcsait az S_1, S_2 diszjunkt halmazokba úgy, hogy minden $t \in T$ -re a t egyik M' -beli szomszédja S_1 -be, a másik S_2 -be essen. Ekkor tehát ha nézünk M' -ben egy kört, akkor azon minden második csúcs S -beli, ezek között pedig felváltva követik egymást az S_1 -beli és S_2 -beli csúcsok, tehát a kör hossza biztosan 4-nek többszöröse. Összefoglalva tehát, ha az S' csúcsainak van jó permutációja, akkor a hozzá tartozó M' élhalmazt megszorítva E -re egy azonosan 2-fokú és csak $4k$ hosszú köröket tartalmazó élhalmazt kapunk, amely a G összes csúcsát fedi.

Azt kell még belátnunk, hogy ha van egy $4k$ hosszú köröket tartalmazó, azonosan 2-fokú M élhalmaz G -ben, akkor létezik a megfelelő permutáció G' -ben. Ehhez csupán annyit kell tennünk, hogy az M minden körének S -be eső pontjait a kör mentén felváltva beosztjuk S_1 és S_2 halmazokba. A permutációt ezek után úgy kapjuk, hogy lerakjuk először S_1 csúcsait tetszőleges sorrendben, majd az extra cseresznyék $|S|$ darab S' -beli pontját, végül pedig az S_2 csúcsait tetszőleges sorrendben. Világos, hogy erre a permutációra az M élhalmaz és a cseresznyék éleinek uniója egy d -távolságú $b_{S'}$ -párosítás lesz, ahol $b_{S'} \equiv 2$ és $d = |S|$. $\square$

Hasonló tétel belátható a ciklikus esetre is:

3.9. Tétel. *Már $b_S \equiv 2$ -re is NP-nehéz annak eldöntése, hogy egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban van-e az S halmaz csúcsainak olyan permutációja, amelyhez van teljes ciklikus d -távolságú b_S -párosítás.*

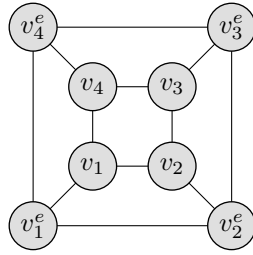
Elsőként bebizonyítjuk az alábbi lemmát:

3.3. Lemma. *Egy páros gráfban NP-nehéz annak eldöntése, hogy van-e a gráfban pontdiszjunkt 4-hosszú körökből álló feszítő részgráf.*

A bizonyításhoz szükségünk lesz az alábbi definícióra:

3.10. Definíció (4-dimenziós párosítás). *Adottak X_1, X_2, X_3, X_4 diszjunkt csúcshalmazok és $\mathcal{H} \subseteq X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_4$ hiperélek halmaza (azaz egy 4-osztályú 4-uniform hipergráf). Az $F \subseteq \mathcal{H}$ halmazt 4-dimenziós párosításnak nevezzük, ha bármely két $(u_1, u_2, u_3, u_4), (v_1, v_2, v_3, v_4) \in F$ hiperélre $u_1 \neq v_1, u_2 \neq v_2, u_3 \neq v_3$ és $u_4 \neq v_4$ teljesül.*

Ismert, hogy egy 4-osztályú 4-uniform hipergráfban NP-nehéz eldönteni, hogy van-e teljes 4-dimenziós párosítás [10].



6. ábra. A 3.3. Lemma bizonyításában a (v_1, v_2, v_3, v_4) hiperélhez tartozó részgráf.

Bizonyítás (3.3. Lemma). Vezessük vissza a 4-dimenziós párosítás feladatát a tételbeli problémára. Legyen $H = (X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4, \mathcal{H})$ egy 4-osztályú 4-uniform hipergráf. Minden $v \in X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4$ csúcsához tartozzon G -ben is egy v nevű csúcs. Minden $e = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathcal{H}$ hiperélre vegyük be G -be a $v_1 v_2, v_2 v_3, v_3 v_4, v_4 v_1$ éleket. Adjunk hozzá G -hez további 4 e -hez tartozó csúcsot, legyenek ezek a $v_1^e, v_2^e, v_3^e, v_4^e$ csúcsok, valamint húzzuk be G -ben a $v_1^e v_2^e, v_2^e v_3^e, v_3^e v_4^e, v_4^e v_1^e$ éleket, illetve a $v_1 v_1^e, v_2 v_2^e, v_3 v_3^e, v_4 v_4^e$ éleket. Ekkor tehát a H minden hiperéléhez G -ben két 4-hosszú kör tartozik, amelyeknek a csúcsai páronként össze vannak kötve, ahogy ez a 6. ábrán is látható. Könnyű látni, hogy G páros gráf: az egyik csúcsosztályban vannak a $v \in X_2 \cup X_4$ csúcsok, valamint azok az u^e csúcsok, amelyekre $u \in X_1 \cup X_3$. Mutassuk meg, hogy a H -ban pontosan akkor van teljes 4-dimenziós párosítás, ha G -nek van diszjunkt 4-hosszú körökből álló feszítő részgráfja. Ebből következik a feladat NP-nehézsége.

Ha F egy teljes 4-dimenziós párosítás H -ban, akkor az ehhez tartozó G -beli részgráfot a következő módon kapjuk meg. Minden $e = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in F$ hiperélhez vegyük be a részgráfba a v_1, v_2, v_2^e, v_1^e csúcsokból, valamint a v_3, v_4, v_4^e, v_3^e csúcsokból álló köröket, és minden $(u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathcal{H} \setminus F$ hiperélhez vegyük be az $u_1^e, u_2^e, u_3^e, u_4^e$ csúcsokból álló kört. A kapott részgráf ekkor a hiperélek függetlensége miatt pontdiszjunkt 4-hosszú körökből áll, és az is könnyen látszik, hogy F teljessége miatt minden pontot lefedtünk.

Ha pedig adott a G csúcsainak egy pontdiszjunkt 4-hosszú körökkel való fedése, akkor elsőként, ha valamely $e = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ élre a v_1, v_2, v_3, v_4 , valamint a $v_1^e, v_2^e, v_3^e, v_4^e$ csúcsokból álló két kör egyaránt benne van a fedésben, akkor módosítsuk a fedést úgy, hogy a v_1, v_2, v_2^e, v_1^e csúcsokból, valamint v_3, v_4, v_4^e, v_3^e csúcsokból álló köröket vesszük be a fenti két kör helyett. Világos, hogy ekkor továbbra is jó marad a részgráfunk. Most konstruáljuk meg H -ban az F 4-dimenziós párosítást a következő módon: pontosan akkor vegyük be az $e = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ élt F -be, ha a $v_1^e, v_2^e, v_3^e, v_4^e$ csúcsokból álló kör nincs benne a fedésben. Ekkor ugyanis ennek a körnek a csúcsai csak úgy lehetnek fedve, hogy az őket fedő 2 kör fedi a v_1, v_2, v_3, v_4 csúcsokat is. Mivel G minden csúcsa pontosan egy körben van benne, így a kapott F egy teljes 4-dimenziós párosítás lesz. $\square$

Most térjünk rá a tétel bizonyítására.

Bizonyítás (3.9. Tétel). Vezessük vissza a 3.3. Lemmabeli problémát a tételbeli feladatra. Legyen $G = (S, T; E)$ páros gráf, melyről el szeretnénk dönteni, hogy van-e pontdiszjunkt 4-hosszú körökből álló minden csúcsot fedő részgráfja.

Feltehetjük, hogy $|S| = |T|$, valamint S és T elemszáma páros, hiszen ellenkező esetben biztosan nincs ilyen részgráf. Legyen $d = |S|/2$. Megmutatjuk, hogy G -ben pontosan akkor van a feltételeknek megfelelő részgráf, ha van az S csúcsainak olyan permutációja, amelyre van $b_S \equiv 2$ -re teljes ciklikus d -távolságú b_S -párosítás.

Ha van jó permutáció, akkor az ehhez tartozó teljes d -távolságú b_S -párosítás a csúcsok 4-hosszú körökkel való fedése lesz, hiszen ekkor a teljesség miatt S -ben minden foksám pontosan 2, és mivel $d = |S|/2$ miatt T -ben legfeljebb 2 lehet egy csúcs foka, így T -ben is pontosan 2 minden foksám. Ha egy $s \in S$ pontnak az egyik szomszédja a $t \in T$, akkor t -nek egyértelműen meghatározott a másik szomszédja, hiszen csak pontosan egy olyan csúcs van S -ben, amely ciklikus értelemben véve $|S|/2$ távolságra van s -től. Ugyanez igaz az s másik szomszédjára is. Tehát minden $s \in S$ -re a két szomszédjának s -től különböző szomszédja közös. Ezért a ciklikus d -távolságú b_S -párosítás élei által meghatározott részgráf minden csúcsot fed, és 4-hosszú körök uniója.

Ha pedig adott egy pontdiszjunkt 4-hosszú körökből álló feszítő részgráf, akkor ebből megadhatunk az S csúcsain egy permutációt, amelyre a részgráf élhalmaza ciklikus d -távolságú b_S -párosítás lesz. Vegyük mind az $|S|/2$ darab körnek egy-egy S -beli csúcsát, legyenek ezek a sorrend első $|S|/2$ csúcsa tetszőleges sorrendben. Ez pedig egyértelműen meghatározza a többi S -beli csúcs sorrendjét, hiszen az első $|S|/2$ csúcs mindegyikéhez pontosan egy másik olyan S -beli csúcs van, amellyel van közös szomszédja, így ezt pontosan $|S|/2$ távolságra kell lerakni, és ezt meg is tudjuk tenni. $\square$

Mind a ciklikus, mind a nem ciklikus esetben teljesül, hogy a 3.8. Tételben és a 3.9. Tételben szereplő $b_S \equiv 2$ eset könnyedén visszavezethető az olyan b'_S foksámkorlát függvények esetére, amelyekre $b'_S(s) \geq 2$ minden $s \in S$ -re. A visszavezetéshez minden $s \in S$ csúcsához vegyünk fel $(b'_S(s) - 2)$ darab új T -beli csúcsot, és kössük össze őket s -sel. Ekkor világos, hogy az eredeti gráfban pontosan akkor van $b_S \equiv 2$ -re teljes (ciklikus) d -távolságú b_S -párosítás, ha az új csúcsok és élek hozzávétele után van teljes (ciklikus) d -távolságú b'_S -párosítás. Tehát a 3.8. Tétel valamint a 3.9. Tétel állítása minden olyan foksámkorlát függvényre is teljesül, amelynek az értéke minden S -beli csúcson legalább 2.

4. Nyitott kérdések

Zárásként felsorolunk néhány nyitott kérdést a maximális k -szoros párosítás és a maximális d -távolságú feladatokkal kapcsolatban, melyekkel a továbbiakban érdemes lehet foglalkozni.

A 2.2. fejezetben már említett megoldandó feladat a k -szoros párosítás feladatra vonatkozó egészértékűségi hézag pontosabb becslése, melyről jelenleg annyit tudunk, hogy az összes példány felett vett maximális értéke $6/5$ és $3/2$ között van. Legjobban annak örülnénk, ha egy pontos felső becslést tudnánk mondani rá.

Az egészértékűségi hézag becslését a d -távolságú párosítás feladatok kapcsán is lehetne tovább vizsgálni. A ciklikus változatban érdemes lenne (lehetőleg éles) becsléseket bizonyítani a $(2d - 1) \nmid n$ esetekre is, a nem ciklikus változatra pedig javíthatnánk tovább a becslést. Legjobban persze itt is egy éles becslést szeretnénk.

Mindkét feladat kapcsán gondolkozhatunk a fentieknél jobb közelítő algoritmusokon. A k -szoros párosítás feladatra $k \geq 3$ -ra is lehetne k -nál jobb közelítést mondani, hasonló ötlettel például, mint amit a 2-szeres párosítás feladatra adott $3/2$ -közelítő algoritmusnál használtunk. Természetesen lehetséges, hogy teljesen más megközelítést érdemes használni jobb approximációs algoritmusok kidolgozására. Az is elképzelhető, hogy a 2.4. Tételt javítva, a jelenleg ismernél nagyobb konstansra is belátható, hogy kisebb α -ra nincs α -közelítő algoritmus (csak ha $P=NP$). Ebben a dolgozatban beláttuk, hogy az optimális permutáció megkeresése a d -távolságú b_S -párosítás feladat kapcsán már $b_S \geq 2$ -re is NP-nehéz, azonban nyitott kérdés, hogy tudjuk-e ezekben az esetekben konstans-közelíteni a permutációs feladatot, azaz olyan permutációt keresni polinom időben, amelyhez a maximális súlyú d -távolságú b_S -párosítás jól közelíti az optimális permutációhoz tartozó optimális megoldást.

Foglalkozhatunk a feladatok általánosításával is. A k -szoros párosítás általánosításaként megkövetelhetjük például, hogy az (S_i, T) csúcshalmazokra megszorítva az élhalmazunk ne egy klasszikus párosítás legyen, hanem minden csúcson valami adott b fokszámkorlátnak tegyen eleget (ekkor $b = 1$ -re visszkapjuk az eredeti feladatunkat). Egy másik általánosítás lehet, hogy a T halmazon is veszünk T_i részhalmazokat, és minden (S_i, T_i) csúcshalmazra megszorítva követeljük meg, hogy párosítást kapjunk (ekkor ha $T = T_1 = \dots = T_k$, akkor visszkapjuk a k -szoros párosítás feladatot).

A d -távolságú párosítás feladat különböző változatainál a dolgozatban végig megengedtük, hogy a T halmazon bármilyen nagy fokszámok előfordulhassanak a keresett élhalmazban. A feladat egy természetes általánosítása, hogy az S -hez hasonlóan T -ben is elő van írva, hogy legfeljebb mekkora lehet a csúcsok foka (akár csúcsonként különböző). További felmerülő általánosítás az is, hogy nem csak az S -ben, hanem a T -ben is megköveteljük egy adott távolságfeltétel teljesülését.

Egy lazábban kapcsolódó ismert probléma az úgynevezett nem-interferáló hálózati folyam feladat (non-interfering network flow problem) [15]. Itt olyan maximális folyamatot keresünk egy hálózatban, amelyben egy adott élen keresztül folyó folyamérték korlátozása helyett azt írjuk elő minden élre, hogy mekkora lehet a folyamérték az él "közeliében". A probléma önmagában is érdekes, valamint a távolságfeltételekből adódó hasonlóság miatt érdemes lehet vizsgálni a d -távolságú párosítással való kapcsolatát is.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm a témavezetőmnek, Madarasi Péternek a jó hangulatú konzultációkat, a hasznos tanácsokat és a lelkiismeretes munkát. Nélküle ez a dolgozat nem készülhetett volna el. A munkát az LP2021-1/2021 számú MTA Lendület pályázat támogatta.

Hivatkozások

- [1] K. I. Aardal, S. P. M. van Hoesel, A. M. C. A. Koster, C. Mannino, A. Sassano. Models and solution techniques for frequency assignment problems. *Ann Oper Res*, 153, 79–129, 2007.

- [2] P. Madarasi. Matchings under distance constraints I. *Ann Oper Res*, 305, 137–161, 2021.
- [3] Péter Madarasi. The Simultaneous Assignment Problem. arXiv:2105.09439, 2021.
- [4] M. Makai. On Maximum Cost $K_{t,t}$ -Free t -Matchings of Bipartite Graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 21.2: 349-360, 2007.
- [5] A. Frank, T. Király. Operációkutatás. Typotex, 2013.
- [6] B. Dezső, A. Jüttner, P. Kovács. LEMON – an open source C++ graph template library. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 264.5: 23-45, 2011.
- [7] IBM ILOG CPLEX Optimization Studio CPLEX User’s Manual. 2017.
- [8] <https://lemon.cs.elte.hu/repos/ketszeresParositas>
- [9] J. Edmonds. Paths, trees, and flowers. *Canadian Journal of mathematics*, 1965, 17: 449-467.
- [10] R. M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. *Complexity of Computer Computations*. Springer, 85-103, 1972.
- [11] V. Kann. Maximum bounded 3-dimensional matching is MAX SNP-complete. *Information Processing Letters*, 37.1: 27-35, 1991.
- [12] M. Chlebík, J. Chlebíková. Complexity of approximating bounded variants of optimization problems. *Theoretical Computer Science*, 354.3: 320-338, 2006.
- [13] V. Kann. On the Approximability of NP-complete Optimization Problems. PhD Thesis, Royal Institute of Technology, 1992.
- [14] K. Bérczi, T. Schwarcz. Complexity of packing common bases in matroids. *Mathematical Programming*, 188.1: 1-18, 2021.
- [15] C. McDiarmid, B. Reed, A. Schrijver, B. Shepherd. Non-interfering network flows. *Scandinavian Workshop on Algorithm Theory*. Springer, 245-257, 1992.