

ANTI-RAMSEY SZÍNEZÉS ÉS VÁLTOZATAI

DIPLOMAMUNKA

Csonka Bence

TÉMAVEZETŐ: DR. SIMONYI GÁBOR

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Számítástudományi és Információelméleti Tanszék

2022

Önállósági nyilatkozat

Alulírott, Csonka Bence a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Matematika MSc szakos hallgatója kijelentem, hogy ezt a diplomamunkát meg nem engedett segédeszközök nélkül, önállóan, a témavezető irányításával készítettem, és csak a megadott forrásokat használtam fel.

Minden olyan részt, melyet szó szerint, vagy azonos értelemben, de átfogalmazva más forrásból vettem, a forrás megadásával jelöltem.

Budapest, 2022 május

Köszönetnyilvánítás

Szeretném köszönetemet nyilvánítani témavezetőmnek, Simonyi Gábornak, aki észrevetéveleivel és iránymutatásával segítette munkámat és hozzájárult annak sikeres befejezéséhez.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	4
1.1. Hash kód	5
1.2. Gráfentrópia és alkalmazása	6
2. Anti-Ramsey színezés	13
2.1. Általános felső korlát	13
2.2. Szükséges színek számának nagyságrendje	16
3. Többkörös anti-Ramsey színezés	21
3.1. Általános felső korlátok	21
3.2. Általános alsó korlátok	24
4. Speciális esetek, trifferencia	27
4.1. Háromszög, csillag, független élek	27
4.2. Egyéb három élű gráfok	33
4.3. Más eredmények	34
5. Hipergráfok színezése	38

1. fejezet

Bevezetés

A Ramsey elmélet egy nagyon szerteágazó kérdéskör, az évtizedek során sok változata megjelent. A dolgozatban egy anti-Ramsey színezésnek elnevezett fogalommal és változataival foglalkozunk, melyet elsőnek Erdős Pál, Simonovits Miklós és T. Sós Vera definiált 1975-ben [6]. Tárgyalni fogjuk az anti-Ramsey színezés információelméleti vonatkozásait és látni fogjuk, hogy a (b, k) -hash kód létezése mély kapcsolatban áll ezen színezési kérdéskörrel. Az első fejezetben a hash kódhoz szükséges alapfogalmakat mutatom be, majd a következő fejezetekben a színezés különböző változataival és a hash kóddal való kapcsolataival ismerkedünk meg, mellette az eddig ismert módszereket továbbgondolva javítunk alsó és felső becsléseket. Végül az utolsó fejezetben általánosítjuk a gráfszínezési fogalmat hipergráfokra is és hipergráfosztályok körönkénti anti-Ramsey színezésének aszimptotikus viselkedésére adunk felső és alsó becsléseket.

1.1. Hash kód

A dolgozat ezen részében megismerkedünk a (b, k) -hash kód és a perfekt hash függvény fogalmával. Látni fogjuk, hogy a hash kód létezéséhez szükséges feltételek nehéz kombinatorikai problémákhoz vezetnek.

1.1.1 Definíció Legyenek $b \geq k$ és t természetes számok. A $C \subseteq \{1, \dots, b\}^t$ halmazt (b, k) -hash kódnak hívjuk, ha teljesül, hogy bármely k elemű $\{a_1, \dots, a_k\} \subseteq C$ halmazra létezik olyan $1 \leq i \leq t$ koordináta, hogy az $(a_1)_i, \dots, (a_k)_i$ értékek mind különböznek, ahol $(a_j)_i$ a j -edik vektor i -edik koordinátáját jelöli.

Ez a definíció átfogalmazható perfekt hash függvények nyelvére is. Ha $|C| \leq b$, akkor perfekt hash függvénynek a $h : C \rightarrow \{1, \dots, b\}$ injektív függvényeket nevezzük. Legyen $C \subseteq \{1, \dots, b\}^t$ és $H_C := \{h_i : C \rightarrow \{1, \dots, b\} : 1 \leq i \leq t\}$ függvények egy rendszere, ahol bármely i -re $h_i(a) := (a)_i$. Ezen fogalmakra nézve a (b, k) -hash kód létezése azt jelenti, hogy létezik függvényeknek olyan H_C rendszere, amelyre igaz, hogy bármely k elemű $A \subseteq C$ részhalmazra létezik olyan $h \in H_C$, hogy $h|_A$ perfekt hash függvény.

1.1.1 Jelölés Jelölje a dolgozatban $t(n, b, k)$ azt a minimális t számot, amelyre létezik n elemű $C \subseteq \{1, \dots, b\}^t$ (b, k) -hash kód.

A $\log n$ jelölés kettes alapú logaritmust jelent ebben a dolgozatban.

A következő tételből, melyet Körner és Marton bizonyított be, az is következik, hogy $t(n, b, k) = \Theta(\log n)$.

1.1.1 Tétel (Körner, Marton [13]) Bármely n és $b \geq k$ természetes számok esetén teljesül, hogy

$$t(n, b, k) = \Omega \left(\frac{b^{k-1} \log n}{b^{\frac{k-1}{2}} \log(b - k + 2)} \right),$$

$$t(n, b, k) = O \left(\frac{k \log n}{\log \left(1 - \frac{b^k}{b^k} \right)} \right),$$

ahol $b^i := \frac{b!}{(b-i)!}$.

Sokszor célszerű a $t(n, b, k)$ helyett a vele analóg $N(b, k, t)$ mennyiséget vizsgálnunk, amit az alábbiakban definiálunk.

1.1.2 Jelölés Jelöljük $N(b, k, t)$ -val azt a maximális N természetes számot, melyre, ha a B halmaz mérete b , akkor létezik olyan N elemű $A \subseteq B^t$ halmaz, hogy bármely k elemének van olyan koordinátája, amiben mind a k elem különbözik.

Az 1.1.1 Tétel alsó becslésének bizonyításához az $\frac{1}{t} \log N(b, k, t)$ mennyiségre adunk felső becslést, ebből pedig t -re való rendezéssel már következik is a tétel alsó becslése.

1.1.2 Tétel ([13])

$$\frac{1}{t} \log N(b, k, t) = O\left(\frac{b^{k-1}}{b^{k-1}} \log(b - k + 2)\right).$$

Az $\frac{1}{t} \log N(b, k, t)$ mennyiség felső becslésének bemutatására szükségünk van egy fontos információelméletbeli fogalomra, a gráfentrópiára.

1.2. Gráfentrópia és alkalmazása

Legyen G egy egyszerű gráf a $V(G) = \{1, \dots, n\}$ csúcshalmazon. Vegyük az $I(G) := \{A \subseteq V(G) : A \text{ független } G\text{-ben}\}$ halmazt és rendeljük $I(G)$ elemeihez a halmazok karakterisztikus vektorait.

Egy tetszőleges A halmaz karakterisztikus vektora

$$(a)_i := \begin{cases} 1, & \text{ha } i \in A \\ 0, & \text{ha } i \notin A. \end{cases}$$

1.2.1 Definíció Az $I(G)$ elemeihez rendelt $\{a_1, \dots, a_k\}$ karakterisztikus vektorok konvex burkát a G gráf csúcspakolási politópjának nevezzük és $VP(G)$ -vel jelöljük.

1.2.2 Definíció (Gráfentrópia [11],[3]) Legyen G egy gráf a $V(G) = \{1, \dots, n\}$ csúcshalmazon és $P : V(G) \rightarrow [0, 1]$ egy valószínűségeloszlás a gráf csúcshalmazán, melyre $p_i := P(v_i)$. A G gráf P szerinti entrópiája a következő mennyiség

$$H(G, P) := \min \left\{ \sum_{i=1}^n p_i \log \frac{1}{a_i} : a \in VP(G) \right\}.$$

1.2.1 Jelölés Szokás szerint jelölje $H(P)$ a P valószínűségeloszlás entrópiáját, amire

$$H(P) := \sum_{i=1}^n p_i \log \frac{1}{p_i}.$$

Most áttekintünk néhány gráfentrópiával kapcsolatos lemmát, amelyekkel már bemutatatható az 1.1.2 Tétel bizonyítása. A lemmák és az 1.1.2 Tétel bizonyítása megtalálható például [17]-ben.

Szokás szerint jelölje K_n az n csúcsú teljes gráfot.

1.2.1 Lemma $H(K_n, P) = H(P)$.

Bizonyítás: Tudjuk, hogy létezik olyan a vektor, melyre $H(K_n, P) = \sum_{i=1}^n p_i \log \frac{1}{a_i}$. Az $I(K_n)$ elemeihez rendelt karakterisztikus vektorok az $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ kanonikus vektorok, mivel K_n -ben csak az egyelemű halmazok függetlenek. Emiatt ha $a \in VP(G)$, akkor $\sum_{i=1}^n a_i = 1$. Vegyük a $\sum_{i=1}^n p_i \log \frac{a_i}{p_i}$ mennyiséget, a log függvény konkavitása miatt alkalmazható a Jensen-egyenlőtlenség.

$$\sum_{i=1}^n p_i \log \frac{a_i}{p_i} \leq \log \sum_{i=1}^n p_i \frac{1}{p_i} a_i = \log \sum_{i=1}^n a_i = 0,$$

vagyis

$$\sum_{i=1}^n p_i \log \frac{a_i}{p_i} \leq 0,$$

amiből már következik bármely $a \in VP(G)$ vektorra, hogy

$$\sum_{i=1}^n p_i \log \frac{1}{p_i} \leq \sum_{i=1}^n p_i \log \frac{1}{a_i},$$

ebből pedig már adódik, hogy a minimum $H(P)$, hiszen választhatjuk a_i -t p_i -nek.

□

1.2.2 Lemma ([12]) Ha G és F gráfok úgy, hogy $V(G) = V(F)$, akkor jelölje $G \cup F$ azt a gráfot, melyre $V(G \cup F) = V(G) = V(F)$ és $E(G \cup F) = E(G) \cup E(F)$. A $H(\cdot, P)$ függvény ezen unióra nézve szubadditív, vagyis

$$H(G \cup F, P) \leq H(G, P) + H(F, P).$$

Bizonyítás: Legyen $a \in VP(G)$ és $b \in VP(F)$ tetszőlegesek. Ekkor az $a \circ b := (a_1 b_1, \dots, a_n b_n)$ szorzatra $a \circ b \in VP(G \cup F)$, mivel ha az a_1, a_2 karakterisztikus vektorok által reprezentált független halmazok rendre U_{a_1}, U_{a_2} , akkor $U_{a_1 \circ a_2} = U_{a_1} \cap U_{a_2}$, a két független halmaz metszete pedig továbbra is független, emiatt $a_1 \circ a_2$ továbbra is egy karakterisztikus vektor, így pedig a -t és b -t felírhatjuk a karakterisztikus vektorok konvex kombinációjaként: Legyen $a = \sum_i \alpha_i a_i$ és $b = \sum_j \beta_j b_j$, ekkor

$$a \circ b = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j (a_i \circ b_j).$$

Vagyis az $a \circ b$ vektor előáll karakterisztikus vektorok $\circ$ szorzatának konvex kombinációjaként. Létezik olyan a és b vektor, hogy

$$H(G, P) + H(F, P) = \sum_{i=1}^n p_i \log \frac{1}{a_i} + \sum_{i=1}^n p_i \log \frac{1}{b_i} = \sum_{i=1}^n p_i \log \frac{1}{a_i b_i} \geq H(G \cup F, P),$$

amiből adódik az állítás. $\square$

1.2.3 Lemma ([12]) Legyen G egy gráf és $G = \bigcup_{i=1}^n G_i$ az összefüggő komponensek szerinti felbontása. Definiáljuk $P_i : V(G_i) \rightarrow [0, 1]$ valószínűségeloszlást úgy, hogy bármely $v \in V(G_i)$ esetén legyen

$$P_i(v) := \frac{P(v)}{P(V(G_i))},$$

ahol $P(V(G_i)) := \sum_{v \in V(G_i)} P(v)$. Vagyis P_i a feltételes valószínűsége annak, hogy v -t választjuk, ha már feltételként tudjuk, hogy a csúcsot $V(G_i)$ -ből választjuk ki. Ekkor teljesül, hogy

$$H(G, P) = \sum_{i=1}^n P(V(G_i)) H(G_i, P_i).$$

1.2.1 Tétel Tetszőleges G gráfra és P valószínűségeloszlásra fennáll a

$$H(G, P) \leq \log \chi(G)$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás: A Körner által megadott gráfentrópia definícióból [11] könnyen következik a tétel, mi most az 1.2.2 Definíció alapján bizonyítunk [3]. Legyen p az $(1, \dots, 1)$ vektorral párhuzamos egyenes és $VP(G)$ metszetének egy tetszőleges pontja, ekkor $p = (x, \dots, x)$, valamely nem negatív x -ekre. Emiatt teljesül, hogy $H(G, P) \leq \sum_{i=1}^n p_i \log \frac{1}{x} = \log \frac{1}{x}$. Színezzük ki G -t $\chi(G)$ darab színnel, megfelelő módon, így kapunk $\chi(G)$ darab független halmazt. A független halmazokra tegyünk $\frac{1}{\chi(G)}$ súlyokat. Ekkor a független halmazok karakterisztikus vektorainak egy konvex kombinációját kapjuk, így $x = \frac{1}{\chi(G)}$ választással adódik az állítás. $\square$

Az előző lemmák és definíciók birtokában már áttekinthető az $\frac{1}{t} \log N(b, k, t)$ mennyiségre vonatkozó tétel bizonyítása.

1.1.1 Tétel alsó becslésének bizonyítása Legyen $N := N(b, k, t)$ és B egy b elemszámú halmaz, ekkor létezik N elemű $A \subseteq B^t$ (b, k) -hash kód. Definiáljuk a K gráfot úgy, hogy

$$V(K) := \{(D, x) : D \subseteq A, |D| = k - 2, x \in A \setminus D\}.$$

Két $(D, x), (D', x') \in V(K)$ csúcs akkor legyen összekötve K -ban ha $D = D'$ és $x \neq x'$. Ekkor $|V(K)| = \binom{N}{k-1}(k-1)$, mivel kiválasztunk először $k-1$ elemet A -ból, majd $k-1$ -féle módon felbonthatjuk egy $k-2$ elemű halmazra és egy elemre, így kapva egy (D, x) párt. Látható, hogy $\binom{N}{k-2}$ darab összefüggő komponens található K -ban, hiszen csak rögzített $D \in \binom{[N]}{k-2}$ esetén vannak szomszédos $(D, x), (D, x')$ csúcsok. Továbbá $\omega(K) = N - (k-2) = N - k + 2$, mivel $|A \setminus D| = N - k + 2$ és ennyi különböző elemet választhatunk a csúcsok második koordinátájának valamely rögzített D mellett. Bármely $(D, x), (D, x')$ esetén az

általuk definiált $D_{xx'} := D \cup x \cup \{x'\}$ halmaz k elemű, így mivel A egy (b, k) -hash kód, ezért $D_{xx'}$ minden eleme eltér valamely i koordinátában. Definiáljuk a G_i gráfot úgy, hogy $V(G_i) := V(K)$, $E(G_i) \subseteq E(K)$ és két $(D, x), (D, x')$ csúcs akkor van összekötve, ha a D halmazok megegyeznek és a nekik megfeleltetett $D_{xx'}$ halmaz elemei az i -edik koordinátában eltérnek. Mivel A egy (b, k) -hash kód, ezért $K \subseteq \bigcup_{i=1}^t G_i$. Emiatt alkalmazhatjuk az 1.2.2 Lemmát és így tetszőleges P valószínűségeloszlásra

$$H(K, P) \leq \sum_{i=1}^t H(G_i, P) \leq t \max_i H(G_i, P)$$

teljesül. Jelöljük M -mel a $\max_i H(G_i, P)$ mennyiséget, így kapjuk, hogy

$$\frac{H(K, P)}{M} \leq t.$$

Válasszuk meg $P : V(G) \rightarrow [0, 1]$ eloszlást úgy, hogy bármely $x \in V(G)$ csúcsot egyenlő valószínűséggel kapjunk meg. Mivel felbontható $K = \bigcup_i K_i$ diszjunkt $N - k + 2$ méretű teljes gráfokra, így az 1.2.3 Lemmát alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$H(K, P) = \sum_i P(V(K_i)) H(K_i, P_i),$$

majd $H(K_i, P_i)$ -re alkalmazva az 1.2.1 Lemmát

$$\sum_i P(V(K_i)) H(K_i, P_i) = \sum_i P(V(K_i)) H(P_i)$$

adódik. Továbbá

$$H(P_i) = \sum_{i=1}^{N-k+2} \frac{1}{N-k+2} \log(N-k+2) = \log(N-k+2)$$

a P választása miatt. Ebből pedig következik, hogy $\sum_i P(V(K_i)) \log(N-k+2) = \log(N-k+2)$, vagyis $H(K, P) = \log(N-k+2)$. Most pedig felső becslést adunk tetszőleges $H(G_i, P)$ -re. A G_i gráf izolált pontjai azon (D, x) -ek, melyekre a $D \cup \{x\}$ halmaz elemei nem mind különböznek az i -edik koordinátában, hiszen tetszőleges $x' \in A \setminus D$ elemre továbbra sem lesznek különbözőek a $D_{xx'}$

halmaz elemei az i -edik koordinátában. Így egy tetszőleges nem izolált (D, x) pont esetén a D halmaz összes elemének i -edik koordinátája különbözik, továbbá x -et a maradék $b - k + 2$ értékek közül kell választanunk. Ha rögzített D -re, melyre $(D, x_1), \dots, (D, x_{b-k+2})$ nem izolált pontok és $x_1, \dots, x_{b-k+2}$ páronként különbözők, a D -beli elemek i -edik koordinátájában nem felhasznált értékek, akkor $(D, x_1), \dots, (D, x_{b-k+2})$ pontok mind össze vannak kötve. Vagyis minden olyan D -re, aminek az elemei különböznek az i -edik koordinátában, összesen $b - k + 2$ olyan pár adható, hogy bármely kettő össze van kötve G_i -ben. Ezért a nem izolált pontok egy olyan gráfot alkotnak G_i -ben, ami $b - k + 2$ méretű teljes gráfok diszjunkt uniója. Annak a valószínűsége, hogy egy (D, x) pont nem izolált legfeljebb $\frac{b^{k-1}}{b^{k-1}}$, mivel az i -edik koordinátában különbözik minden $D \cup \{x\}$ -beli elem és összesen b^{k-1} féle módon állhat elő az i -edik koordinátájuk ezeknek az elemeknek. A megfigyelések miatt $G_i = \left(\bigcup_j H_j\right) \cup \left(\bigcup_l F_l\right)$ egy összefüggő komponensek szerinti felbontás, ahol bármely H_j egy $b - k + 2$ elemű teljes gráf és bármely F_l egy izolált pont. Ezért alkalmazva az 1.2.3 Lemmát azt kapjuk, hogy

$$H(G_i, P) = \sum_j P(V(H_j))H(H_j, P_j) + \sum_l P(V(F_l))H(F_l, P_l),$$

ahol $H(F_l, P_l)$ értékek mind nullák és az 1.2.1 Tétel miatt bármely $H(H_j, P_j) \leq \log \chi(H_j) = \log(b - k + 2)$. Ezeket alkalmazva

$$H(G_i, P) \leq \sum_j P(V(H_j)) \log(b - k + 2) = \frac{b^{k-1}}{b^{k-1}} \log(b - k + 2)$$

adódik, ebből pedig azt kapjuk, hogy $M \leq \frac{b^{k-1}}{b^{k-1}} \log(b - k + 2)$. Ezt az egyenlőtlenséget felhasználva és a $\frac{H(K, P)}{M} \leq t$ egyenlőtlenséget az $\frac{1}{t}H(K, P) = \frac{1}{t} \log(N - k + 2) \leq \frac{b^{k-1}}{b^{k-1}} \log(b - k + 2)$ egyenlőtlenséget kapjuk, amiből már adódik az állítás. $\square$

Az 1.1.1 Tétel miatt tudjuk, hogy a $t(n, b, k)$ mennyiség $\log n$ nagyságrendű, ezért a $\log n$ konstans szorzója a releváns számunkra.

1.2.3 Definíció Tetszőleges n és $b \geq k$ természetes számok esetén definiáljuk a következő mennyiséget

$$F(b, k) := \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{t(n, b, k)}{\log n}.$$

A jelen dolgozat egyik fő célja, hogy a $t(n, b, k)$ számmal analóg számokat olyan esetekben tudjuk megvizsgálni, amikor az $a \in \{1, \dots, b\}^t$ sorozat koordinátái valamely struktúrával rendelkeznek. A mi esetünkben a sorozat koordinátái egy gráf élei lesznek és a koordináták különbözősége azt fogja jelenteni, hogy az élek különböző színűre lettek színezve, valamely élszínezés által. A következő fejezetben azt fogjuk megvizsgálni, hogy legalább hány különböző színre van szüksége egy élszínezésnek, hogy elérjünk egy (b, k) -hash kódoláshoz hasonló különbözőséget az élhalmazon.

2. fejezet

Anti-Ramsey színezés

2.1. Általános felső korlát

2.1.1 Definíció ([4]) Legyenek n, p és $q \leq \binom{p}{2}$ természetes számok. Legyen $f(n, p, q)$ az a minimális m természetes szám, amelyre létezik olyan $\psi : E(K_n) \rightarrow [m]$ élszínezése a K_n teljes gráfnak, hogy bármely $K_p \subseteq K_n$ részgráfot véve, van benne q különböző színű él, vagyis bármely $K_p \subseteq K_n$ esetén $q \leq |\psi(E(K_p))|$.

Jól látható a fent említett színezés és a (b, k) -hash kódolás hasonlósága, mivel tekinthetjük a színezést úgy, hogy minden szín az $\{1, \dots, b\}$ halmazból kerül ki és így a gráf éleit a színek sorszámával látjuk el. Annak kell teljesülnie, hogy bármely teljes p -esben, amiről tudjuk, hogy $\psi(E(K_p)) \subseteq \{1, \dots, b\}$, már legyen q különböző.

Megjegyzés Könnyen látszik, hogy $f(n, p, 1) = 1$. Ha $p \geq 4$, akkor $f\left(n, p, \binom{p}{2}\right) = \binom{n}{2}$, hiszen bármely két élnek különböző színűnek kell lennie, egyébként két egyforma színű él esetén kiválaszthatnánk azokat a csúcsokat, amelyekeken az élek helyezkednek el és azt kiegészítve egy teljes p -essé, már lenne két azonos színű élünk. Ha $p = 3$, akkor előfordulhat, hogy a két azonos színű él, amit találtunk függetlenek és így 4 csúcson helyezkedik el a két él, amit nem tudunk kiegészíteni

egy háromszöggé. Erre az esetre megkapjuk, hogy $f(n, 3, 3) = n - 1$, ha n páros és $f(n, 3, 3) = n$, ha n páratlan, mivel egy megfelelő élszínezés, ami szerint bármely két szomszédos él különböző színű, teljesíti a definíciót, ennyi szín pedig legalább kell. A $p = 2$ esetben pedig két csúcson nem lehet két különböző színű él.

A valószínűségi módszer, azon belül a Lovász Lokális Lemma segítségével, tudunk adni általánosan egy felső becslést $f(n, p, q)$ -ra.

2.1.1 Tétel (Lovász Lokális Lemma [5]) Legyenek $A_1, \dots, A_t$ események. Az események alapján definiáljuk a H gráfot, amelynek csúcsai az események és ha vesszük egy tetszőleges csúcs nem szomszédait, akkor azokkal semmilyen módon nem függ össze a csúcs, azaz a nem szomszédok tetszőleges metszeteivel, uniójával sem összefüggő az esemény. Legyen D a H maximális fokszáma. Továbbá legyen P egy olyan szám, hogy bármely $1 \leq i \leq t$ esetén $\mathbb{P}(A_i) \leq P$ teljesüljön. Ha ezekre a mennyiségekre teljesül a $4PD \leq 1$ egyenlőtlenség, akkor

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^t \overline{A_i}\right) > 0,$$

vagyis pozitív annak a valószínűsége, hogy egyik esemény sem következik be.

Ez a tétel nagyon hasznos eszköznek bizonyult a gráfelméletben is. Egy számunkra megfelelő színezés esetén is jól alkalmazható. Nem konstruálunk meg egy színezést, hanem azt állapítjuk meg, hogy annak a valószínűsége, hogy a színezést nem rontjuk el, nagyobb, mint 0, vagyis létezik jó színezés. A tételnek egy erősebb változata is ismert, ami szerint az $eP(D + 1) < 1$ egyenlőtlenség teljesülése esetén is következik a tétel állítása, ahol e a jól ismert Euler-féle szám [18]. Nekünk elegendő a gyengébb változat is, mivel csak a nagyságrend fontos számunkra.

Megjegyzés A Lovász Lokális Lemma felhasználható konstruktív módon is, aminek részletei például a [2]-ben és [16]-ban találhatók.

2.1.2 Tétel ([4]) Teljesül a következő egyenlőtlenség

$$f(n, p, q) \leq cn^{\frac{p-2}{\binom{p}{2}-q+1}},$$

ahol c értéke csak p és q értékétől függő konstans.

Bizonyítás: Vegyük K_n egy véletlen t -élszínezését. Minden él kapja az i -edik szint $\frac{1}{t}$ valószínűséggel. Definiáljuk az $A_1, \dots, A_{\binom{n}{p}}$ eseményeket úgy, hogy legyen A_i az az esemény, hogy az i -edik kiválasztott p -esben legfeljebb $q-1$ színt használunk fel. Egy t elemű halmazból $q-1$ elem $\binom{t}{q-1}$ féle módon választható, ami nem nagyobb, mint t^{q-1} . Egy adott p -esre minden él legfeljebb $\frac{q-1}{t}$ valószínűséggel kap egyet a megengedett $q-1$ szín közül. Így minden $1 \leq i \leq \binom{n}{p}$ -re az esemény valószínűsége felülbecsülhető a

$$\mathbb{P}(A_i) \leq t^{q-1} \left(\frac{q-1}{t} \right)^{\binom{p}{2}}$$

módon.

Az események által definiált H gráf legnagyobb fokszámát szeretnénk most meghatározni. Ha K_p és egy másik K'_p nem tartalmaz közös élt, akkor nyilván teljesen függetlenek, ezért a fokszám becsléséhez elegendő összeszámolni azon részgráfokat, melyek legalább egy közös élt tartalmaznak. Rögzítve két csúcsot, majd a maradék csúcsot kivéve az $n-2$ csúcsból azt kapjuk, hogy $D \leq \binom{p}{2} \binom{n-2}{p-2} \leq \binom{p}{2} \binom{n}{p-2}$. Ezután a $4DP \leq 1$ egyenlőtlenség a következő alakban áll elő,

$$4 \binom{p}{2} \binom{n}{p-2} t^{q-1} \left(\frac{q-1}{t} \right)^{\binom{p}{2}} \leq 1.$$

Ebből az egyenletlőnséget t -re kell átrendeznünk, így azt kapjuk, hogy

$$4 \binom{p}{2} \binom{n}{p-2} (q-1)^{\binom{p}{2}} \leq t^{\binom{p}{2}-q+1}.$$

A $4 \binom{p}{2} \binom{n}{p-2}$ tag valamely c konstansra alulról becsülhető cn^{p-2} -vel, majd $\frac{1}{\binom{p}{2}-q+1}$ -

ik hatványra emelve mindkét oldalt, majd felhasználva a $(q-1)^{\frac{\binom{p}{2}}{\binom{p}{2}-q+1}} \geq 1$ egyen-

lőtlenséget és egy kis átalakítás után megkapjuk az állítást a Lovász Lokális Lemmát alkalmazva. $\square$

2.2. Szükséges színek számának nagyságrendje

A 2.1.2 Tétel alapján látható, hogy ahogyan p -t rögzítve q -t növeljük $\binom{p}{2}$ felé, úgy a felső korlát először szublineárisból lineárisba tér át, majd növekszik tovább $n^{1+\varepsilon}$ hatványra, ahol $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Adódik így a kérdés, hogy milyen q egész számok esetén kapjuk meg a határokat, ahol a linearitást a felső korlát elhagyja. A következő tétel a linearitás minimum értékére vonatkozik.

2.2.1 Tétel ([4]) Bármely $p > 2$ pozitív egész szám esetén, ha $q = \binom{p}{2} - p + 3$, akkor $f(n, p, q) = \Theta(n)$, továbbá $f(n, p, q-1) = O\left(n^{1-\frac{1}{p-1}}\right)$, így már nem lineáris.

Bizonyítás: Rögzítsük K_n egy $f(n, p, q)$ szerinti színezését. Ekkor bármely $v \in V(K_n)$ csúcsra illeszkedő élek között legfeljebb $p-2$ lehet azonos színű, ugyanis ha van $p-1$ azonos színű él, akkor ezen élek végpontjait kiválasztva, az általuk alkotott K_p élei legfeljebb $\binom{p}{2} - p + 2$ színt tartalmaznának, ami ellentmondás. Így színosztályonként a csúcsokra legfeljebb $p-2$ azonos színű él illeszkedhet. Ebből azt kapjuk, hogy egy színosztályban legfeljebb $\frac{n(p-2)}{2}$ szín lehet. Vagyis legalább

$$\frac{\binom{n}{2}}{\frac{n(p-2)}{2}} = \frac{n-1}{p-2}$$

színre van szükség. A két felső becslés pedig az 2.1.2 Tételből következik, hiszen egyrészt a $q = \binom{p}{2} - p + 3$ helyettesítéssel

$$f(n, p, q) \leq cn^{\frac{p-2}{\binom{p}{2}-q+1}} = cn^{\frac{p-2}{\binom{p}{2}-((\binom{p}{2}-p+3)+1)}} = cn^{\frac{p-2}{p-2}},$$

adódik. Másrészt a $q = \binom{p}{2} - p + 2$ helyettesítéssel az

$$f(n, p, q) \leq cn^{\frac{p-2}{p-1}}$$

becslést kapjuk. $\square$

2.2.2 Tétel ([4]) Legyen p tetszőleges pozitív egész, ekkor ha $q = \binom{p}{2} - \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil + 2$, akkor

$$\frac{\binom{n}{2}}{\left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil - 1} \leq f(n, p, q).$$

Emiatt pedig $f(n, p, q) = \Omega(n^2)$, viszont $f(n, p, q - 1) \leq cn^{2-\frac{p}{4}}$.

Továbbá érdekes tény, hogy $f(n, p, p)$ -re is ismertek egymáshoz közeli alsó és felső becslések.

2.2.3 Tétel ([4]) Ha $p \geq 3$, akkor

$$n^{\frac{1}{p-2}} - 1 \leq f(n, p, p) \leq cn^{\frac{2}{p-1}}.$$

Egy másik változata ennek a színezési fajtának, amikor geometriai struktúrával is ellátjuk a gráfot.

2.2.1 Definíció Legyen d egy pozitív egész szám és vegyük a K_n teljes gráfot. Egy $\psi : V(K_n) \rightarrow \mathbb{R}^d$ függvénnyel képezzük le a gráf csúcshalmazát a d dimenziós valós térbe. Ekkor ψ meghatároz egy $\tilde{\psi}$ színezést K_n élhalmazán úgy, hogy ha $v, v' \in V(K_n)$, akkor $\tilde{\psi}(\{v, v'\}) := \text{dist}(\psi(v), \psi(v'))$. A $\tilde{\psi}$ színezést geometriai színezésnek hívjuk. Jelölje $f_d(n, p, q)$ azt a minimális f számot, amelyre létezik olyan $\tilde{\psi}$ geometriai színezése K_n -nek f színnel, melyre teljesül, hogy bármely K_p -ben létezik q különböző színű él.

Mivel a gráf, amelyet színezni szeretnénk, rendelkezik egy geometriai struktúrával is, ezért nem alkalmazhatunk akármilyen színszámot. Például ha $d = 2$ és $n = 4$, akkor nem színezhettük az éleket egy színnel, hiszen a síkon nem helyezhetők le 4 pont egyenlő távolságra. Meg kell vizsgálnunk, hogy milyen határai vannak egy fentebb bemutatott geometriai színezéshez szükséges színszámnak.

Ha $P := \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ a pontok halmaza, továbbá $E := \{e_1, \dots, e_m\}$ síkbeli egyenesek halmaza, akkor az $|\{(a, e) \in P \times E : a \in e\}|$ számot hívjuk a pontok és egyenesek illeszkedési számának.

2.2.4 Tétel (Szemerédi-Trotter [19]) Legyen a síkon egy n elemű ponthalmaz és egy m elemű egyeneshalmaz, ekkor a maximális illeszkedési szám $O(n^{\frac{2}{3}}m^{\frac{2}{3}} + n + m)$ nagyságrendű.

Az egyenesek és pontok illeszkedési száma átfogalmazható pontok és körök illeszkedésére is. Tekintsük a pontok n elemű halmazát és a pontok köré húzott n darab c sugarú kör halmazát. Ekkor egy p pont által meghatározott c sugarú C_p körre illeszkedik egy q pont, vagyis $q \in C_p$, akkor p és q távolsága c . A pontok és körök illeszkedési száma így az ekvidisztáns pontpárok kétszerese, mivel ha $q \in C_p$, akkor $p \in C_q$ is teljesül. Ezért a Szemerédi-Trotter tétel [19]-ben található bizonyításához hasonlóan megmutatható, hogy $O(n^{\frac{4}{3}})$ a pontok és körök illeszkedési száma, ahol a körök száma és a pontok száma is n .

Most térjünk vissza a geometriai élszínezésre, speciálisan f_2 -re, amikor a gráf csúcsai a síkon helyezkednek el. Emlékeztetőül: $f_2(n, p, q)$ azt az értéket adja meg, hogy az n síkbeli pontok között minimálisan hány különböző távolság szükséges ahhoz, hogy a pontok elrendezhetőek legyenek úgy, hogy bármely K_p -ben már legyen q darab különböző távolság a pontok között.

2.2.1 Állítás

$$f_2(n, p, q) = \Omega\left(n^{\frac{2}{3}}\right).$$

Bizonyítás: Mivel az n síkbeli pont között lévő ekvidisztáns pontpárok száma a 2.2.4 Tétel körös verziója miatt $O(n^{\frac{4}{3}})$ nagyságrendű, így egy színosztályban legfeljebb $cn^{\frac{4}{3}}$ él található. Így a színek számára használhatjuk az $\frac{\binom{n}{2}}{cn^{\frac{4}{3}}} \leq f_2(n, p, q)$ becslést, amiből már könnyen adódik, hogy a színek száma milyen nagyságrendű minimálisan. $\square$

$f_2(n, p, q)$ -ra egy felső becslést is bemutatunk.

2.2.5 Tétel ([7])

$$f_2\left(n, p, \frac{p^{\log_2 3}}{2} - 1\right) = O\left(n^{\log_2 3}\right).$$

A 2.2.5 Tétel vázlatos bizonyítása A felső becslést additív kombinatorikai problémaként jól meg lehet fogni. Vegyünk egy $A \subseteq \mathbb{R}$ halmazt és legyen $A - A := \{a - a' : a, a' \in A\}$, továbbá legyen $g(n, p, q)$ az a minimális szám, hogy létezik olyan n elemű $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz, melyre $|A - A| = g(n, p, q)$ és bármely p elemű $A' \subseteq A$ halmazra $|A' - A'| \geq q$. A $g(n, p, q)$ mennyiségre gondolhatunk úgy, mint egy f_2 szerinti geometriai színezésre a következő módon: Az n darab pont a síkon mind az x -tengelyen helyezkedik el. A pontok x -tengely szerinti koordinátáinak különbségei közül a pozitív értékek jelentik a távolságot, a nem pozitív számokkal pedig nem foglalkozunk. Így kapjuk az $f_2\left(n, p, \frac{q}{2} - 1\right) \leq g(n, p, q)$ egyenlőtlenséget, mivel a q darab különbségnek a fele lesz negatív és még a 0 távolságra lévőekkel sem foglalkozunk. Ez alapján f_2 -t úgy becsüljük felülről, hogy a $g\left(n, p, p^{\log_2 3}\right)$ mennyiségre adunk felső becslést. A bizonyításban a következő fő lépések következnek.

1. Legyenek $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}$ irracionális számok úgy, hogy $\mathbb{R}_{\mathbb{Z}}$ vektortérben lineárisan függetlenek legyenek, vagyis az $\alpha_1 r_1 + \dots + \alpha_n r_n = 0$ egyenlet egész megoldása α_i -re csak $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ lehet.
2. Definiáljuk a $P_n := \{\alpha_1 r_1 + \dots + \alpha_n r_n : \alpha_i \in \{0, 1\}\}$ halmazt. Ekkor a lineáris függetlenség miatt $|P_n| = 2^n$.
3. $|P_n - P_n| = 3^n$, mivel $P_n - P_n = \{\alpha_1 r_1 + \dots + \alpha_n r_n : \alpha_i \in \{-1, 0, 1\}\}$. Ebből pedig $|P_n - P_n| = 3^n = |P_n|^{\log_2 3}$ következik.
4. A következő lépés annak megmutatása, hogy $p = \log_4 3$ esetén $a^p + b^p > (a + b)^p$ teljesül bármely $a, b \in \mathbb{R}$ számokra.
5. Ezután belátható, hogy bármely k elemű $Q_1, Q_2 \subseteq P_n$ halmazokra $|Q_1 - Q_2| \geq (|Q_1||Q_2|)^p$.

6. Az előző lépés miatt látható, hogy bármely k elemű $Q \subseteq P_n$ halmazra $|Q - Q| \geq k^{\log_2 3}$. Ebből pedig már következik a 2.2.5 Tétel.

3. fejezet

Többszörös anti-Ramsey színezés

3.1. Általános felső korlátok

Az előző fejezetben olyan élszínezési módokat tekintettünk át, amikor egyetlen színezést alkalmazhatunk, és az a fő célunk, hogy már minden p -esben legyen elegendően sok különböző színű él. A most következő fejezetben áttérünk egy más színezési módszerre, amikor több egymás után következő színezés is megengedett. A fő gondolat, hogy színezéssorozatot veszünk és nem azt követeljük meg, hogy minden egyes színezés előállítsa a nekünk megfelelő különböző színűséget valamely részgráfban, hanem arra törekszünk, hogy legyen legalább egy olyan színezés, amivel elérjük ezt. A fő cél a színezéssorozat minimális hosszának megbecsülése. A színezéssorozat egy-egy színezését színezési körnek fogjuk hívni.

3.1.1 Definíció Legyen G egy gráf, melyre $|V(G)| \leq n$ és $|E(G)| = r$, valamely $r, n \in \mathbb{N}$ értékekre. Legyen továbbá $k \in \mathbb{N}$ és jelöljük $t_r(G, n)$ -nel, azt a legkisebb $t \in \mathbb{N}$ számot, melyre létezik olyan $\psi_1, \dots, \psi_t : E(K_n) \rightarrow [r]$ színezéssorozat, hogy bármely $H \subseteq K_n$ részgráfra, mely izomorf G -vel, létezik olyan $i \in [t]$, hogy a ψ_i színezés szerint $E(H)$ bármely két éle különböző színű.

Könnyen látható, hogy az $f(n, p, q)$ és $t_r(G, n)$ paraméterek által definiált

színezésekben fontos különbség, hogy már egy adott részgráfnak kell különböző színűként előfordulnia és nem csupán a felhasznált színek száma fontos számunkra. Ha $E(H)$ bármely két éle különböző színű a ψ színezés szerint, akkor H -t a ψ -re nézve tarkának hívjuk.

Áttekintünk néhány ismeretet arról, hogy milyen alsó, illetve felső becslés adható a $t_r(G, n)$ mennyiségre.

3.1.1 Állítás ([14]) Legyen G egy gráf, melyre $|V(G)| \leq n$ és $|E(G)| = r$, ekkor teljesül, hogy

$$t_r(G, n) \leq 2F(r, r) \log n + o(\log n).$$

Bizonyítás: Egy $\psi_1, \dots, \psi_t$ színezési sorozat által $E(K_n)$ elemeihez hozzárendelhetünk $a \in \{1, \dots, b\}^t$ vektorokat, ahol $(a)_i$ azt adja meg, hogy ψ_i szerint az él milyen színt kapott. A definíció alapján $t := t\left(\binom{n}{2}, r, r\right)$ azt a sorozat hosszt adja meg, amire létezik $\binom{n}{2}$ darab t hosszú vektor, melyek a $\{0, \dots, r-1\}$ elemeket tartalmazzák és bármely r darab vektornak létezik olyan koordinátája, melyben mind az r különbözik. Az éleket ennyi színezési körben már ki tudjuk úgy színezni, hogy bármely r élt kiválasztva legyen az élekhez rendelt vektoroknak olyan i koordinátája, amelyben páronként különbözőek a vektorok. Az i -edik koordináta esetén definiált ψ_i színezés szerint ekkor ez az r darab él ψ_i -re nézve tarka. Innen tudjuk, hogy $t_r(G, n) \leq t\left(\binom{n}{2}, r, r\right)$, továbbá tudjuk, hogy $t\left(\binom{n}{2}, r, r\right) = F(r, r) \log \binom{n}{2} + o(\log n) \leq F(r, r) \log n^2 + o(\log n)$, amiből már következik az állítás. $\square$

A fenti lemma egy olyan konstrukciót ad meg, ami nem használja fel, hogy nem feltétlenül szükséges bármely r darab él esetén a tarka tulajdonságnak fennállnia, így nyilván egy triviális felső korlátot kapunk. A kérdés most az, hogy hogyan tudnánk azzal javítani a konstrukción, ha figyelembe vesszük azt is, hogy az r darab él milyen részgráfot alkot.

3.1.2 Állítás Legyen $G \subseteq K_n$, $|V(G)| = m$ és $|E(G)| = r$. Ekkor teljesül a következő

$$t_r(G, n) \leq \frac{m-2}{\log\left(\frac{r^r}{r^r-r!}\right)} \log n + c$$

egyenlőtlenség, ahol c egy m -től függő konstans.

Bizonyítás: A 2.1.2 Tétel bizonyításához hasonlóan fogunk eljárni.

Legyen $G \subseteq K_n$ egy tetszőleges gráf, $|E(G)| = r$, $|V(G)| = m$ és színezzük ki $E(K_n)$ -t véletlenszerűen r darab színnel a $\psi_1, \dots, \psi_t$ színezésekkel. Bármely ψ_i esetén egy adott él kapja a j -edik színt $\frac{1}{r}$ valószínűséggel és a ψ_i színezések legyenek egymástól függetlenek. Definiáljuk minden $H \cong G$, $H \subseteq K_n$ gráf esetén azt az eseményt, $A_H^{(i)}$ -t, hogy K_n -t ψ_i szerint színezve H nem lesz tarka. Ekkor bármely $1 \leq i \leq t$ -re teljesül, hogy

$$\mathbb{P}(A_H^{(i)}) = 1 - \frac{r!}{r^r} = \frac{r^r - r!}{r^r},$$

mivel ha minden színt fel szeretnénk használni H élein, azt $r!$ féle módon tehetjük meg, és összesen r^r féle módon színezzük.

Továbbá jeleljük A_H^t azt az eseményt, hogy egyik $\psi_1, \dots, \psi_t$ színezés szerint sem lesz H tarka. Jól látható, hogy $A_H^t = \bigcap_{i=1}^t A_H^{(i)}$. Az esemény valószínűsége

$$\mathbb{P}(A_H^t) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^t A_H^{(i)}\right) = \prod_{i=1}^t \mathbb{P}(A_H^{(i)}) = \left(\frac{r^r - r!}{r^r}\right)^t =: P.$$

A valószínűség azért bomlik szorzattá, mert a színezéseket függetlennek adtuk meg.

A Lovász Lokális Lemmát fogjuk alkalmazni, de ehhez szükségünk van még az események által definiált gráf maximális foksámának becslésére, vagyis, hogy egy tetszőleges A_H^t esemény hány másik $A_{H'}$ eseménnyel van összekötve, jelöljük ezt D -vel. A következő felső becslés alkalmazható:

$$D \leq \binom{m}{2} \binom{n}{m-2}.$$

A becslés onnan adódik, hogy bármely H részgráf által definiált eseménynek egy másik H' részgráffal definiált eseménynek nincs közös éle, akkor teljesen függetlenek. Erre pedig alkalmazható a 2.1.2 Tételhez analóg gondolatmenet.

Ha $4DP \leq 1$ teljesül, akkor a Lovász Lokális Lemma miatt

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{H \cong G} \overline{A_H^t}\right) > 0$$

és ebből következik, hogy t körön belül ki lehet úgy színezni, hogy bármely $H \cong G \subseteq K_n$ részgráf tarkán lesz kiszínezve valamely ψ_i színezéssel. Így a

$$4 \binom{m}{2} \binom{n}{m-2} \left(\frac{r^r - r!}{r^r}\right)^t \leq 1$$

egyenlőtlenséget kell átrendezni t -re. Átalakítással kapjuk a következő egyenlőtlenséget

$$\frac{1}{\log\left(\frac{r^r}{r^r - r!}\right)} \log\left(4 \binom{m}{2} \binom{n}{m-2}\right) \leq t,$$

emiatt, ha legalább ennyi a t , akkor már ki tudjuk jól színezni az éleket. További átalakításokkal már adódik a becslés. $\square$

A dolgozat későbbi részében, ahol speciális eseteket tekintünk, látni fogjuk, hogy ez az egyenlőtlenség javít az eddig ismert triviális felső korlátokon.

3.2. Általános alsó korlátok

Az alsó becslés megadása némileg nehezebb általánosan, mint a felső korláté. Hogy megadjunk egy alsó korlátot, ahhoz egy összefüggést mutatnunk a (b, k) -hash kód és egy érdekes gráfelméleti tulajdonság között. A következő definíció egy olyan tulajdonságot ír le, ami mélyebben összeköti $F(b, k)$ -t és a gráf paramétereit.

3.2.1 Definíció Legyen $G \subseteq K_n$ egy gráf és jelölje $C(G)$ azt a maximális élszámot, amire ha $H \subseteq K_n$ és $|E(H)| \leq C(G)$, akkor H beágyazható G -be, vagyis tetszőleges $C(G)$ darab él kiegészíthető G -vel izomorf gráffá. $C(G)$ -t a G gráf generikus élszámának nevezzük.

Most pedig megmutatjuk, hogy adható általános felső becslés is erre a számról a gráf tulajdonságai alapján. A következő fejezetben majd kitérünk speciális esetek generikus élszámaira.

3.2.1 Állítás Legyen G egy gráf, ekkor teljesül, hogy

$$C(G) \leq \min \left\{ \nu(G), \binom{\omega(G)+1}{2} - 1 \right\}.$$

Bizonyítás: Indirekt módon bizonyítuk. Tegyük fel, hogy

$C(G) > \min \left\{ \nu(G), \binom{\omega(G)+1}{2} - 1 \right\}$, vagyis, hogy bármely $H \subseteq K_n$ gráfra, amelyre $|E(H)| = \nu(G) + 1$, vagy $|E(H)| = \binom{\omega(G)+1}{2}$, teljesül a 3.2.1 Definícióban említett tulajdonság. A két eset:

1. Ha $C(G) = \nu(G) + 1$, akkor vehetünk egy olyan H gráfot, ami $\nu(G) + 1$ darab diszjunkt élből áll. Ekkor ez nem ágyazható be G -be, mivel a beágyazás nem csökkenti a független élek számát.
2. Ha $C(G) = \binom{\omega(G)+1}{2}$, akkor vehetjük a $H := K_{\omega(G)+1}$ gráfot, de egy nagyobb klikkszámú gráfot nem ágyazhatunk be egy kisebb klikkszámúba.

Ezzel ellentmondást kaptunk. □

A $C(G)$ definíciójával már megadhatunk egy alsó becslést a lehetséges színezési körök számára.

3.2.2 Állítás Legyen $G \subseteq K_n$ gráf, $|E(G)| = r$, $C(G) \geq 2$, ekkor teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$2F(r, C(G)) \log n + o(\log n) \leq t_r(G, n).$$

Bizonyítás: $C(G)$ azt jelenti, hogy bárhogyan választunk ki K_n -ből $C(G)$ darab élt, ezen élek kibővíthetők G -vé, újabb élek behúzásával. Tegyük fel, hogy K_n -re találtunk megfelelő $\psi_1, \dots, \psi_t$ színezéssorozatot, úgy, hogy bármely G -vel izomorf H részgráf már tarka valamely ψ_i szerint. Válasszunk ki $C(G)$ darab élt

K_n -ben és bővítsük ki újabb élek behúzásával a G gráffal izomorf H gráffá. Ekkor létezik olyan i index, hogy H a ψ_i színezésre nézve tarka. Ennélfogva a $C(G)$ darab él is tarka ψ_i szerint, vagyis bármely $C(G)$ darab élt kiválasztva, az általuk alkotta részgráfnak tarkának kell lennie valamelyik színezésben. Ha a színezésekre $\{1, \dots, r\}^t$ -beli vektorokként gondolunk, mint a 3.1.1 Lemmában, akkor ez azt jelenti, hogy létezik egy i koordináta, ahol mind a $C(G)$ darab élhez rendelt vektor páronként különbözik. Emiatt minimálisan $t\left(\binom{n}{2}, r, C(G)\right)$ színezési körre biztosan szükség van, amiből adódik, hogy $t\left(\binom{n}{2}, r, C(G)\right) \leq t_r(G, n)$, ebből pedig kapjuk, hogy $F(r, C(G)) \log \binom{n}{2} + o(\log n) \leq t_r(G, n)$. $\square$

3.2.1 Jelölés A becslések alapján $t_r(G, n)$ is $\Theta(\log n)$, így a számunkra releváns mennyiségként vezessük be $T(G) := \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{t_r(G, n)}{\log n}$ jelölést, ahol $|E(G)| = r$.

Megjegyzés A 3.1.2 Állítás és a 3.1.1 Állítás, továbbá a fenti állítás alapján látható, hogy ha $|V(G)| = m \leq n$ és $|E(G)| = r$, $C(G) \geq 2$, akkor $t_r(G, n)$ aszimptotikus viselkedése

$$2F(r, C(G)) \leq T(G) \leq \min \left\{ \frac{m-2}{\log \frac{r^r}{r^r-r!}}, 2F(r, r) \right\}.$$

4. fejezet

Speciális esetek, trifferencia

4.1. Háromszög, csillag, független élek

Ebben a fejezetben a három színnel történő élszínezéseket fogjuk vizsgálni. Áttekintjük azon három élű gráfok eseteit, melyek t_r mennyiségére Simonyi Gábor és Körner János adott alsó és felső becsléseket, illetve jellemezték azok aszimptotikus viselkedését.

4.1.1 Tétel ([14])

$$\lceil \log_3(n-1) \rceil \leq t_3(K_3, n) \leq \lceil \log n \rceil - 1.$$

Bizonyítás: Az alsó becsléshez vegyük észre, hogy tetszőleges $v \in V(K_n)$ csúcsra illeszkedő $n-1$ élre fenn kell állnia, hogy bármely két élnek különböző színűnek kell lennie valamely élszínezés szerint, hiszen behúzva a két él különböző végpontját egy háromszöget kapunk. Minden színezés harmadára tudja csökkenteni az olyan élek számát, melyek azonos színűek minden színezési körben, ezért legalább $\log_3(n-1)$ a szükséges színezések száma.

A felső becsléshez egy konstruktív színezést mutatunk be. A csúcsokhoz rendeljünk hozzá 0-1 sorozatokat. Minden csúcsot akkor tudunk egyértelműen meg-

feleltetni ilyen 0-1 sorozatokkal, ha legalább $\log n$ hosszú sorozatokat veszünk. Jelöljük $\bar{v}$ -vel a v csúcsához rendelt sorozatot. A hozzárendelés után tetszőleges $v \neq w$ csúcsok esetén definiáljuk bármely $2 \leq i \leq \lceil \log n \rceil$ -re a ψ_i színezést a következő módon,

$$\psi_i(\{v, w\}) := \begin{cases} 1, & \text{ha } (\bar{v})_i = (\bar{w})_i \\ 2, & \text{ha } (\bar{v})_i \neq (\bar{w})_i \text{ és bármely } j < i \text{ esetén } (\bar{v})_j = (\bar{w})_j \\ 3 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Legyen v_1, v_2, v_3 tetszőleges három csúcs. Legyen i_1 az a szám, melyre $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ sorozatok először az i_1 -edik koordinátában különböznek, i_2 az a szám, melyre $\bar{v}_1, \bar{v}_3$ először az i_2 -edik koordinátában különböznek és hasonlóan legyen i_3 az a szám, melyre $\bar{v}_2, \bar{v}_3$ először az i_3 -adik koordinátában különböznek. Az i_1, i_2, i_3 számok közül nem lehet mind a három egyenlő, hiszen a skatulya-elv miatt három 0-1 sorozat i -edik koordinátája nem különbözhet páronként. Legyen i azon szám az i_1, i_2, i_3 számok közül, mely különbözik a másik két számtól. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\bar{v}_1$ és $\bar{v}_2$ sorozatok különböznek elsőnek az i -edik koordinátában, továbbá legyen $(\bar{v}_1)_i = 1$, $(\bar{v}_2)_i = 0$ és $(\bar{v}_3)_i = 1$. Így $\{v_1, v_2\}$ a ψ_i definíciója miatt a 2-es színt kapja, $\{v_1, v_3\}$ az 1-es színt, továbbá mivel $i \neq i_2$ és $i \neq i_3$, ezért $\{v_2, v_3\}$ a 3-as színt. Mivel a sorozatok első koordinátáját nem használtuk fel a színezéshez, így megkaptuk, hogy $\lceil \log n \rceil - 1$ színezési kör elegendő. $\square$

Jelölje F_3 azt a gráfot, amely 3 független élből áll, továbbá $K_{1,3}$ a 3 ágú csillagot. Szokásos módon χ_e pedig jelölje a gráf élkromatikus számát. Ismert, hogy ha n páros, akkor $\chi_e(K_n) = n - 1$ és ha n páratlan, akkor $\chi_e(K_n) = n$.

4.1.2 Tétel ([14]) Ha n páratlan, akkor

$$t(n - 1, 3, 3) \leq t_3(K_{1,3}, n) \leq t(n, 3, 3),$$

egyébként

$$t_3(K_{1,3}, n) = t(n-1, 3, 3).$$

Bizonyítás: Tetszőleges csúcsot rögzítve tekintsük a rá illeszkedő $n-1$ darab élt. Ezekre az élekre igaz, hogy bármely 3-at kiválasztva kell lennie egy színezési körnek, amiben mind a 3 él különböző színű. Az $n-1$ élhez sorozatokat rendelve aszerint, hogy az i -edik színezési körben milyen színt kapnak, azt kapjuk, hogy $t(n-1, 3, 3)$ színezési körre szükségünk van. Tehát tetszőleges n -re $t(n-1, 3, 3) \leq t_3(K_{1,3}, n)$.

A felső becsléshez tegyük fel először, hogy n páratlan és alkalmazzuk, hogy $\chi_e(K_n) = n$, így $E(K_n)$ kiszínezhető n színnel valamely ψ színezés által, hogy egyik csúcsra sem illeszkedik két azonos színű él. Minden színhez rendeljünk egy-egy $\{0, 1, 2\}$ számokból álló $t(n, 3, 3)$ hosszú vektort. A $t(n, b, k)$ mennyiség definíciója alapján ez a hozzárendelés megvalósítható úgy, hogy bármely 3 különböző színhez tartozó sorozatnak létezzen olyan koordinátája, amiben mind a 3 vektor eltér. Az él n színnel történő színezése alapján minden él kapja a színének vektorát. A ψ_i színezés bármely élhez rendelje az élhez tartozó sorozat i -edik koordinátáját. Tetszőleges 3 ágú csillagot kijelölve a 3 darab él különböző színt kapott ψ szerint. A 3 darab színhez rendelt vektor ekkor valamely i koordinátában páronként különbözik, így a ψ_i színezés szerint különböző színű mind a 3 él. Ezáltal azt kapjuk, hogy $t(n, 3, 3)$ színezési kör elegendő. Hasonlóan belátható, amikor n páros, viszont ebben az esetben $\chi_e(K_n) = n-1$ -et használjuk fel. $\square$

Ebből a Tételből az következik, hogy $T(K_{1,3}) = F(3, 3)$.

4.1.1 Jelölés Legyen $KG(n, k)$ az a gráf, melyre

$$V(KG(n, k)) = \{A \subseteq [n] : |A| = k\}$$

és

$$E(KG(n, k)) = \{\{A, B\} : A, B \in V(KG(n, k)), A \cap B = \emptyset\}.$$

A $KG(n, k)$ gráfot Kneser-gráfnak nevezzük.

4.1.3 Tétel ([10]) Ha $n \geq 2k$, akkor teljesül, hogy

$$\chi(KG(n, k)) \leq n - 2k + 2.$$

Bizonyítás: Az első szint kapják azon A halmazok, melyekre $1 \in A$, a második szint kapján azon halmazok, melyekre $2 \in A$, de $1 \notin A$. Így tovább az $i \leq (n - 2k + 1)$ -edik szint kapják azon halmazok, melyekre $1, \dots, i - 1 \notin A$ és $i \in A$. Az $(n - 2k + 2)$ -edik szint kapja a maradék halmaz. Az eljárás alapján a maradék csúcsok az $\{n - 2k + 2, \dots, n\}$ halmaz k elemű részhalmazai. Mivel $|\{n - 2k + 2, \dots, n\}| = 2k - 1$, így bármely két k elemű halmaznak van közös eleme, ezért ők is lehetnek egy színűek. $\square$

Megjegyzés Nevezetes eredmény, hogy nem csak felső becslés ismert, hanem azt is tudjuk, hogy $\chi(KG(n, k)) = n - 2k + 2$. [15]

Ebben a fejezetben azt az esetet vizsgáljuk, amikor $k = 2$. Hipergráfok színezésének vizsgálatokor alkalmazni fogjuk a Tételt nagyobb k -ra is.

4.1.4 Tétel ([14]) Ha $n \geq 4$, akkor teljesül, hogy

$$t\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, 3, 3\right) \leq t_3(F_3, n) \leq t(n - 2, 3, 3).$$

Bizonyítás: Az alsó becslés megmutatásához jelöljük ki $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ független élt. A 4.1.2 Tételhez hasonlóan erre is teljesülnie kell, hogy bármely 3 élnek ezek közül különböző színűnek kell lennie valamely élszínezésben.

A felső becsléshez vegyük észre, hogy az a gráf, aminek csúcshalmaza K_n élhalmaza, továbbá két él akkor van összekötve, ha függetlenek, az a $KG(n, 2)$ Kneser-gráf. A 4.1.3 Tétel alapján tudjuk, hogy $\chi(KG(n, 2)) = n - 2$. Így vehetjük az éleknek egy olyan ψ színezését, hogy ha két él független, akkor különböző színűek és $n - 2$

színnel színezzük. A 4.1.2 Tétel felső becslésének bizonyításához hasonlóan a színekhez a $0, 1, 2$ számokat tartalmazó $t(n-2, 3, 3)$ hosszú vektorokat rendelünk úgy, hogy az $n-2$ színből bármely 3-at kiválasztva a hozzájuk rendelt sorozatoknak van olyan koordinátája, melyben mind a 3 különbözik, majd megnézzük, hogy egy él a ψ színezés szerint milyen színt kapott, ez alapján pedig a színhez rendelt vektort rendeljük az élhez. Legyen most is egy él ψ_i színezés által kapott színe a hozzá rendelt vektor i -edik koordinátája. A $t(n-2, 3, 3)$ mennyiség definíciója alapján ez egy megfelelő színezéssorozat. $\square$

Az előbbi tétel alapján láthattuk, hogy a $t(\cdot, 3, 3)$ függvények argumentumai $t_3(F_3, n)$ becslésekor ugyanolyan nagyságrendűek, emiatt a limesz inferiorjuk sem különbözik, így $T(F_3) = F(3, 3)$. Jelölje tetszőleges $r \leq \frac{n}{2}$ esetén F_r az r darab független élből álló gráfot, ekkor $t_r(F_r, n) \leq t(n-2, r, r)$. Emellett a $t\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, r, r\right) \leq t_r(F_r, n)$ is teljesül, így $T(F_r) = F(r, r)$.

Az előző két bizonyításban látott "előszínezés" általánosítható. Azt, hogy alkalmazható-e ilyen becslés, hogy előszínezzük, majd a színekhez rendelünk vektorokat, azt a következő mennyiség fogja meghatározni.

4.1.1 Definíció Legyen $|V(G)| \leq n$, ekkor jelölje $f(G, n)$ azt a legkisebb k számot, melyre $E(K_n)$ kiszínezhető k színnel úgy, hogy bármely G -vel izomorf $H \subseteq K_n$ esetén a színezésre nézve H tarka.

4.1.1 Állítás

$$t_r(G, n) \leq F(r, r) \log f(G, n) + o(\log n).$$

Bizonyítás: A 4.1.2 és 4.1.4 Tételekben látott módszer alapján kiszínezzük K_n élhalmazát $f(G, n)$ színnel úgy, hogy teljesüljenek a 4.1.1 Definícióban leírtak, majd a színekhez $t(f(G, n), r, r)$ hosszú vektorokat rendelünk és a színek alapján az élekhez rendeljük ezeket a vektorokat. $\square$

Ahhoz, hogy az imént leírt állítást használni tudjuk, $f(G, n)$ -t kell megbecsülnünk.

4.1.2 Állítás Ha $n \geq 3$ és $|E(G)| \geq 2$, akkor

$$f(G, n) = \begin{cases} O(n) , & \text{ha } C(G) = 1, \\ \binom{n}{2} , & \text{ha } C(G) \geq 2. \end{cases}$$

Bizonyítás: Először karakterizáljuk azokat a gráfokat, melyekre $C(G) = 1$. Ekkor 3.2.1 Tétel miatt az $\omega(G) = 2$ vagy $\nu(G) = 1$ feltételek közül valamelyik teljesül. Ha felveszünk k darab független élt, akkor $\omega(G) = 2$ továbbra is teljesül. Viszont, ha valamelyik független élhez még csatlakozik egy él és $2 \leq k$, akkor $C(G) = 2$ is igaz lenne, mivel tetszőleges 2 élt felvéve azok függetlenek, vagy csatlakoznak, így mindig kiegészíthető G -vel izomorf gráffá. Vagyis ha van két független él G -ben, akkor az összesnek függetlennek kell lennie. Ha nincs két független él, akkor az összes élnek van közös végpontja. Ez két esetben lehetséges: Vagy egy csillagról beszélünk, vagy egy háromszögről, hiszen $\nu(K_3) = 1$ és $\nu(K_{1,r}) = 1$ és a háromszögön kívül nem lehet más olyan két független élt nem tartalmazó gráf, ami nem csillag, hiszen ha $n \geq 4$, akkor már biztosan van olyan él, aminek egyik végpontja sem azonos egy másik él végpontjaival. Ezen alakzatokról pedig láttuk, hogy $f(F_r, n) = n - 2$, $f(K_{1,r}, n) \leq n$ és könnyen belátható, hogy $f(K_3, n) \leq n$ is teljesül. Most legyen $C(G) \geq 2$ és tegyük fel, hogy ki tudtuk színezni kevesebb, mint $\binom{n}{2}$ színnel az $\binom{n}{2}$ élt. Ekkor a skatulya-elv miatt létezik két azonos színű él. Függetlenül attól, hogy a két él csatlakozik-e, ki tudjuk ezeket egészíteni G -vé, amivel ellentmondást kapunk. $\square$

Ezáltal sikerült lefedni azokat az eseteket, amikor a 4.1.1 Állítás alkalmazható sima gráfok esetén. A következő fejezetben azt fogjuk vizsgálni, hogy hipergráfok esetén hogyan tudjuk alkalmazni $f(G, n)$ definícióját, először viszont visszatérünk azon 3 élű gráfokra, amelyekre $C(G) \geq 2$ és nem alkalmazható rájuk az Állítás.

4.2. Egyéb három élű gráfok

Az előző fejezetben megvizsgáltuk K_3 , $K_{1,3}$, F_3 eseteket. Most megnézzük, hogy a maradék 3 élű gráfokra milyen becslést tudunk mondani a 3.1.2 Állítás és a 3.2.2 Állítás felhasználásával. Jelöljük $P_3 \cup e$ -vel egy három csúcsú út és egy független él diszjunkt unióját, és jelöljük P_4 -gyel a négy csúcsú utat.

4.2.1 Állítás Teljesül a következő két egyenlőség:

1. $C(P_3 \cup e) = 2$,
2. $C(P_4) = 2$.

Bizonyítás: A 3.2.1 Állítás miatt tudjuk, hogy mivel $\nu(P_3 \cup e) = 2$ és $\nu(P_4) = 2$, ezért $C(P_3 \cup e), C(P_4) \leq 2$. Az alsó becsléshez húzzunk be tetszőlegesen két élt $n \geq 5$ csúcson. Ezt összesen két módon tehetjük meg.

1. Ha a két él független, akkor az egyik élhez csatlakoztatva még egy élt megkapjuk $P_3 \cup e$ -t, a két független él közé behúзва még egy élt pedig megkapjuk P_4 -et.
2. Ha a két él csatlakozik, akkor még egy tőlük független élt behúзва megkapjuk $P_3 \cup e$ -t, emellett valamelyik él elsőfokú pontjába még egy élt behúзва létrehozhatjuk P_4 -et.

□

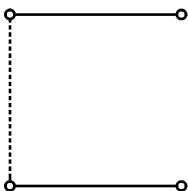
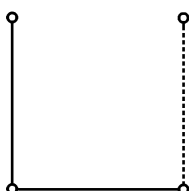
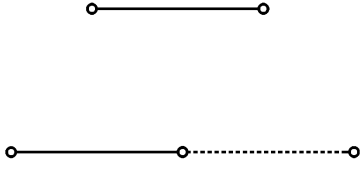
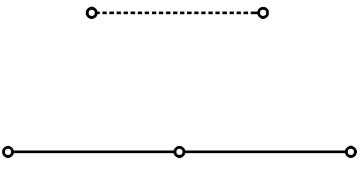
Körner és Marton bebizonyította [13]-ban, hogy

$$\frac{1}{\log \frac{3}{2}} \leq F(3, 3) \leq \frac{4}{\log \frac{9}{5}},$$

amiből numerikusan az következik, hogy $1.70 \leq F(3, 3) \leq 4.72$.

Mivel $C(P_4), C(P_3 \cup e) = 2$, így bármely két élt kiválasztva K_n -ben, azoknak különböző színűnek kell lennie valamely élszínezésben. Így azt kapjuk, hogy legalább $\log_3 \binom{n}{2}$ színezési körre szükségünk van, amiből következik, hogy

$$\frac{2}{\log 3} \log n + o(\log n) \leq t_3(P_3 \cup e, n), t_3(P_4, n).$$

	Független élek	Kapcsolódó élek
P_4		
$P_3 \cup e$		

4.1. ábra. Élek kiegészítése P_4 és $P_3 \cup e$ gráffá.

Az eddig ismert alsó becslés P_4 -re és $P_3 \cup e$ -re $\frac{1}{\log 3} \log n$ volt és a felső becslést az 3.1.1 Tétel adta, ezeket sikerült javítani.

4.3. Más eredmények

Most enyhítjük a feltételeket a körönkénti színezés esetén úgy, hogy elegendő ha bármely p -esben van már egy G -vel izomorf tarka gráf valamely élszínezés által. Egy általános felső becslés megadásához pedig bemutatunk egy másik anti-Ramsey színezési fogalmat.

4.3.1 Definíció Legyen G egy gráf, és legyenek $|V(G)| \leq p \leq n$ természetes számok és $r := |E(G)|$. Jelölje $t_r(G, n, p)$ azt a minimális t számot, melyre létezik élszínezéseknek olyan $\psi_1, \dots, \psi_t : E(G) \rightarrow [r]$ sorozata, hogy bármely $K_p \subseteq K_n$ esetén létezik olyan ψ_i színezés, hogy K_p -ben létezik a ψ_i színezés szerint tarka részgráf, ami izomorf G -vel.

4.3.2 Definíció Jelölje $\text{AR}(G, n)$ azt a minimális k számot, hogy k színnel kiszínezve K_n élhalmazát, biztosan létezik egy színezés szerint tarka részgráf, ami

izomorf G -vel.

4.3.1 Állítás ([8])

$$\text{AR}(P_4, n) = \begin{cases} 4, & \text{ha } n = 4 \\ 3, & \text{ha } n \geq 5, \end{cases}$$

$$\text{AR}(P_3 \cup e, n) = 3.$$

4.3.2 Állítás

$$t_r(G, n, p) \leq F(r, r) \log f(n, p, \text{AR}(G, p)) + o(\log n).$$

Bizonyítás: Az $f(n, p, \text{AR}(G, p))$ mennyiség definíciója szerint (lásd: 2.1.2. Definíció a 14. oldalon) létezik K_n -nek egy olyan ψ élszínezése, hogy bármely $K_p \subseteq K_n$ részgráfban létezik $\text{AR}(G, p)$ darab különböző színű él. Mivel $\text{AR}(G, p)$ darab különböző színű él található K_p -ben így biztosan lesz egy tarka részgráf, ami izomorf G -vel. Színezzük ki az éleket ψ szerint, majd a színekhez rendeljük hozzá vektorokat a 3.1.1 Állítás bizonyításához analóg módon: $t(f(n, p, \text{AR}(G, p)), r, r)$ hosszú vektorokat véve hozzá tudunk minden színhez rendelni egy vektort úgy, hogy bármely r színhez rendelt vektor különbözzön valamely i koordinátában. Tetszőleges p -est kijelölve lesz egy G -vel izomorf tarka részgráf a ψ színezés szerint és így a színekhez rendelt vektorok különböznek valamely i koordinátában. $\square$

4.3.3 Állítás

$$t_3(P_4, n, 5), t_3(P_3 \cup e, n, 5) \leq \frac{3}{8} F(3, 3) \log n + o(\log n).$$

Bizonyítás: A 4.3.1 és a 4.3.2 Állítások alapján $t_3(P_4, n, 5), t_3(P_3 \cup e, n, 5) \leq F(3, 3) \log f(n, 5, 3) + o(\log n)$. Az $f(n, 5, 3)$ mennyiség becslésére felhasználhatjuk a 2.1.2 Tételt, amiből $f(n, 5, 3) \leq cn^{\frac{3}{8}}$ adódik. $\square$

A $t_3(P_4, n, 5), t_3(P_3 \cup e, n, 5)$ mennyiségekre adunk egy másik felső becslést is, mely szintén megfelelő lehet, mivel nem ismert, hogy a két becslés közül melyik adja a jobb felső korlátot. A másik felső becslésére most megadunk egy konstruktív színezést is, amihez korlátozzuk a 0-1 sorozatokat és csak bizonyos tulajdonsággal rendelkezőket engedünk meg.

4.3.3 Definíció ([1]) Jelölje $M(t)$ azt a maximális m számot, melyre létezik olyan m elemű $C \subseteq \{0, 1\}^t$ halmaz, hogy bármely négy elemet véve C -ből, azoknak létezik olyan i koordinátája, melyben pontosan két elem 1. Jelölje az M függvény inverzét W .

4.3.1 Tétel ([1])

$$\frac{1}{3} \log \frac{8}{5} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log M(t) \leq 0.774.$$

Megjegyzés A tétel alapján kapjuk a számunkra releváns W függvény becslését:

$$\frac{1}{0.774} \log n \leq W(n) + o(\log n) \leq \frac{3}{\log \frac{8}{5}} \log n$$

4.3.2 Tétel

$$t_3(P_4, n, 5), t_3(P_3 \cup e, n, 5) \leq \lceil W(n) \rceil$$

Bizonyítás: A célunk, hogy minden csúcshoz hozzárendeljünk egy t hosszúságú 0-1 sorozatot egyértelműen úgy, hogy bármely 5 csúcs esetén létezzen olyan i koordináta, hogy ebben a koordinátában az 5 sorozatban van három darab 1-es és kettő darab 0-ás, vagy három darab 0-ás és kettő darab 1-es. Ezt a követelményt teljesítik azon sorozatok, melyek közül bármely négyet véve van olyan koordináta, melyben kettő 1-es és kettő 0-ás, így alkalmazhatjuk az $M(t)$ -re kapott becsléseket. Ahhoz, hogy minden csúcshoz egyértelműen hozzá tudjunk rendelni egy sorozatot, teljesülnie kell az $n \leq M(t)$ egyenlőtlenségnek, amiből kapjuk, hogy $t = \lceil W(n) \rceil$ hosszú sorozatokkal már megvalósítható a hozzárendelés. Jelölje $\bar{v}$

a csúcshoz rendelt sorozatot és $(\bar{v})_i$ a sorozat i -edik koordinátáját. Definiáljuk a $\psi_1, \dots, \psi_t$ színezéseket a következő módon

$$\psi_i(\{v, w\}) := \begin{cases} 1, & \text{ha } (\bar{v})_i = (\bar{w})_i = 1 \\ 2, & \text{ha } (\bar{v})_i = (\bar{w})_i = 0 \\ 3, & \text{ha } (\bar{v})_i \neq (\bar{w})_i. \end{cases}$$

Legyen $K_5 \subseteq K_n$ tetszőleges. Ekkor az 5 csúcshoz rendelt sorozatnak létezik olyan i koordinátája, hogy a megfelelő helyen az 5 sorozatban három darab 0 és kettő darab 1-es áll, vagy három darab 1-es és kettő darab 0-ás. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy az az eset teljesül, amikor három darab 1-est kapunk az i -edik koordinátában. Legyenek az a, b, c, d, e a K_5 csúcsai és rendre legyenek a hozzájuk rendelt sorozatok i -edik koordinátái 0, 0, 1, 1, 1. Az a és b között menő él a 2-es színt kapja. Az a -t és c -t összekötő él 3-as színű. Maradnak a d és e csúcsok, a köztük menő él pedig 1-es színű. Emiatt lesz benne egy ψ_i szerint tarka $P_3 \cup e$ -vel izomorf részgráf. Az $\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}$ élek pedig P_4 -et adnak, aminek minden éle különböző színű, így az állítást bebizonyítottuk. $\square$

Megjegyzés Mind $F(3, 3)$ és $M(t)$ olyan mennyiségek, amelyeknél nagy az eltérés a felső és alsó becslések között, így nem lehet tudni biztosan, hogy melyik adja az imént megmutatott felső becslések közül a jobb eredményt. Ezért ezek alapján csak azt tudjuk, hogy

$$t_3(P_4, n, 5), t_3(P_3 \cup e, n, 5) \leq \min \left\{ \lceil W(n) \rceil, \frac{3}{8} F(3, 3) \log n + o(\log n) \right\}.$$

5. fejezet

Hipergráfok színezése

A jelen fejezetben a 3 élű gráfok színezési módszereit általánosítani fogjuk hipergráfokra. Ehhez először általánosítanunk kell $t_r(G, n)$ definícióját.

Jelölje a szokásos módon $K_n^{(k)}$ az n csúcsú k -uniform hipergráfot. A dolgozatban eddig $K_n^{(2)}$ -vel foglalkoztunk.

5.0.1 Definíció Legyenek $n \geq k$ tetszőleges pozitív egészek, továbbá $G \subseteq K_n^{(k)}$ egy hipergráf, amire $|E(G)| = r$. Legyen $t_r(G, n)$ az a minimális t szám, melyre léteznek olyan $\psi_1, \dots, \psi_t : E(K_n^{(k)}) \rightarrow [r]$ élszínezések, hogy bármely G -vel izomorf $H \subseteq K_n^{(k)}$ hipergráfra létezzen olyan i , hogy a ψ_i színezés szerint H minden éle különböző színű.

Analóg módon általánosítható $f(G, n)$ és $T(G)$ is. (Lásd: 4.1.1 Definíció a 31. oldalon, 3.2.1 Jelölés a 26. oldalon)

5.0.2 Definíció A $KG(n, k, s)$ gráfot általánosított Kneser-gráfnak hívjuk, ha $V(KG(n, k, s)) = \binom{[n]}{k}$ és

$$E(KG(n, k, s)) = \left\{ \{A, B\} : A, B \in \binom{[n]}{k}, A \neq B, |A \cap B| \leq s \right\}.$$

5.0.1 Tétel ([9]) Bármely természetes számokra, melyekre teljesül, hogy $0 \leq s \leq k \leq n$ és $s + 1 \leq n - 2k + 2(s + 1)$, igaz, hogy

$$\chi(KG(n, k, s)) \leq \binom{n - 2k + 2(s + 1)}{s + 1},$$

egyébként ha $s + 1 > n - 2k + 2(s + 1)$, akkor $\chi(KG(n, k, s)) = 1$.

Tetszőleges H hipergráf esetén jelöljük $L(H)$ -val a H hipergráf élgráfját, aminek csúcshalmaza H élhalmaza és bármely két él (tehát $L(H)$ két csúcsa) össze van kötve.

Legyen $r \leq \lfloor \frac{n-s}{k-s} \rfloor$ és jelölje $\mathcal{M}_{(s,r)}^{(k)}$ azon hipergráfcsaládot, melyre ha $M \in \mathcal{M}_{(s,r)}^{(k)}$, akkor $M \subseteq K_n^{(k)}$, tehát $V(M) \subseteq [n]$ és $E(M) \subseteq E(K_n^{(k)})$, továbbá az élhalmaza r darab olyan halmazból áll, amiknek páronkénti metszete legfeljebb s elemű, emellett létezik olyan A és B halmaz, melyre a metszet pontosan s elemű. Látható, hogy ekkor $L(M) \subseteq KG(n, k, s)$. Továbbá jelölje $\mathcal{K}_{(s,r)}^{(k)}$ azt a hipergráfcsaládot, melyre ha $K \in \mathcal{K}_{(s,r)}^{(k)}$, akkor $K \subseteq K_n^{(k)}$, $|E(K)| = r$ és bármely A, B élére $|A \cap B| \geq s$, továbbá léteznek olyan A és B élek, melyek metszete pontosan s elemű.

5.0.1 Állítás Ha $0 \leq s \leq k \leq n$ és $s + 1 \leq n - 2k + 2(s + 1)$, továbbá $M \in \mathcal{M}_{(s,r)}^{(k)}$ akkor

$$\left\lfloor \frac{n-s}{k-s} \right\rfloor \leq f(M, n) \leq \binom{n - 2k + 2(s + 1)}{s + 1}.$$

Bizonyítás: Mivel $L(M) \subseteq KG(n, k, s)$, így M éleire alkalmazhatjuk az 5.0.1 Tételt, amiből azt kapjuk, hogy $\binom{n-2k+2(s+1)}{s+1}$ színnel már kiszínezhető valamely ψ élszínezéssel úgy $K_n^{(k)}$ élhalmaza, hogy bármely két él különböző színű, melyeknek a metszete legfeljebb s elemű. Emiatt bármely M -mel izomorf részhipergráf élei különböző színűek $K_n^{(k)}$ -ban a ψ színezés szerint.

Az alsó becslést úgy kapjuk, hogy meg tudunk adni $\lfloor \frac{n-s}{k-s} \rfloor$ darab olyan élt $K_n^{(k)}$ -ban, amelyek közül bármely kettőnek különböző színűnek kell lennie, mivel bármely két halmazt, melyeknek a metszete s elemű, kiegészíthető M -mé. Rögzítünk

s elemet és a maradék $n - s$ elemből választunk ki diszjunkt $k - s$ elemű halmazokat. Ezen halmazokat kiegészítve a rögzített s darab elemmel k -asokat kapunk, melyeknek metszete pontosan s elemű. $\square$

5.0.2 Állítás Legyenek $s < k$, r és n pozitív egészek, továbbá $K \in \mathcal{K}_{(s,r)}^{(k)}$, ekkor teljesül, hogy

$$f(K, n) \leq \binom{k}{s} \binom{n-s}{k-s}.$$

Bizonyítás: Definiáljuk a következő G gráfot, melyre $V(G) := \binom{[n]}{k}$ és

$$E(G) = \left\{ \{A, B\} : A, B \in \binom{[n]}{k}, A \neq B, |A \cap B| \geq s \right\}.$$

A felső becsléshez ki fogjuk számolni tetszőleges $A \in V(G)$ csúcs fokszámát. Az A csúcs fokszámát úgy kapjuk, hogy először azon halmazokat számoljuk össze, melyekkel páronként s elemű az A halmaz metszete, majd az $s + 1$ metszetű halmazokat és így tovább. Ebből kapjuk, hogy a $\Delta(G) = \sum_{i=s}^{k-1} \binom{k}{i} \binom{n-k}{k-i}$. A k elemből egy s elemű részhalmazt összesen $\binom{k}{s}$ féle módon kaphatunk meg. Minden ilyen s méretű részhalmazhoz még hozzá kell választanunk $k - s$ elemet, hogy k -ast kapjunk, ezen pontokat a maradék $n - s$ csúcsból kiválaszthatjuk. Ebben az eljárásban több dolgot is többször számolunk, például a fokszámba legalább egyszer beleszámoltuk azt is, hogy önmagával össze van kötve a csúcs, azonban ez a definíció szerint nem lehetséges, így $\Delta(G) \leq \binom{k}{s} \binom{n-s}{k-s} - 1$. Mivel nekünk csak a nagyságrend lesz a fontos, így ezt a pontatlan felső becslést fogjuk alkalmazni. A mohó színezésből adódik, hogy ezek szerint

$$\chi(G) \leq \binom{k}{s} \binom{n-s}{k-s},$$

így létezik egy olyan ψ színezés ennyi színnel, hogy bármely $A, B \in V(G)$ esetén ha $|A \cap B| \geq s$, akkor A és B különböző színű. Ezt a ψ színezést alkalmazzuk $K_n^{(k)}$ élhalmazára és felhasználva, hogy $L(K) \subseteq G$, azt kapjuk, hogy bármely K -val izomorf részhipergráf bármely két éle különböző színű $K_n^{(k)}$ -ban a ψ színezés

szerint, hiszen $K \in \mathcal{K}_{(s,r)}^{(k)}$

□

5.0.3 Állítás Ha $\frac{q}{2} < k \leq q$, akkor

$$f(K_q^{(k)}, n) \leq \binom{k}{2k-q} \binom{n-2k+q}{q-k}.$$

Bizonyítás: Bármely $E, H \in E(K_q^{(k)})$ élekre a szita-formula miatt $|E \cap H| = |E| + |H| - |E \cup H| \geq k + k - q$, mivel $|E \cup H| \leq q$. Így $E(K_q^{(k)})$ egy olyan halmazrendszer, hogy bármely E, H élre $|E \cap H| \geq 2k - q$, a $\frac{q}{2} < k \leq q$ feltétel miatt pedig $|E \cap H| > 0$. Az előző bizonyításhoz hasonlóan definiáljuk G -t úgy, hogy a csúcshalmaza a k elemű halmazok és két csúcs akkor van összekötve, ha két halmaz metszete legalább $2k - q$ elemű. Így a mohó színezéssel adódik a felső becslés.

□

5.0.3 Definíció A $H \subseteq K_n^{(k)}$ hipergráfot s -napraforgónak nevezzük, ha létezik olyan s elemű S halmaz, hogy H bármely A, B élére $A \cap B = S$. Tetszőleges $G \subseteq K_n^{(k)}$ hipergráf esetén jelöljük $\Delta_s(G)$ -vel a G -ben található s -napraforgók maximális élszámát.

A terminológia szerint ha csak két él metszi egymást, akkor nem hívjuk napraforgónak, de a jelen dolgozatban ezt az esetet is így hívjuk majd.

Emlékeztető, hogy $F(b, k)$ megtalálható a 1.2.3 Definícióban a 12. oldalon.

5.0.4 Állítás Ha $0 \leq s \leq k \leq n$ és $s+1 \leq n-2k+2(s+1)$, továbbá $M \in \mathcal{M}_{(s,r)}^{(k)}$ akkor

$$\max \{F(r, \Delta_i(M)) : 0 \leq i \leq s\} \leq T(M) \leq (s+1)F(r, r).$$

Bizonyítás: A felső becsléshez alkalmazzuk az 5.0.1 Állítást és a 4.1.1 Állítást, továbbá, hogy $\binom{n}{k} \leq n^k$.

Az alsó becslés onnan adódik, hogy ha i az az index, melyre $\Delta_i(M)$ felveszi a maximumot, akkor rögzíthetünk i darab elemet, majd kiválasztunk diszjunkt módon még $k - i$ darab elemet a maradék $n - i$ elemből, ezzel k -asokat kapva. Így létrehozunk egy $\lfloor \frac{n-i}{k-i} \rfloor$ élű i -napraforgót $K_n^{(k)}$ -ban. Bármely $\Delta_i(M)$ darab élt kiválasztva pedig ezeknek különböző színűeknek kell lenniük valamely élszínezésben, hiszen ezeket az éleket kiegészíthetjük az M hipergráffá. $\square$

5.0.5 Állítás Legyenek $s < k$, r és n pozitív egészek, továbbá $K \in \mathcal{K}_{(s,r)}^{(k)}$, ekkor teljesül, hogy

$$\max \{F(r, \Delta_i(K)) : s \leq i \leq k-1\} \leq T(K) \leq (k-s)F(r, r).$$

Bizonyítás: A felső becsléshez alkalmazzuk az 5.0.2 Állítást és a 4.1.1 Állítást. Az alsó becslés teljesen analóg módon történik, mint az előző Állításban. $\square$

5.0.6 Állítás Legyenek $\frac{q}{2} < k \leq q$ és $r = \binom{q}{k}$ természetes számok, ekkor

$$F(r, q-k+1) \leq T(K_q^{(k)}) \leq (q-k)F(r, r)$$

Bizonyítás: A felső becsléshez alkalmazzuk az 5.0.3 Állítást és a 4.1.1 Állítást. Az alsó becslésre az előző két Állításban látott gondolatmenetet alkalmazzuk, miszerint alulról becsülhető a $\max \{F(r, \Delta_i(K_q^{(k)})) : 2k-q \leq i \leq k-1\}$ mennyiséggel. Könnyen látható, hogy

$$\Delta_i(K_q^{(k)}) = \left\lfloor \frac{q-i}{k-i} \right\rfloor$$

teljesül minden i -re. A maximumot az $i = k-1$ értékre veszi fel, melyre $\Delta_{k-1}(K_q^{(k)}) = q-k+1$. Mivel ez $\Delta_i(K_q^{(k)})$ maximuma, ezért $F(r, \Delta_i(K_q^{(k)}))$ maximuma is az F monotonitása miatt. Így ha rögzítünk egy $k-1$ elemű halmazt, akkor $n-k+1$ féle módon tudjuk azt kiegészíteni k -assá, így létre tudunk hozni egy $n-k+1$ élű $(k-1)$ -napraforgót $K_n^{(k)}$ -ban, melyről látható, hogy bármely $q-k+1$ élt kiválasztva különböző színűnek kell lennie valamely élszínezésben, mivel ezen élek kiegészíthetők a $K_q^{(k)}$ hipergráffá. $\square$

Irodalomjegyzék

- [1] N. ALON, J. KÖRNER, A. MONTI *String Quartets in Binary*, Combinatorics Probability and Computing , 9(**5**), 381-390
- [2] J. BECK *An algorithmic approach to the Lovász Local Lemma. I*, Random Structures and Algorithms, 2(**4**)(1991), 343–366
- [3] I. CSISZÁR, J. KÖRNER, L. LOVÁSZ, K. MARTON, G. SIMONYI *Entropy splitting for antiblocking corners and perfect graphs*, Combinatorica, **10**(1990), 27-40
- [4] P. ERDŐS, A. GYÁRFÁS *A variant of the classical Anti-Ramsey problem*, Combinatorica , **17**(1997), 459–467
- [5] P. ERDŐS, L. LOVÁSZ *Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions* , Infinite and Finite Sets **2**(1975), 609–627
- [6] P. ERDŐS, M. SIMONOVITS, V. T. SÓS *Anti-Ramsey theorems*, In: Infinite and finite sets : To Paul Erdős on his 60th birthday (1975), 633-643
- [7] S. FISH, B. LUND, A. SHEFFER *A construction for difference sets with local properties*, European Journal of Combinatorics **79**(2019), 237-243
- [8] S. GILBOA, Y. RODITTY *Anti-Ramsey Numbers of Graphs with Small Connected Components*, Graphs and Combinatorics, **32**(2016), 649–662
- [9] A. JAFARI, S. ALIPOUR *On The chromatic number of generalized Kneser graphs*, Contributions of Discrete Mathematics 2(**12**), 69-76
- [10] M. KNESER *Aufgabe 360*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-

- Vereinigung, 58(2)(1956), 27
- [11] J. KÖRNER *Coding of and information source having ambiguous alphabet and the entropy of graphs* in "Transactions of the 6th Prague Conference on Information Theory, etc.," (1973), 411-425 , 9(5), 381-390
- [12] J. KÖRNER *Fredman-Komlós bounds and information theory*, in SIAM J. Algebraic and Discrete Methods, 7(1986), 560-570
- [13] J. KÖRNER, K. MARTON *New Bounds for Perfect Hashing via Information Theory* , Europ. J. Combinatorics, 9(6) (1988) 523-530
- [14] J. KÖRNER, G. SIMONYI *A Triffence*, Studia Sci. Math. Hungar. 30(1995), 95-103
- [15] L. LOVÁSZ *Kneser's conjecture, chromatic number, and homotopy*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 25(1978) 319–324
- [16] R. A. MOSER, G. TARDOS *A constructive proof of the general Lovasz Local Lemma*, Journal of the ACM 57(2)
- [17] G. SIMONYI *Graph entropy: a survey*, Combinatorial Optimization, (W. Cook, L. Lovász, and P. Seymour eds.), DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 20(1995), 399-441
- [18] J. SPENCER *Asymptotic lower bound for Ramsey functions*, Discrete Mathematics 20(1977) 69-76
- [19] E. SZEMERÉDI, W. T. TROTTER JR. *Extremal problems in discrete geometry*, Combinatorica, 3(1983), 381–392