

HIPERGRÁFOK LEFOGÁSA ÉS SZÍNEZÉSE

BURSICS BALÁZS, CSONKA BENCE, SZEPESSY LUCA

Témavezető: Keszegh Balázs

KIVONAT. Dolgozatunkban hipergráfosztályok polikromatikus színezéseihez szükséges elméretetek minimális nagyságával foglalkozunk, továbbá c -sekély lefogó halmazokkal, azaz olyan csúcsalmazokkal, amelyek minden élből tartalmaznak csúcsot, de egy c konstans korlátnál nem többet.

Meghatározzuk, hogy bizonyos geometriai hipergráfosztályokon milyen sekély lefogó halmazok léteznek általánosan.

Foglalkozunk továbbá egy speciális hipergráfosztállyal, amelyet megadott halmazbeli differenciájú számtani sorozatok indukálnak. Kapcsolatot találtunk ezen hipergráfosztály és geometriai hipergráfosztályok között, és ezt felhasználva összefüggéseket bizonyítunk a differenciahalmaz és a polikromatikus színezhetőség között.

1. BEVEZETÉS

Egy H hipergráf *polikromatikus k -színezése* a csúcsok egy olyan k -színezése, melyben H minden hiperéle mind a k színosztályból tartalmaz csúcsot. Megfigyelhetjük, hogy a polikromatikus 2-színezés megegyezik a szokásos hipergráf-kétszínezés fogalmával – azaz amikor azt követeljük meg, hogy ne legyen egyszínű él –, valamint tetszőleges polikromatikus színezés j darab színosztályát összeolvastva polikromatikus $(k - j + 1)$ -színezést kapunk. Egy polikromatikus k -színezés létezésének természetesen feltétele, hogy H minden éle legalább k darab csúcsot tartalmazzon.

1. Definíció. Jelölje $H_{\geq m}$ vagy röviden H_m azt a hipergráfot, amit H -ból az m -nél kisebb élek elhagyásával, $H_{=m}$ pedig azt a hipergráfot, amit a pontosan m méretű élekre szorítkozva kapunk. Hasonlóan, egy $\mathcal{H}$ hipergráfosztály esetén legyen $\mathcal{H}_m = \mathcal{H}_{\geq m} = \{H_{\geq m} : H \in \mathcal{H}\}$ és $\mathcal{H}_{=m} = \{H_{=m} : H \in \mathcal{H}\}$.

Dolgozatunkban hipergráfosztályokat vizsgálunk, és az osztály elemeinek polikromatikus k -színezhetőségéről általánosan, az egész osztályra vonatkozóan szeretnénk valamit mondani. Az alábbi definíciónak köszönhetően válik a probléma érdekessé:

2. Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ egy hipergráfosztály. Jelölje $m_{\mathcal{H}}(k)$ azt a legkisebb pozitív egész m számot, amelyre teljesül, hogy minden $H \in \mathcal{H}$ esetén $H_{\geq m}$ polikromatikusan k -színezhető. Ha nincs ilyen m , akkor legyen $m_{\mathcal{H}}(k) = \infty$.

Az $m_{\mathcal{H}}(k)$ érték meghatározása, illetve becslése önmagában is érdekes bizonyos $\mathcal{H}$ hipergráfosztályok esetén. Emellett plusz motivációt szolgáltat a polikromatikus színezések kapcsolata fedések dekompozícióival. Vegyünk például egy síkbeli poligont, és legyen adott ennek néhány eltoltja úgy, hogy általuk a sík minden pontja legalább m -szeresen fedve van. Természetes kérdés, hogy vajon a fedés, azaz az eltoltak halmaza adott m esetén szétbontható-e két, diszjunkt halmazra úgy, hogy mindkettő egymagában is fedi a síkot. A dualizálás módszere segítségével ez a kérdés visszavezethető azon hipergráfok színezésének kérdésére, ahol a csúcsok a poligonok súlypontjai, az élek pedig a poligon összes lehetséges eltoltja által kimetszett halmazok. Erről bővebben az [5] cikkben lehet olvasni.

A következő definíció egy ígéretes ötlet arra, hogyan hozhatnánk létre polikromatikus színezéseket megfelelő feltételek esetén.

3. Definíció. Egy $H = (V, E)$ hipergráfban egy $U \subset V$ csúcsalmazt c -sekély lefogó halmaznak nevezünk, ha valamely c pozitív egész számra minden $e \in E$ él esetén $1 \leq |e \cap U| \leq c$.

Ha egy hipergráfosztály olyan, hogy tetszőleges eleméből csúcsokat elhagyva, és az éleket eszerint megszorítva továbbra is olyan hipergráfot kapunk, mely benne van ebben az osztályban, akkor a c -sekély lefogó halmazok valóban használhatóak polikromatikus színezések létrehozására, illet láthatunk például az [1] és [7] cikkekben.

Ezekben a c -sekély lefogó halmazok alkalmazása a következő állításra épül, melyet az említett cikkekben nem mondanak ki önmagában, mi viszont a későbbiek miatt ezt megtesszük:

1. Állítás. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{H}$ hipergráfosztály olyan, hogy bármely eleméből egy csúcsot elhagyva, és az éleket eszerint megszorítva egy olyan hipergráfot kapunk, mely szintén eleme $\mathcal{H}$ -nak, illetve hogy adott $H \in \mathcal{H}$ hipergráf minden e éléből választhatunk ki úgy v csúcsot, hogy e -t kicserélve $e' = e \setminus v$ élre továbbra is $\mathcal{H}$ egy elemét kapjuk. Tegyük fel továbbá, hogy $m \geq c$ esetén $\mathcal{H}_{=m}$ elemein létezik c -sekély lefogó pontthalmaz. Ekkor $m_{\mathcal{H}}(k) \leq c \cdot (k - 1) + 1$.

Az általunk vizsgált hipergráfosztályok nagy része geometriai úton definiált hipergráfokból áll, azaz vesszük a sík vagy a tér egy véges részhalmazát, ezek lesznek a hipergráf

csúcsai, az éleket pedig a pontok közt fennálló valamilyen geometriai tulajdonság határozza meg, általában adott geometriai alakzatok által való tartalmazások. Ilyen hipergráfosztályok esetében gyakori, hogy a fenti állítás első feltétele – vagyis hogy csúcsokat elhagyva és az éleket eszerint megszorítva, illetve az éleket megfelelő módon csökkentve nem lépünk ki a hipergráfosztályból – automatikusan teljesül.

Azonban c -sekély lefogó halmazok létezését a legtöbb esetben nem várhatjuk általánosan, geometriai hipergráfcsaládoknál gyakran előfordul például az a triviális ellenpélda, hogy egy hiperél c -nél több diszjunkt másik hiperélet tartalmaz. De az első feltétel mellett elegendő az osztály *Sperner-féle* hipergráfjaira szorítkozni (vagyis az olyan hipergráfokra, amikben nincsenek egymást tartalmazó hiperélek); vagy még speciálisabban az uniform élméretű hipergráfokra – az 1. Állítás esetében mi ezt az utat választottuk –, ugyanis egy hipergráf éleit kisebbekre cserélve a polikromatikus k -színezhetőség feltétele erősödik, az élek kisebbekre cserélésével pedig elérhető, hogy az osztály egy Sperner- vagy uniform elemét kapjuk.

Adódik tehát a kérdés, hogy adott hipergráfosztályon milyen c -kre adható a hipergráfosztály minden H elemére c -sekély lefogó halmaz $H_{=m}$ -en, illetve persze hogy vajon igaz-e a fenti állítás megfordítása, garantál-e $m_{\mathcal{H}}(k)$ egy k -ban lineáris felső becslése k -tól független c -t, melyre létezik $\mathcal{H}_{=m}$ minden elemén c -sekély lefogó ponthalmaz.

Vizsgálódásainkat a következő hipergráfosztállyal kezdtük:

4. Definíció. Jelölje $\mathcal{B}$ azt a hipergráfosztályt, melynek elemei azon $H = (V, E)$ hipergráfok, melyeknél $V \subset \mathbb{R}^2$ véges halmaz, az éleket pedig lefelé végtelen tengelypárhuzamos téglalapok határozzák meg, azaz minden $e \in E$ él előáll $e = \{(x, y) \in V : x_0 < y < x_1, y < y_0\}$ alakban valamely $x_0, x_1, y_0 \in \mathbb{R}$ mellett.

Erről a hipergráfosztályról már ismert ([2]), hogy $1.67k \leq m_{\mathcal{B}}(k) \leq 3k - 2$, valamint, hogy tetszőleges c -re $\mathcal{B}$ Sperner-féle elemeire szorítkozva sem létezik minden esetben c -sekély lefogó halmaz. A 2-sekély lefogó ponthalmazok általános létezése $\mathcal{B}_{=m}$ -en maga után vonná, hogy $m_{\mathcal{B}}(k) \leq 2k - 1$, 3-sekély lefogó ponthalmazok létezése pedig a $3k - 2$ -es felső korlátra adna új bizonyítást. Ezzel szemben a következő eredményünk alapján ez nem lehetséges:

1. Tétel. Az imént definiált $\mathcal{B}$ hipergráfosztályra $m \geq 12$ esetén nem létezik a $\mathcal{B}_{=m}$ osztály minden elemére 3-sekély lefogó ponthalmaz.

A problémát megvizsgáltuk egy másik geometriai hipergráfosztályon, illetve annak duálisán is:

5. Definíció. Jelölje $\mathcal{A}$ azon $H = (V, E)$ hipergráfok osztályát, amelynek csúcshalmaza egy $V \subset \mathbb{R}^2$ véges halmaz, az éleit pedig tengelypárhuzamos sávok határozzák meg, azaz minden $e \in E$ előáll $V \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_0 < x < x_1\}$ vagy $V \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y_0 < y < y_1\}$ alakban (ahol $x_0, x_1, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$). Jelölje $\mathcal{A}^*$ ennek a duálisát, azaz olyan hipergráfok osztályát, amely csúcsai tengelypárhuzamos sávok, élei pedig olyan halmazok, amik előállnak egy adott (x, y) pontot tartalmazó sávok halmazának alakjában.

Ezekről a [3] cikkben olvashatók az alábbi eredmények:

$$2 \left\lceil \frac{3k}{4} \right\rceil - 1 \leq m_{\mathcal{A}}(k) \leq 2k - 1$$

$$2 \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + 1 \leq m_{\mathcal{A}^*}(k) \leq 2k - 1$$

Az $m_{\mathcal{A}^*}(k)$ -ra vonatkozó alsó becslést a cikkben az általános, tetszőleges dimenziós esetben adott becslésből kaphatjuk, az általunk vizsgált speciális esetben, azaz a síkon ezt a korlátot javítani tudjuk.

2. Tétel. A fent definiált $\mathcal{A}^*$ hipergráfosztályra $2 \left(\left\lceil \frac{3}{4}k \right\rceil - 1 \right) + 1 \leq m_{\mathcal{A}^*}(k)$.

Az $\mathcal{A}$ hipergráfosztályon 2-sekély lefogó halmazok létezése esetén egy alternatív bizonyítást kapnánk az $m_{\mathcal{A}}(k)$ -ra vonatkozó felső korlátra, de erre ebben az esetben is negatív eredményt kapunk.

3. Tétel. Elég nagy m esetén nem létezik az $\mathcal{A}_{=m}$ hipergráfosztály minden elemére 2-sekély lefogó halmaz.

Megjegyezzük, hogy adott m -re $k = \lceil \frac{m}{2} \rceil$ darab szín mellett a [3]-ban a felső becslést adó színezés tetszőleges színosztályát véve 3-sekély lefogó halmazt kapunk, így pontosan meghatároztuk a legkisebb c -t, amire ezen a hipergráfosztályon általánosan létezik c -sekély lefogó halmaz.

Ezen probléma motiválta a következő, általánosabb hipergráfosztályok vizsgálatát.

6. Definíció. Jelölje $\mathcal{A}^+$ azon $H = (V, E)$ hipergráfok osztályát, ahol $V \subset \mathbb{R}^2$ véges halmaz, az éleket pedig egy függőleges és egy vízintes tengelypárhuzamos sáv uniója határozza meg,

vagyis minden $e \in E$ előáll $V \cap \left(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y_0 < y < y_1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_0 < x < x_1\} \right)$ alakban valamely $x_0, x_1, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ mellett.

7. Definíció. Jelölje $\mathcal{A}_s$ azon $H = (V, E)$ hipergráfok osztályát, amikre $V \subset \mathbb{R}^2$ véges halmaz, az éleket pedig s darab tengelypárhuzamos sáv uniója határozza meg, azaz minden $e \in E$ előáll $V \cap \left(\bigcup_{i=1}^s A_i \right)$ alakban, ahol az $A_1, \dots, A_s$ halmazok tengelypárhuzamos sávok.

Ezek polikromatikus színezhetőségével kapcsolatban a következő becsléseket bizonyítjuk:

4. Tétel.

$$3 \left\lceil \frac{3}{4}k \right\rceil - 2 \leq m_{\mathcal{A}^+}(k) \leq 4k - 3.$$

Megjegyzés: Azt is beláttuk, hogy $m_{\mathcal{A}^+}(2) = 5$, tehát 2 szín esetén a felső becslés éles.

5. Tétel.

$$m_{\mathcal{A}_s}(k) = s \cdot m_{\mathcal{A}}(k) - s + 1.$$

1. Következmény. $2s(\lceil \frac{3}{4}k \rceil - 1) + 1 \leq m_{\mathcal{A}_s}(k) \leq s(2k - 2) + 1$, speciálisan $m_{\mathcal{A}_s}(2) = 2s + 1$, illetve $m_{\mathcal{A}_s}(3) = 4s + 1$.

Az eddig említett geometriai hipergráfosztályok mellett foglalkoztunk más típusú hipergráfosztályokkal is, melyeknek színezhetőségi tulajdonságai kapcsolatban állnak geometriai hipergráfosztályok színezhetőségi tulajdonságaival.

8. Definíció. Legyenek $C, D \subseteq \mathbb{N}$ tetszőleges halmazok. Jelölje $\mathcal{A}_{D,C}$ azon A hipergráfok osztályát, melyekre $S := V(A) \subseteq \mathbb{N}$ véges halmaz, és $E(A) \subseteq \{ \{a_n\}_{n=1}^k \cap S : \{a_n\}_{n=1}^k \text{ egy } d \in D \text{ differenciájú, véges hosszú számtani sorozat, amely negatív irányban meghosszabbítva tartalmazza } C \text{ valamely elemét} \}$.

Jelölje továbbá $\mathcal{A}_{D,C}^\infty$ azon A hipergráfok osztályát, melyekre $S := V(A) \subseteq \mathbb{N}$ véges halmaz, és $E(A) \subseteq \{ \{a_n\}_{n=1}^\infty \cap S : \{a_n\}_{n=1}^\infty \text{ egy } d \in D \text{ differenciájú végtelen hosszú számtani sorozat, amely meghosszabbítva tartalmazza } C \text{ valamely elemét} \}$.

Az egyszerűség kedvéért vezessük be az $m_{D,C}(k) := m_{\mathcal{A}_{D,C}}(k)$ és $m_{D,C}^\infty(k) := m_{\mathcal{A}_{D,C}^\infty}(k)$ jelöléseket.

Amennyiben D előáll $\{ \prod_{i=1}^n t_i^{j_i} : j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N} \}$ alakban valamely $t_1, \dots, t_n$ egész számokra, a legtöbb esetben meghatározzuk, hogy $m_{D,C}(k)$ és $m_{D,C}^\infty(k)$ végtelen-e. Ezt a korábban definiált $\mathcal{B}$ hipergráfosztály és a következő geometriai hipergráfosztályok segítségével tesszük:

9. Definíció. Legyen $\mathcal{R}$ azon $H = (V, E)$ hipergráfok halmaza, amikre $V \subset \mathbb{R}^2$ véges halmaz, az éleket pedig a tengelypárhuzamos téglalapok határozzák meg, azaz minden $e \in E$ előáll $e = V \cap \left(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y_0 < y < y_1, x_0 < x < x_1, \} \right)$ alakban valamely $x_0, x_1, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ mellett.

10. Definíció. Legyen $\mathcal{T}_3$ azon $H = (V, E)$ hipergráfok halmaza, amikre $V \subset \mathbb{R}^3$ véges halmaz, az éleket pedig azonos állású térnyolcadok határozzák meg, vagyis az E élhalmazra

$$E \subseteq \{A \cap V : A = \{(x, y, z) : x_0 < x, y < y_0, z < z_0\}, x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}\}$$

teljesül.

11. Definíció. Legyen $\mathcal{T}_4$ azon $H = (V, E)$ hipergráfok halmaza, amikre $V \subset \mathbb{R}^4$ véges halmaz, az éleket pedig azonos állású tértizenhatodok határozzák meg, azaz

$$E \subseteq \{A \cap V : A = \{(x, y, z, w) : x_0 < x, y < y_0, z < z_0, w < w_0\}, x_0, y_0, z_0, w_0 \in \mathbb{R}\}.$$

A $\mathcal{T}_3$ hipergráfosztályról Keszegh Balázs témavezetőnk és Pálvölgyi Dömötör megmutatták, hogy $m_{\mathcal{T}_3}(k) \leq O(k^{5,09})$, ennek bizonyítása megtalálható [4]-ben, az $\mathcal{R}$ osztályról pedig ismert, hogy $m_{\mathcal{R}}(k) = \infty$ (sőt, az is igaz, hogy olyan m számot sem adhatunk meg, melyre $\mathcal{R}_{=m}$ elemei a szokásos értelemben k -színezhetőek, ld. [6] Theorem 3.) Ennek segítségével Cardinal észrevétele alapján Keszegh Balázs és Pálvölgyi Dömötör belátták, hogy olyan m sem létezik, melyre $(\mathcal{T}_4)_{=m}$ elemei k -színezhetőek ([8] Theorem 12.), következésképpen $m_{\mathcal{T}_4}(k) = \infty$.

A fenti hipergráfosztályok olyan módon hozhatók összefüggésbe számtani sorozatokkal definiált hipergráfokkal, hogy megfelelő C, D mellett $H \in \mathcal{A}_{C,D}$ vagy $H \in \mathcal{A}_{C,D}^\infty$ csúcsai megfeleltethetők a sík, vagy 3- illetve 4-dimenziós tér pontjainak olyan módon, hogy az így kapott ponthalmaz által meghatározott valamilyen geometriai hipergráf élként tartalmazza az A éleinek megfelelő ponthalmazokat, vagy fordítva, egy ponthalmaz alapján hozunk létre egy $S \subset \mathbb{N}$ csúcshalmazt az élek megtartásával. Ennélfogva lehetőségünk nyílik számtani sorozatokból származtatott hipergráfok színezésével geometriai gráfok színezéseit javítani, és fordítva.

12. Definíció. Egy $D = \{d_i : i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$ halmaz osztólánc, ha bármely $i \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, hogy $d_i | d_{i+1}$. Speciálisan, $\{t^i : i \in \mathbb{N}\}$ is egy osztólánc.

Az alábbi tétel tartalmazza a végtelen hosszú számtani sorozatok esetére vonatkozó eredményeinket:

6. Tétel. Jelölje $\mathcal{A}_{D,C}^\infty, \mathcal{A}_{D,C}, \mathcal{B}, \mathcal{T}_3, \mathcal{T}_4$ a fent definiált hipergráfosztályokat. Ekkor teljesülnek a következő állítások:

(1) Amennyiben D egy osztólánc, akkor

$$m_{D,\mathbb{N}}^\infty(k) \leq m_{\mathcal{T}_3}(k).$$

(2) Amennyiben p, q természetes számok és mindkettőnek létezik a másik számot nem osztó prímosztója, továbbá M a pq minden maradékosztályából legfeljebb egy elemet tartalmaz, akkor

$$m_{\{p^i q^j : i, j \in \mathbb{N}\}, M}^\infty(k) \leq |M|(m_{\mathcal{T}_3}(k) - 1) + 1.$$

Továbbá, ha $M = \{0\}$, akkor egyenlőség teljesül.

(3) Ha p_1, p_2, p_3 mindegyikének létezik a másik két számot nem osztó prímosztója, akkor

$$m_{\{p_1^{j_1} p_2^{j_2} p_3^{j_3} : j_1, j_2, j_3 \in \mathbb{N}\}, \{0\}}^\infty(k) = \infty.$$

A véges hosszú számtani sorozatok esetében pedig a következőket bizonyítottuk:

7. Tétel. Jelölje $\mathcal{A}_{D,C}^\infty, \mathcal{A}_{D,C}, \mathcal{B}, \mathcal{T}_3, \mathcal{T}_4$ a fent definiált hipergráfosztályokat. Ekkor teljesülnek a következő állítások:

(1) Amennyiben M a t szám minden maradékosztályából legfeljebb egy elemet tartalmaz, akkor

$$m_{\{t^i : i \in \mathbb{N}\}, M}(k) \leq |M|(m_{\mathcal{B}}(k) - 1) + 1.$$

(2) Ha p, q természetes számok és mindkettőnek létezik a másik számot nem osztó prímosztója, akkor

$$m_{\{p^i q^j : i, j \in \mathbb{N}\}, \{0\}}(k) = \infty.$$

A tétel (1) pontjában az $M = \{0\}$ eset bizonyítása Keszegh Balázstól és Pálvölgyi Dömötörtől származik.

2. BIZONYÍTÁSOK

Az 1. állítás bizonyítása. Legyen $H \in \mathcal{H}$ tetszőleges, azt kell megmutatnunk, hogy $H_{\geq c(k-1)+1}$ polikromatikusan k -színezhető.

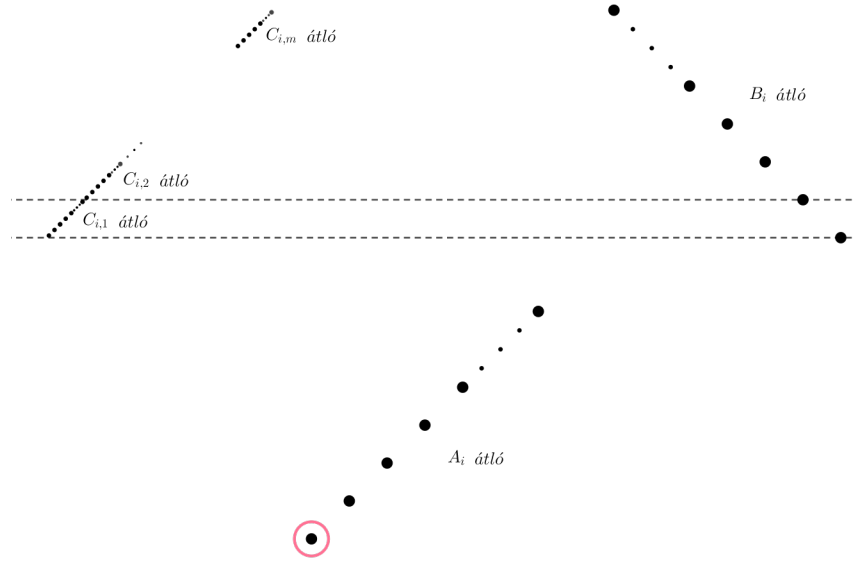
Először is csökkentsük le $H_{\geq c(k-1)+1}$ minden élét pontosan $c(k-1)+1$ méretűre, úgy, hogy a kapott hipergráf is $\mathcal{H}$ -beli legyen, ezt a feltételek szerint megtehetjük. Ezután válasszunk ki egy c -sekély lefogó halmazt az első színosztálynak, és töröljük ki a gráfból. Az így kapott gráf egyrészt még mindig eleme a hipergráfosztálynak, másrészt minden élt kicserélhetünk egy $c(k-2)+1$ méretű élre úgy, hogy egy $\mathcal{H}_{=c(k-2)+1}$ -beli gráfot kapjunk. Ezután kiválasztunk egy újabb c -sekély lefogó halmazt a második színosztálynak, stb. Miután az első $k-1$ színosztályt meghatároztuk, elég, ha minden (eredeti) élben maradt még legalább egy csúcs, így polikromatikusan ki tudjuk színezni a gráfot k színnel. $\square$

Az 1. tétel bizonyítása. Tekintsük a $\mathcal{B}_{=m}$ hipergráfosztályt, ahol $m \geq 12$. Megmutatjuk, hogy az osztálynak van olyan eleme, melynek nincs 3-sekély lefogó ponthalmaza. Ehhez minden $m \geq 12$ -re mutatunk egy konstrukciót, melyről indirekt feltesszük, hogy adott rajta egy 3-sekély lefogó ponthalmaz. Erről a ponthalmazról ezután megállapítunk néhány ténnyt, melyek ellentmondáshoz vezetnek majd.

Első lépésként vegyünk fel egy vízszintes egyenes mentén m db pontot. Ha ezek után csak ezen m db pontnál magasabbra helyezünk újabb pontokat, akkor igaznak kell lennie, hogy ezen m pont közül valamely része a lefogó ponthalmaznak, hiszen a pontjaink kivághatóak egy m pontot tartalmazó feneketlen téglalappal. Vegyük fel most mind az m pontunk fölé az 1. ábra szerinti konstrukciót (az ábrán pirossal bekarikázott pont az, ami fölé felvesszük a többi), természetesen úgy, hogy ne lógjanak össze.

Vizsgáljunk most egy olyan rendszert ezek közül, melyben az a bizonyos legalsó pont része a lefogó ponthalmaznak – ilyen biztosan létezik. Legyen ez az i -edik. Ezután két esetet különböztetünk meg.

Az első eset az, hogy a legalsó pontból induló, $m-2$ pontból álló A_i átló pontjai közt található egy második is, mely része a lefogó ponthalmaznak. Ekkor az A_i átlótól jobbra található, m elemű B_i átlóról elmondható, hogy bármely csúcsa kivágható az A_i átló pontjait is tartalmazó téglalappal, valamint nyilvánvalóan az is, hogy a pontjai közt van olyan, ami eleme a lefogó halmaznak. Itt jön képbe a baloldali, sok – egészen pontosan m darab –



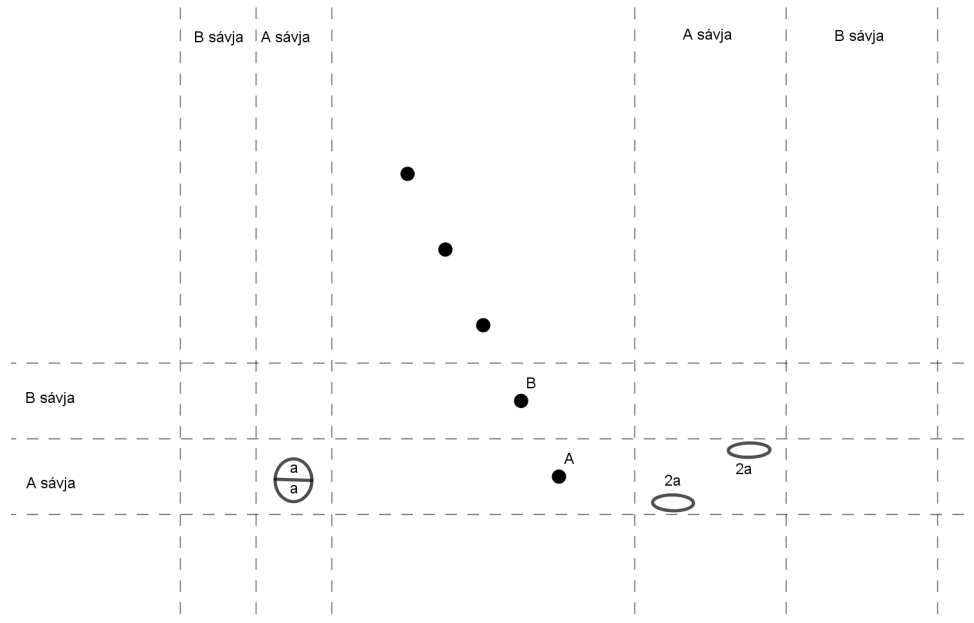
1. ÁBRA

kisebb – azaz m pontból álló – átlóból álló átló. Nyilván minden kicsi $C_{i,j}$ ($j = 1, \dots, m$) átlóban van lefogott pont. Emellett ezek a kicsi átlók úgy vannak elhelyezve, hogy ha már kivágtunk egy téglalappal egy csúcsot a B_i átlóból, az összeset az A_i -ből, és még valamit a C jelzésű (baloldali) átlók egyikéből, akkor igaz legyen, hogy minden B_i átlóbeli ponthoz van egy kicsi $C_{i,j}$ átló a bal átlóban, melynek tetszőleges pontja lehet ez a bizonyos bal átlóbeli utolsó bevett pont. Vegyük hát azt a téglalapot, mely tartalmazza az A_i átlót, melyben két lefogóbeli pont is van, a B_i átlóból pont egy lefogó halmazbeli pontot tartalmaz, és az ehhez tartozó baloldali $C_{i,j}$ kisátlóból is éppen annak a lefogóját tartalmazza. Ezeket összesítve tehát azt kapjuk, hogy az első eset fennállása esetén létezik feneketlen téglalap, melynek m pontja közt 4 db is eleme a lefogó ponthalmaznak.

Nézzük most a lényegesen egyszerűbb második esetet. Ekkor az A_i átló $m - 2$ pontja közt csak egy lefogó van, ez pedig a legalsó. Vegyük az olyan téglalapokat, melyek az A_i átlóból tartalmazzák a legalsót kivéve az összes pontot, valamint még három szomszédosat a B_i átlóból. Mivel ezek már m pontot tartalmaznak így, ezért le kell hogy legyenek fogva, tehát elmondható, hogy a B_i átló bármely három szomszédos csúcsa közt kell lennie olyannak, mely benne van a lefogó ponthalmazban. Amennyiben m legalább 12, úgy a jobboldali, m méretű B_i átlóban biztosan van emiatt már 4 darab lefogóbeli pont, így a második eset fennállása esetén is találtunk olyan hiperélet, mely 4 db lefogó pontot is tartalmaz. $\square$

A 2. tétel bizonyítása. Vegyük fel az $\{(x, y) : 0 < x < 2\}$, $\{(x, y) : 1 < x < 3\}$, $\{(x, y) : 0 < y < 2\}$, és $\{(x, y) : 1 < y < 3\}$ tengelypárhuzamos sávok mindegyikének $\lceil \frac{3}{4}k \rceil - 1$ darab példányát. Vegyük észre, hogy ekkor bármely két sáv metszetének van olyan része, amibe a többi sáv nem metsz bele. Az összes ilyen (legbővebb) részbe helyezzünk el egy-egy pontot. Vegyük annak a hipergráfnak a duálisát, melynek csúcsai az imént lehelyezett pontok, élei pedig a megadott sávok. Indirekt tegyük fel, hogy $m(k) = 2(\lceil \frac{3}{4}k \rceil - 1)$, így az előbb megadott duális gráf összes élét jól tudjuk színezni. A sávok tetszőleges színezése mellett mind a négy „eredeti” sávhoz létezik szigorúan több mint $\frac{k}{4}$ szín, ami nem szerepel a $\lceil \frac{3}{4}k \rceil - 1$ darab példány színei között. A skatulyaelv miatt van két olyan sáv az eredeti négy közt, melyeknek összesen $2(\lceil \frac{3}{4}k \rceil - 1)$ példánya között nem szerepel mind a k szín. Mivel az eredeti négy sáv közül bármely kettőhöz van olyan pont a síkon, amelyik pontosan abban a kettőben van benne és éle a duális gráfnak, ezért ez a pont mint él nem lesz polikromatikus, így $2\lceil \frac{3}{4}k \rceil - 1 \leq m(k)$. $\square$

A 3. tétel bizonyítása. Egy olyan konstrukciót fogunk adni, melyről be tudjuk látni, hogy nem létezhet rá 2-sekély lefogó ponthalmaz. A konstrukció alapja a következő ábrán követhető. Az m most is azt fogja jelölni, hogy hány csúcs van egy élben, azaz sávban. Legyen



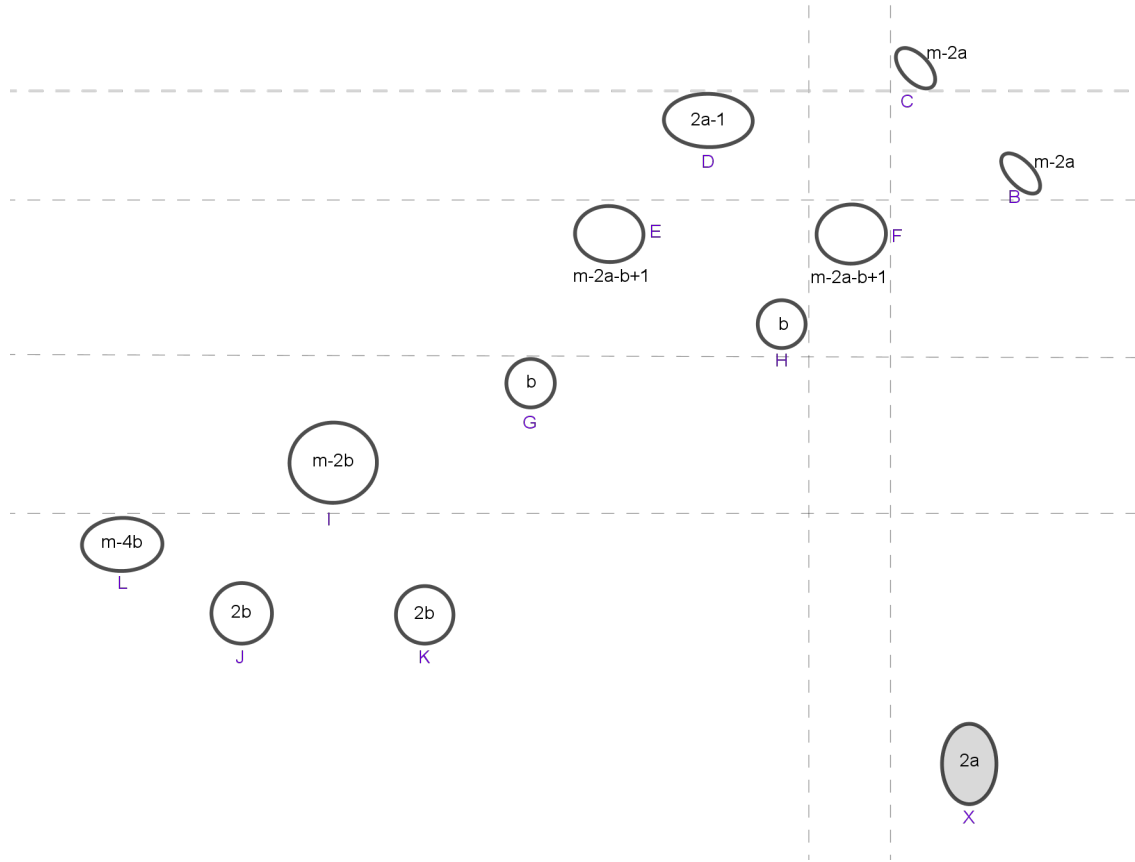
2. ÁBRA. A konstrukció

$a = \lceil \frac{m}{3} \rceil - 1$, b pedig 8, 4 vagy 6 attól függően, hogy $(m \bmod 3)$ 0, 1 vagy 2-e; a későbbiek

alapján emellett az $m \geq 6b$ feltételre lesz szükségünk. Így tehát $m = 3a + \frac{b}{2} - 1$.

Kiindulunk m darab pontból, melyek az ábra szerint egy átló mentén helyezkednek el. Egy ezeket tartalmazó függőleges sávot szabadon hagyunk a továbbiakban is, így ezen pontok közt lesz olyan, melyet be kell vennünk a lefogók közé. Ezután meghatározunk diszjunkt vízszintes sávokat, melyekbe 1-1 esik az átló minden pontjából. Minden ilyen sávba felveszünk három pontkupacot, ahogyan azt az ábrán az A pont sávjában ábrázoltuk. Fontos, hogy a pontkupacoknak legyen egy saját függőleges sávja. A továbbiakban megmutatjuk, hogy ha egy $2a$ méretű pontkupacnak van egy saját függőleges sávja, akkor vagy tartalmaz lefogó pontalmazbeli pontot, vagy kiegészíthető a sávján belül további pontokkal úgy, hogy azokat ne tudjuk 2-sekély módon lefogni. Így tehát feltehető, hogy az összes, korábban említett, $2a$ méretű halmazban van lefogó pont, különben készen lennénk. Ekkor kiválasztunk az átlóból egy lefogó pontot, és megnézzük, hogy a sávjában levő, tőle balra levő $2a$ méretű pontkupac alsó vagy felső felében található-e a lefogó pont. Ezután ennek megfelelően a sáv alsó vagy felső felét kiválasztjuk, melybe beleesik még egy $2a$ -s kupac egy lefogó ponttal. Ezen sáv $3a + 1$ pontot tartalmaz, melyből legalább 3 lefogó, így kibővítve a sávot m méretűre készen vagyunk.

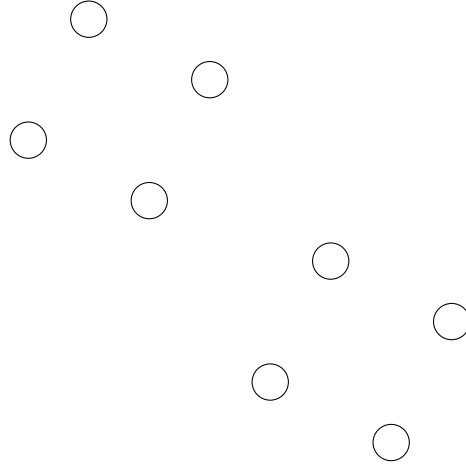
Most pedig megmutatjuk, hogy ha lenne olyan $2a$ méretű lefogómentes pontkupac, melynek van saját függőleges sávja, akkor a sávba megfelelően helyezve további pontokat garantálva lesz egy él legalább három lefogó ponttal. A konstrukció a lenti ábrán követhető. Az ábra jobb alsó sarkában levő, szürkével jelölt ' X ' nevű pontkupacból indulunk, melyről feltettük, hogy nem tartalmaz lefogó pontot. Ebből következik, hogy a B és C jelűekben kell hogy legyen, hiszen kivághatóak m méretű függőleges sávval az X -szel együtt. Ennél azonban több is igaz: a kettőből együtt kivágható egy $m - 2a + 1$ méretű rész, mely két lefogó pontot is tartalmaz. Ezt kihasználva látszik, hogy a D kupac nem tartalmazhat lefogó pontot, különben készen lennénk. Ez ugyan kisebb üres, mint amiből kiindultunk, viszont vízszintesen is (szinte) szabadon használhatjuk. Mivel D -ben nincs lefogó, így könnyen láthatóan $E \cup G$, $E \cup H$ és $F \cup H$ viszont kell hogy tartalmazzon. Vegyük észre, hogy E és F mérete, azaz $m - 2a - b + 1$ éppen $a - \frac{b}{2}$, így $E \cup F \cup H$ mérete éppen $2a$. Ha tehát $E \cup F \cup H$ legalább két lefogót tartalmazna, úgy $E \cup F \cup H \cup B$ m méretű vízszintes strip már legalább hármat tartalmazna. Emiatt E biztosan üres lefogó-szempontból, így G és H is tartalmaz lefogót, következésképp F megintcsak üres. Ezzel pedig szinte készen vagyunk: van két b méretű

3. ÁBRA. Egy $2a$ pontból álló kupac sávja

kupacunk, melyben mindkettőben található lefogó pont. Emiatt I nem tartalmaz lefogót, J és K biztosan tartalmaz, így L biztosan nem, ezzel pedig kész az ellentmondás: $L \cup I$ ugyanis $2m - 6b$ méretű, így $m \geq 6b$ esetén ennek van olyan részhalmaza, mely él, és lefogatlan. $\square$

A 4. tétel bizonyítása. A felső becslés bizonyításához tetszőleges síkbeli ponthalmaszt színezzünk ki úgy, hogy minden legalább $2k - 1$ pontot tartalmazó tengelypárhuzamos sáv polikromatikus legyen, ezt megtehetjük a [3] cikkben szereplő Theorem 1. állítása szerint. Ekkor a vizsgált hipergráf bármely, legalább $4k - 3$ pontot tartalmazó élének része egy olyan vízszintes vagy függőleges tengelypárhuzamos sáv, ami $2k - 1$ pontot tartalmaz és ezért polikromatikus, így az eredeti él is polikromatikus.

Az alsó becslés konstrukciójához vegyünk fel nyolcszor $\lceil \frac{3}{4}k \rceil - 1$ pontot, a 4. ábrán látható elrendezésben:



4. ÁBRA

A pontok tetszőleges színezése mellett ekkor mindegyik kupachoz létezik szigorúan több mint $\frac{k}{4}$ szín, ami hiányzik belőle, így a skatulya-elv miatt van 3 kupac, amiken belül nem fordul elő az összes szín. Mivel az ábrán látható elrendezésből bármely három kupac kivágható egy függőleges és vízszintes tengelypárhuzamos sáv uniójával, $m(k) > 3(\lceil \frac{3}{4}k \rceil - 1)$. $\square$

Az 5. tétel bizonyítása. Adott $k \geq 2$ természetes számhoz vegyünk egy olyan $\mathcal{A}$ -beli hipergráfot, amelynek bármely színezése esetén van legalább $m_{\mathcal{A}}(k) - 1$ pontot tartalmazó, nem polikromatikus éle, azaz tengelypárhuzamos sávja. Vegyük ezen hipergráf csúcsainak $k(s - 1) + 1$ darab példányát, úgy, hogy a hipergráf eddigi élei továbbra is kivághatók legyenek tengelypárhuzamos sávokkal az egyes példányokból. (Például úgy, hogy minden példány csúcsait az addig lehelyezett összes csúcstól szigorúan jobbra és lefelé helyezzük el.) Az így kapott hipergráf bármely színezésére ekkor minden példányban létezik $m_{\mathcal{A}}(k) - 1$ pont, amik kivághatóak egy tengelypárhuzamos sávval, és nem tartalmazzák az egyik színt. A skatulyaelv szerint van s darab ilyen tengelypárhuzamos sáv, amik ugyanazt a színt nem tartalmazzák. Ebből már következik, hogy $s \cdot m_{\mathcal{A}}(k) - s + 1 \leq m_{\mathcal{A}_s}(k)$.

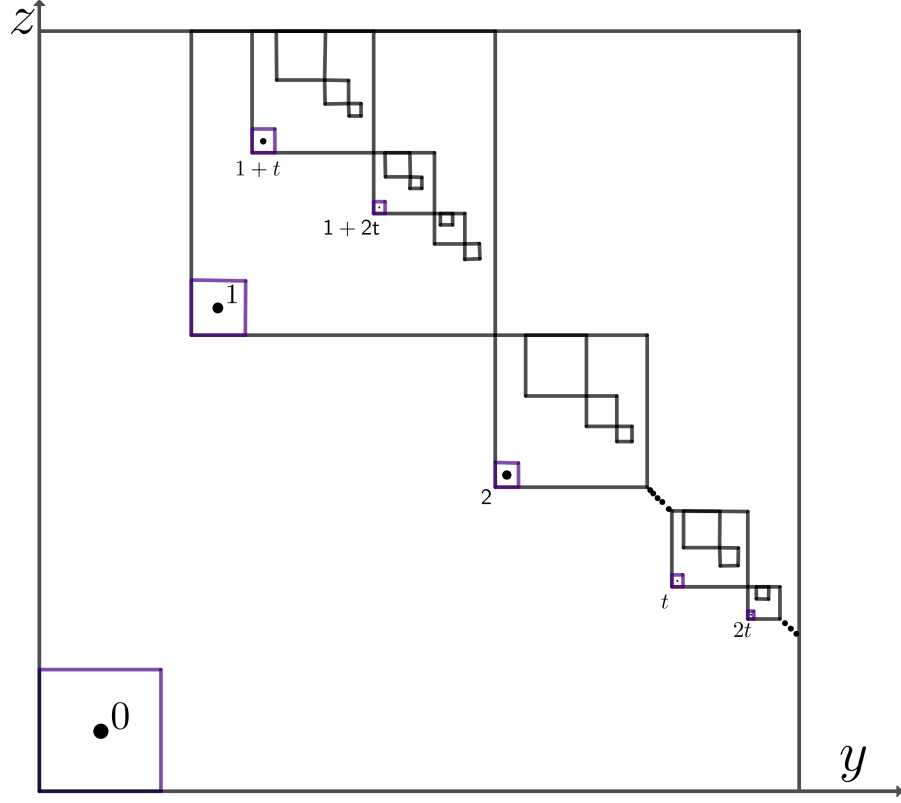
A fordított irányú egyenlőtlenség megmutatásához olyan színezés létezését kell igazolnunk, amelyre bármely $s \cdot m_{\mathcal{A}}(k) - s + 1$ pont, ami kivágható s darab tengelypárhuzamos sávval, tartalmazza mind a k színt. Ilyen pedig létezik, hiszen tetszőleges $\mathcal{A}$ -beli hipergráfhoz jó lesz az a színezés, amelynél bármely, legalább $m_{\mathcal{A}}(k)$ méretű sáv-él polikromatikus, mivel minden $s \cdot m_{\mathcal{A}}(k) - s + 1$ pont, amely kivágható s darab tengelypárhuzamos sávval, tartalmaz $m_{\mathcal{A}}(k)$ méretű élet. $\square$

A 6. Tétel 1. pontjának bizonyítása: Tetszőleges $A \in \mathcal{A}_{\{t^i: i \in \mathbb{N}\}, \mathbb{N}}^\infty$ hipergráf csúcsait el fogjuk helyezni úgy a térben, hogy az általuk meghatározott $\mathcal{T}_3$ tényolcad-hipergráf élként tartalmazza az A éleinek megfelelő pontthalmazokat. Az elhelyezést a t -számrendszerbeli alakok alapján valósítjuk meg. Az x -tengely szerint legyenek a számok növekvő sorrendben. A célunk az y - és z -tengelyek szerint megfelelően elhelyezni őket. Ehhez rekurziót fogunk alkalmazni. Először vegyünk egy 1×1 -es négyzetet az x -tengelyre merőlegesen. A négyzet bal alsó sarkába helyezzük le a 0 elemet. A négyzetbe újabb négyzeteket helyezünk el, az első négyzet legyen a bal felső sarokban $\frac{1}{2}$ oldalhosszúságú, majd átlósan lerakunk egy $\frac{1}{2^2}$ oldalhosszúságút, és így tovább, az i . négyzet oldalhosszúsága legyen $\frac{1}{2^i}$. A négyzetek sarkaiba helyezzünk le elemeket a következő módon: ha az i . négyzetet vesszük, akkor $i = ht + r$ esetén, ahol $r < t$, legyen a bal alsó sarokban az rt^h elem. Ezt pedig rekurzív módon folytatjuk az átlóban lévő négyzetekre a következő módon. Tegyük fel, hogy az l . lépés már adott, és vegyünk egy l -szeresen tartalmazott négyzetet, N -t, ez még üres. Ebben is helyezzünk le átlósan négyzeteket úgy, hogy ha az N oldalhosszúsága $\frac{1}{2^j}$ valamely $j \in \mathbb{N}$ -re, akkor az átlóba helyezett első négyzet oldalhosszúsága legyen $\frac{1}{2^{j+1}}$. Tegyük fel, hogy N sarkában valamely i -re $s + rt^i$ áll, ahol $1 \leq r < t$ és i maximális. Ekkor az N átlójába helyezett első négyzet sarkába kerüljön $s + rt^i + t^{i+1}$, majd a másodikba $S + rt^i + 2t^{i+1}$ és így tovább. Ha a k . négyzetet tekintjük az átlóban, akkor a $k = ht + r'$ felírás alapján kerüljön $s + rt^i + r't^{h+j+1}$ elem. Ezzel a rekurzióval minden $\mathbb{N}$ -beli elemet elhelyezünk a térben. Például, ha egy szám t -számrendszerbeli alakjában l darab nem nulla elem van, akkor azt az l . rekurziós lépésben helyezzük el.

Tetszőleges $(a_n) \in E(A)$ sorozatot szeretnénk ebből a konstrukcióból megkapni. $a_n = a_0 + nd$, ahol $d \in \{t^i : i \in \mathbb{N}\}$. Először tekintsük azt az esetet, amikor $a_0 < d$. Ekkor írjuk fel a_0 t -számrendszerbeli alakját $(a_0)_t$ jelöléssel.

$$a_0 = \sum_{i=0}^m l_i t^i \Rightarrow (a_0)_t = l_m \dots l_0$$

Kiválasztjuk azt a négyzetet, M -et, melyben pont az a_0 található meg a t -számrendszerbeli felírás alapján. A kezdetben megadott d elemre legyen $d = t^{i_0}$. M átlójában kiválasztva a t^{i_0} -val megjelölt négyzetet, L -t, csináljuk a következőt. A tényolcadot hozzuk előrébb az a_0 elemig az x -tengely mentén, vagyis a tényolcad x -tengely szerinti koordinátája legyen a_0 . Az y -tengely és z -tengely szerint a tényolcad csúcsát úgy választjuk, hogy M négyzeten

5. ÁBRA. A négyzetek elhelyezése az x -tengelyre merőleges nézetben

belül tartalmazzon minden négyzetet az átlóban L alatt, L -t is beleértve. Az M -ből és az M -et tartalmazó négyzetből más négyzeteket ne tartalmazzon. Ekkor pont egy végtelen hosszú, a_0 kezdetű, t^{i_0} differenciájú számtani sorozatot kapunk, mivel tetszőleges $a_{n_0} = a_0 + n_0 t^{i_0}$ elem benne van egy beágyazott négyzetben. Ha $n_0 = \sum_{k=0}^{j_0} a_k t^k$, akkor $a_{n_0} = a_0 + \left(\sum_{k=0}^{j_0} a_k t^k\right) t^{i_0} = a_0 + \sum_{k=0}^{j_0} a_k t^{k+i_0}$, ahol $i < k + i_0$, mivel a feltevésünk szerint $i < i_0$, vagyis az a_{n_0} szám már megtalálható valamely M -be beágyazott négyzet sarkában. Fordítva is igaz, hogy a tényolcad által kimetszett rész bármely eleme a sorozatnak is eleme, hiszen valamely tartalmazott négyzet eleme, például s , úgy áll elő, mint

$$s = a_0 + \sum_{k=i_0}^b f_k t^k = a_0 + t^{i_0} \sum_{k=i_0}^b f_k t^{k-i_0},$$

ebből pedig már következik az $a_0 < d$ eset állítása. Ha pedig $a_0 \geq d = t^{i_0}$, akkor vesszük az $a'_n = a'_0 + n t^{i_0}$ sorozatot, ahol $a'_0 < d$ és $a_0 = a'_0 + k t^{i_0}$. Az előző eljárás szerint előállítjuk azt a tényolcadot, ami tartalmazza a'_n -t, majd a tényolcad x -tengely szerinti koordinátáját úgy

növeljük, hogy az első k benne lévő elemet már ne tartalmazza, így megkapjuk az $a'_n + kt^{i_0} = a'_0 + nt^{i_0} + kt^{i_0} = a_0 + nt^{i_0} = a_n$ sorozatot.

Egy $A := (S, E) \in \mathcal{A}_{\{t^i : i \in \mathbb{N}\}, \mathbb{N}}$ hipergráfot úgy kapunk meg a konstrukcióból, hogy csak az S pontokat helyezzük le a térben, a többi pontot kidobjuk.

Egy $D = \{d_i : i \in \mathbb{N}\}$ osztólánc esetén az eljárást hasonlóan végezzük, csak egy tetszőleges $s \in \mathbb{N}$ szám esetén az $s = \sum_{i=1}^m c_i d_i$ felírást alkalmazzuk. $\square$

6. Tétel 2. pontjának bizonyítása. Először az $M = \{0\}$ esetet igazoljuk.

$$m_{\{p^i q^j : i, j \in \mathbb{N}\}, \{0\}}^\infty(k) = m_{\mathcal{T}_3}(k),$$

ahol p, q természetes számok és létezik különböző prímosztójuk.

1.lépés: $m_{\{p^i q^j : i, j \in \mathbb{N}\}, \{0\}}^\infty(k) \leq m_{\mathcal{T}_3}(k)$

Legyen $D := \{p^i q^j : i, j \in \mathbb{N}\}$, $C := \{0\}$, $A \in \mathcal{A}_{D, C}^\infty$ tetszőleges, ehhez megadunk egy $\varphi : V(A) \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezést. Az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel, hogy $V(A) = \mathbb{N}$. Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, és vegyük a következő alakját: $n = p^i q^j m$, ahol $i, j \in \mathbb{N}$ maximálisak. Ekkor $\varphi(n) := (n, -i, -j)$. A pontok így az x -tengely irányában monoton növekedve helyezkednek el, az y - és z -koordináta pedig azt határozza meg, hogy legfeljebb mekkora p - és q -hatvánnyal osztható a szám – ilyen felbontás egyértelműen létezik, ha p -nek és q -nak van a másik számot nem osztó prímosztója. Azt kell megmutatni, hogy ekkor bármely $(a_n) \in E(A)$ sorozat megadható egy $B \in E(T)$ térnyolcaddal, valamely $T \in \mathcal{T}_3$ térnyolcadok által indukált hipergráfra. Az (a_n) sorozat felírható $a_n = (n_0 + n)d$ alakban, mivel meghosszabbítva tartalmazza a 0-t. A felírásban legyen $d = p^{i_0} q^{j_0}$. Legyen B az $(n_0 d, -i_0, -j_0)$ csúcs által meghatározott térnyolcad, mely az x -tengely szerint pozitív, y -tengely szerint negatív, z -tengely szerint negatív irányba végtelenek. Ez a térnyolcad megfelelő, mivel tetszőleges $N \in \mathbb{N}$ esetén $a_N = (n_0 + N)d$. Írjuk fel az $n_0 + N = p^{i'} q^{j'} m$ alakot, ahol $i', j' \in \mathbb{N}$ maximális. Ekkor $a_N = (n_0 + N)d = p^{i'} q^{j'} m d = p^{i'} q^{j'} m p^{i_0} q^{j_0} = p^{i'+i_0} q^{j'+j_0} m$, amire teljesül, hogy $n_0 d \leq p^{i'+i_0} q^{j'+j_0} m$, továbbá $-i' - i_0 < -i_0$, és $-j' - j_0 < -j_0$, így $a_N \in T$. Fordítva pedig egy tetszőleges $(a_1, a_2, a_3) \in B$ esetén létezik olyan $N' \in \mathbb{N}$, hogy $n_0 + N' = p^{a_2-i_0} q^{a_3-j_0} l$ és $a_1 < a_{N'}$, ahol $a_2 - i_0$ és $a_3 - j_0$ maximális, ezt nézve pedig $a_{N'} = (n_0 + N')d = p^{a_2-i_0} q^{a_3-j_0} l p^{i_0} q^{j_0} = p^{a_2} q^{a_3} l$, így a $a_n := (n_0 + n)p^{i_0} q^{j_0}$ sorozatra $\varphi(a_n) = B$.

2.lépés: $m_{\{p^i q^j : i, j \in \mathbb{N}\}, \{0\}}^\infty(k) \geq m_{\mathcal{T}_3}(k)$

Legyen $T := (S, E) \in \mathcal{T}_3$ tetszőleges és definiáljuk a $\psi : V(T) \rightarrow \mathbb{N}$ leképezést a következő módon. Tetszőleges $s \in S$ pontot indexeljük három koordinátával: a pontok adott koordinátái az x -tengely szerint növekvő, az y -tengely és z -tengely szerint csökkenő sorrendben legyenek. Az indexelés szerint legyen $s = (s_1, s_2, s_3)$. Ekkor legyen $\psi(s) = p^{s_2} q^{s_3} m(s_1)$, ahol $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ olyan függvény, melyre teljesül, hogy $m(s_1)$ relatív prím p -vel és q -val, és ha $s^{(1)}, s^{(2)} \in S$ és $s_1^{(1)} < s_1^{(2)}$, akkor $p^{s_2^{(1)}} q^{s_3^{(1)}} m(s_1^{(1)}) < p^{s_2^{(2)}} q^{s_3^{(2)}} m(s_1^{(2)})$. Tetszőleges $H \in E(T)$ esetén ez egy ψ képre megszorított számtani sorozatot ad meg, aminek a differenciája D -beli.

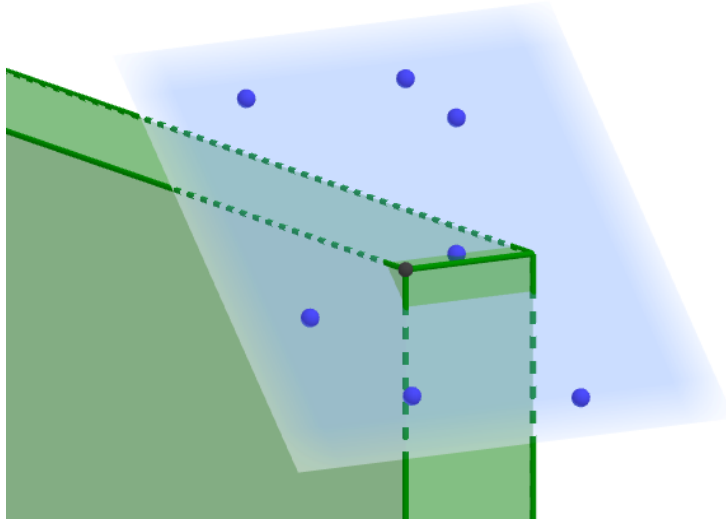
Legyen M egy olyan halmaz, ami a pq minden maradékosztályából legfeljebb egy elemet tartalmaz, ekkor egy $A \in m_{\{p^i q^j : i, j \in \mathbb{N}\}, M}^\infty(k)$ hipergráf csúcsaihoz ismét $\mathbb{R}^3$ -beli pontokat fogunk rendelni. A konstrukciót, amit $M = \{0\}$ eset bizonyításában láttunk, lemásoljuk M darab blokkra a következők szerint. Hozzunk létre blokkokat minden $m \in M$ szerint úgy, hogy $m' := m \bmod pq$ -t tekintjük, m' -vel indexeljük a blokkokat növekvő sorrendben, és a pq darab blokkot átlósan helyezzük le az y -tengely z -tengely szerinti síkban. Egy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ -re tekintsük n' -t, ami az a szám, amit n -ből a pq -val való osztási maradékát kivonva kapunk. Ezután vegyünk $n' = p^i q^j l$ -t, ahol $i, j \in \mathbb{N}$ maximálisak, ekkor rendeljük n -hez a $(n, \frac{1}{i} - 1 - m', \frac{1}{j} - 1 - m')$ koordinátájú pontot, így a ténylőcadokkal külön-külön tudunk kimetszeni sorozatokat. Így minden blokkba egy természetes szám az alapján kerül bele, hogy mi a pq -val való osztási maradéka, és az egységmagasságú blokkon belül még elhelyezzük a megfelelő szinten az alapján, hogy a pq -val való osztási maradékot elvéve, mi a legnagyobb p - és q -hatvány, amivel osztható. A $p^0 q^0 = 1$ differencián kívül nincs olyan sorozat, ami több blokkba is belemetsz, ugyanis ha $p^i q^j$ a sorozat differenciája, ahol $i > 0$ vagy $j > 0$, akkor $m' + np^i q^j \bmod pq = m'$. A blokkokat úgy készítjük el, hogy $n = m' + pqr$ esetén az $n - m' = pqr = p^i q^j r'$ alak alapján választjuk meg a koordinátáit, ahol $i, j \in \mathbb{N}$ maximális. Blokkonként színezünk úgy, hogy minden blokkban ha $m_{\mathcal{T}_3}(k)$ méretű éleket veszünk, akkor azok polikromatikusak. Tekintsük az $|M|(m_{\mathcal{T}_3}(k) - 1) + 1$ méretű éleket. Ha nem 1 differenciájú sorozatot veszünk, akkor azt az élt tartalmazza egy blokk, így jól lesz színezve. Ha 1 differenciájú sorozatot veszünk, akkor a skatulyaelv miatt mivel $|M|$ darab blokkba metsz bele, így valamelyikből $m_{\mathcal{T}_3}(k)$ darab csúcsot tartalmaz, emiatt az él polikromatikus lesz. $\square$

A 6. Tétel 3. pontjának bizonyítása. Az állítás bizonyításához azt fogjuk felhasználni, hogy $m_{\mathcal{T}_4}(k) = \infty$. Tetszőleges $T \in \mathcal{T}_4$ csúcsaihoz természetes számokat fogunk rendelni úgy, hogy az általuk meghatározott $A \in \mathcal{A}_{\{p_1^{j_1} p_2^{j_2} p_3^{j_3} : j_1, j_2, j_3 \in \mathbb{N}\}, \{0\}}$ hipergráfra a T éleinek megfelelő

számhalmazok A -beli élek legyenek. A 6. Tétel 2. pontjának bizonyítása alapján járunk el, $T = (S, E)$ pontjait indexeljük, ahol $S \subset \mathbb{R}^4$. Ebben az esetben négy koordináta szerint indexelünk: az első koordináta szerint növekvő sorrendben, a többi három tengely szerint csökkenő sorrendben. A megfeleltetés hasonló módon történik $s := (s_1, s_2, s_3, s_4) \in S$ esetén $\varphi(s) := p_1^{s_2} p_2^{s_3} p_3^{s_4} m(s_1)$. Ekkor ha elég nagy uniformitás mellett A -nak lenne jó színezése, akkor $\mathcal{T}_4$ -nak is lenne, ebből ellentmondást kapnánk, vagyis beláttuk az állítást. $\square$

A 7. Tétel 1. pontjának bizonyítása. A síkon fogunk blokkokat létrehozni a következő módon: Legyen $m \in M$ egy tetszőleges elem, és vegyük $m' = m \bmod t$ -t. Egy ilyen m' esetén a blokk azon számokat tartalmazza, melyeknek a t -vel való osztási maradéka m' . Egy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén, amire $n \bmod t = m'$, tekintsük az $n' = n - m'$ számot. Írjuk fel $n' = t^i r$ alakban, ahol $i \in \mathbb{N}$ maximális. Ekkor feleltessük meg n' -nek a síkon az $(1 - \frac{1}{n} + m', -i)$ koordinátájú pontot. Ez azt jelenti, hogy az x -tengely mentén lerakunk egymás mellé t darab egységnyi széles sávot, és ezekben egyenként ugyanazon a módon helyezzük el a pontokat, mint a lefelé végtelen téglalapok esetében, vagyis úgy, hogy az egy sávban lévő számok azonos maradékot adnak, és a pontok szintjét az alapján határozzuk meg, hogy az azonos sávban lévő számokból elvesszük a maradékot – ami azonos a sávon belül – és megnézzük, hogy mi a legnagyobb t -hatvány, amivel így osztható. Egy tetszőleges, lefelé végtelen tengelypárhuzamos téglalap magassága fogja megadni, hogy melyik a legfelső szint, amelyet tartalmaz, vagyis, hogy mely t -hatvány differenciájú sorozatot vesszük. A téglalap függőleges oldalainak koordinátája pedig azt adja meg, hogy a sorozat mettől meddig van megadva. Ez megfelelő lesz, hiszen az i . szint alatt található az $(i + 1)$. szint, amit a t^i differenciájú sorozat tartalmaz. Az 1 differenciájú sorozatokon kívül nincs olyan számtani sorozat, amit több blokkból kell kivágni lefelé végtelen tengelypárhuzamos téglalapokkal, így ha blokkonként színezzük k színnel, úgy, hogy a legalább $m_{\mathcal{B}}(k)$ méretű élek polikromatikusak legyenek, akkor $|M|(m_{\mathcal{B}}(k) - 1) + 1$ méretű élekre szorítkozva már minden él polikromatikus lesz, hiszen ha nem 1 differenciájú sorozatot veszünk, akkor valamely blokkból kimetszhető a sorozat, ez pedig polikromatikus lesz. Ha pedig 1 differenciájú sorozatot veszünk, akkor mind az $|M|$ blokkból egy lefelé végtelen téglalap metszi ki a sorozat megfelelő részét, így a skatulyaelv miatt valamelyik tartalmazni fog legalább $m_{\mathcal{B}}(k)$ darab elemet, így tartalmaz egy már polikromatikusán színezett élet. $\square$

A 7. Tétel 2. pontjának bizonyítása. Legyen $\mathcal{T}_{\text{fin}}$ azon hipergráfosztály, mely elemeinek csúcshalmaza egy véges, térbeli ponthalmaz, éleit pedig azon tengelypárhuzamos téglatestek határozzák meg, melyek az x -tengely szerint véges oldalhosszúságúak, az y - és z -tengely mentén pedig negatív irányba végtelenek.



6. ÁBRA

Megmutatjuk, hogy $m_{\mathcal{T}_{\text{fin}}}(k) = \infty$. Mivel a síkbeli tengelypárhuzamos téglalapok által meghatározott $\mathcal{R}$ hipergráfosztályra $m_{\mathcal{R}}(k) = \infty$, így elég megmutatnunk, hogy minden $H \in \mathcal{R}$ hipergráf csúcsai elhelyezhetők a térben úgy, hogy az éleknek megfelelő ponthalmazok a maximális indukált $\mathcal{T}_{\text{fin}}$ -beli hipergráfban is élek legyenek. Vegyünk egy ponthalmazt a síkon, és ezt a síkot helyezzük el a térben úgy, hogy az x -tengely körül elforgatjuk 45° -kal. Ekkor az eredeti sík tetszőleges tengelypárhuzamos téglalapjához van két irányban végtelen téglatest, ami az x -tengely irányában véges, és ebből a síkból pont ezt a téglalapot metszi ki (ld. 6. ábra), így valóban $m_{\mathcal{T}_{\text{fin}}}(k) = \infty$. Tetszőleges $T \in \mathcal{T}_{\text{fin}}$ csúcsaihoz természetes számokat fogunk rendelni úgy, hogy az általuk meghatározott $\mathcal{A}_{\{p^i q^j : i, j \in \mathbb{N}\}, \{0\}}$ hipergráfra a T éleinek megfelelő számhalmazok A -beli élek legyenek. Legyen $S \subseteq \mathbb{R}^3$ tetszőleges, és a $\varphi : S \rightarrow \mathbb{N}$ függvényt a 6. Tétel 2. pontjának 2. lépésének bizonyítása szerint definiáljuk: $\varphi(s) := p^{s_2} q^{s_3} m(s_1)$. Mivel a téglatestek az x -tengely irányában végesek, így a φ leképezés szerint véges hosszú számtani sorozatokat fognak meghatározni. $\square$

HIVATKOZÁSOK

- [1] S. Smorodinsky, Y. Yuditsky, Polychromatic Coloring for Half-Planes, J. Comb. Theory, Ser. A 119:146-154, 2012
<http://arxiv.org/abs/1006.3191>
- [2] A. Asinowski, J. Cardinal, N. Cohen, S. Collette, T. Hackl, M. Hoffmann, K. Knauer, S. Langerman, M. Lason, P. Micek, G. Rote, T. Ueckerdt, Coloring hypergraphs induced by dynamic point sets and bottomless rectangles, Algorithms and Data Structures, LNCS 8037:73-84, 2013
<http://arxiv.org/abs/1302.2426>
- [3] G. Aloupis, J. Cardinal, S. Collette, S. Imahori, M. Korman, S. Langerman, O. Schwartz, S. Smorodinsky, P. Taslakian, Colorful Strips, Graphs and Combinatorics 27:327-339, 2011
<http://arxiv.org/abs/0904.2115>
- [4] B. Keszegh, D. Pálvölgyi, More on Decomposing Coverings by Octants, Journal of Computational Geometry 6:300-315, 2015
<http://arxiv.org/abs/1503.01669>
- [5] J. Pach, D. Pálvölgyi, G. Tóth, Survey on Decomposition of Multiple Coverings, Bolyai Society Mathematical Studies 24:219-257, Springer-Verlag, 2014
<https://domotorp.web.elte.hu/cikkek/surveyfinal.pdf>
- [6] X. Chen, J. Pach, M. Szegedy, G. Tardos, Delaunay graphs of point sets in the plane with respect to axis-parallel rectangles, Random Struct. Algorithms, 34:11-23, 2009
<https://www.math.nyu.edu/~pach/publications/rectangle120406.pdf>
- [7] B. Keszegh, D. Pálvölgyi, An abstract approach to polychromatic coloring: shallow hitting sets in ABA-free hypergraphs and pseudohalfplanes, WG 2015, 266-280
<http://arxiv.org/abs/1410.0258>
- [8] B. Keszegh, D. Pálvölgyi, Proper Coloring of Geometric Hypergraphs, Discrete and Computational Geometry 62(3) (2019), 674-689
<http://arxiv.org/abs/1612.02158>

A szerzők adatai:

Bursics Balázs, ELTE matematikus MSc 2. évf., bursicsb@gmail.com

Csonka Bence, BME matematikus MSc 2. évf., slenhortag@gmail.com

Szepessy Luca, ELTE matematikus MSc 2. évf., szepessy.luca@gmail.com

Témavezető:

Keszegh Balázs, Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, tudományos főmunkatárs,
keszegh@renyi.hu

A dolgozat alapját képező kutatás a 2021-es REU program keretében valósult meg, Tóth Sára Hanna csapattársunkkal együtt.