

Az élpolitóp Ehrhart-polinomja

Imolay András*

2022. július 2.

Kivonat

Minden gráfhoz hozzá tudunk rendelni egy bizonyos módon egy politópot, amit élpolitópnak nevezünk, továbbá minden politóp esetén vizsgálhatjuk a hozzá rendelt Ehrhart-polinomot. Egy program segítségével számos gráfra meghatároztam az ilyen módon hozzárendelt polinomot, ami alapján sejtéseket fogalmaztam meg és bizonyítottam. Pontosán meghatároztam fák, páratlan hosszú körök, teljes gráfok és teljes páros gráfok esetén a polinomot, továbbá egyéb általános sejtéseket fogalmaztam meg.

1. Bevezetés

Szeretnék köszönetet mondani a témavezetőmnek, Csikvári Péternek a rengeteg segítségért.

Külön-külön a kombinatorikus polinomok és az Ehrhart-elmélet is egy nagyon vizsgált területe a matematikának, jelen pillanatban számos matematikus kutatja őket.

A kombinatorikus politópok általában gráfokat, néha egyéb kombinatorikai struktúrákat vizsgál úgy, hogy valamilyen módon politópokat rendel a struktúrához, és a politóp tulajdonságait vizsgálva állapít meg tulajdonságokat az eredeti struktúrának. Az Ehrhart-elmélet pedig politópokhoz egy bizonyos módon rendelt polinomokat vizsgál.

Ezek alapján logikusan vetődik fel a kérdés, hogy lehet-e őket együtt vizsgálni. Kapunk-e érdekes dolgokat, ha kombinatorikus politópok Ehrhart-polinomját vizsgáljuk? A válasz az, hogy természetesen igen, ám ez egy meglehetősen sok nyitott problémát tartalmazó téma. Emiatt egyre népszerűbb, manapság számos matematikus kutatja. Legtöbbször a szimmetrikus élpolitópot vizsgálják, ám ezzel szorosan összefügg az élpolitóppal, ami szintén fontos téma. Az egyik legjelentősebb cikk a témában [2]. Meghatározzák néhány gráf esetén az élpolitóp Ehrhart-polinomját, illetve sejtéseket fogalmaznak meg az élpolitóp és a szimmetrikus élpolitóp Ehrhart-polinomjának gyökeivel kapcsolatban.

A kutatásaim során azzal foglalkozom, hogy megpróbáljam áttekinteni a témában eddig elért eredményeket, továbbá felfedezni ezt a területet, új eredményeket megsejteni, bizonyítani.

*ELTE matematikus szak, MSc 1. éves, E-mail: imolay.andras@gmail.com, Témavezető: Csikvári Péter, Számítógéptudományi Tanszék. Az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-20-1 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült. Továbbá az NKFIH KH130371 és ÚNKP-21-2 kódszámú támogatásban részesülök.

Részletesebben kifejtve ebben a dolgozatban arról írok, hogy egy konkrét politópot, az úgynevezett élpolitópot rendelem a gráfokhoz, és ennek vizsgálom különböző gráfokra az Ehrhart-polinomját. Pontosán meghatározom a polinomot fák, páratlan hosszú körök, teljes gráfok és teljes páros gráfok esetén. Emellett további érdekes megfigyeléseket, sejtéseket tesztek általában erről a polinomról és a gyökeiről. A [4] könyvben teljes gráfra, míg az [3] cikkben teljes páros gráf esetén már meghatározták az élpolitóp Ehrhart-polinomját, ám mindkét cikk bonyolult, algebrai módszereket használ. Elemi, kombinatorikai bizonyítást adok erre a két eredményre. Ezt úgy teszem, hogy kidolgozok egy módszert, amivel bizonyos esetekben meg lehet határozni tetszőleges pontról, hogy belesik-e az élpolitópba. Páros gráfok esetén ez teljes általánosságban működik, egy Hall-feltételhez hasonló eredményt bizonyítok, amely egyéb páros gráfokra is segíthet a keresett polinom meghatározásában.

Az Ehrhart-elmélet alapjairól az [1] könyvből lehet tanulni, amiben részletesen le vannak írva egyben az alapok, és a mélyebb elmélet is, továbbá tartalmaz kutatási eredményeket, nyitott kérdéseket

Adott egy n csúcsú G gráf. Az élpolitópot úgy definiálom, hogy $\mathbb{R}^n$ -ben a G gráf minden csúcsához hozzárendelem az egyik báziselemet, majd minden (i, j) él esetén tekintem az $e_i + e_j$ pontot, és az így kapott pontok konvex burka az élpolitóp. Ezt a politópot P_G -vel jelölöm.

2. Eredmények

Ahhoz, hogy sejtéseket fogalmazzak meg, első lépésként a témavezetőm segítségével írtam egy programot sage-ben, mely kiszámolja egy gráfhoz rendelt élpolitóp Ehrhart-polinomját:

```
t = PolynomialRing(RationalField(), 't').gen()
g=graphs.CompleteBipartiteGraph(3,4)
m = g.size()
n = g.order()
E = g.edges()
L = []

for e in E:
    i = e[0]
    j = e[1]
    L0 = [0] * n
    L0[i] = 1
    L0[j] = 1
    L.append(L0)
P=Polyhedron(vertices=L)
P.ehrhart_polynomial().factor()
```

Ez a konkrét program a $K_{3,4}$ teljes páros gráfhoz tartozó élpolitópnak számolja ki az Ehrhart-polinomját, ráadásul ki is emeli a gyökeit. a gyökök vizsgálata is egy fontos kérdés a témakörben. Természetesen más gráfokra is működik, a program 2. sorában lehet módosítani a kívánt gráfot.

Ennek segítségével már ki tudtam számolni számos konkrét gráfra a polinomot, és meg tudtam fogalmazni sejtéseket, amiből sokat be is láttam, ezeket vázolom a továbbiakban.

Elkezdtem vizsgálni gráf osztályokra, hogy mi lesz az élpolitóp Ehrhart-polinomja, amit $i(P, t)$ -vel jelölök egy P politóp esetén.

2.1. Állítás. *Egy n csúcsú $G = (V, E)$ fagráf esetén az Ehrhart-polinom*

$$i(P_G, t) = \frac{1}{(n-2)!} \prod_{i=1}^{n-2} (t+i)$$

Bizonyítás. Látható, hogy $i(P_G, t)$ foka $n-2$, mivel P_G -t $n-1$ darab pont feszíti, amik triviálisan lineárisan függetlenek, így P_G $n-2$ dimenziós. Az Ehrhart-Macdonald reciprocitás szerint, illetve felhasználva, hogy $i(P_G, 0) = 1$ elég azt igazolni, hogy ha $k < n-1$ pozitív egész akkor a kP_G nagyított politópnak nincs belső pontja.

Ezt indirekten bizonyítjuk. Az indirekt feltevés azt jelenti, hogy valamilyen $k < n-1$ pozitív egész esetén létezik belső pont, azaz valamilyen pozitív együtthatós konvex kombinációja a csúcsoknak egész. Legyen a_e pozitív konstans minden $e \in E$ esetén úgy, hogy $\sum_{e \in E} a_e = 1$ és

$$v = \sum_{(i,j) \in E} a_{(i,j)} k(e_i + e_j)$$

vektor egész. Belátom, hogy ekkor minden a_e együttható $\frac{c}{k}$ alakú ahol c pozitív egész. Ezt indukcióval bizonyítjuk, kintről befele, levelek melletti élektől kezdjük, majd amelyik élekre már beláttuk azokat elhagyjuk, és belátjuk a kapott, kisebb fagráf egy levele melletti élre is, ezt is elhagyjuk, és ezt csináljuk addig, amíg minden élre nem igazoltuk az állítást.

Tekintsünk egy (i, j) élet ahol a j csúcs levél. Ekkor v -ben az e_j vektor $a_{(i,j)}k$ együtthatóval jelenik meg, aminek egésznek kell lennie, így $a_{(i,j)}$ tényleg $\frac{c}{k}$ alakú, ahogy akartuk.

Tegyük most fel, hogy az élekhez tartozó együtthatók egy részhalmazára már beláttuk az állítást, az ezekhez tartozó éleket elhagytuk a gráfból, és egy G' fagráf maradt vissza, aminek az élei pontosan azok, amikhez tartozó együtthatókra még nem láttuk be az állítást. Vegyünk most egy olyan (i, j) élet, ami G' -ben van, és j levél G' -ben. Ekkor e_j együtthatója v -ben $a_{(i,j)}k + d$ alakú, ahol d egész, mivel a többi, nem G' -beli e élhez tartozó ka_e alakú összeadandó esetén már beláttuk, hogy a_e az állított alakú, azaz ez egy egész szám, így az ilyenek összege is. Ebből viszont az következik, hogy $a_{(i,j)}k$ is egész, és pont ezt akartuk bizonyítani.

Így

$$1 = \sum_{e \in E} a_e \geq \sum_{e \in E} \frac{1}{k} = \frac{n-1}{k}$$

ami ellentmond annak, hogy $k < n-1$, ami igazolja az állítást. $\square$

Nézzük most meg mi a helyzet körök esetén:

2.2. Állítás. *Ha $G = (V, E)$ egy n csúcsú páratlan hosszú kör akkor*

$$i(P_G, t) = \frac{1}{(n-1)!} \prod_{i=1}^{n-1} (t+i)$$

Bizonyítás. Ennek a bizonyításának is ugyanaz az ötlete, mint az előző állításnak. Könnyű ellenőrizni, hogy a csúcsok lineárisan függetlenek, így $n - 1$ dimenziós a politóp, azaz tényleg $n - 1$ a polinom fok, így megint elég annyit belátni, hogy ha $k < n$ és k -szorosára növeljük a politópot, akkor nem lesz belső pontja. Megint megfogalmazhatjuk konvex kombinációval: Ha $k < n$ akkor nem léteznek olyan $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitív valósak, melyek összege 1, és egy $b \in \mathbb{Z}^n$ egész vektor, hogy az élekhez tartozó csúcsok k -szorosait az a_i együtthatókkal súlyozva pont a b vektort kapjuk.

Kicsit átalakítva (a ka_i -k helyett a_i -t írva), és nem csak páratlanra megkérdezve a következő feladatot kapjuk:

2.3. Feladat. Adott egy $n \geq 2$ egész szám. Melyik az a legkisebb k pozitív egész szám, melyre léteznek $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitív valós és $b_1, b_2, \dots, b_n$ pozitív egész számok úgy, hogy a következő feltételek teljesülnek:

- $\sum_{i=1}^n b_i = 2k$,
- minden $1 \leq i \leq n - 1$ esetén $a_i + a_{i+1} = b_i$ és $a_n + a_1 = b_n$.

Azért fogalmaztam át ilyen alakúvá, mert így már semmi egyetemi tudást igénylő dolog nincs ebben a feladatban. Egy elemi algebra feladatot kaptunk, amit javasoltam a Dürer versenyre, és kicsit módosított formában ki is lett tűzve a 2020-2021-es döntő E kategóriájában. Emaitt ennek a feladatnak a bizonyítását írom le, amiből triviálisan az eredeti problémánk állítása is következik.

Bizonyítás. A megoldás során az indexeket mindig modulo n értelmezzük, azaz $a_{n+i} = a_i$ és $b_{n+i} = b_i$ minden i -re.

Két esetet vizsgálunk n paritása szerint. Ha n páros akkor a megoldás $k = \frac{n}{2}$. Ennél kevesebb nem lehet, mert

$$n \leq \sum_{i=1}^n b_i = 2k,$$

és erre van konstrukció, legyen minden $b_i = 1$ és minden $a_i = \frac{1}{2}$, ezek világos, hogy minden feltételt kielégítenek.

Az érdekesebb eset ha n páratlan. Azt állítjuk, hogy ekkor $k = n$. Erre megint nagyon egyszerű konstrukciót adni: Legyen minden $1 \leq i \leq n$ esetén $b_i = 2$ és $a_i = 1$, ez nyilván megfelelő.

Tegyük fel hogy valamilyen k -ra van egy jó konstrukció, igazoljuk, hogy $k \geq n$. Indukcióval igazolom, hogy $2 \leq l \leq n + 1$ esetén

$$a_l = (-1)^{l-1} \cdot a_1 + \sum_{i=1}^{l-1} (-1)^{l-i-1} \cdot b_i.$$

Ha megértjük mit jelent ez az elsőre bonyolultnak tűnő kifejezés akkor a bizonyítás már egyszerű. A kezdőlépés $l = 2$ esetén az $a_2 = b_1 - a_1$ egyenlőséget állítja, ami a feladat feltételei szerint igaz. Tegyük fel, hogy l esetén igazoltuk az állítást, lássuk be $l + 1$ esetén:

$$a_{l+1} = b_l - a_l = b_l - (-1)^{l-1} \cdot a_1 + \sum_{i=1}^{l-1} (-1)^{l-i-1} \cdot b_i = (-1)^l \cdot a_1 + \sum_{i=1}^l (-1)^{l-i} \cdot b_i$$

és pont ezt állítottuk. Így $l = n + 1$ esetén az

$$a_1 = a_{n+1} = (-1)^n \cdot a_1 + \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \cdot b_i$$

egyenlőséget kapjuk. Felhasználva, hogy n páratlan

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \cdot b_i}{2}.$$

A feltételünk szerint $a_1 > 0$, így a $\sum_{i=1}^n b_i = 2k$ felhasználásával

$$k < k + a_1 = \frac{\sum_{i=1}^n b_i + \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \cdot b_i}{2} = \sum_{i=1}^{(n+1)/2} b_{2i-1},$$

és mivel a b_i -k egész számok, így ez azt jelenti, hogy a páratlan indexűek összege legalább $k + 1$.

Ugyanez a levezetés megcsinálható a_1 helyett minden másik a_i -vel is, amiből a ciklikusság miatt azt fogjuk kapni, hogy b_i -től kezdve b_{n+i-1} -ig minden második tagot összeadva legalább $k + 1$ lesz az eredmény.

Ezt minden a_i -re megcsinálva kapunk n darab egyenlőtlenséget, adjuk őket össze. Az egyik oldalon $n(k + 1)$ lesz, míg a másik oldalon n darab olyan dolgot adtunk össze, ami mindegyik $\frac{n+1}{2}$ tagot tartalmaz, és szimmetria miatt összesen minden b_i -t ugyanannyiszor adtuk össze, így az összeg

$$n \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i = \frac{n+1}{2} \cdot 2k = k(n+1).$$

Tehát az n darab egyenlőtlenség összeadásával a következőt kapjuk: $n(k+1) \leq k(n+1)$ amiből kn -t levonva a bizonyítandó állítást kapjuk. $\square$

$\square$

Következő kérdés, hogy mi van páros körök esetén? Ott látható, hogy minden párosadik élhez tartozó pontot és minden páratlanadik élhez tartozó pontot összeadva mindkét esetben pont a $\sum_{i=1}^n e_i$, azaz a bázisvektorok összegét kapjuk, így ezek nem lineárisan függetlenek, így legfeljebb $n - 2$ az Ehrhart-polinom foka, és könnyen ellenőrizhető, hogy tényleg mindig annyi lesz. Ebben az esetben nem tudtam pontosan meghatározni a polinomot, csak egy sejtést fogalmaztam meg:

2.4. Sejtés. Ha $G = (V, E)$ egy $2n$ csúcsú kör akkor az $i(P_G, t)$ Ehrhart-polinom valós gyökei a $-1, -2, \dots, -k + 1$ és az összes többi gyöke a $-\frac{n}{2} + x \cdot i$ alakú egyenesre esik a komplex síkon. Emellett a polinom főegyütthatója (azaz a politóp térfogata) $\frac{(2n-2)!}{n}$.

A fák és páratlan körök esetben ugyanolyan alakú volt az Ehrhart-polinom, így felmerül a kérdés, hogy milyen gráfok esetén teljesül még ez. Ezt válaszolja meg a következő állítás:

2.5. Állítás. Legyen G összefüggő gráf. Ekkor $\deg(i(P_G, t)) = k$ és a gyökei a $-1, -2, \dots, -k$ számok akkor és csak akkor teljesül ha G fagráf vagy páratlan kör.

Bizonyítás. Ekkor az Ehrhart-polinom

$$i(P_G, t) = \frac{1}{k!} \prod_{i=1}^k (t + i)$$

mivel tudjuk, hogy $i(P_G, 0) = 1$, amiből megkapjuk a főegyütthatót. Ismert, hogy minden k -dimenziós politópnak legalább $\frac{1}{k!}$ a térfogata, és ha nem szimplex akkor nagyobb, mivel akkor kisebb szimplexekre bontható. Ha az élekhez tartozó $e_i + e_j$ alakú pontok nem affin függetlenek akkor vagy nem szimplexet kapunk (ha több, mint $k + 1$ pont van a konvex burkán a politópnak) vagy van egész pontja a szimplexnek ami nem valamelyik csúcsa, de egyik esetben sem lehet minimális a térfogata. Így ha belátjuk, hogy az élekhez rendelt vektorok csak fagrág vagy páratlan hosszú kör esetén lesznek affin függetlenek akkor kész vagyunk.

A tér dimenziója n , és minden vizsgált vektor a $\sum_{i=1}^n x_i = 2$ affin hipersíkba esik, így legfeljebb $n - 1$ dimenziós a politóp, azaz legfeljebb n darab affin független pontunk lehet, így legfeljebb n élű a gráf. Ez pont azt jelenti, hogy fa vagy kör, és ezeket az eseteket már megvizsgáltuk. $\square$

Vizsgáljuk tovább az $i(P_G, t)$ polinomot egyéb gráfcsaládokra.

2.6. Állítás. *Ha $G = K_n$ az n csúcsú teljes gráf ($n \geq 3$) akkor*

$$i(P_G, t) = \binom{2t + n - 1}{n - 1} - n \binom{t + n - 2}{n - 1}$$

ahol $\binom{m}{k}$ a binomiális együtthatót jelöli.

Bizonyítás. Vegyük a tP_G politópot, azaz aminek a csúcsai az összes n hosszú vektor aminek két koordinátája t , az összes többi 0. Legyen H ezen vektorok halmaza, továbbá jelölje $H_i \subset H$ azoknak a halmazát, ahol az i . koordináta nem 0. Azon pontok esnek a politóp belsejébe, amik kifejezhetők H -beli vektorok konvex kombinációjaként, az ilyen egész rácpontokat akarjuk megszámolni.

Legyen tehát $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, vizsgáljuk meg, hogy ez mikor esik a politópba. Az összes H -beli vektor a $\sum_{i=1}^n x_i = 2t$ hipersíkba esik, így a teljes politóp, azaz ha $a \in P_G$ akkor $\sum_{i=1}^n x_i = 2t$. Emellett minden i -re és $v \in H$ vektorra $0 \leq v_i \leq t$, így ez H -beliek konvex kombinációira is igaz, tehát minden i -re $0 \leq a_i \leq t$, különben $a \notin P_G$. Azt állítjuk, hogy ez az összes feltétel.

2.7. Lemma. *Ha $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\sum_{i=1}^n a_i = 2t$ és $0 \leq a_i \leq t$ akkor $a \in P_G$.*

Bizonyítás. Nevezzünk feles tulajdonságúnak egy $w \in \mathbb{R}^n$ vektort, ha $2 \cdot \max(w_1, w_2, \dots, w_n) \leq \sum_{i=1}^n w_i$. A feltétel szerint a feles vektor. Legyen továbbá a w vektor élesen feles, ha egyenlőség teljesül, azaz $2 \cdot \max(w_1, w_2, \dots, w_n) = \sum_{i=1}^n w_i$

Csináljuk a következő algoritmust. Induljunk ki a $b = a$ vektorból és a konstans $s(v) = 0$ súlyokból minden $v \in H$ élen. Legyen egy lépés a következő:

Legyenek i és j olyan indexek, melyekre b_i és b_j maximális (azaz minden $k \neq i, j$ esetén $b_k \leq b_i$ és $b_k \leq b_j$). Legyen x az a legnagyobb érték, melyre ha vesszük a $b' = (b'_1, b'_2, \dots, b'_n)$ vektort amit úgy definiálunk, hogy

$$b'_k = \begin{cases} b_k & \text{ha } k \neq i \text{ és } k \neq j \\ b_k - x & \text{különben} \end{cases}$$

akkor b' feles tulajdonságú. Világos, hogy ilyen x mindig létezik, mert ahogy x tart végtelenhez úgy a maximum egy idő után nem változik, míg az összeg tart mínusz végtelenhez. Emellett ha a kiinduló b vektor feles akkor x nemnegatív.

Legyen most $y = \min(b_i, b_j, x)$. Ekkor növeljük az ij élhez tartozó $v \in H$ vektor (azaz aminek az i . és j . koordinátája nem 0) súlyát, $s(v)$ -t $\frac{y}{t}$ -vel, és csökkentjük a b vektor i . és j . koordinátáját y -nal. Ez egy lépés, ezután folytassuk a következő lépéssel, az újonnan kapott b vektorral és súlyokkal.

Szavakkal megfogalmazva egy lépés abból áll, hogy a két legnagyobb koordinátát addig csökkentjük amíg vagy nem lesz valamelyik 0, vagy nem romlik el a feles tulajdonság. Vizsgáljuk meg, hogy mik teljesülnek minden lépés után:

A kiinduló a vektor feles és minden koordinátája nemnegatív, így világos, hogy ez minden lépés után is teljesülni fog a b vektorra.

A kiinduló súlyok mind nemnegatívak, és az előző tulajdonság miatt minden lépésnél y nemnegatív, így mindig csak nemnegatív számokat adunk a súlyokhoz, azaz minden lépés után $s(v) \geq 0$ minden $v \in H$ esetén.

Továbbá ha c az a vektor melyre $c_i = \sum_{v \in H_i} ts(v)$ akkor $b + c = a$. Ez is világos, eleinte teljesül, és minden lépésben úgy változtatunk, hogy ne romoljon el.

Azt állítjuk, hogy véges sok lépésen belül eljutunk a $b = 0$ állapotba, azaz ahol minden $b_i = 0$. Vizsgáljuk meg ugyanis, hogy két lehetőségünk van egy lépésnél:

$$y = \min(b_i, b_j) \quad \text{vagy} \quad y = x.$$

Ha az első, akkor a lépés utána a kisebb koordináta 0 lesz. Amennyiben már csak két nemnulla koordináta van, akkor a feles tulajdonság miatt egyenlőnek kell lenniük, így könnyen látható, hogy ekkor a lépés után mindkét koordináta 0 lesz, tehát $b = 0$ -hoz érkezünk. Így ha egyik lépésnél se teljesül a második eset, azaz az $y = x$, akkor legfeljebb $n - 1$ lépés után minden koordináta kinullázódik, pont ahogy akartuk.

Ha valamelyik lépésben $y = x$ az azt jelenti, hogy a feles tulajdonság romlana amennyiben y -t tovább növelnénk, tehát a lépés után a feles a tulajdonság éles, azaz a kapott b vektor éles feles, legyen $b_k = \max(b_1, b_2, \dots, b_n)$, ekkor $b_k = \sum_{i=1}^n b_i$. Azt állítom, hogy innentől minden lépés után megmarad az éles feles tulajdonsága b -nek, és minden lépésnél legalább 1 koordináta kinullázódik. Legyen ugyanis b_j a 2. legnagyobb tag b_k után. Ekkor $y = b_j$ lesz, mivel $b_j = \min(b_j, b_k)$ és ennyivel csökkentve b_j -t és b_k -t megmarad a feles tulajdonság, sőt az éles felesség is. Legyen ugyanis b' az a vektor amit b -ből úgy kapunk, b_k -t és b_j -t b_j -vel csökkentjük. Ekkor

$$2b'_k = 2 \cdot (b_k - b_j) = \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) - 2b_j = \sum_{i=1}^n b'_i$$

és mivel egyik koordináta sem negatív így minden másik b_l esetén

$$b'_l \leq \left(\sum_{i=1}^n b'_i \right) - b'_k = b'_k$$

így még mindig b'_k a legnagyobb koordináta, azaz tényleg megmaradt az éles felesség. Tehát minden lépésben legalább egy koordináta 0 lesz, ami azt jeletni, hogy ebben az esetben is véges sok lépésen belül a $b = 0$ vektorhoz érünk.

Tehát az algoritmust elvégezve kapunk egy $s(v)$ súlyt minden $v \in H$ -ra. Azt állítjuk, hogy ezekkel a súlyokkal vett konvex kombinációja a $v \in H$ vektoroknak pont a -t adják.

Ezt lényegében már ellenőriztük: Vegyük a $c = \sum_{v \in H} s(v) \cdot v$ vektort, ekkor $c_i = \sum_{v \in H_i} ts(v)$, és korábban láttuk, hogy minden lépés után az így kapott c vektorra $c + b = a$, ám most $b = 0$, így $c = a$.

Még azt kell megnézni, hogy ez tényleg konvex kombináció, ám ez is világos, azt már láttuk, hogy $s(v) \geq 0$ minden súly esetén, és minden $v \in H$ tagjainak az összege $2t$, így

$$\sum_{v \in H} s(v) = \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{2t} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{2t} = 1.$$

Ezzel a lemmát igazoltuk. $\square$

Tehát egy kombinatorikai problémánk maradt vissza. A lemma feltételeit kielégítő a vektorokat kell leszámolni. Először számoljuk azt az esetet amikor a 2. feltétel, nincs, azaz a következő jól ismert kombinatorikai problémát:

2.8. Lemma. *Azon $a \in \mathbb{Z}^n$ nemnegatív vektorok száma, melyekre $\sum_{i=1}^n a_i = k$ pontosan*

$$\binom{n+k-1}{n-1}.$$

Bizonyítás. Képzeld ezt úgy el, hogy k korongot akarunk n helyre szétosztani. Rakjunk be minden csoportba alaphoz egy korongot, azaz ugyanaz a feladat, ha $n+k$ korongot akarunk n csoportba osztani úgy, hogy minden csoportba legalább 1 korong kerül. Ezt elképzelhetjük úgy, hogy egy sorban van az $n+k$ korong, és bármely kettő közt vághatunk egyet, összesen $n-1$ vágást véve. Ez n részre osztja az $n+k$ korongot, az első részbe eső korongok száma legyen $a_1 + 1$, a másodikban $a_2 + 1$, ..., így tovább, az utolsóban $a_n + 1$. Azaz a korongok szétválasztásához rendeltünk egy a feltételeket kielégítő a vektort, és visszafelé is megy, minden a vektorhoz tudunk egy korong osztást rendelni úgy, hogy a koordinátákhoz 1-t adunk, majd a megfelelő helyeken vágunk. Világos, hogy ez egy bijekció, és a korongos feladatot tényleg $\binom{n+k-1}{n-1}$ -féleképpen lehet megcsinálni, mivel $n+k$ korongot akarunk szétválasztani, azaz $n+k-1$ helyen vághatunk, és $n-1$ vágást csinálunk. $\square$

Ezen kívül még szükségünk lesz az úgynevezett zokni azonosságra:

2.9. Lemma. *Tetszőleges n, k pozitív egészek esetén*

$$\sum_{i=0}^k \binom{n+i}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}$$

Bizonyítás. k szerinti teljes indukcióval igazoljuk az állítást. $k=0$ esetén nyilván igaz, tegyük most fel, hogy k -ra már beláttuk, lássuk be $(k+1)$ -re:

$$\sum_{i=0}^{k+1} \binom{n+i}{n} = \sum_{i=0}^k \binom{n+i}{n} + \binom{n+k+1}{n} = \binom{n+k+1}{n+1} + \binom{n+k+1}{n} = \binom{n+k+2}{n+1}$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük. $\square$

Ezeknek a segítségével már le tudjuk számolni a keresett értéket. A Lemma 2.8 miatt $\binom{n+2t-1}{n-1}$ nemnegatív egész vektor van melyeknek a koordinátáinak az összege $2t$. Ebből le kell vonnunk az olyan $a \in \mathbb{Z}^n$ nemnegatív vektorokat melyekre valamelyik koordináta

nagyobb, mint t . Ha valamelyik a_i koordináta nagyobb, mint t , akkor a többi összege $2t - a_i$, és ezt akarjuk elosztani $n - 1$ részre, amit megint Lemma 2.8-at használva látjuk, hogy $\binom{2t-a_i+n-2}{n-2}$ -féleképpen tudunk megtenni. Az i indexet, hogy hol lesz a nagy tag n -féleképpen választhatjuk, és mindig legfeljebb egy t -nél nagyobb tag lesz, így minden rossz vektort pont egyszer fogunk levonni, és ekkor $t + 1 \leq a_i \leq 2t$, így

$$n \cdot \sum_{k=0}^{t-1} \binom{n+k-2}{k-2}$$

vektort akarunk levonni az összesből. Lemma 2.9-t, azaz a zokni azonosságot is használva

$$i(P_G, t) = \binom{n+2t-1}{n-1} - n \cdot \sum_{k=0}^{t-1} \binom{n+k-2}{k-2} = \binom{n+2t-1}{n-1} - n \cdot \binom{n+t-2}{n-1}.$$

□

Vizsgáljuk meg ezek után, hogy mi a helyzet teljes páros gráfok esetén. Érdekes módon ez sokkal egyszerűbb, mint a teljes gráf esete volt.

2.10. Állítás. *Legyen $G = K_{n,m}$ teljes páros gráf. Ekkor*

$$i(P_G, t) = \frac{1}{(n-1)!(m-1)!} \prod_{i=1}^{n-1} (t+i) \prod_{j=1}^{m-1} (t+j) = \binom{t+n-1}{n-1} \binom{t+m-1}{m-1}$$

Bizonyítás. Megint a teljes gráf esetéhez hasonlóan konkrétan leszámoljuk az egész pontokat a tP_G politópban. Így logikusan az Állítás 2.6 jelöléseihez hasonlókat használunk. Most $\mathbb{R}^{n+m}$ -ben vagyunk, tartozzon az első n koordináta az első osztályához a páros gráfnak, a többi m a másikkhoz. Így H -ban azok a v vektorok vannak, melyek pontosan 1 darab nem 0 koordinátával rendelkeznek az első n helyen, és 1 darab nem 0 koordinátával az utolsó m helyen, és ez a két nem nulla tag éppen t . Az a kérdés, hogy ilyenek konvex kombinációjaként hány egész rácpont keverhető ki.

2.11. Lemma. *Egy $a = (a_1, a_2, \dots, a_{n+m}) \in \mathbb{Z}^n$ vektor esetén $a \in tP_G$ pontosan akkor, ha a nemnegatív, és*

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=n+1}^{n+m} a_j = t.$$

Bizonyítás. Világos, hogy ezek szükséges feltételek, mivel nemnegatív vektorok konvex kombinációja nemnegatív, és minden $v \in H$ vektorra

$$\sum_{i=1}^n v_i = \sum_{j=n+1}^{n+m} v_j = t,$$

így a konvex kombinációikra is.

A teljes gráfhoz hasonlóan bizonyítjuk, hogy elégségesek is ezek a feltételek, azaz legyen $b = a$ a kiinduláskor, $s(v) = 0$ súlyozás minden $v \in H$ esetén és egy lépésben most azt csináljuk, hogy választunk egy $1 \leq i \leq n$ és egy $n+1 \leq j \leq n+m$ indexet amikre $b_i \neq 0$ és $b_j \neq 0$, majd mindkettőt $\min(b_i, b_j)$ -vel csökkentjük, és az ij élhez tartozó v vektor $s(v)$ súlyát $\frac{\min(b_i, b_j)}{t}$ -vel növeljük.

Kezdetben b és minden $s(v)$ súly nemnegatív, $c = \sum_{v \in H} s(v) \cdot v$ vektort definiálva $b + c = a$, és

$$\sum_{i=1}^n b_i = \sum_{j=n+1}^{n+m} b_j,$$

könnyű látni, hogy a lépések ezeket a tulajdonságokat nem rontják el.

Minden lépés után legalább 1 koordinátája b -nek nulla lesz ami addig pozitív volt, így véges sok lépésen belül a teljes vektor 0 lesz, vegyük ekkor a $c = \sum_{v \in H} s(v) \cdot v$ vektort, azt állítjuk, hogy ez egy konvex kombinációs felírása az a vektornak.

Ez azért igaz, mert láttuk, hogy $c = a - b = a$, minden $s(v) \geq 0$, és minden $v \in H$ tagjainak az összege $2t$, így

$$\sum_{v \in H} s(v) = \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{2t} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{2t} = 1,$$

így ez tényleg konvex kombináció. $\square$

Tehát már csak azt kell megszámolni, hogy mennyi a vektor van ami kielégíti a lemma feltételeit. Ez pedig nagyon egyszerű. Lemma 2.8 szerint az első n koordinátát $\binom{t+n-1}{n-1}$ féleképpen választhatjuk, az utolsó m -t $\binom{t+m-1}{m-1}$ -féleképpen, ezek szorzata adja a megfelelő vektorok számát, ezzel igazoltuk az állítást. $\square$

A Lemma 2.11 állítását tovább lehet általánosítani tetszőleges páros gráf esetén, és valami nagyon hasonlót kapunk, mint a Hall-feltétel, ami arról nyilatkozik, hogy mikor van teljes párosítás egy páros gráfban.

2.12. Lemma. *Legyen $G = (A, B, E)$ páros gráf, és jelölje N_C egy $C \subset A \cup B$ csúcs-halmaz szomszédainak a halmazát G -ben. Feleltessük meg G csúcsait az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmazzal. Ekkor $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^n$ és t pozitív egész esetén $v \in tP_G$ pontosan akkor, ha v nemnegatív és minden $A' \subset A$ és $B' \subset B$ esetén*

$$\sum_{a \in A'} v_a \leq \sum_{b \in N_{A'}} v_b \quad \text{és} \quad \sum_{b \in B'} v_b \leq \sum_{a \in N_{B'}} v_a.$$

Másképpen ezt úgy is lehet fogalmazni, hogy ha veszem azt a gráfot, hogy minden $u \in A \cup B$ csúcsból veszek v_u példányt, és két csúcs (mondjuk u -nak és w -nek egy-egy példánya) akkor van összekötve ha $uw \in E$, akkor az így kapott gráfban teljesül a Hall-feltétel, ami pontosan akkor van, ha van benne teljes párosítás.

Bizonyítás. Az előző állításokhoz hasonlóan bizonyítható. Ha van a csúcs sokszorozással kapott gráfban M teljes párosítás, akkor a politóp M -hez tartozó csúcsaira egyenlő súlyokat rakva 1 összeggel, éppen a kívánt pontot keverjük ki.

Megfordítva, ha valahol sérül a Hall-feltétel, akkor világos, hogy nem lehet megfelelő súlyozást találni. $\square$

3. Összegzés és egy nyitott kérdés

Számos gráf esetén meg tudtuk határozni a pontos Ehrhart-polinomot, és hasznos eredményeket bizonyítottunk azzal kapcsolatban, hogy egy pont mikor esik bele egy politópba. Reményeink szerint ennek mélyebb megértésével más, nagy gráfcsaládok esetén is meg tudjuk majd határozni a keresett Ehrhart-polinomot.

A dolgozatot egy sejtéssel zárjuk. Minden eddig fentebb vizsgált gráf esetén, és az összes többi gráfra amire kiszámoltam a hozzá rendelt polinomot igaz volt, hogy a hozzárendelt polinom stabil, azaz minden gyöke a bal, nyílt félsíkba esik a komplex síkon, máshogy fogalmazva minden gyök valós része negatív. A stabilitás egy nagyon erős feltétel, stabil polinomok a matematika számos területén feltűnnek. Ezek alapján a következő sejtéssel zárom a dolgozatot.

3.1. Sejtés. Minden G gráf esetén $i(P_G, t)$ stabil polinom.

Hivatkozások

- [1] Matthias Beck and Sinai Robins. *Computing the continuous discretely*, volume 61. Springer, 2007.
- [2] Tetsushi Matsui, Akihiro Higashitani, Yuuki Nagazawa, Hidefumi Ohsugi, and Takayuki Hibi. Roots of ehrhart polynomials arising from graphs. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 34(4):721–749, 2011.
- [3] Hidefumi Ohsugi and Takayuki Hibi. Compressed polytopes, initial ideals and complete multipartite graphs. *Illinois Journal of Mathematics*, 44(2):391–406, 2000.
- [4] Bernd Sturmfels. *Grobner bases and convex polytopes*, volume 8. American Mathematical Soc., 1996.