

Alpern-féle keresési játék és változatai

Jánosik Áron, Miklós Csenge, Simon Dániel Gábor, Zólmoy Kristóf

Témavezetők: Lenger Dániel Antal, Pálvölgyi Dömötör

1. Bevezetés

Az Alpern's Caching Game nevű játékban egy mókusz n lyukba elás d darab mogyorót. Összesen legfeljebb 1 egység mélyre áshat. Egy lyukba több mogyorót is rejthet, akár különböző mélységekbe is, de legfeljebb olyan mélyre, mint amennyit leásott az adott lyukban. Ezután mi összesen legfeljebb k egységnyi ásva szeretnénk megtalálni az összes mogyorót. Ásás közben, ha egy mogyorót felfedünk, akkor ezt megtaláltnak nyilvánítjuk, és ez is befolyásolhatja a stratégiánkat. Ha minden mogyorót megtalálunk, mi nyerünk, ha pedig legalább egy mogyoró rejtve marad, akkor a mókusz.

1.1. Megjegyzés. Ha $k < 1$, akkor nem nyerhetünk, mert a mókusz 1 mélységbe rejtheti az összes mogyorót valamelyik lyukba, ezt nem tudjuk megtalálni, és $k \geq n$ esetén mindig tudunk nyerni, mert minden lyukban leáshatunk 1 mélységbe, és ekkor az összes mogyorót megtaláljuk, mert minden mogyoró legfeljebb 1 mélységben van valamelyik lyukban.

Ez a feladat először Alpern, Fokkink, Lidbetter és Clayton cikkében [1] merült fel. A témában ezt követően további cikkek születtek: [2, 3, 4, 5].

A Multiple Caching Game a fentiek egy diszkrét változata, melyet Pálvölgyi vezetett be [5] Csóka cikkének [3] módszere alapján. Ebben a játékban a mókusz n lyukba elrejt d db mogyorót, és egy lyukba többet is rejthet. Mi a lehető legnagyobb valószínűséggel szeretnénk megtalálni az összes mogyorót úgy, hogy egy lépésben egyszerre legfeljebb¹ k lyukra kérdezhetünk rá, és ha a megtippelt lyukak közül legalább egyben van mogyoró, akkor a mókusz ezek közül pontosan egyet nekünk ad a saját stratégiája szerint, ha nincs, akkor a mókusz nyer. Mi akkor nyerünk, ha minden mogyorót megtalálunk.

1.2. Definíció. Az Alpern's Caching Game értéke az a $v_A(n, d, k)$ valószínűség, amellyel nyerünk, ha a kereső (mi) és a rejtő (a mókusz) optimálisan játszik.

A Multiple Caching Game értéke az a $v_M(n, d, k)$ valószínűség, amellyel nyerünk, ha a kereső (mi) és a rejtő (a mókusz) optimálisan játszik.

Csóka [3] és Pálvölgyi [5] eddigi eredményei alapján $v_M(n, d, k) \leq v_A(n, d, k) \leq \frac{k^d}{\binom{n+d-1}{d}}$ (ezek bizonyításai a 2.6. állítás és a 4.1. állítás után találhatóak), és

¹A 2.4. állítás miatt a definícióban „legfeljebb” helyett „pontosan”-t is előírhatnánk.

elég nagy n -re (k, d -hez képest) a játék értéke mindkét verzióban egész k esetén $\frac{k^d}{\binom{n+d-1}{d}}$.

A dolgozatunk jelentős részében a játék diszkrét változatát vizsgáljuk, majd egy lehetséges folytonosítás esetén kapcsolatot teremtünk egy Csóka által tanulmányozott limeszproblémával.

1.3. Definíció. Egy (n, d, k) egészekből álló számhármast *pontosnak* nevezünk, ha $v_M(n, d, k) = v_A(n, d, k) = \frac{k^d}{\binom{n+d-1}{d}}$.

Célunk a pontos számhármások karakterizációja volt.

1.4. Sejtés (Csóka [3]). *Ha $n \geq dk$ és k nem feltétlenül egész, akkor $v_A(n, d, k) = \frac{k^d}{\binom{n+d-1}{d}}$.*

Csóka ezen sejtését megfigyeléseink alapján az alábbi módon erősítjük:

1.5. Sejtés. *Ha n, d, k egészek, és $n \geq d(k-1) + 1$, akkor (n, d, k) pontos.*

Kis értékekre megvizsgáltuk, és az alábbi monotonitást figyeltük meg:

1.6. Sejtés. *Ha valamely egészekből álló (n, d, k) számhármás pontos, akkor $(n, d-1, k)$, $(n, d, k-1)$ és $(n+1, d, k)$ is pontos.*

A témában elért új eredményeink: 1.5. sejtés, 1.6. sejtés, 2.1. lemma, 2.2. lemma, 2.3. állítás bizonyítása, 2.4. állítás, 3.1. alfejezetben tárgyalt $(4, 3, 2)$ eset, 3.3. állítás, 3.4. állítás, 3.3. alfejezetben a gonosz, a random és a jó mókus esetén egy példa a játékok értékének különbözőségére, 4.1., 4.3. és 4.4. alfejezetekben leírt verziói a játéknak és a 4.7. állítás.

2. A diszkrét játék

2.1. Néhány intuitív állítás

Első körben fontosnak tartottunk belátni néhány egyszerű állítást. Ezek által több esetszétválasztást is megspórolunk a későbbiekben.

2.1. Lemma. *A játék folyamán akármikor kapott „segítő” mogyoró nem csökkenti a játék értékét. „Segítő” mogyorónak nevezzük azt a mogyorót, amelynek a pozícióját a mókus rákérdezés nélkül elárulja.*

Bizonyítás. Ha a mókus elárulja egy mogyoró pozícióját, figyelmen kívül hagyhatjuk, és folytathatjuk a játékot az eredeti stratégiánk szerint, így nem csökken a játék értéke, mert az eredeti kereső stratégia esélyével nyerünk. $\square$

2.2. Lemma. *A játék folyamán akármikor kapott „ajándék” mogyoró nem csökkenti a játék értékét. „Ajándék” mogyorónak nevezzük azt a mogyorót, amelyet a mókus rákérdezés nélkül nekünk ad.*

Bizonyítás. Ha a mokus nekünk ad egy mogyorót, feltehetjük, hogy az első lyukból, akkor kövessük tovább az eredeti stratégiát addig, amíg nem tippelünk az első lyukra. Ha a stratégiánkban az ajándékozás után nem tippelnénk az első lyukra, akkor biztos vesztenénk, hiszen ezt a mogyorót nem találnánk meg, tehát ebben az esetben nem csökkenhet a játék értéke. Ha viszont az ajándékozás után tippelünk az első lyukra, akkor az első ilyen lépést hagyjuk ki, és tekintsük úgy a stratégiában, hogy ebben a lépésben a mokus az első lyukból adott válaszként mogyorót. Ekkor szintén nem csökkent a játék értéke, hiszen a mokus bármely felfedő stratégiája ellen el tudjuk ezt érni, így az ellen is, ha ebben a lépésben mindig az első lyukból ad nekünk mogyorót, ha van ott. $\square$

2.3. Állítás. *A Multiple Caching Game értéke d -ben monoton csökken: bármely n, d, k egészekre $v_M(n, d+1, k) \leq v_M(n, d, k)$ teljesül.*

Bizonyítás. A $d+1$ mogyorós esetben a mokus csinálhatja azt, hogy az első lyukba rejt egy kijelölt mogyorót, és ezen kívül alkalmazhatja a d mogyorós játék rejtési stratégiáját. Az első lépés előtt a kijelölt mogyorót nekünk adhatja „ajándék” mogyoróként, ezzel a 2.2. lemma miatt a játék értékét nem csökkenti, ezen kívül pedig alkalmazhatja a többi mogyoróra a d -s játék felfedési stratégiáját. Ezzel legalább ugyanakkora eséllyel nyer a $(d+1)$ -es esetben, mint a d -s esetben, tehát a játék értéke legfeljebb akkora lesz $(d+1)$ -re, mint d -re. $\square$

2.4. Állítás. *Mindig létezik olyan optimális stratégia, amelyben minden lépésben pontosan k lyukra tippelünk.*

Bizonyítás. Ha a stratégia valamelyik lépésében $l < k$ lyukra tippelünk, akkor az is optimális stratégia lesz, ha k lyukra tippelünk ehelyett:

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy ebben a lépésben az első l lyukra tippelünk, ekkor ehelyett tippeljünk az első k lyukra. Ha az első l lyukból kapunk mogyorót, akkor folytathatjuk az eredeti stratégiát, ha pedig az $(l+1)$. - k . lyukig valamelyikből, akkor kérdezzük rá ismét az első k lyukra. Ezt a „lépésblokkot” akkor fejezzük be, ha kapunk az első l lyuk valamelyikéből mogyorót, vagy véget ér a játék.

Ha a „lépésblokk” végén befejeződött a játék, akkor vagy nyertünk, vagy az első l lyukban nem volt mogyoró, tehát ekkor az eredeti stratégia szerint is veszítettünk volna, ezzel a játék értéke nem csökkent. Ha nem fejeződött be a játék, akkor a „lépésblokk” végére az eredeti stratégiához hasonlóan visszakaptunk az első l lyuk valamelyikéből egy mogyorót, és ezen kívül az $(l+1)$. - k . lyukakból valahányat, ezek halmazát jelölje M .

Ha a szóban forgó lépés előtt a mokus nekünk adja „ajándék” mogyoróként az M -beli mogyorókat, akkor a lépés után megkaptunk az első l lyuk valamelyikéből egy mogyorót, és az M -beli mogyorókat is nekünk adta a mokus, amellyel éppen az előző álláshoz jutunk, és a 2.2. lemma miatt a játék értéke nem csökkent ebben az esetben sem, így a k lyukra tippeléssel egy legalább ugyanakkora értéket elérő stratégiát kapunk, mint amilyen az eredeti volt, így ez is optimális lesz.

Ezt minden olyan lépésre megtehetjük, ahol k -nál kevesebb lyukra tippeltünk volna az eredeti stratégia szerint, így kaptunk egy olyan stratégiát, amelyben minden lépésben k lyukra tippelünk, és ez a stratégia optimális. $\square$

2.5. Következmény. Az optimális stratégiát elegendő az olyanok között keresni, amelyekben minden lépésben k lyukra tippelünk.

2.6. Állítás (Csóka [3]). *Tetszőleges egész n, d, k esetén $v_M(n, d, k) \leq \frac{k^d}{\binom{n+d-1}{d}}$.*

Bizonyítás. Az összes lehetséges rejtés száma $\binom{n+d-1}{d}$, mert n lyukba helyez el a mokus d db mogyorót úgy, hogy egy helyre több is kerülhet. Ha a mokus ezek közül egyenlő valószínűséggel választ, azaz az uniform rejtési stratégiát követi, akkor a kereső nyerési esélye legfeljebb $\frac{k^d}{\binom{n+d-1}{d}}$ lehet, mert minden lépésben a kereső által megtippelt k lyuk valamelyikében mogyorónak kell lennie, így a jó esetek száma k^d . $\square$

2.7. Megjegyzés. Ez a felső becslés jó az Alpern's Caching Game esetén is, ennek bizonyítása Csóka cikkében található [3, Theorem 2.37].

A következő egyszerű megfigyelés több cikkben is szerepelt.

2.8. Állítás. *Tetszőleges egész n, d, k esetén $v_M(n, d, k) \leq \frac{k}{n}$.*

Bizonyítás. Ha a mokus rejtési stratégiája az, hogy minden mogyorót ugyanabba a véletlenszerűen választott lyukba rejt, akkor első lépésben $\frac{k}{n}$ eséllyel találjuk el ezt a lyukat, a többi esetben veszünk, tehát a játék értéke legfeljebb $\frac{k}{n}$ lehet. $\square$

3. Új határ és stratégia kevés mogyoró esetén

Először a Pálvölgyi cikkében [5] felvetett $(4, 3, 2)$ esetet vizsgáltuk. Ekkor a cikkben leírt stratégia nem megfelelő annak bizonyítására, hogy ez a számhármas pontos, és jó jelöltként volt említve arra, hogy az Alpern's Caching Game és a Multiple Caching Game értékei különböznek, mivel itt nem teljesülnek a 1.4. sejtés feltételei. Ezt az alábbi esetben megcáfoljuk, tehát Csóka sejtésében a korlát nem éles.

3.1. A $(4, 3, 2)$ eset

Egy más stratégia révén elértük az elméleti maximum játékértéket: $\frac{k^d}{\binom{n+d-1}{d}} =$

$$\frac{2^3}{\binom{4+3-1}{3}} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

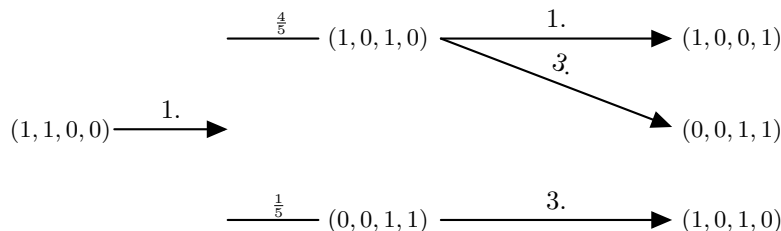
A stratégia:

- Első lépésben véletlenszerűen (egyenlő esélyekkel) választunk a 6 lehetőség közül, tehát feltehetjük, hogy az 1-es és 2-es lyukakra tippelünk, és feltehetjük, hogy az 1-es lyukból kaptunk mogyorót.
- Második lépésben $\frac{4}{5}$ valószínűséggel az 1-es lyukra és emellett véletlenszerűen (egyenlő esélyekkel) választunk a 3-as és 4-es lyukak közül, tehát feltehetjük, hogy a 3-as lyukra tippelünk. Ekkor ha az 1-es lyukból kaptunk

mogyorót, akkor a harmadik lépésben az 1-es és 4-es lyukakra tippelünk. Ha pedig a 3-as lyukból kaptunk mogyorót, akkor a harmadik lépésben a 3-as és 4-es lyukakra tippelünk.

- Második lépésben $\frac{1}{5}$ valószínűséggel a 3-as és 4-es lyukakra tippelünk. Ekkor ha a 3-as lyukból kaptunk mogyorót, akkor a harmadik lépésben az 1-es és 3-as lyukakra tippelünk. Ha pedig a 4-es lyukból kaptunk mogyorót, akkor a harmadik lépésben az 1-es és 4-es lyukakra tippelünk.

Ennek értéke $\frac{2}{5}$ bármely elrejtési stratégia ellen, mivel bármely elrejtési elrendezést ugyanakkora, $\frac{2}{5}$ valószínűséggel talál meg. Ennek bizonyítása a $d = 3$ általános esetenél található, a 3.4. állítás után.



1. ábra. Az ábrán 0–1 sorozatokkal jeleztük, hogy az adott lépésben melyik lyukakra tippelünk. A nyilakon szereplő pozíciók azt jelzik, hogy melyik lyukból kaptunk mogyorót, ahol elágazás van, egy szakaszra írtuk a következő lépés valószínűségét a stratégiánkban.

Ebben nincs szerepe a mókus döntésének sem, mivel nem tippelünk vissza olyan lyukra, ahonnan már korábban nem kaptunk mogyorót, így ha egyszerre több olyan lyukra tippelünk, ahol van mogyoró, akkor biztosan veszünk. Tehát a $(4, 3, 2)$ számhármass pontos.

3.2. Új sejtés a feltételekre

A $(4, 3, 2)$ eset inspirálta az új 1.5. sejtést a feltételekre, hiszen a győzelmi esélyünk a mókus felfedési stratégiájától független volt. Ez amiatt áll fenn, hogy a játék folyamán többet nem tippeltünk olyan lyukra, ahova már tippeltünk, de onnan nem kaptunk mogyorót. Ennek kivitelezéséhez legalább $d(k-1) + 1$ lyuk szükséges, mert az utolsó lépést kivéve lépésenként $k-1$ lyukból nem kapunk mogyorót, ezekre többet nem tippelünk, és még az utolsó lépésben szükségünk van k lyukra, így kapjuk az $n \geq (d-1)(k-1) + k = d(k-1) + 1$ feltételt a sejtéshez.

Hasonló stratégiával újabb pontos számhármassokat találtunk.

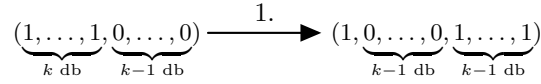
3.1. Megjegyzés. Ha $n \geq d(k-1) + 1$, akkor $\frac{k^d}{\binom{n+d-1}{d}} \leq \frac{k}{n}$, tehát az utóbbi felső korlát ezen esetekben gyengébb.

3.2. Megjegyzés. Az 1.6. sejtésből és a 2.3. állításból következik, hogy ez a korlát éles: $\frac{k^d}{\binom{n+d-1}{d}} \leq \frac{k^{d-1}}{\binom{n+(d-1)-1}{d-1}} \Rightarrow k \leq \frac{\frac{(n+d-1)!}{d!}}{\frac{(n+d-2)!}{(d-1)!}} \Rightarrow dk \leq n + d - 1 \Rightarrow d(k-1) + 1 \leq n$.

Néhány kisebb példán mutattunk stratégiát.

3.3. Állítás. Ha $d = 2$, $n \geq 2k - 1$, akkor az $(n, 2, k)$ számhármass pontos.

Ebben az esetben stratégiát adtunk $n = (2k - 1)$ -re. Az $n \geq 2k$ esetet Pálvölgyi már megoldotta [5].



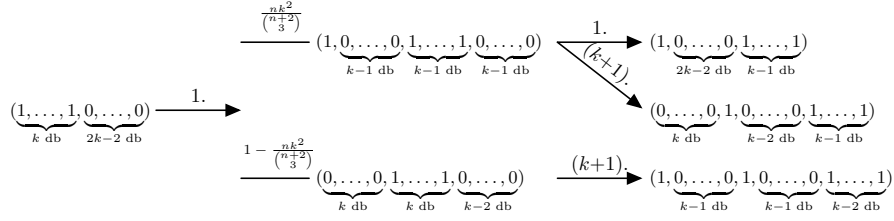
2. ábra. Az ábrán 0-1 sorozatokkal jeleztük, hogy az adott lépésben melyik lyukakra tippelünk. A nyíl színe jelzi, hogy melyik lyukból kaptunk mogyorót.

Ebben az esetben a két mogyoró vagy egy lyukban van, vagy különbözőkben.

- Ha a két mogyoró egy lyukban van, $\frac{k}{n}$ valószínűséggel találjuk meg, hiszen az első k kiválasztott lyuk valamelyikében kell lenniük.
- Ha különböző lyukakban vannak, $\frac{k(k-1)}{\binom{n}{2}}$ eséllyel találjuk meg őket, mivel az egyiknek az első k lyuk valamelyikében, a másiknak a következő $k-1$ lyuk valamelyikében kell lennie. Összesen $\binom{n}{2}$ -féleképpen helyezkedhetnek el.
- Felhasználva, hogy $n = 2k - 1$, azt kapjuk, hogy mindkét elhelyezkedés megtalálásának valószínűsége $\frac{k^2}{\binom{n+1}{2}} = \frac{k}{n}$.

3.4. Állítás. Ha $d = 3$, $n \geq 3k - 2$, akkor az $(n, 3, k)$ számhármass pontos.

Ebben az esetben stratégiát adtunk $n = (3k - 2)$ -re. Itt Pálvölgyi belátta már $n = (3k - 1)$ -re is, hogy $(n, 3, k)$ pontos [5].



3. ábra. Az ábrán 0–1 sorozatokkal jeleztük, hogy az adott lépésben melyik lyukakra tippelek. A nyílakon szereplő pozíciók azt jelzik, hogy melyik lyukból kaptunk mogyorót, ahol elágazás van, egy szakaszra írtuk a következő lépés valószínűségét a stratégiánkban.

A lyukakban a három mogyoró a következőképpen helyezkedhet el: mindhárom egy lyukban, kettő egy lyukban és a harmadik egy másikban, vagy három különböző lyukban.

- Ha a három mogyoró egy lyukban van, $\frac{k}{n} \cdot \frac{nk^2}{\binom{n+2}{3}} = \frac{k^3}{\binom{n+2}{3}}$ valószínűséggel találjuk meg, hiszen az első k kiválasztott lyuk valamelyikében kell legyen $(\frac{k}{n})$, majd újra azt kell választanunk, amelyikben találtunk $\left(\frac{nk^2}{\binom{n+2}{3}}\right)$, a harmadik lépés pedig determinisztikus, mivel mindig visszatippelünk az egyes lyukra.
- Ha a három mogyoró közül kettő egy lyukban, a harmadik egy másikban van, akkor ilyen rejtésből összesen $(3k-2)(3k-3)$ van. A felső ágon akkor találjuk meg a mogyorókat, ha az első k lyuk valamelyikében van két mogyoró, és az utolsó $k-1$ lyuk valamelyikében egy, vagy ha az első k lyuk valamelyikében van egy mogyoró, és az ezt követő $k-1$ lyuk valamelyikében két mogyoró. Az alsó ágon akkor találjuk meg a mogyorókat, ha az első k lyuk valamelyikében van 2 mogyoró, és az ezt követő k lyuk valamelyikében egy, vagy ha az első k lyuk valamelyikében van egy mogyoró, és az ezt követő k lyuk valamelyikében kettő. Tehát a megtalálási valószínűség, felhasználva, hogy $n = 3k - 2$:

$$\frac{1}{(3k-2)(3k-3)} \cdot \left(\frac{nk^2}{\binom{n+2}{3}} \cdot 2k(k-1) + \left(1 - \frac{nk^2}{\binom{n+2}{3}} \right) \cdot 2k^2 \right) = \frac{k^3}{\binom{n+2}{3}}$$

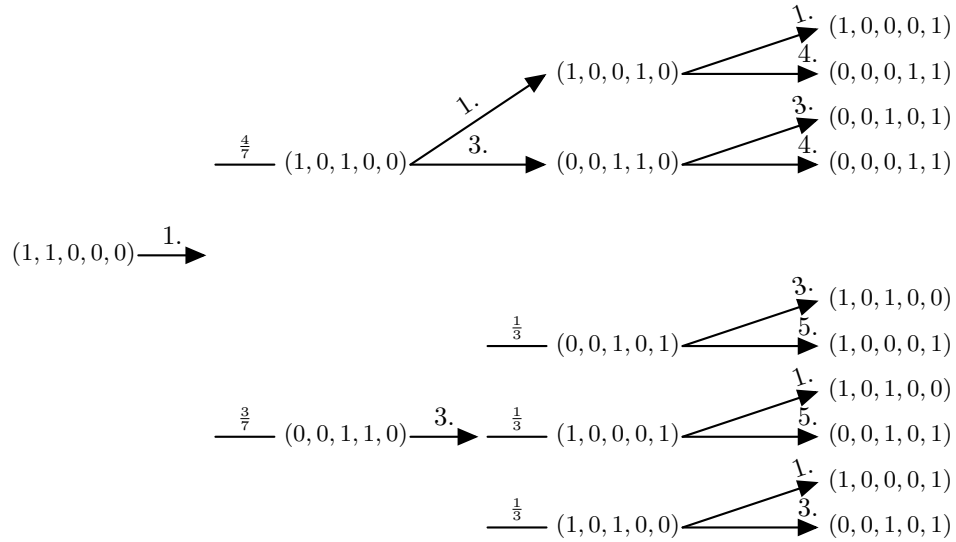
- Ha a három mogyoró különböző lyukakban van, akkor az esetek száma $\binom{n}{3}$. A felső ágon akkor találjuk meg a mogyorókat, ha az első k lyuk valamelyikében van egy mogyoró, az ezt követő $k-1$ lyuk valamelyikében is van, valamint az utolsó $k-1$ lyuk valamelyikében. Az alsó ágon pedig akkor találjuk meg a mogyorókat, ha az első k lyuk valamelyikében van mogyoró, majd az ezt követő k lyuk valamelyikében is van, és az utolsó $k-2$ lyuk valamelyikében is. Tehát a megtalálási valószínűség, felhasználva,

hogy $n = 3k - 2$:

$$\frac{1}{\binom{n}{3}} \cdot \left(\frac{nk^2}{\binom{n+2}{3}} \cdot k(k-1)^2 + \left(1 - \frac{nk^2}{\binom{n+2}{3}} \right) \cdot k^2(k-2) \right) = \frac{k^3}{\binom{n+2}{3}}$$

- Tehát minden elrendezést ugyanakkora valószínűséggel megtalálunk, azaz a játék értéke $\frac{k^3}{\binom{n+2}{3}}$.

A következő kisebb esetekre ellenőriztük a sejtésünket: $(5, 4, 2)$, $(9, 4, 3)$, $(13, 4, 4)$, $(6, 5, 2)$. Az $(5, 4, 2)$ esetben a stratégiánk:



4. ábra. Az ábrán 0–1 sorozatokkal jeleztük, hogy az adott lépésben melyik lyukakra tippelünk. A nyilakon szereplő pozíciók azt jelzik, hogy melyik lyukból kaptunk mogyorót, ahol elágazás van, egy szakaszra írtuk a következő lépés valószínűségét a stratégiánkban.

3.3. A gonosz, a random és a jó mókusz

Definiáljuk a diszkrét játék két másik verzióját. Ezekben az alaphelyzet ugyanaz, vagyis a rejtő mókusz n lyukba elrejt d darab mogyorót, és mi a lehető legnagyobb valószínűséggel szeretnénk mindet megtalálni úgy, hogy egy lépésben k lyukra tippelünk, és ha legalább egyben van mogyoró, a felfedő mókusz nekünk ad egyet, ha egyikben sincs, akkor a rejtő mókusz nyer. Mi pedig akkor nyerünk, ha minden mogyorót megtalálunk. Az eredeti játékhoz képest a felfedő mókusz változik.

Mindhárom esetben a játék értéke az a valószínűség, amellyel nyerünk, ha a rejtő mókusz és mi is optimálisan játszunk.

3.5. Definíció. Ha egy lépésben a tippelt k darab lyukban több mogyoró van, a gonosz mókusz a saját stratégiája szerint fedi fel valamelyiket, célja, hogy veszítsünk. Ez az eredeti verziónak felel meg.

Ebben az esetben a gonosz mókusz és a rejtő mókusz ugyanaz.

Jelöljük ebben a verzióban a játék értékét $v_M(n, d, k)$ -val.

3.6. Definíció. Ha egy lépésben a tippelt k darab lyukban több mogyoró van, a random mókusz egyenlő eséllyel fedi fel valamelyiket.

Jelöljük ebben a verzióban a játék értékét $v_{Mr}(n, d, k)$ -val.

3.7. Definíció. Ha egy lépésben a tippelt k darab lyukban több mogyoró van, a jó mókusz előre megbeszélte stratégia alapján fed fel mogyorókat, célja tehát, hogy nyerjünk.

Jelöljük ebben a verzióban a játék értékét $v_{Mj}(n, d, k)$ -val.

3.8. Állítás. Minden (n, d, k) egész számhármassal esetén $v_M(n, d, k) \leq v_{Mr}(n, d, k) \leq v_{Mj}(n, d, k) \leq \frac{k^d}{(n+d-1)}.$

Bizonyítás. A 2.6. állítás bizonyításában az elméleti maximumot csak a rejtési stratégiából határoztuk meg. Tehát ez nem függ a mókusz felfedési stratégiájától, így ez mindhárom verzióban felső korlát.

$v_M(n, d, k) \leq v_{Mr}(n, d, k)$, mivel a gonosz mókusz választhatja stratégiának a random mókusét, ezzel a random mókusz nyeresi esélyét el tudja érni, tehát a játék értéke (a mi nyeresi esélyünk) nem lehet nagyobb, mint a random esetben.

$v_{Mr}(n, d, k) \leq v_{Mj}(n, d, k)$, mivel a jó mókussal megbeszélhetjük, hogy alkalmazzon a random stratégiát, ezáltal garantálva számunkra a random játék értékét. A jó mókusz játék értéke tehát legalább a random játéké. $\square$

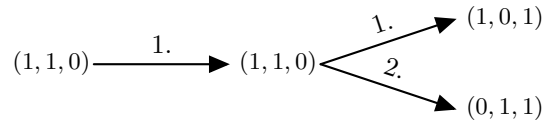
Mivel a kisebb esetek tanulmányozása során még nem találtunk nem pontos számhármast, minden esetben fennállt a $v_M(n, d, k) = v_{Mr}(n, d, k) = v_{Mj}(n, d, k)$ egyenlőség.

Felmerült a kérdés, hogy valóban lényeges-e az, hogy a mókusz egy stratégia szerint fedi fel a mogyorókat vagy véletlenszerűen választ a mogyorók közül, ha többet is eltaláltunk, illetve ha egy segítő fed fel a mogyorók közül, akivel előre megbeszélhetjük a stratégiát.

Mutatunk egy esetet, ahol különböznek a három verzióban a játékértékek. Ez a $(3, 3, 2)$ eset. Ez Pálvölgyi cikkében [5] hibásan szerepel, hiszen ott $v_M(3, 3, 2) = \frac{2}{3}$ az állítás. A jó mókusz esetén elérhető a $\frac{2}{3}$ játékérték, amely az elméleti felső korlát ebben az esetben a 2.8. állítás miatt. A többi eset megoldásához számítógépes szélsőértékkereső programot használtunk. Ehhez felírtuk az egyes esetek megtalálási valószínűségét olyan egyenletekkel, melyek minden változóban lineárisak. A három elrejtési, illetve megtalálási esély minimumát maximalizálta a program numerikusan. Ekkor a következő alsó és felső korlátokat kaptuk a játék értékére: a random mókusz esetén a játék értéke 0,6312 és 0,6316 közé esik, míg

a gonosz mokus esetén a játék értéke 0,5999 és 0,6001 közé esik. A program által kiadott eredmények a függelékben (A.) található.

Az alábbi ábrán a jó mokus esetén a kereső stratégia található:



5. ábra. Az ábrán 0 – 1 sorozatokkal jeleztük, hogy az adott lépésben melyik lyukakra tippelünk. A nyilakon szereplő pozíciók azt jelzik, hogy melyik lyukból kaptunk mogyorót.

Ezzel $\frac{2}{3}$ eséllyel nyerni tudunk:

- Ha a rejtő mokus mindhárom mogyorót ugyanoda rejti, akkor első lépésben $\frac{2}{3}$ eséllyel találjuk el ezt a lyukat, második lépésben mindenképpen oda tippelünk, és ekkor az elsőről kapunk mogyorót, így a harmadik lépésben is oda fogunk tippelni. Tehát ezt az esetet $\frac{2}{3}$ eséllyel megtaláljuk.
- Ha a rejtő mokus két mogyorót egy lyukba rejti, a harmadikat pedig egy másikba, akkor ezek a következő módon helyezkedhetnek el. Ha az elsőre tippelt két lyuk egyikében van két mogyoró, a másikban pedig 1, annak az esélye $\frac{1}{3}$, ekkor a felfedő mokus stratégiája legyen az, hogy első lépésben abból a lyukból ad, amelyikben egy mogyoró van. Ekkor második lépésben abból a lyukból kapunk mogyorót, amelyikben kettő van, és erre a harmadik lépésben is tippelni fogunk, tehát ebben az esetben mindig megtaláljuk a három mogyorót. Ha az elsőre tippelt két lyuk egyikében van két mogyoró, és a harmadikban egy, ennek az esélye $\frac{1}{3}$, ekkor első lépésben az első lyukból kapunk mogyorót, majd második lépésben szintén, ekkor harmadik lépésben a harmadik lyukra is tippelünk, tehát itt is megtaláljuk a mogyorókat. Ha az elsőre tippelt két lyuk valamelyikében van egy mogyoró, és a harmadikban kettő, ennek az esélye is $\frac{1}{3}$, ekkor első lépésben kapunk mogyorót az első lyukból, de második lépésben nem tippelünk a harmadik lyukra, tehát ebben az esetben mindig veszünk. Tehát ekkor $\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{2}{3}$ eséllyel megtaláljuk a mogyorókat.
- Ha a rejtő mokus mindhárom mogyorót különböző lyukba rejti, akkor első lépésben mindenképp találunk mogyorót, ekkor a második lépésben a második lyukból kapunk mogyorót, így harmadik lépésben a harmadik lyukra is tippelni fogunk, tehát megtaláljuk mindhárom mogyorót. Ezt az esetet 1 valószínűséggel megnyerjük.

4. Folytonosítások

4.1. Diszkrét játék nem egész k esetén

A játék nem egész k -ra is értelmezhető: egy „kevert stratégiát” alkalmazunk, bizonyos valószínűségekkel választunk minden lépésben néhány (egész számú) lyukat úgy, hogy minden lépésben a megtippelt lyukak számának várható értéke k legyen. Felső korlát lesz a játék értékére $\frac{k^d}{\binom{n+d-1}{d}}$, mivel a 2.6. állításhoz hasonlóan a jó esetek számának várható értéke k^d -nel lesz egyenlő:

Legyenek a választható lyukkombinációk $a_1, a_2, \dots, a_m$. Az első lépésben p_1^1 eséllyel választjuk az a_1 lyukkombinációt, p_2^1 eséllyel az a_2 lyukkombinációt, $\dots$, p_m^1 eséllyel az a_m -et. Az ezt követő lépésben a p_1^1 -es ágon $p_{1,1}^2$ eséllyel az a_1 lyukkombinációt, $\dots$, $p_{1,m}^2$ eséllyel az a_m -et, és így tovább, a p_m^1 -es ágon $p_{m,1}^2$ eséllyel az a_1 -et, $\dots$, $p_{m,m}^2$ eséllyel az a_m -et, és így tovább lépésenként, az utolsó, d -edik lépésben a $p_{1,\dots,1}^{d-1}$ ágon $p_{1,\dots,1,1}^d$ eséllyel az a_1 -et, $\dots$, $p_{1,\dots,1,m}^d$ eséllyel az a_m -et, és így tovább, a $p_{m,\dots,m}^{d-1}$ ágon $p_{m,\dots,m,1}^d$ eséllyel az a_1 -et, $\dots$, $p_{m,\dots,m,m}^d$ eséllyel az a_m -et tippelünk. A jó esetek számának várható értéke a $p_{i_1}^1 |a_{i_1}| \cdot \dots \cdot p_{i_1,\dots,i_d}^d |a_{i_d}|$ alakú számok összege lesz, egy ilyen tag egy d -hosszú ág mentén az egyes lépésekben megtippelt lyukak száma a bekövetkezés valószínűségével súlyozva, ahol $|a_i|$ azt jelöli, hogy az a_i lyukkombinációban hány lyukra tippelünk. Tehát ez az összeg:

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_d=1}^m p_{i_1}^1 |a_{i_1}| \cdot p_{i_1, i_2}^2 |a_{i_2}| \cdot \dots \cdot p_{i_1, i_2, \dots, i_d}^d |a_{i_d}|$$

Ekkor az utolsó tényezők szerint csoportosítva (azaz amikor $i_1, i_2, \dots, i_{d-1}$ rögzített és i_d változik 1 és m között) $\sum_{i_d=1}^m p_{i_1, i_2, \dots, i_d}^d |a_{i_d}| = k$, mert egy lépés során a várható érték k . Ezt minden $i_1, i_2, \dots, i_{d-1}$ -re megtehetjük, és így kiemelhető k az összegből. Ezt ismételve megkapjuk, hogy az összeg értéke k^d .

Az alsó korlátot a [5, Proof of Theorem 2.]-ben leírt stratégia alapján határozzuk meg, azon sejtésünkből kiindulva, miszerint k alsó és felső egészsrész értékeit tippelve lesz a legjobb esélyünk. Egyértelműen felírhatjuk k -t, mint $k = \lfloor k \rfloor \cdot (1 - p) + \lceil k \rceil \cdot p$. Ezután minden tippelésnél p valószínűséggel $\lceil k \rceil$, illetve $1 - p$ valószínűséggel $\lfloor k \rfloor$ számú lyukra tippelünk, méghozzá azokra, amelyekre a Pálvölgyi által $\lfloor k \rfloor$ -re, illetve $\lceil k \rceil$ -re adott stratégia alapján tippelnünk kell.

Tehát ha $(n, d, \lfloor k \rfloor)$ és $(n, d, \lceil k \rceil)$ pontosak, akkor a játék ezen verziójának értéke (n, d, k) -ra $\frac{k^d}{\binom{n+d-1}{d}}$.

4.2. Alpern's Caching Game

4.1. Állítás (Pálvölgyi [5], Csóka [3]). *Ha k egész, akkor $v_M(n, d, k) \leq v_A(n, d, k)$, tehát az Alpern's Caching Game értéke egész mennyiségű ázás esetén legalább akkora, mint a Multiple Caching Game-é.*

Bizonyítás. (Pálvölgyi) Az Alpern's Caching Game során követhetjük a Multiple Caching Game stratégiáját a következő módon: amelyik lyukakra tippelnénk a

Multiple Caching Game-ben, azokban kezdjük el egyszerre azonos sebességgel ásni addig, amíg valamelyik lyukban találunk egy mogyorót, és ekkor térjünk át a következő lépésre a Multiple Caching Game stratégiájában. Ha több lyukban is van mogyoró, akkor először azt fogjuk megtalálni, amelyik legkevesbé mélyen van, és nem a mókusz dönti el, melyiket adja, tehát nem járunk rosszabbul, mint a Multiple Caching Game-ben. Ha megtaláltuk az összes mogyorót, akkor összesen legfeljebb k -szorosát ástuk a mogyorók összmélységének, tehát $k \cdot 1 = k$ -t, és ez pont a maximális ásási mennyiség. Így ha a Multiple Caching Game-ben nyerünk, akkor ezzel a stratégiával az Alpern's Caching Game-ben is nyerünk. $\square$

4.3. Alpern's Caching Game változata nem egész k -ra

A diszkrét játék nem egész k esetén kapcsolatba hozható az Alpern's Caching Game-mel, de az eredeti játékot nem oldja meg nem egész k -ra, mert a diszkrét stratégia alapján előfordulna, hogy k -nál többet kellene ásniunk, amit nem engednek meg a szabályok. Viszont azt a változatot megoldja, ha mindig csak egész mennyiséget áshatunk valamilyen valószínűségekkel úgy, hogy az ásás mennyiségének várható értéke k legyen. Ekkor a diszkrét stratégiát követve elérhető az előbbivel analóg módon az elméleti maximum játékérték, ha a diszkrét játék esetén ezt elértük.

4.4. Mogyorókrém

Általánosíthatjuk a játékot arra az esetre is, amikor nem egész számú mogyorót szeretnénk megkeresni. Ilyenkor mogyorók helyett „mogyorókrém” van elrejtve a lyukakba, azaz minden lyukban egy 0 és d közti valós szám az oda rejtett mennyiség, és összesen d egység mogyorókrém van elrejtve. A kereső egy tippjénél ha a tippelt lyukak összesen tartalmazznak 1 egységnyi mogyorókrémet, akkor a kereső ad neki ezekből a lyukakból összesen 1 egységnyit, és folytatódik a játék, különben veszít.

Ilyenkor már az az eset sem triviális, ha nem az összes mogyorókrémet kell megtalálni, hanem csak 1 egységnyit, így mi ezzel az esettel foglalkoztunk. Ekkor a keresőnek nincs valódi stratégiája, csak kiválaszt k lyukat az n -ből, és akkor nyer, ha ezekben összesen van legalább 1 egységnyi krém. Ezért a rejtőnek az a célja, hogy úgy ossza szét a mennyiséget, hogy a lehető legkevesebb lyuk k -asban legyen összesen 1 az összeg.

Ha d kellően nagy ($d \geq n$ már például elég), akkor az lesz az optimális rejtő stratégia, hogy mindet egy helyre rejtje, ekkor a kereső győzelmi esélye $\frac{k}{n}$, mivel legalább egy lyukban mindenképpen lesz legalább 1 egységnyi krém. Ha d elég kicsi, azaz $d < \frac{n}{k}$, akkor pedig minden lyukba ugyanannyit rejtve a rejtő biztosan győzhet. Itt azt vizsgáltuk meg, hogy milyen esetekben lesz köztes eset, azaz olyan d , amelyre a játék értéke 0 és $\frac{k}{n}$ között van.

4.2. Állítás. *Ha $k \mid n$, akkor nincs köztes eset, azaz $d \geq \frac{n}{k}$ -ra nincs a rejtőnek olyan stratégiája, mellyel a játék értéke $\frac{k}{n}$ -nél kisebb.*

Bizonyítás (Imolay András). A Baranyai-tétel [6] alapján $[n]$ k -elemű részhal-
mazainak halmaza felbontható partíciókra úgy, hogy minden partícióban $\frac{n}{k}$ elem
legyen, és ezek diszjunkt uniója $[n]$ legyen. Mivel összesen legalább $\frac{n}{k}$ mogyo-
rókrém van, minden partícióban legalább az egyik halmazban minimum 1 van,
azaz a k -elemű részhalmozok legalább $\frac{1}{k}$ -ad részében legalább 1 lesz az összeg,
tehát a keresőnek legalább $\frac{k}{n}$ esélye van megnyerni a játékot. $\square$

Ha $k \nmid n$, akkor jellemzően lesz köztes eset:

4.3. Példa. Ha $n = 5$ és $k = 2$, akkor $\frac{5}{2} \leq d < 3$ esetén az optimális rejtés $\frac{3}{10}$
esélyt ad a keresőnek a győzelemre.

Bizonyítás. Amennyiben a rejtő három lyukba $\frac{d}{3}$ mennyiséget rejt, a többibe
pedig 0-t, akkor a kereső csak akkor nyer, ha ebből a három lyukból 2-re tippel,
amelyre $\frac{3}{10}$ esélye van.

Viszont $\frac{2}{10}$ -et nem érhet el a rejtő: indirekten tegyük fel, hogy van ilyen
rejtés, a lyukakba tett mennyiségek legyenek $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5$. Ha
két összeg legalább 1, akkor ezek csak $a_1 + a_2, a_1 + a_3$ lehetnek, tehát a többi
páronkénti összeg kisebb 1-nél. Tehát $a_1 + a_4, a_1 + a_5, a_4 + a_5$ mind kisebbek
1-nél, így $a_1 + a_4 + a_5 < \frac{3}{2}$, emellett $a_2 + a_3 < 1$ is teljesül, így $d = \sum_{i=1}^5 a_i < \frac{5}{2}$,
ami ellentmondás. $\square$

Ez a kérdés kapcsolatban áll a Manickam–Miklós–Singhi sejtéssel is (ez a
sejtés ettől független okból megtalálható Csóka cikkében [3], hiszen hasonló
limeszproblémára vezet, mint az Alpern’s Caching Game):

4.4. Kérdés. Rögzített n, k természetes számokra adjunk meg olyan $a_1, a_2, \dots, a_n$
valós számokat, hogy ha $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ egy egyenletes eloszlással
véletlenszerűen választott k elemű részhalmoz, akkor

$$P\left(a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_k} > \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n a_i\right) \quad (1)$$

a lehető legnagyobb legyen.

4.5. Sejtés. (Manickam–Miklós–Singhi)

Ha $4k \leq n$, akkor ez a maximális valószínűség $1 - \frac{k}{n}$.

Először is vegyük észre, hogy ha (1)-ben fordított egyenlőtlenséget követel-
lünk meg, akkor nem változik a kérdés, mivel a két kérdésre kapott számhal-
mazok között az átlagra való tükrözéssel egy egyértelmű megfeleltetést kapunk.
Ezzel pedig ekvivalens az a kérdés, hogy mikor lesz

$$P\left(a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_k} \geq \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n a_i\right)$$

a lehető legkisebb, a sejtés szerint $4k \leq n$ esetén az optimum $\frac{k}{n}$.

Az a_i számok megfelelhetnek a lyukakba tett mennyiségeknek, ha $\frac{k}{n}d = 1$, akkor visszkapjuk a fenti kérdésünket. A MMS-sejtés következménye tehát, hogy $4k \leq n$ esetén nincs köztes eset. Azon vizsgált paraméterekre, melyekre van, az optimális rejtés során mindig néhány lyukba egy adott pozitív mennyiség, a többibe 0 került, ezért megfogalmaztuk a következő sejtést:

4.6. Sejtés. *Tetszőleges paraméterek mellett az optimális rejtő stratégia során néhány lyukba ugyanazt az r mennyiséget rejtjük, a többi lyukba pedig 0-t.*

4.5. Alsó korlát $v_M(n, d, k)$ -ra $d \rightarrow \infty$ esetén

Beláttuk, hogy $v_M(n, d, k)$ monoton csökken d -ben (2.3. állítás), így felmerül a kérdés, hogy $d \rightarrow \infty$ esetén a Multiple Caching Game értéke 0-ba tart-e. Megmutatjuk, hogy $k \geq 2$ esetén nem, vagyis tetszőleges számú mogyoró esetén egy rögzített pozitív valószínűséggel meg tudjuk találni mindegyiket.

4.7. Állítás. *Minden $k \geq 2$ egészre $v_M(n, d, k) \geq c(n, k) > 0$, ahol $c(n, k)$ egy csak n -től és k -tól függő pozitív konstans.*

Bizonyítás. Rögzítsük n -et és $k \geq 2$ -t. Megadunk egy stratégiát, amellyel d -től független valószínűséggel megtaláljuk az összes mogyorót: Az első lépésben véletlenszerűen (egyenlő esélyekkel) választott k db lyukra tippelünk, a többi lépésben pedig arra a lyukra tippelünk, ahonnan az előző lépésben mogyorót kaptunk, és még $k - 1$ véletlenszerűen (egyenlő esélyekkel) választott lyukra. Az első lépésben legfeljebb $\frac{n-k}{n}$ eséllyel veszünk. Egy általános lépésben csak akkor veszíthetünk, ha abban a lyukban, ahonnan az előző lépésben kaptunk mogyorót, ez volt az utolsó mogyoró, azaz amikor épp kiürült egy lyuk. Ha egy lépés előtt $i - 1$, utána pedig i üres lyuk volt, akkor a következő lépésben $\frac{\binom{i-1}{k-1}}{\binom{n-1}{k-1}}$ eséllyel veszünk, mivel ekkora valószínűséggel tippelünk $k - 1$ üres lyukra az éppen kiürült lyuk mellett. Így a nyerési esélyünk legalább

$$c(n, k) = \left(1 - \frac{n-k}{n}\right) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\binom{i-1}{k-1}}{\binom{n-1}{k-1}}\right) > 0. \quad \square$$

4.8. Következmény. *Minden $k \geq 2$ -re $v_A(n, d, k) \geq c(n, \lfloor k \rfloor) > 0$, ahol $c(n, \lfloor k \rfloor)$ egy csak n -től és $\lfloor k \rfloor$ -tól függő pozitív konstans.*

Bizonyítás. A 4.1. állítás miatt egész k -ra $v_A(n, d, k) \geq c(n, k)$, és nem egész k -ra pedig a játék definíciója miatt $v_A(n, d, k) \geq v_A(n, d, \lfloor k \rfloor) \geq c(n, \lfloor k \rfloor)$. $\square$

5. Lezárás

Későbbi terveink közé tartoznak az 1.5. sejtés, 1.6. sejtés bizonyítása, a stratégiánk általánosítása minden pontos (n, d, k) -ra.

Hivatkozások

- [1] S. Alpern, R. Fokkink, T. Lidbetter, and N. S. Clayton, A search game model of the scatter hoarder's problem, *Journal of The Royal Society Interface* 9(70):869–879, 2012.
- [2] Search theory: a game theoretic perspective (S. Alpern, R. Fokkink, G. Leszek, R. Lindelauf, V. S. Subrahmanian (Eds.)), *Springer Science & Business Media*, 2013.
- [3] Endre Csóka, Limit theory of discrete mathematics problems, <https://arxiv.org/pdf/1505.06984.pdf>
- [4] E. Csóka and T. Lidbetter, The solution to an open problem for a caching game, *Naval Research Logistics* 63(1):23–31, 2016.
- [5] Dömötör Pálvölgyi, All or Nothing Caching Games with Bounded Queries, *International Game Theory Review*, 20(1):1-9, 2018., <https://arxiv.org/pdf/1702.00635.pdf>
- [6] Zs. Baranyai, On the factorization of the complete uniform hypergraph, in Infinite and Finite Sets (A. Hajnal, R. Rado, V. T. Sós, (Eds.)), *Proc. Coll. Keszthely, Colloquia Math. Soc. János Bolyai 10, North-Holland*, 91–107, 1973.

A szerzők adatai:

Jánosik Áron, ELTE matematikus BSc 2. évf., aron@janosik.hu

Miklós Csenge, ELTE matematikus BSc 2. évf., csengejanka@gmail.com

Simon Dániel Gábor, Cambridge matematikus MSc 1. évf., dgs45@cam.ac.uk

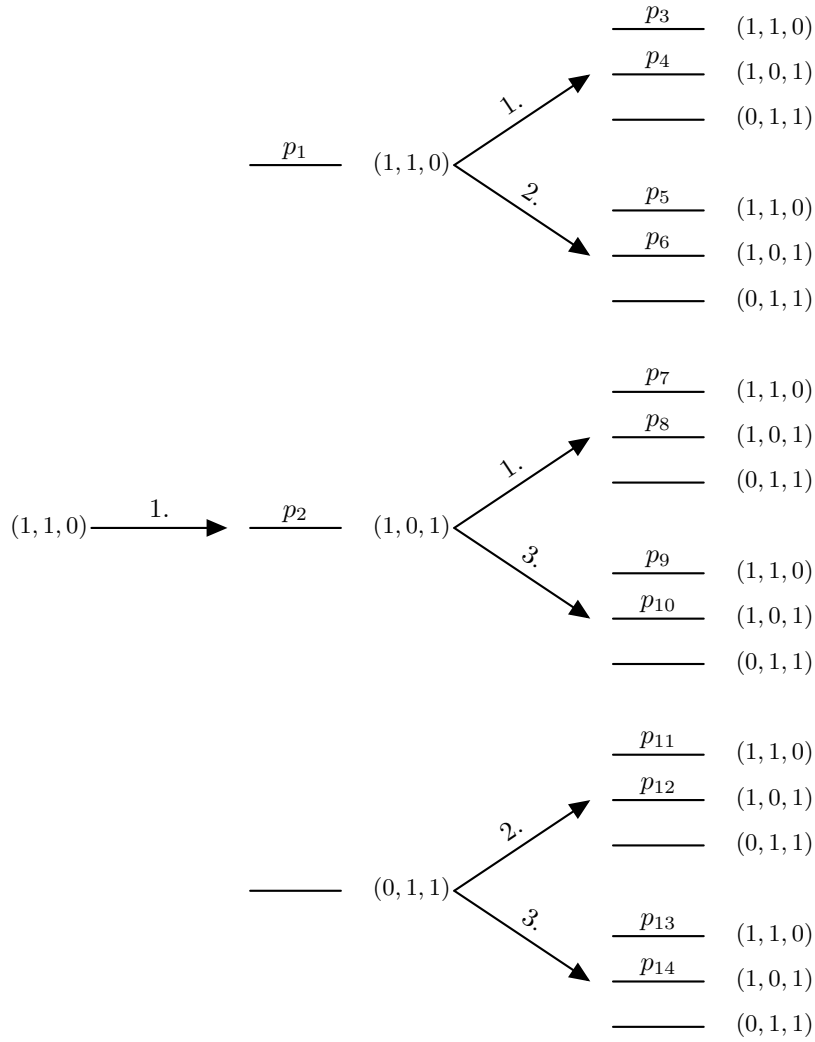
Zólmány Kristóf, ELTE matematikus MSc 1. évf., zolomykristof@gmail.com

Témavezetők:

Pálvölgyi Dömötör, ELTE Számítógéptudományi Tanszék

Lenger Dániel, ELTE Számítógéptudományi Tanszék

A. Stratégiák keresése programmal



6. ábra. Az ábrán 0–1 sorozatokkal jeleztük, hogy az adott lépésben melyik lyukakra tip-
pelünk. A nyilakon szereplő pozíciók azt jelzik, hogy melyik lyukból kaptunk mogyorót,
ahol elágazás van, egy szakaszra írtuk a következő lépés valószínűségét a stratégiánkban.

B. A program által kiadott eredmények

random játék keresőstratégia:	gonosz mókus keresőstratégia:
$v_{Mr}(3, 3, 2) =$	$v_M(3, 3, 2) =$
0.631266583766597	0.599999998988798
$p_1 =$	$p_1 =$
$1.433265356398650 \cdot 10^{-8}$	0.300000004173928
$p_2 =$	$p_2 =$
0.946899861317246	0.599999994319573
$p_3 =$	$p_3 =$
$2.125486469051197 \cdot 10^{-7}$	$1.217151379684367 \cdot 10^{-10}$
$p_4 =$	$p_4 =$
0.999999712433013	0.99999999878112
$p_5 =$	$p_5 =$
$4.989166940971845 \cdot 10^{-5}$	$3.085953476089642 \cdot 10^{-8}$
$p_6 =$	$p_6 =$
0.442763073625245	$2.598550738776247 \cdot 10^{-10}$
$p_7 =$	$p_7 =$
0.99999990714073	0.500000011498288
$p_8 =$	$p_8 =$
$9.285925092871882 \cdot 10^{-9}$	0.499999988484626
$p_9 =$	$p_9 =$
$2.718295488701727 \cdot 10^{-8}$	$6.920797268605838 \cdot 10^{-12}$
$p_{10} =$	$p_{10} =$
0.342734797303237	0.499999988494791
$p_{11} =$	$p_{11} =$
0.664699872406349	0.99999999901808
$p_{12} =$	$p_{12} =$
0.335300123056941	$1.069900352273958 \cdot 10^{-12}$
$p_{13} =$	$p_{13} =$
$1.314916509009834 \cdot 10^{-10}$	$1.003127747534194 \cdot 10^{-9}$
$p_{14} =$	$p_{14} =$
0.999999965441518	0.99999996373835

Az alábbi táblázatban a rejtőstratégiák találhatók.

l_1 : annak az esélye, hogy a rejtő mókus minden mogorót ugyanabba a lyukba rejt

l_2 : annak az esélye, hogy a rejtő mókus minden mogorót különböző lyukba rejt

l_3 : annak az esélye, hogy a rejtő mókus két mogorót ugyanabba a lyukba rejt, és egy mogorót egy másik lyukba

q_1 : ha az első lyukban 2 mogoró van, és a harmadikban 1, akkor a második lépésben ha az első és a harmadik lyukakra tippelünk, akkor ekkora valószínűséggel fog az 1-es lyukból mogorót adni a felfedő mókus

q_2 : ha az első lyukban 1 mogoró van, és a másodikban 2, akkor az első lépésben ekkora valószínűséggel fog az 1-es lyukból mogorót adni a felfedő mókus

q_3 : ha az első lyukban 2 mogyoró van, és a másodikban 1, és az első lépésben az első lyukból kaptunk mogyorót, és második lépésben az első és második lyukakra tippelünk, akkor ekkora eséllyel fog az 1-es lyukból mogyorót adni a felfedő mókus

q_4 : ha mindhárom mogyoró különböző lyukban van, az első lépésben az első lyukból kaptunk mogyorót, és a második lépésben a második és harmadik lyukakra tippelünk, akkor ekkora eséllyel fog a 2-es lyukból mogyorót adni a felfedő mókus

random játék rejtőstratégia	gonosz mókus rejtőstratégia
$v_{Mr}(3, 3, 2) =$	$v_M(3, 3, 2) =$
0.631579844026254	0.600002218914396
$l_1 =$	$l_1 =$
0.263159544659304	0.300001109457198
$l_2 =$	$l_2 =$
0.105264762894245	0.099996671628406
$l_3 =$	$l_3 =$
0.631575692446451	0.600002218914396
$q_1 =$	$q_1 =$
0.5000000000000000	0.500018490884919
$q_2 =$	$q_2 =$
0.3333333333333333	0.500018490884919
$q_3 =$	$q_3 =$
0.5000000000000000	0.955197063889760
$q_4 =$	$q_4 =$
0.5000000000000000	0.319507062168597