

CSÚCSSZÍNEZÉST INDUKÁLÓ ÉLSÚLYOZÁSOK

Simon Máté

*Alkalmazott matematikus MSc hallgató
OTDK dolgozat*

Témavezető:

Madarasi Péter

*ELTE Matematikai Intézet,
Operációkutatási Tanszék*



Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest, 2022

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
1.1. Motiváció	2
1.2. Korábbi eredmények	3
1.3. Majdnem 1-2 tulajdonságú súlyozások páros gráfokon	4
2. Gráfok (a,b) súlyozásának nehézsége	5
3. Megkezdett súlyozás befejezhetősége	15
3.1. Megkezdett súlyozás fákon	17
3.1.1. Egy speciális eset — az antifaktor feladat	19
4. Az 1-2-3 sejtés vizsgálata számítógépes módszerekkel	21
4.1. Az IP modell	22
4.2. Számítógépes eredmények	23
5. Nyitott kérdések	25

Kivonat

Egy adott G gráf $\{a, b\}$ -élsúlyozásán egy $w : E \rightarrow \{a, b\}$ függvényt értünk, melyet megengedettnak nevezünk, ha a $z : V \rightarrow \mathbb{Z}$ indukált címkék egy megengedett színezését adják G -nek, ahol a, b különböző egész számok és $z(v) = \sum_{e \in \Delta(v)} w(e)$.

Dudek és Wajc [1] megmutatták, hogy NP-teljes annak az eldöntése, hogy egy tetszőleges gráf rendelkezik-e megengedett $\{1, 2\}$ -élsúlyozással. Kiterjesztve ezen eredményüket megmutatjuk, hogy a probléma bármely különböző a -ra és b -re is NP-teljes.

Thomassen, Wu és Zhang [2] adott egy polinomiális algoritmust annak eldöntésére, hogy egy adott páros gráf rendelkezik-e megengedett $\{1, 2\}$ -élsúlyozással. Megvizsgáljuk ennek a problémának egy természetes általánosítását, amikor egy elkezdett élsúlyozást kell befejezni megengedetten. Ezen feladatról megmutatjuk, hogy NP-teljes bármely különböző a, b egész számra páros gráfokon. Ugyanakkor bebizonyítjuk, hogy fákra polinom időben megoldható, mely eredmény egy alternatív algoritmussal szolgál az Antifaktor problémára [3] is, és annak eldöntésére is, hogy egy fa rendelkezik-e megengedett $\{0, 1\}$ -élsúlyozással [4].

Számítógépes eredmények ismertetésére is sor kerül a dolgozatban, többek között egészértékű programozási feladatként modellezzük az 1-2-3 sejtést, és a modellt felhasználva ellenőrizzük, hogy a legfeljebb 12 csúcsú egyszerű gráfokon igaz az 1-2-3 sejtés.

1. Bevezetés

Az 1-2-3 sejtés szerint minden legalább két élű összefüggő egyszerű gráf élei megsúlyozhatóak az 1, 2, 3 számokkal úgy, hogy a csúcsokra az oda illeszkedő élek súlyösszegét írva egy megengedett csúcsszínezést kapunk. A sejtés kapcsán számos további kérdés megfogalmazható, a dolgozatban ezen kérdések által inspirált területeken fogunk vizsgálni.

A dolgozat egy fő eredményeként kiterjesztjük Dudek és Wajc 2011-es eredményét [1], mégpedig megmutatjuk, hogy tetszőleges különböző a, b racionális számokra NP-teljes eldönteni, hogy egy gráfra létezik-e a fenti értelemben megengedett élsúlyozás az a, b számokkal, azaz megengedett $\{a, b\}$ -élsúlyozás. Továbbá bemutatójuk egy érdekes tulajdonságát a páros gráfoknak abban az esetben, ha a és b pozitív és különböző paritású, mégpedig, hogy egy csúcsot leszámítva létezik megengedett $\{1, 2\}$ -élsúlyozásuk. Thomassen, Wu és Zhang [2] eredménye szerint polinom időben eldönthető, hogy egy páros gráfnak létezik-e $\{1, 2\}$ -élsúlyozása. Belátjuk, hogy annak az eldöntése viszont NP-teljes, hogy egy már megkezdett $\{a, b\}$ -élsúlyozás befejezhető-e páros gráfokon. Ugyanakkor megmutatjuk, hogy fákra szorítkozva polinom időben eldönthető, hogy egy már megkezdett súlyozás befejezhető-e tetszőle-

ges különböző rögzített a, b racionális számokra. Az utóbbi algoritmus továbbá egy alternatív polinom idejű algoritmust biztosít az úgynevezett Antifaktor feladatra [3] és arra is, hogy egy fa rendelkezik-e megengedett $\{0, 1\}$ -élsúlyozással [4]. Emellett számítógépes eredményeket is ismertetünk, például egészértékű programozási feladatként modellezzük az 1-2-3 sejtést, és a modellt felhasználva bemutatjuk az ellenőrzés eredményét, miszerint a legfeljebb 12 csúcsú egyszerű gráfokon igaz az 1-2-3 sejtés. Ezenfelül megkezdjük az $\{a, b\}$ -tulajdonságú páros gráfok karakterizációjának számítógépes vizsgálatát is. Végül jelen dolgozat zárásaként betekintőt nyújtunk további érdekes nyitott problémákba a témakör iránt érdeklődők számára.

Jelölések

A dolgozat során $G = (V, E)$ egy egyszerű, véges, összefüggő és irányítatlan gráfot jelöl. Az $\{1, \dots, k\}$ -élsúlyozás alatt egy olyan $w : E \rightarrow \{1, \dots, k\}$ függvényt értünk, amely G éleihez rendel súlyokat az $\{1, \dots, k\}$ halmazból. Azt mondjuk, hogy ez az $\{1, \dots, k\}$ -élsúlyozás *megengedett*, ha a $z : V \rightarrow \mathbb{Z}^+$ indukált csúcs címkézés, ahol $z(v) = \sum_{e \in \Delta(v)} w(e)$, egy megengedett csúcsszínezés, azaz tetszőleges $e = uv \in E$ élre $z(u) \neq z(v)$. Ha egy G gráf rendelkezik megengedett $\{1, 2, 3\}$ -élsúlyozással, akkor azt mondjuk, hogy G *1-2-3 tulajdonságú* (hasonlóan definiálható, ha más a k értéke). Végül jelöljük $\chi_{\Sigma}^e(G)$ -vel azt a legkisebb k számot, amelyre létezik megengedett $\{1, \dots, k\}$ -élsúlyozása G -nek. Ha pedig az $\{1, \dots, k\}$ halmazt lecseréljük az $\{a, b\}$ halmazra, akkor az $\{a, b\}$ -élsúlyozási feladatról beszélünk. Azt mondjuk, hogy G *szép*, ha összefüggő és csúcsszáma legalább 3.

1.1. Motiváció

Annak az eldöntése, hogy egy gráfnak létezik-e megengedett $\{a, b\}$ -élsúlyozása — amely kérdéssel a legtöbbet foglalkozunk a dolgozatban — az *1-2-3 sejtés* kapcsán merült fel, mely az „irreguláris” gráfok tanulmányozásából származik.

Az 1-2-3 sejtést Karoński, Łuczak és Thomason [5] fogalmazta meg 2004-ben:

1-2-3 sejtés *Minden szép gráf 1-2-3 tulajdonságú.*

Egyszerű gráfelméleti megfigyelések alapján nincsen a reguláris gráfoknak „ellentettje”, azaz olyan egyszerű gráf, amelynek minden fokszáma különböző lenne. Mégpedig azért, mert tetszőleges n csúcsú gráfnak n különböző fokszáma lehet, a $0, 1, \dots, n-1$ számok. Csak úgy lehet minden fokszáma különböző, hogy minden fokszámhöz az előbbiek közül pontosan egyszer fordul elő. Viszont ez nem lehet, mivel nem lehet 0 és $(n-1)$ is egyszerre fokszám. Lehetséges alternatív definíció, az irreguláris gráfokra Chartrand, Erdős és Oellermann [6] cikkében olvasható. Mások, mint például Chartrand [7] alternatív definíciók helyett azt a problémát vizsgálták, hogy egy adott egyszerű gráf mennyire irreguláris. Ez alatt azon legkisebb k értéket értjük egy tetszőleges egyszerű G gráfhoz, ahol minden élt kicserélve legfeljebb k párhuzamos élre a kapott G' multigráf irreguláris lesz (azaz minden csúcának

különböző a fokszáma). Ezt a minimális k értéket *irregularitási erősségnek* nevezzük, és bővebb információkat például a következő cikkekben olvashatunk erről a témáról: [8], [9], [10].

Egy másik lehetséges megközelítés az irregularitási erősségnek a lokális változata irányából lehetséges, ahol nem azt követeljük meg, hogy a kapott multigráfban minden csúcs fokszáma különböző legyen, hanem csak azt, hogy a szomszédos csúcsok fokszáma legyen különböző. Vegyük észre, hogy éltöbbszörözés helyett kereshetünk megengedett $\{1, \dots, k\}$ -élsúlyozást, csak ekkor a fokszámokra koncentrálni helyett, a fent bevezetett indukált z címkézést tekintjük. Lecserélve a súlyhalmazt az $\{1, \dots, k\}$ -ról az $\{a, b\}$ halmazra, eljutottunk az $\{a, b\}$ -élsúlyozás létezésének a kérdéséhez.

1.2. Korábbi eredmények

Korai cikkek és eredmények, mint például amelyekben az 1-2-3 sejtést először megfogalmazzák [5], a fent definiált $\chi_{\Sigma}^e(G)$ és $\chi(G)$ közötti kapcsolatra fókuszálnak. Az egyik legelső eredmény az imént említett cikkben szerepel, és a következőt állítja:

1.1. Állítás (Karoński, Łuczak és Thomason [5]). *Legyen $(\Gamma, +)$ egy véges Abel-csoport páratlan renddel és G egy szép $|\Gamma|$ -színezhető gráf. Ekkor létezik az éleknek egy olyan súlyozása, amely a Γ -ból rendel az élekhez és az így kapott indukált csúcsszínezés megengedett.*

További eredmények a kromatikus számmal kapcsolatban:

1.2. Állítás. *Ha G 2-összefüggő és $\chi(G) \geq 3$, akkor $\chi_{\Sigma}^e(G) \leq \chi(G)$ [11]. Emellett minden $k \geq 3$ egész számra és G szép gráfra a következők teljesülnek:*

1. ([5]) *Ha G k -színezhető páratlan k -ra, akkor $\chi_{\Sigma}^e(G) \leq k$.*
2. ([12]) *Ha G k -színezhető, $k \equiv 0 \pmod{4}$, akkor $\chi_{\Sigma}^e(G) \leq k$.*
3. ([13]) *Ha G k -színezhető, 2-összefüggő és a minimum fokszáma $k + 1$, ahol $k \equiv 2 \pmod{4}$, akkor $\chi_{\Sigma}^e(G) \leq k$.*

Az első általánosságban érvényes konstanst, amely felső becslés $\chi_{\Sigma}^e(G)$ -re Addario-Berry, Dalal, McDiarmid, Reed és Thomason [14] adták. Ők azt igazolták, hogy $\chi_{\Sigma}^e(G) \leq 30$. Mégpedig úgy, hogy széleskörben használható tételeket bizonyítottak be, úgynevezett fokszámkorlátos részgráfokra. Ugyanezt a technikát használva, Addario-Berry, Dalal és Reed [15] le tudta vinni a 30-at 16-ra, majd Wang és Yu [16] még tovább 13-ra. Végül a nagy áttöréseket elsősorban Kalkowskinak köszönhetjük, mivel a ma ismert legjobb korlátot ő, Karoński és Pfender adta [17], Kalkowski korábbi eredményeire támaszkodva. A [17]-es cikkben azt látják be, hogy minden G szép gráf 1-2-3-4-5 tulajdonságú.

Továbbá ismert, hogy az 1-2-3 sejtés igaz minden elég nagy, elég sűrű gráfra. Pontosabban létezik n' konstans, hogy minden legalább n csúcsú gráfra létezik egy megengedett él 3-súlyozás, ha $n \geq n'$, és $\delta(G) \geq 0.99985n$ [18]. Ezenfelül az is ismert, hogy már az 1, 2 súlyok is aszimptotikusan majdnem biztosan elegendőek, hogyha G egy véletlen gráf (ahol a véletlen gráfot az Erdős-Rényi modell szerint értjük), lásd [15]. Másrészt pedig Dudek és Wajc [1] belátta, hogy annak az eldöntése, hogy egy adott gráf 1-2 tulajdonságú-e NP-teljes. Viszont páros gráfok között Thomassen, Wu és Zhang [2] eredménye szerint karakterizálhatóak a nem 1-2 tulajdonságúak. Reguláris gráfokra szorítkozva Jakob Przybylo [19] megmutatta, hogy minden reguláris gráf 1-2-3-4 tulajdonságú, emellett, ha $d \geq 10^8$, és G d -reguláris, akkor G 1-2-3 tulajdonságú.

Az élsúlyozásokon kívül másfajta súlyozások is definiálhatóak. Például a csúcssúlyozási feladatban a csúcsokhoz akarunk súlyokat rendelni az élek helyett, az indukált címkét pedig úgy kapjuk, hogy az adott csúcsra a szomszédjainak a súlyát adjuk össze. Ahadi és társai megmutatták [20], hogy annak eldöntése NP-teljes, hogy egy G gráfnak van-e megengedett csúcssúlyozása az $\{1, \dots, k\}$ halmazból, bármely $k \geq 2$ esetén. Ezenfelül akkor is NP-teljes marad a probléma, hogyha a $k = 2$ esetet vizsgáljuk 3-színezhető vagy 3-reguláris gráfok [21] körében.

Másfajta problémákhoz jutunk, ha megváltoztatjuk a címkék előállításának definícióját. Például a súlyok összeadása helyett vehetjük a szorzatukat. Így az élsúlyozás szorzással és a csúcssúlyozás szorzással problémákat kapjuk meg. Végül az eddigi eredmények tömör bemutatását néhány ezekkel a problémákkal kapcsolatos nehézségi eredménnyel zárjuk le. Dehghan és társai [22] belátták, hogy NP-teljes eldönteni, hogy egy adott 3-színezhető síkgráfnak van-e megengedett élsúlyozása szorzással az $\{1, 2\}$ halmazból. Továbbá, hogy ez az állítás akkor is helyes marad-e, ha az élsúlyozás szorzással feladat helyett a csúcssúlyozás szorzással feladatot tekintjük. Mindemellett ha elhagyjuk a színezhetőségi és síkbarajzolhatósági feltételeket, de az $\{1, 2\}$ halmazt lecseréljük az $\{1, \dots, k\}$ halmazra, akkor is NP-teljes problémához jutunk.

1.3. Majdnem 1-2 tulajdonságú súlyozások páros gráfokon

Megismerkedve a sejtéssel bemutatjuk egy érdekes megfigyelésünket páros gráfokkal kapcsolatban.

1.3. Állítás. *Ha egy G szép páros gráfban van egy v levél csúcs, azaz olyan csúcs melyre $\deg(v) = 1$, akkor G 1-2 tulajdonságú.*

Bizonyítás. Legyen G a páros gráfunk és v az állításban megnevezett levél csúcs. Megadunk egy algoritmust, amely előállítja G -nek egy megengedett $\{1, 2\}$ -élsúlyozását. Az algoritmus a következő: Futtassunk le egy szélességi keresést a G gráfon v -ből indulva. A megkapott szélességi fának legyen a mélysége m . A szélességi

fában minden gyökértől különböző csúcsból lefelé pontosan egy él megy. Az m -edik szinttől felfelé elindulva szintenként dolgozzuk fel a csúcsokat. Egy csúcsnál a következőt csináljuk: Számoljuk össze a lentől beérkező éleken lévő számok összegét (ha egy a fában levél csúcsot nézünk, akkor ez 0 lesz), és ha ennek az összegnek a paritása megegyezik a szélességi bejárás szerinti v -től vett távolság paritásával, akkor a felfelé menő élre 2-est írunk, egyébként 1-est. Végül minden más nem fa élre írunk 2-est. Ekkor az algoritmussal azt értük el, hogy v -t leszámítva minden csúcs címkéjének paritása megegyezik a szintjének a paritásával.

Az algoritmus megismerése után annak a megmutatása maradt hátra a bizonyításból, hogy egyik él mentén sem lehet ütközés, azaz nem létezik $xy \in E$ él, amelyre $z(x) = z(y)$. Egyrészt a v -re illeszkedő egyetlen vw él mentén nem lehet ütközés, mert G szép, ezért w -re illeszkedik még legalább egy él, ami azt jelenti, hogy $z(v) < z(w)$.

Másrészt figyeljük meg, hogy a nem fa élek csak páros szintről páratlanra mehetnek a bejárás szerint, mivel G -ben csak páros hosszú körök lehetnek. Ezért nem fa élek mentén nem lehet ütközés a paritási feltételek miatt. Hasonlóan az eddig nem tárgyalt fa élek mentén sem. Tehát G -nek az algoritmus megadta egy megengedett $\{1, 2\}$ -élsúlyozását. $\square$

1.4. Következmény. Minden szép páros gráfban létezik olyan v csúcs, hogy v -ből elhagyva legfeljebb $\deg(v) - 1$ élt, a keletkező gráf 1-2 tulajdonságú.

Bizonyítás. Láthatjuk, hogy ha a G gráfunk 1-2 tulajdonságú, akkor az állítás fennáll. Ha pedig G nem 1-2 tulajdonságú, akkor az előző állítás alapján tudhatjuk, hogy G -nek nincs levél csúcsa, azaz $d(w) \geq 2$ minden $w \in V$ csúcsra.

Azt állítjuk, hogy létezik v csúcs G -ben, mely nem elvágó csúcs. Vegyünk egy tetszőleges feszítőfát — amely létezik mivel G összefüggő — és legyen v annak egy levél csúcsa. Könnyen látható, hogy v nem elvágó csúcs. Ebből kifolyólag elhagyhatunk $\deg(v) - 1$ darab v -re illeszkedő élt úgy, hogy a kapott G' gráf összefüggő legyen. Továbbá G' páros is és rendelkezik egy levél csúccsal, tehát az előző állítás alapján G' 1-2 tulajdonságú. $\square$

1.5. Megjegyzés. Ha a és b pozitívak és eltérő a paritásuk, akkor az 1.3. Állítás bizonyításában adott algoritmus egyszerű módosításával belátható, hogy az állítás kiterjed az a - b tulajdonságra is. A 1,2 esetet a [12]-es cikkben is említik bizonyítás nélkül.

2. Gráfok (a,b) súlyozásának nehézsége

2011-ben Dudek és Wajc [1] belátták, hogy NP-teljes annak az eldöntése, hogy egy tetszőleges gráf 1-2 tulajdonságú-e. Ebben a fejezetben kiterjesztjük ezen eredményüket: belátjuk, hogy az előző állítás tetszőleges, különböző a -ra és b -re fennáll.

Először az $a \neq -1$ és $b \neq 1$ esettel foglalkozunk, majd miután ezt megoldottuk egy alapjaiban eltérő redukciót fogunk adni a kivétel kezelésére.

A következő állítás mutatja, hogy megszoríthatjuk a feladatot arra az esetre, amikor a és b egészek és relatív prímek:

2.1. Állítás. *Legyen a, b racionális számpár. Ekkor minden $d \neq 0$ esetén egy megengedett $\{a, b\}$ -élsúlyozás kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető egy megengedett $(a \cdot d, b \cdot d)$ élsúlyozásnak.*

Ez az egyszerű állítás azért teljesül, mert egy élsúlyozás megengedettsége a d -vel való szorzás nem befolyásolja. Éppen ezért kézenfekvő a következő definíció. Azt mondjuk, hogy az a, b számpár *lényeges*, ha relatív prímek, a és b közül legfeljebb az egyik negatív, különbözőek és $|b| \geq |a|$. A 2.1. Állításból következik, hogy a következőkben $\{a, b\}$ -élsúlyozások tárgyalása esetén az általánosság elvesztése nélkül feltehetjük, hogy a és b lényeges számpár.

Rátérünk a dolgozat egyik fő eredményére.

2.2. Tétel. *Legyenek a, b fix különböző racionális számok és legyen G egy tetszőleges egyszerű gráf. Ekkor NP-teljes annak az eldöntése, hogy létezik-e megengedett $\{a, b\}$ -élsúlyozása G -nek.*

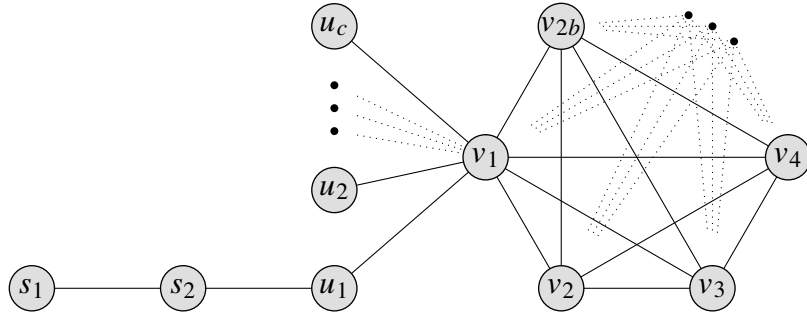
Ezt a tételt két részletben bizonyítjuk. A 2.3. Tétel bizonyítása Dudek és Wajc bizonyítását terjeszti ki az $a \neq -1$ és $b \neq 1$ esetre. Majd a 2.6. Tétel bizonyításában egy az előzőtől eltérő redukciót fogunk adni az $a = -1, b = 1$ eset kezelésére.

2.3. Tétel. *Legyen a, b fix, lényeges számpár, úgy, hogy $a \neq -1$ és $b \neq 1$ egyszerre teljesül. Ekkor NP-teljes annak az eldöntése, hogy létezik-e megengedett $\{a, b\}$ -élsúlyozása egy tetszőleges egyszerű G gráfnak.*

Bizonyítás. Az $a = 0, b = 1$ esetet megoldották [1]-ben, ezért feltehetjük, hogy $b \neq 1$. Először is vegyük észre, hogy a probléma NP-ben van, mert ha egy orákulum ad egy $\{a, b\}$ -élsúlyozást, akkor polinom időben leellenőrizhető, hogy az valóban megengedett-e. Tehát az NP-nehézség belátása maradt.

Hasonlóan az [1]-ben adott bizonyításhoz, mutatunk egy redukciót a jól ismert NP-teljes 3-SZÍN problémáról, ahol adva van egy $G' = (V', E')$ gráf és el akarjuk dönteni, hogy megszínezhető-e a csúcsai 3 színnel úgy, hogy bármely két szomszédos csúcsnak más színe legyen. A következőkben előállítunk egy G gráfot, amelynek pontosan akkor lesz megengedett $\{a, b\}$ -élsúlyozása, ha G' csúcsai megszínezhetőek három színnel.

A G gráf előállításához szükségünk lesz két segédgráfra. Az első a -kényszerítő segédgráfnak nevezzük és a következőképpen definiáljuk: Vegyünk egy teljes gráfot a $v_1, \dots, v_{2b}$ csúcsokon és adjunk hozzá c darab új levél csúcsot, amelyek v_1 -re illeszkednek, ahol $c = b - a$. Legyenek ezek a levél csúcsok $u_1, \dots, u_c$. Továbbá



1. ábra. Az a -kényszerítő segédgráf szemléltetése.

legyen s_1, s_2 két új csúcs és adjuk hozzá őket a gráfhoz, húzzunk be közöttük egy élt és s_2 -t kössük össze u_1 -gyel. Az 1. ábrán szemléltetjük az a -kényszerítő segédgráf konstrukcióját.

2.4. Állítás. Legyen H egy a -kényszerítő segédgráf. Ekkor H tetszőleges megengedett $\{a, b\}$ -élsúlyozásában az $s_1 s_2$ él súlya a . Továbbá ez az állítás akkor is fennáll, ha a segédgráfot hozzáragasztjuk egy tetszőleges másik gráfhoz az s_1 csúcsnál fogva.

Bizonyítás. Mivel a $v_2, \dots, v_{2b}$ csúcsok foka $2b - 1$, ezért a címkéjük az

$$\{xa + (2b - 1 - x)b : x \in \{0, \dots, 2b - 1\}\}$$

halmazból kerül ki bármilyen megengedett $\{a, b\}$ -élsúlyozásban. Továbbá bármely két csúcs címkéje különböző, egyébként ütközés lenne, mivel $v_2, \dots, v_{2b}$ egy teljes gráfot feszít. Ezenfelül a $(2b - 1)a$ és a $(2b - 1)b$ címke nem lehet egyszerre jelen a címkék között, mert ezek a címkék külön-külön az $x = 0$ és az $x = 2b - 1$ esethez tartoznak, ami azt jelenti az első esetben, hogy a címkéhez tartozó csúcsra csak a súlyú él illeszkedik, míg a második esetben azt jelentené, hogy az illeszkedő élek mind b súlyúak, melyek egyszerre nem fordulhatnak elő. Vegyük észre, hogy a lehetséges címkék száma $2b$, míg a szóban forgó csúcsok száma $2b - 1$, tehát a fentiekből következik, hogy a $(2b - 1)a$ és a $(2b - 1)b$ címkék közül pontosan az egyik fordul elő tetszőleges megengedett $\{a, b\}$ -élsúlyozásban.

Először is tekintsük azt az esetet, amikor $(2b - 1)a$ megjelenik a $v_2, \dots, v_{2b}$ csúcsok címkéje között és a $(2b - 1)b$ nem. Feltehetjük, hogy v_i címkéje

$$z(v_i) = (i - 1)a + (2b - i)b$$

minden $i = 2, \dots, 2b$ -re szimmetria miatt. Azt fogjuk belátni b szerinti indukcióval, hogy pontosan egy olyan $\{a, b\}$ -élsúlyozás létezik, amely ezeket a címkéket generálja, továbbá, hogy az összsúlya a v_1 -be érkező éleknek a $v_2, \dots, v_{2b}$ csúcsokból $ba + (b - 1)b$. A $b = 1$ esetre teljesül az állítás, mivel ekkor v_2 címkéjét a -ra írtuk elő, ezért az egyetlen őrá illeszkedő él súlyának is a -nak kell lennie. Indukció szerint tegyük fel, hogy $b \geq 2$ és az állítás teljesül $b - 1$ -re. Ekkor v_2 és v_{2b} címkéje $a + (2b - 2)b$, illetve $(2b - 1)a$ rendre. Emiatt a v_{2b} -re illeszkedő élek mindegyikének

a súlyúnak, és így a v_2 -re illeszkedő élek mindegyikének b súlyúnak kell lennie a v_2v_{2b} élt kivéve, mely él súlya már a -ra lett állítva. Figyeljük meg, hogy v_2 és v_{2b} kitörlésével alkalmazhatjuk az indukciós állítást a $v_3, \dots, v_{2b-1}$ csúcsokra, ahol a v_i csúcs címkéjét $(i-2)a + (2b-i-1)b$ -re írjuk elő. Tehát indukció szerint, létezik pontosan egy megengedett $\{a, b\}$ -élsúlyozása a kisebb gráfnak az előírt címkékkel, továbbá v_i -be a $v_3, \dots, v_{2b-1}$ csúcsokból $(b-1)a + (b-1-1)b$ összsúlyú él érkezik. Visszatéve a v_2 és v_{2b} csúcsokat azt kapjuk, hogy egyetlen élsúlyozás létezik az előírt címkékkel, mivel a v_2 -re és v_{2b} -re illeszkedő élek súlyai egyértelműen meghatározottak amint láttuk fentebb, a címke előírásnak köszönhetően és a többi él súlyának egyértelműsége pedig az indukciós lépésből következik. Ezenfelül a $v_2, \dots, v_{2b}$ csúcsokból a v_1 -be érkező élek összsúlya $(b-1)a + (b-1-1)b + a + b = ba + (b-1)b$, amit szeretnénk volna belátni.

Ezekből azonnal következik, hogy az u_jv_1 élek súlyának mindenképpen b -nek kell lennie minden $j = 1, \dots, c$ -re, mivel ha ezen élek közül pontosan k darabot a súlyúra állítanánk, akkor v_1 címkéje $ba + (b-1)b + ka + (b-a-k)b = ka + (2b-1-k)b$ lenne, amely csak akkor nem ütközik a $v_2, \dots, v_{2b}$ csúcsok címkéivel, ha $k = 0$. Összefoglalva, ez azt jelenti, hogy az u_jv_1 élek súlya b minden $j = 1, \dots, c$ -re.

A második esetben a $(2b-1)b$ címke szerepel a $v_2, \dots, v_{2b}$ csúcsok címkéi között és a $(2b-1)a$ nem. Hasonlóan az előző eset bizonyításához, belátható b szerinti indukcióval, hogy az összsúlya a v_1 -be érkező éleknek a $v_2, \dots, v_{2b}$ csúcsokból $bb + (b-1)a$. De hasonlóan az előző esethez, ez azt jelenti, hogy az összes u_jv_1 él súlyának b -nek kell lennie, különben létezne egy $u \in v_2, \dots, v_{2b}$ csúcs, hogy a címkéje megegyezne v_1 címkéjével.

Figyeljük meg, hogy mindkét esetben az u_1v_1 él súlya b . Ez azt jelenti, hogy az s_1s_2 él súlyának muszáj a -nak lennie, míg az s_2u_1 él súlyát is mindig meg tudjuk úgy választani, hogy ne történjen ütközés. Továbbá nem használtuk azt a tényt, hogy s_1 csúcs egy levél, ezért az állítás második része is következik az eddigiekből, amivel beláttuk az állítást. $\square$

Vegyük észre, hogy kitörölve az s_1, s_2 csúcsokat és a rájuk illeszkedő éleket egy úgynevezett b -kényszerítő segédgráfot kapunk, amelyben a v_1u_1 él súlyának muszáj b -nek lennie minden megengedett $\{a, b\}$ -élsúlyozásban.

A visszavezetéshez még egy segédgráf osztályra, az úgynevezett k -kizáró segédgráfokra, lesz szükségünk.

Ezen segédgráfokat a fentebb definiált a -kényszerítő és b -kényszerítő segédgráfok segítségével fogjuk definiálni. A k -kizáró segédgráfnak lesz egy r gyöker csúcsa, amelyet egyesíteni fogunk az eredeti gráf egy u csúcsával, elérve, hogy az u foka ne lehessen k . Adott a -ra, b -re, $k = xa + yb$ -re ($x, y \in \mathbb{Z}_+$), a k -kizáró segédgráf konstrukciója a következőképpen néz ki:

Induljunk ki az r gyöker csúcsból és két további csúcsból, u -ból és v -ből. Adjuk hozzá az ru, uv és az rv éleket, úgy, hogy egy háromszöget kapjunk. Továbbá adjuk hozzá

az a -kényszerítő segédgráf $(x - 1)$ darab és a b -kényszerítő segédgráf $(y - 1)$ darab másolatát oly módon, hogy az előbbi segédgráfok s_1 , míg az utóbbi segédgráfok u_1 csúcsait egyesítsük u -val. Ismételjük meg ugyanezt az eljárást az u csúcs v csúcsra cserélésével.

Figyeljük meg, hogy az r csúcs címkéje semmiképpen sem lehet k , mivel bárhogyan is súlyozzuk az uv élt, az ru és rv élek közül pontosan egynek lesz a súlya a , míg a másiknak b . Továbbá az is könnyen látható, hogy ez a segédgráf nem tilt semmilyen más címkét r -ben k -n kívül — ami a későbbiekben lesz hasznos, amikor a segédgráfot az eredeti gráfhoz ragasztjuk.

Most már minden eszközünk megvan ami szükséges ahhoz, hogy definiáljuk azt a G gráfot, melynek akkor és csak akkor van megengedett $\{a, b\}$ -élsúlyozása, ha G' megszínezhető 3 színnel. Legyen $G' = (V', E')$ és $n = |V'|$. Először nézzük az $n \leq 2$ esetet. Ekkor G' 3 színnel színezhető és G pedig legyen az üres gráf, ez is mindig megengedetten $\{a, b\}$ -élsúlyozható. Tehát feltehetjük, hogy $n \geq 3$. Induljunk ki G' -ből, az eredeti gráfból, és ki fogjuk egészíteni további élekkel és csúcsokkal, hogy megkapjuk G -t a következők szerint.

A G definiálásához módosítsuk G' -t a következőképpen. Minden $v \in V$ -re:

1. Kössük össze v -t két új csúccsal, s_v -vel és t_v -vel.
2. Legyen U_v egy új $n - 1 - d_{G'}(v)$ méretű csúcshalmaz és kössük össze v -t minden U_v -beli csúccsal.
3. Adjunk hozzá $n - 1$ darab új k -kizáró gráfot, minden $k = xa + yb$ -re, ahol $x + y = 3n - 1$ teljesül és y az $n + 2$ -től egészen $2n$ -ig minden egész értéket felvesz. Egyesítsük a k -kizáró segédgráfok gyökereit a v csúccsal.

Vizsgáljuk meg, hogy G valóban polinomiális időben előállítható. Minden v -re: **1.**, **2.** és **3.** rendre $O(1)$, $O(n)$, és $O(n^2)$ időt emészt fel, mivel a k -kizáró segédgráfok előállításához

$$(n - 1) + n + \dots + (2n - 3) = \frac{3n - 4}{2} \cdot (n - 2) = O(n^2) \text{ darab } a\text{-kényszerítő és}$$

$$(n + 2) + \dots + 2n = \frac{3n + 2}{2} \cdot (n - 2) = O(n^2)$$

darab b -kényszerítő segédgráfra, plusz még segédgráfonként $O(1)$ új élre van szükség, azaz összeségében plusz $O(n)$ élre. Emellett a kényszerítő segédgráfok $O(b + c)$ méretűek (ahol $c = b - a$), és mivel b és a fixálva vannak, ezeket konstans időben elő tudjuk állítani. Tehát a gráf mérete polinomiális.

Ezután kimondunk egy nagyon fontos lemmát, ami arra vonatkozik, hogy az eredeti G' gráfban is szereplő csúcsok címkéje mekkora lehet egy tetszőleges megengedett élsúlyozásban.

2.5. Lemma. Legyen $G = (V, E)$ a fentebb előállított gráf. Ekkor G minden megengedett $\{a, b\}$ -élsúlyozásra teljesül, hogy minden $v \in V$ -re:

$$z(v) \in \{2na + (n-1)b, (2n-1)a + nb, (2n-2)a + (n+1)b\}.$$

Bizonyítás. Legyen $v \in V \cap V'$ egy tetszőleges csúcs. Ekkor $w(s_v v) + w(v t_v) \in \{2a, a+b, 2b\}$ természetesen teljesül, ahol s_v és t_v az 1.-ben definiált csúcsok. A G gráf konstrukciójának definíciója szerint $U_v \cup (V \cap V')$ -ből $n-1$ él megy v -be. Végül pedig a k -kizáró segédgráfok mindegyike $a+b$ -at ad hozzá $z(v)$ -hez, és $n-1$ van belőlük. Mivel más él nem illeszkedik v -re, ezekből következik, hogy:

$$\begin{aligned} \{2a, a+b, 2b\} + \{xa + yb \mid x+y = n-1, y=0, \dots, n-1\} + (a+b)(n-1) \\ = \{xa + yb \mid x+y = 3n-1, y=n-1, \dots, 2n\}, \end{aligned}$$

ahol két vagy több halmaz összegén most azt a halmazt értjük, amelynek az elemei úgy állíthatók elő, hogy minden összeadandó halmazból kivesszünk egy-egy elemet, majd azokat összeadjuk.

Figyeljük meg, hogy 3. szerint a v -re illeszkedő k -kizáró segédgráfok miatt $z(v) \notin \{xa + yb \mid x+y = 3n-1, y=n+2, \dots, 2n\}$. Ebből kapjuk, hogy

$$z(v) \in \{2na + (n-1)b, (2n-1)a + nb, (2n-2)a + (n+1)b\},$$

amivel beláttuk a lemmát. □

Visszamaradt annak a belátása, hogy G' csúcsai akkor és csak akkor színezhetőek 3 színnel ha G -nek létezik megengedett $\{a, b\}$ -élsúlyozása.

Először tegyük fel, hogy G' csúcsai megszínezhetőek 3 színnel. Ekkor feltehető az általánosság megszorítása nélkül, hogy a három szín amellyel megszínezhetőek a csúcsok rendre a $2na + (n-1)b$, $(2n-1)a + nb$, és a $(2n-2)a + (n+1)b$ címkék. Megmutatjuk, hogy ekkor G élei megsúlyozhatóak úgy az $\{a, b\}$ halmazból, hogy az indukált címkék megegyezzenek az eredeti színükkel, így látva, hogy létezik megengedett $\{a, b\}$ -élsúlyozás. Súlyozzuk tehát az éleket a következőképpen: Minden $e \in E \cap E'$ -re, azaz az eredeti gráf éleire, legyen $w(e) = a$. Minden e élre, amely U_v -beli csúcsra illeszkedik legyen $w(e) = a$. Továbbá, minden $v \in V \cap V'$ -re

- ha $\chi(v) = 2na + (n-1)b$, akkor $w(vs_v) = w(vt_v) = a$;
- ha $\chi(v) = (2n-1)a + nb$, akkor $w(vs_v) = a$, $w(vt_v) = b$;
- egyébként $\chi(v) = (2n-2)a + (n+1)b$, és ekkor $w(vs_v) = w(vt_v) = b$,

ahol $\chi(v)$ alatt a v -hez rendelt színt értjük.

Az eddigiekben adott részleges élsúlyozás kiterjeszthető az összes többi élre, mivel láttuk, hogy a k -kizáró segédgráf egyedül a k címkét tiltja meg a gyökércsúcsában.

Emellett az s_2u_1 él súlya minden a -kényszerítő segédgráfban megválasztható megfelelőképpen, és hasonlóan a b -kényszerítő segédgráf élei is megsúlyozhatóak két különbözőféleképpen — ami közül az egyik mindenképpen megengedett lesz.

Most belátjuk, hogy a fentiekben kapott élsúlyozás valóban megengedett. Bármely $v \in V' \cap V$ -be $n-1$ él jön U_v -ből vagy a G' gráf belsejéből a súllyal. Továbbá minden k -kizáró segédgráfból két él jön v -be: egy a súlyú, egy b súlyú, és $n-1$ van belőlük összesen. Így az s_v -ből és t_v -ből jövő élek súlyának beállításával elérhetjük, hogy $z(v) = \chi(v)$. Láttuk fentebb, hogy sem a segédgráfokban, sem a segédgráfokkal nem lesz ütlözés, mert azok élei megválaszthatóak úgy, hogy elkerüljük az ütközést. Végül minden maradék csúcs foka 1, míg a szomszédjaik foka szigorúan nagyobb mint 1. Tehát $z(u) \neq z(v)$ bármely uv élre G -ben, azaz w egy megengedett $\{a, b\}$ -élsúlyozás.

Másodszor pedig ha G' nem színezhető 3 színnel, akkor a 2.5. Lemma alapján G -nek nem létezhet megengedett $\{a, b\}$ -élsúlyozása. $\square$

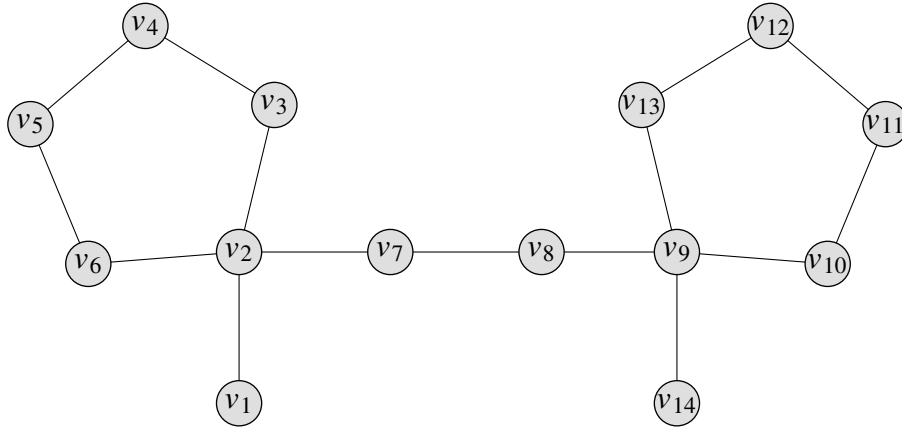
Láthattuk, hogy a fenti tétel bizonyításához feltettük, hogy a, b nem egyezik meg a $-1, 1$ párral. Ezt azért kellett feltenni, mert a visszavezetés tetszőleges a, b -re működik, amelyekhez tudunk megfelelő segédgráfot gyártani. Két esetben semmitmondóak a kényszerítő segédgráfok, 1) $b = 1, a = 0$ 2) $b = 1, a = -1$. Az első esetet belátta Dudek és Wajc, tehát csak a második marad hátra. Ezen eset külön vizsgálatának szükségességét a következő megfigyelés is indokolja: Ha a $w \{-1, 1\}$ -élsúlyozás megengedett, akkor a negáltja, a $-w$ élsúlyozás is megengedett. Az általános a, b esetén ez nem tehető fel, már csak azért sem mert $b \neq -a$.

Az előbbi megfigyelés alapján az eredetitől eltérő visszavezetést kell adnunk, amely az említett szimmetria tudatában is helytálló. Most belátjuk a $\{-1, 1\}$ esetet.

2.6. Tétel. *Legyen G egy tetszőleges gráf. Ekkor annak eldöntése is NP-teljes, hogy létezik-e G -nek megengedett $\{-1, 1\}$ -élsúlyozása.*

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy a probléma NP-ben van, hiszen egy adott élsúlyozásról polinom időben könnyen eldönthető, hogy megengedett-e. Az NP-nehézséget úgy fogjuk belátni, hogy adunk egy visszavezetést az NP-teljes NAE3SAT3 nyelvről. Ebben a problémában adott egy konjunktív normálforma, amelyben minden klóz mérete három, és minden változó pontosan 3-szor szerepel. A feladat, hogy találjuk meg a változóknak egy olyan kiértékelését, hogy minden klózban van legalább egy hamis és legalább egy igaz literál. A feladat NP-nehézsége azonnal következik a Monoton NAE-3SAT probléma NP-teljességéből, ahol minden változó pontosan 3 klózban szerepel, egyik változónak sem szerepel a tagadása és minden klóz 2 vagy 3 méretű [23].

Az alábbiakban meg fogunk adni egy G gráfot melynek akkor és csak akkor van megengedett $\{-1, 1\}$ -élsúlyozása ha a NAE-3SAT3 feladat adott példányának van



2. ábra. A $\{-3, 3\}$ -kizáró segédgráf.

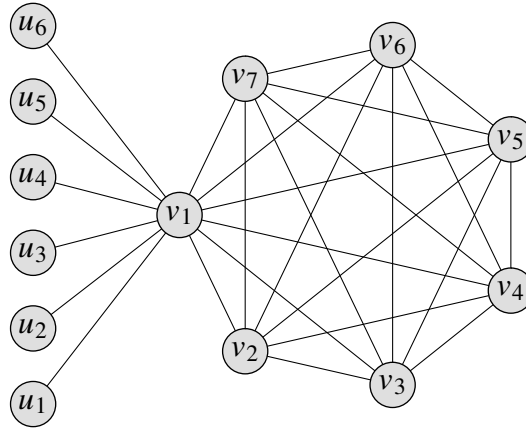
megengedett megoldása. Ezen G gráf előállításához a következő két segédgráfra lesz szükségünk.

Az első segédgráfot $\{-3, 3\}$ -kizáró segédgráfnak fogjuk nevezni, mely segédgráfot a 2. ábrán megtekinthetjük. Azt állítjuk, hogy a v_2 illetve a v_9 csúcsok közül pontosan az egyik címkéje -4 , míg a másiké 4 minden megengedett $\{-1, 1\}$ -élsúlyozásban. A v_7v_8 él biztosítja, hogy a v_2v_7 él, és a v_8v_9 él súlya különböző, azaz $w(v_2v_7) = -w(v_8v_9)$. Szimmetriai okokból feltehetjük, hogy $w(v_2v_7) = 1$. Figyeljük meg, hogy $w(v_1v_2) = 1$ — különben a $w(v_1v_2) + w(v_2v_7) = 0$ egyenlőségből az következne, hogy v_2 -re illeszkedő 5 hosszú körnek is van megengedett $\{-1, 1\}$ -élsúlyozása, ami nem lehetséges. Egyszerű esetszétválasztással megmutatható, hogy $w(v_2v_3) = w(v_2v_6) = 1$:

- ha $w(v_2v_3) = w(v_2v_6) = 1$, akkor az élek alábbi súlyozásával egy megengedett élsúlyozást kapunk: $w(v_3v_4) = 1$, $w(v_4v_5) = -1$ és $w(v_5v_6) = -1$.
- ha $w(v_2v_3) \neq w(v_2v_6)$, akkor tegyük fel, hogy $w(v_2v_3) = 1$ és $w(v_2v_6) = -1$. A $w(v_1v_2) = 1$ és a $w(v_2v_7) = 1$ -ből következik, hogy $w(v_3v_4) = -1$ és $w(v_4v_5) = -1$, de ekkor sem a $w(v_5v_6) = 1$, sem a $w(v_5v_6) = -1$ súlyválasztás nem megengedett.
- ha $w(v_2v_3) = w(v_2v_6) = -1$, akkor a $w(v_3v_4) = -1$ és a $w(v_4v_5) = 1$ egyenlőségeknek teljesülnie kell és így sem a $w(v_5v_6) = 1$, sem a $w(v_5v_6) = -1$ választás nem megengedett.

Tehát a fentiekből a $w(v_2v_3) = w(v_2v_6) = 1$ következik. Továbbá ez azt jelenti, hogy $z(v_2) = 4$ és szimmetria miatt $z(v_9) = -4$, azaz a v_2 és v_9 csúcsok közül pontosan az egyik címkéje 4 , míg a másiké -4 minden megengedett $\{-1, 1\}$ -élsúlyozásban, ahogyan állítottuk.

Szükségünk lesz egy második segédgráfra is, amelyet 6-egyenlő segédgráfnak fogunk nevezni. Ezt a segédgráfot a 3. ábrán tekinthetjük meg. Azt állítjuk, hogy

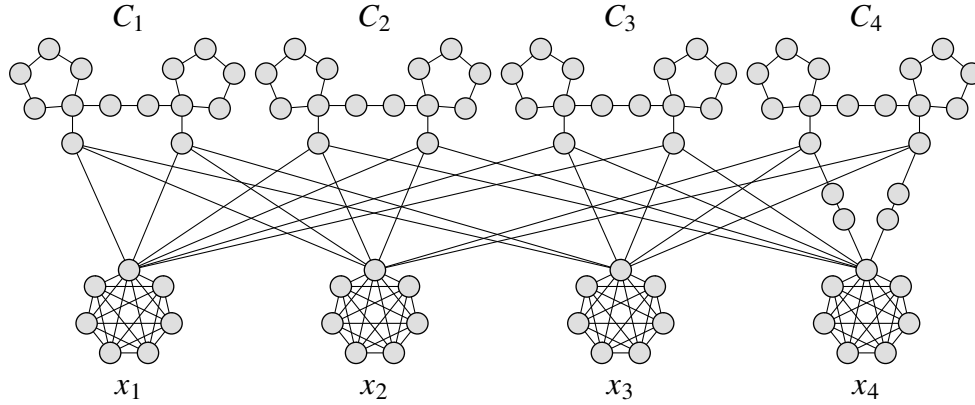


3. ábra. A 6-egyenlő segédgráf.

minden megengedett $\{-1, 1\}$ -élsúlyozásban mind a 6 levélnek a súlya 1 vagy pedig az összesnek -1 . Először is, figyeljük meg, hogy a $v_2, \dots, v_7$ csúcsok címkéi különbözőek, és a $\{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$ halmazból kerülnek ki. Továbbá, hogy a -6 és a 6 címke nem szerepelhet egyszerre, mert nem lehet egyszerre két olyan csúcs, hogy az egyikre illeszkedő élek súlya csupa 1 , míg a másira illeszkedőeké csupa -1 . Ez ezenfelül azt is jelenti, hogy a $-4, -2, 0, 2, 4$ címkék mindegyikének elő kell fordulnia. Tegyük fel, hogy a 6 -os címke szerepel a címkék között a -6 -os pedig nem. Szimmetria miatt feltehetjük, hogy a $v_2, \dots, v_7$ csúcsok címkéi rendre a $-4, -2, 0, 2, 4, 6$. Ez azt is jelenti, hogy v_i -re illeszkedő 6 él közül pontosan i él olyan, hogy a súlya 1 minden $i = 2, \dots, 7$ -re. Ebből azonnal következik, hogy a v_1 és $v_2, \dots, v_7$ között menő élek súlyainak az összege 0 , és így a v_1 -re illeszkedő levél élek súlyainak az összegének muszáj -6 -nak lennie — különben ez az összeg a $\{-4, -2, 0, 2, 4, 6\}$ halmazba esne, mely halmaznak minden eleme megegyezik a $v_2, \dots, v_7$ csúcsok címkéinek valamelyikével, ami azt jelentené, hogy ütközés alakulna ki.

Tehát láttuk, hogy ennek a 6-egyenlő segédgráfnak létezik olyan megengedett $\{-1, 1\}$ -élsúlyozása, hogy mindegyik levelének -1 a súlya és jegyezzük meg, hogy ennek a megengedett élsúlyozásnak az ellentettje is — ahol minden levél súlya 1 — egy megengedett élsúlyozás.

A továbbiakban megadjuk annak a G gráfnak a konstrukcióját, melynek akkor és csak akkor van megengedett $\{-1, 1\}$ -élsúlyozása, ha a NAE-3SAT3 feladat adott példánya megoldható. Jelölje az $x_1, \dots, x_n$ az adott CNF változóit és jelölje $C_1, \dots, C_k$ a klózatokat. Minden x_i változóra vegyünk a 6-egyenlő segédgráf egy másolatát, és minden C_j klózra pedig vegyünk a $\{-3, 3\}$ -kizáró segédgráf egy másolatát. Minden x_i változóra egyesítsük a hozzá tartozó 6-egyenlő segédgráf egy levél csúcsát azon $\{-3, 3\}$ -kizáró segédgráfok egy-egy levél csúcsával, melyekhez tartozó klózok tartalmazzák x_i -t vagy x_i -nek a negáltját. Majd ismételjük meg ezt az eljárást, csak most a 6-egyenlő segédgráf leveleit a megfelelő $\{-3, 3\}$ -kizáró segédgráfok másik levelével egyesítsük. Végül, ha valamelyik x_i változó negálva szerepel a C_j klózban,



4. ábra. Illusztráció a 2.6. Tétel bizonyításában látott konstrukcióra a $C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge C_4$ NAE-3SAT3 feladat példányra, ahol $C_1 = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$, $C_2 = (x_1 \vee x_2 \vee x_4)$, $C_3 = (x_1 \vee x_3 \vee x_4)$ és $C_4 = (x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4)$.

akkor az ehhez a párhoz tartozó két élt osszuk fel még két ponttal, így a két élt két három hosszú útra cserélve. A 4. ábrán bemutatjuk ezt a konstrukciót egy példán keresztül.

A bizonyítás befejezéséhez megmutatjuk, hogy a fentiekben konstruált G gráfnak pontosan akkor létezik megengedett $\{-1, 1\}$ -élsúlyozása, ha az adott példány a NAE-3SAT3 feladatnak megoldható.

Először is tegyük fel, hogy a NAE-3SAT3 példány megoldható. Minden x_i változóra állítsuk be a hozzá tartozó 6-egyenlő segédgráf 6 levél élének — mely élek G -ben már nem levél élek — a súlyát 1-re, ha az x_i -hez rendelt igazságérték igaz, és -1 -re, ha ez az érték hamis. A 6-egyenlő segédgráf maradék élei megsúlyozhatóak megengedetten amint azt már láttuk, mivel a levél élek súlyait mind 1-re vagy -1 -re állítottuk. Az összes három hosszú utat, amelyek úgy jöttek létre, hogy élt osztottunk fel a következőféleképpen súlyozzuk: Az út $\{-3, 3\}$ -kizáró segédgráf levél csúcsára illeszkedő élének a súlya legyen az ellentettje az út 6-egyenlő segédgráfhoz tartozó élének a súlyának, amelyet az előző lépésben beállítottunk. Az út középső élének a súlyát később adjuk meg. Mivel minden C_j klónnak kell tartalmaznia legalább egy igaz és legalább egy hamis literált, a címkéje a $\{-3, 3\}$ -kizáró segédgráfok levél csúcsainak — melyek már szintén nem levél csúcsok G -ben — csak a $\{-2, 0, 2\}$ halmazból kerülhetnek ki. Éppen ezért az eddigi részleges élsúlyozásunk kiterjeszthető a $\{-3, 3\}$ -kizáró segédgráfok éleire is megengedetten. Természetesen az előbbiekben tárgyalt 3 hosszú utak középső élének a súlyát is meg tudjuk választani úgy, hogy ne keletkezzen ütközés ezen választás után (mivel a két lehetséges súly közül legfeljebb egyet gátol a $\{-3, 3\}$ -kizáró segédgráf levél csúcsa). Ezzel beláttuk az első irányt, mivel megadtuk a G gráfnak egy megengedett $\{-1, 1\}$ -élsúlyozását.

A másik irány igazolásához tegyük fel, hogy meg van adva a gráf egy megengedett $\{-1, 1\}$ -élsúlyozása. Ekkor minden i -re, az x_i változó értékét állítsuk igazra, ha a

hozzá tartozó 6-egyenlő segédgráf összes levél élének a súlya 1, különben, a konstrukció szerint ezen értékek -1 -ek, és ekkor állítsuk x_i -t hamisra. Most megmutatjuk, hogy ezen egyszerű választással egy megoldását kapjuk a NAE-3SAT3 feladatnak. Ehhez azt kell megmutatni, hogy minden C_j klóz tartalmaz legalább egy hamis és legalább egy igaz literált. Legyen u és v azon $\{-3, 3\}$ -kizáró segédgráf két levél csúcsa, amelyik a C_j klózhoz tartozik. Ekkor a segédgráf konstrukciója alapján az u csúcsra illeszkedő élek súlyainak az összege nem lehet sem 4, sem -4 . Ez az állítás ugyanúgy fennáll a v csúcs esetén is. Ez azt jelenti, hogy az illeszkedő élek súlyai között szerepel az 1 és a -1 is legalább egyszer. Tekintsünk egy illeszkedő élt, és legyen x_i az a változó, amelyik 6-egyenlő segédgráfiához tartozik ez az él. Ha az él nem volt felosztva, akkor pontosan akkor 1 a súlya ha x_i értéke igaz. Azonban, ha az él fel volt osztva, akkor pedig pontosan akkor lesz a súlya 1, ha x_i -t hamisra állítottuk. Mivel ez az él akkor és csak akkor van felosztva, hogyha x_i negálva szerepel C_j -ben, nem létezhet olyan klóz, amelyben csak igaz, vagy csak hamis literálok vannak. Ezzel beláttuk a tételt. $\square$

3. Megkezdett súlyozás befejezhetősége

Thomassen, Wu és Zhang [2] eredménye szerint polinom időben eldönthető, hogy létezik-e egy páros gráfnak $\{1, 2\}$ -élsúlyozása — ugyanez a feladat tetszőleges gráfra NP-teljes [1]. Ennek kapcsán megkezdjük annak a vizsgálatát, hogy mikor fejezhető be egy már megkezdett $\{a, b\}$ -élsúlyozás (ennek speciális esete az $\{1, 2\}$ -élsúlyozás) páros gráfokon, ahol egy megkezdett $\{a, b\}$ -élsúlyozás befejezhetősége alatt azt értjük, hogy néhány élnek előre megadjuk a súlyát, és arra vagyunk kíváncsiak, hogy így befejezhető-e megengedetten az élsúlyozás. Belátjuk, hogy ezen feladat nemcsak tetszőleges gráfokra, hanem páros gráfokra is NP-teljes, viszont polinom időben megoldható fákra tetszőleges racionális a, b pár esetén. Először is vázoljuk az alapfeladatot, amellyel legjobb tudásunk szerint az irodalom még nem foglalkozott.

3.1. Feladat. *Adott egy G gráf, és néhány éle meg van súlyozva az $\{a, b\}$ halmazból, ahol a és b két különböző racionális szám. A kérdés, hogy befejezhető-e ez a súlyozás, azaz tudunk-e a G gráfnak nem súlyozott éleihez olyan súlyokat rendelni az $\{a, b\}$ halmazból, hogy az így kapott $\{a, b\}$ -élsúlyozás megengedett legyen.*

3.2. Tétel. *A 3.1. Feladat eldöntése NP-teljes páros gráfokra.*

Bizonyítás. A visszavezetést az NP-teljes foksám-előírt részgráf feladatról [24] fogjuk adni. Ebben a problémában a G gráfnak egy olyan $H' = (V, E')$ részgráfiáját keressük, amelynek minden v csúcsának a foka egy előre definiált $F_v \subseteq \{0, \dots, d_G(v)\}$ halmazból kerül ki, azaz $d_{H'}(v) \in F_v$, minden $v \in V$ -re. Jelölje $v_1, \dots, v_n$ a csúcsait V -nek.

Ebben a feladatban az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy G páros. Különben megtehetjük azt, hogy minden élt helyettesítünk egy 2 hosszú úttal. Az így

kapott gráf páros, emellett az eredeti F_{v_i} -ket megtartva és az új csúcsok megengedett fokszámhalmazát $\{0, 2\}$ -re állítva az eredeti feladattal ekvivalens feladatot kapunk.

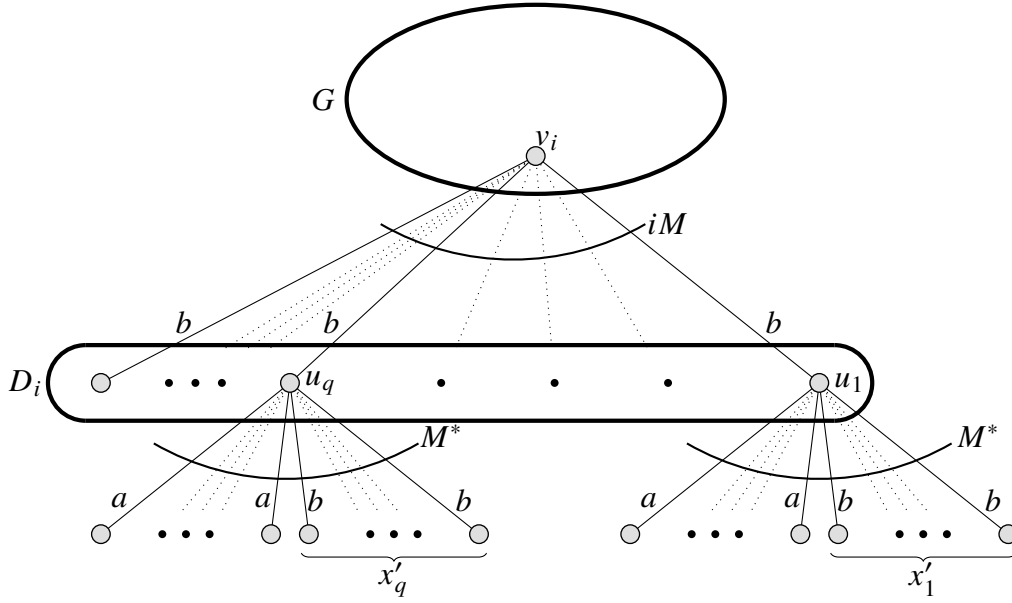
A következőkben a fokszám-előírt részgráf problémának egy adott G, F példányához, konstruálni fogunk egy G' gráfot és egy megkezdett $\{a, b\}$ -élsúlyozást úgy, hogy ez a megkezdett élsúlyozás pontosan akkor befejezhető, ha a fokszám-előírt részgráf feladat megoldható G, F -re. Tegyük fel, hogy a és b lényegesek.

Először is jegyezzük meg, hogy ha a megkezdett gráfhoz egy orákulum ad egy befejezést, akkor polinom időben leellenőrizhető, hogy valóban megengedett-e az élsúlyozás, azaz a probléma NP-ben van.

Térjünk át G' előállítására. Induljunk ki G egy másolatából, majd minden $v_i \in V$ -re módosítsuk G' -t a következőképpen. Adjunk hozzá új iM darab v_i -be csatlakozó levelet, ahol $M = 2n$, és mindegyik új élre írjuk elő a b súlyt. Legyen D_i ezen újonnan hozzáadott csúcsok halmaza. Minden $x \in \{0, 1, \dots, d_G(v_i)\}$ -re, ha $x \notin F_{v_i}$, akkor válasszunk ki az előbbiekben felvett levél csúcsok közül egy olyat, ami nem lett még kiválasztva, legyen ez u (tudjuk, hogy ilyen u csúcs mindig létezik, mert $|\overline{F_{v_i}}| \leq M$), és akasszunk rá $(d_G(v_i) + iM - 1)$ új levelet u -ra. Ezen új levél élek közül rögzítsük $(iM + x - 1)$ darabnak a súlyát b -re, míg a maradék $(d_G(v_i) - x)$ darabnak a -ra. Az 5. ábrán megtekinthetjük a konstrukciót egy adott v_i -re. Természetesen G' előállítható polinomiális időben. A bizonyítás hátra levő részében belátjuk, hogy G' megkezdett élsúlyozása pontosan akkor fejezhető be megengedetten, ha a fokszám-előírt részgráf feladat megoldható G -re és F -re.

Elsőnek tegyük fel, hogy G -re és F -re meg tudjuk oldani a fokszám-előírt részgráf feladatot, és a megoldás legyen a H részgráf. Ahhoz, hogy megkapjuk G' -nek egy megengedett $\{a, b\}$ -élsúlyozását, állítsuk be G' súlyozatlan éleinek súlyát — melyek pontosan a G -beli élek G' konstrukciója szerint — a következőképpen: ha az e él része H -nak akkor $w(e)$ legyen b , egyébként legyen a . Vizsgáljuk meg, hogy az így kapott $\{a, b\}$ -élsúlyozás valóban megengedett. A G' gráf G -beli csúcsai között nem lehet ütközés, mert M -et $2n$ -nek definiáltuk ezen ütközések elkerülése végett. Nézzük meg, hogy M valóban jó választás. Elég azt megmutatni, hogy semelyik kettő egymást követő csúcs v_i és v_{i+1} között nincsen ütközés. A v_i csúcs legnagyobb lehetséges címkéje $U_i = (2in + n - 1)b$, mivel az az újonnan hozzáadott élék hozzájárulása mindenképpen $2nib$, míg a gráf belsejéből érkező éleké legfeljebb $(n - 1)b$. Ezzel szemben a v_{i+1} csúcs legkisebb lehetséges címkéje 1) $L_{i+1} = 2(i + 1)nb + a$, ha a nemnegatív vagy 2) $L_{i+1} = (2n(i + 1)b - (n - 1)b) = (2in + n + 1)b$, ha a negatív — mely érték a $|a| = |b|$ választással érhető el. Láthatjuk, hogy mindkét esetben L_{i+1} szigorúan nagyobb, mint U_i , azaz $z_{v_{i+1}} > z_{v_i}$ minden megengedett $\{a, b\}$ -élsúlyozásban, mivel $L_{i+1} \leq z_{v_{i+1}}$ és $U_i \geq z_{v_i}$. Emellett azt, hogy a v_i és a D_i -ben lévő csúcsok között nem lesz ütközés onnan tudhatjuk, hogy pont olyan x -eket blokkolunk, melyekhez tartozó címke nincsen benne F_{v_i} -ben. Pontosabban v_i címkéje $bd_H(v_i) + a(d_G(v_i) - d_H(v_i)) + biM$ és a D_i -ben lévő csúcsoké

$$\{by + a(d_G(v_i) - y) + biM : y \in \{0, \dots, d_G(v_i)\} \setminus F_{v_i}\}$$



5. ábra. A G' gráf konstrukciójának illusztrációja egy fix v_i csúcsra. Minden uv_i élnek, ahol $u \in D_i$, a súlya b . Minden $x \in \overline{F_{v_i}}$ -re, ahol $q = \overline{F_{v_i}}$, $x' = (iM + x - 1)$, ott $M^* = d_G(v_i) + iM - 1$ darab új levél él lesz hozzáadva különböző u_i csúcsokhoz a D_i -ben és a súlyaik rögzítve lesznek, ahogyan leírjuk az alábbiakban.

vagy b a konstrukció szerint. Ez a halmaz nem tartalmazza v_i címkéjét, mert $d_H(v_i) \in F_{v_i}$. Amelyekre nem akasztottunk, azok b -t blokkolnak, de mivel $w(v_i) \geq nb$ minden i -re, ezért ott sem lehet probléma. Ezzel az egyik irányt beláttuk.

Most tegyük fel, hogy G' súlyozása befejezhető megengedetten. Ekkor legyen H a G gráf b súlyú élei által feszített részgráfja. Az így kapott H részgráf egy megoldása a foksám-előírt részgráf problémának, mivel ahogy a fentebb láttuk az nem megengedett, hogy a v_i csúcsnak pontosan $x + iM$ éle legyen b súllyal ha x nem része F_{v_i} -nek, így $d_H(v_i)$ -nek muszáj benne lennie az F_{v_i} halmazban minden i -re. $\square$

3.1. Megkezdett súlyozás fákon

Miután láttuk a 3.2. Tételben, hogy páros gráfokon NP-teljes a 3.1 Probléma, áttérünk egy egyszerűbb gráfosztály, a fák vizsgálatára befejezhetőség szempontjából. Ebben az alfejezetben adunk egy polinomiális algoritmust, amely tetszőleges a, b élsúlypárra befejez egy elkezdett élsúlyozást, vagy pedig megállapítja, hogy az nem befejezhető. Ennek az algoritmusnak egy speciális eseteként egy új eljárást kapunk annak eldöntésére, hogy egy fa 0-1 tulajdonságú-e, melyet először [4]-ben mutattak meg, hogy polinom időben megtehető.

Először is, mutassuk meg, hogy megkezdett élsúlyozás nélkül, speciális a, b -re elég egyszerű a feladat.

3.3. Állítás. Minden nem egy élű fa 1-2 tulajdonságú.

Ez az állítás egyszerűen következik az 1.3. Állításból.

3.4. Megjegyzés. Ezen állítás tetszőleges pozitív a, b -re is működik, hasonló bizonyítással. Viszont az adott algoritmus nem feltétlen működik, ha a 0 vagy negatív, sőt nem is működhet minden esetben, mivel van olyan fa — például egy 5 hosszú út — ami nem 0-1 tulajdonságú.

Ezután térjünk át a megkezdett esetre, ahol egy dinamikus programozási algoritmust fogunk adni.

3.5. Tétel. A 3.1. Feladat polinom időben megoldható fákra tetszőleges a, b esetén.

Bizonyítás. A bizonyításban megadunk egy dinamikus programozási algoritmust, amely befejezi az adott elkezdett élsúlyozást, vagy megállapítja, hogy az nem befejezhető.

Jelöljük ki a fa egyik levél csúcsát a fa gyökerének és jelölje T_v a fa v alatti részfáját. Minden uv élre legyen $L_{uv} \subseteq \{a, b\}$ azon súlyok halmaza amelyek megengedettek az elkezdett élsúlyozás alapján az uv élen. Azt akarjuk eldönteni, hogy a T_v részgráf befejezhető-e megengedetten, feltéve, hogyha lerögzítjük az uv él súlyát és a v -re illeszkedő élek súlyainak összegét, ahol az u a gyökérhez közelebbi csúcs, mint v . Formálisan minden uv élre definiáljuk az $f(uv)$ részproblémát annak a halmaznak, amely olyan $(k, l) \in \mathbb{Z} \times \{a, b\}$ párokat tartalmaz, melyekre létezik a T_v részgráfnak olyan megengedett élsúlyozása, hogy $w(uv) = l \in L_{uv}$ és $z(v) = k - l$.

Egy adott uv élre jelölje e_i a v csúcs és v'_i gyereke közötti élt minden $i = 1, \dots, d(v) - 1$ -re. Figyeljük meg, hogy $(k, l) \in f(uv)$ pontosan akkor teljesül, ha a következő két feltétel fennáll:

1. Minden $i = 1, \dots, d(v) - 1$ -re, létezik $l_i \in L_{e_i}$ súly és $k_i \in \mathbb{Z} \setminus \{k\}$ címke, hogy $(k_i, l_i) \in f(e_i)$, és
2. $\sum l_i = k - l$.

Ezek alapján az $f(uv)$ részfeladatokat rekurzívan meg tudjuk határozni polinomiális időben, mivel ezt a két feltételt hatékonyan le lehet ellenőrizni, amit most bemutatunk a következőkben.

Egyértelműen létezik α és β melyre

$$\begin{aligned} a \cdot \alpha + b \cdot \beta &= k - l \\ \alpha + \beta &= d(v) - 1 \end{aligned} \tag{1}$$

teljesül, mivel $(k, l) \in f(uv)$. Azaz az $e_1, \dots, e_{d(v)-1}$ élek közül pontosan α -nak a súlya a és β -nak a súlya b . Jelölje $L_{e_i}^k \subseteq L_{e_i}$ az e_i él azon lehetséges súlyainak halmazát melyre $z(v'_i) \neq k$ és figyeljük meg, hogy $(k, l) \in f(uv)$ pontosan akkor

teljesül, ha az $L_{e_i}^k \neq \emptyset$, $|\{i : a \in L_{e_i}^k\}| \geq \alpha$ és $|\{i : b \in L_{e_i}^k\}| \geq \beta$ feltételek fennállnak minden $i = 1, \dots, d(v) - 1$. Bármely e_i -re és k -ra, $L_{e_i}^k$ gyorsan kiszámolható az $f(e_i)$ halmazon történő végig iterálással, így egy olyan algoritmushoz jutottunk, amely ki tudja számolni az $f(uv)$ részproblémákat $O(n^2)$ lépésben, feltéve, hogy a részfeladatokat a T_v részfa mélysége szerinti növekvő sorrendben számoljuk ki. A rekurzió alapesetét a következőképpen definiáljuk: Ha a T_v részfa egyetlen csúcsból áll az uv élre, akkor legyen $f(uv) = \{(l, l) : l \in L_{uv}\}$ definíció szerint.

Miután az összes $f(uv)$ részfeladatot kiszámoltuk megállapíthatjuk, hogy pontosan akkor létezik megengedett befejezése az elkezdett élsúlyozásnak, ha létezik $(k, l) \in f(e)$ pár úgy, hogy $k \neq l$, ahol e az a levél él amely a gyökérre illeszkedik. Ez azt jelenti, hogy az e él két végpontjának a címkéje különböző az élsúlyozásban. Különböen, ha $k = l$ minden $(k, l) \in f(e)$ párra, akkor $f(e)$ vagy üres vagy az e él két végpontjának ugyanaz a címkéje, ami azt jelenti, hogy nincsen megengedett kiegészítése a megkezdett élsúlyozásnak. Mivel $f(uv)$ kiszámolása $O(n^2)$ időt vesz igénybe, ezért az össz futási ideje az algoritmusnak $O(n^3)$. $\square$

3.6. Megjegyzés. Megjegyezzük, hogy a 3.5. Tétel könnyen kiterjeszthető a probléma minimális költségű változatára, amelyben minden egyes súly-él hozzárendeléshez tartozik egy költség, és a feladat a minimális költségű megengedett $\{a, b\}$ -élsúlyozás megtalálása.

3.1.1. Egy speciális eset — az antifaktor feladat

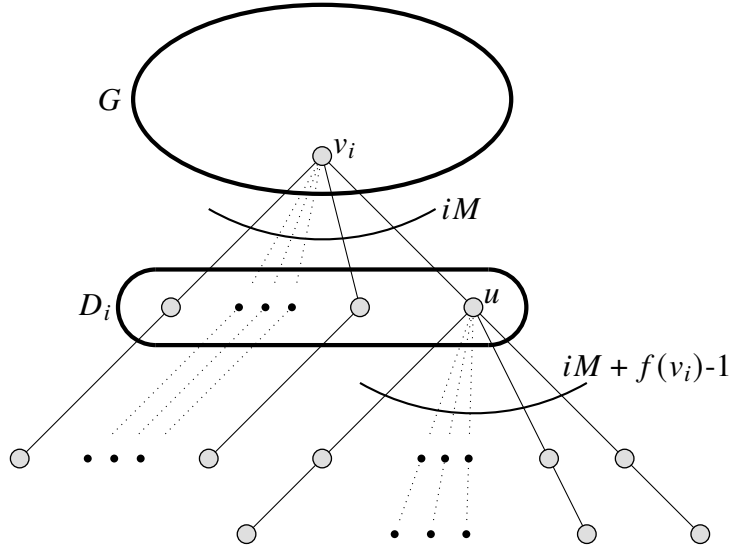
Ez az alfejezet a foksám-előírt részgráf feladat egy változatát, az úgynevezett antifaktor problémát vizsgálja, ahol minden csúcson pontosan egy fok van megtiltva. Azaz adott egy összefüggő G gráf, egy $f : V \rightarrow \mathbb{Z}_+$ hozzárendelés és egy olyan H részgráfját keressük G -nek, hogy $d_H(v) \neq f(v)$ teljesül minden $v \in V$ -re. Ezt a problémát Lovász megoldotta [3] és később általánosították [25]-ben és [26]-ban. Egyszerűen megmutatható, hogy a problémának mindig van megoldása, ha a gráf tartalmaz kört, ezért feltehetjük, hogy G egy fa.

Megmutatjuk, hogy az antifaktor probléma fákon megoldható a 3.5. Tétel bizonyításában adott dinamikus programozási algoritmussal, amivel adunk egy alternatív polinomiális algoritmust az antifaktor probléma megoldására.

3.7. Tétel. *Az antifaktor probléma fákon polinomiálisan visszavezethető annak az eldöntésére, hogy létezik-e egy adott fának megengedett $\{0, 1\}$ -élsúlyozása.*

Bizonyítás. Vegyük az antifaktor problémának egy példányát, azaz adva van egy G fa és egy $f : V \rightarrow \mathbb{Z}_+$ függvény. Ezek alapján polinom időben konstruálni fogunk egy G' gráfot, melynek akkor és csak akkor lesz megengedett $\{0, 1\}$ -élsúlyozása, ha az antifaktor probléma adott példánya megoldható.

A G' gráf konstrukciója hasonló lesz a 3.2. Tétel bizonyításában látott konstrukcióhoz. A G gráf egy másolatából indulunk ki, majd minden $v_i \in V$ -re módosítjuk



6. ábra. A 3.7. Tétel bizonyításában szereplő konstrukció illusztrációja.

G' -t a következőképpen. Adjunk hozzá új iM darab v_i -be csatlakozó levelet, ahol $M = n + 1$. Legyen D_i ezen újonnan hozzáadott csúcsok halmaza. Legyen u egy csúcs D_i -ből és adjunk hozzá a gráfhoz $(iM + f(v_i) - 1)$ darab új kettő hosszú utat, melyeket csatlakoztassunk be u -ba, majd minden D_i -beli csúcshoz, kivéve az u -t, adjunk hozzá egy levél élt. A 6. ábrán megtekinthetjük a konstrukciót egy adott v_i -re. Nyilvánvalóan G' előállítható polinomiális időben. A bizonyítás hátra levő részében belátjuk, hogy az antifaktor probléma pontosan akkor oldható meg G -re és f -re, ha G' -nek létezik megengedett $\{0, 1\}$ -élsúlyozása.

Először tegyük fel, hogy az antifaktor feladat megoldható G -re és f -re, és az eredmény részgráfot jelöljük H -val. Ahhoz, hogy megkapjuk G' -nek egy megengedett $\{0, 1\}$ -élsúlyozását, állítsuk be G' éleinek súlyát a következőképpen: ha az e él része H -nak akkor $w(e)$ legyen 1, egyébként legyen 0. Súlyozzuk az összes maradandó élt — melyek pontosan az újonnan G' -höz adott élek — 1-gyel. Vizsgáljuk meg, hogy az így kapott $\{0, 1\}$ -élsúlyozás valóban megengedett.

Az G' gráf G -beli csúcsai között nem lehet ütközés, mert az indukált címkéje bármely két ilyen csúcsnak különböző: Mivel az újonnan hozzáadott élek hozzájárulása a címkéhez iM és az eredeti éleké pedig legfeljebb $n - 1$, a v_i csúcs legnagyobb lehetséges címkéje $U_i = iM + n - 1 = (i + 1)n + i - 1$. Ezzel szemben a v_{i+1} csúcs legkisebb lehetséges címkéje $L_{i+1} = (i+1)M = (i+1)n + i + 1$, mely hasonló érveléssel megmutatható. Láthatjuk, hogy mindkét esetben L_{i+1} szigorúan nagyobb, mint U_i , azaz $z_{v_{i+1}} > z_{v_i}$ minden megengedett $\{0, 1\}$ -élsúlyozásban minden $i \in \{1, \dots, n-1\}$ -re, mivel $L_{i+1} \leq z_{v_{i+1}}$ és $U_i \geq z_{v_i}$.

Figyeljük meg, hogy a v_i és a D_i -ben lévő csúcsok között nem lesz ütközés, mivel H egy megengedett megoldása volt az antifaktor problémának, így a v_i -re illeszkedő 1 súlyú élek száma az eredeti gráfban G -ben nem egyezhet meg $f(v_i)$ -vel a súlyok

beállítása miatt. A többi újonnan hozzáadott maradék él mentén szintén nem lesz ütközés, ami nagyon könnyen átgondolható.

Másodjára tegyük fel, hogy G' -nek létezik megengedett $\{0, 1\}$ -élsúlyozása. Ekkor legyen H a G gráf 1 súlyú éleiből álló részgráfja. Most megmutatjuk, hogy H egy megengedett megoldása az antifaktor problémának G -re és f -re. Minden v_i és $D_i \setminus \{u\}$ között menő e él súlyának muszáj 1-nek lennie, mivel minden $D_i \setminus \{u\}$ -beli csúcsra illeszkedik egy levél él, amely mentén ütközés alakulna ki, ha az él súlya 0 lenne. Hasonló érveléssel minden $\Delta(u) \setminus \{v_i u\}$ -beli élnek is 1 súlyúnak kell lennie. Ezek alapján $z(v_i) = d_H(v_i) + |D_i \setminus \{u\}| + w(v_i u) = d_H(v_i) + iM - 1 + w(v_i u)$ és $z(u) = |\Delta(u) \setminus \{v_i u\}| + w(v_i u) = iM + f(v_i) - 1 + w(v_i u)$, és a $z(v_i) \neq z(u)$ -ből következik, hogy $d_H(v_i) \neq f(v_i)$, amivel beláttuk a tételt. $\square$

Az előző tétel bizonyításában megkonstruált fa pontosan akkor 0-1 tulajdonságú, ha a hozzá tartozó antifaktor feladatnak van megoldása. Ebből következik, hogy az antifaktor feladat megoldhatóságára vonatkozó Lovász-féle karakterizáció [3] egyben jól jellemzi a bizonyítás szerinti 0-1 tulajdonságú fákat is. Nyitott kérdés, hogy ez a karakterizáció kiterjeszthető-e tetszőleges fákra.

4. Az 1-2-3 sejtés vizsgálata számítógépes módszerekkel

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk, hogy az 1-2-3 tulajdonság eldöntését hogyan lehet az egészértékű programozás nyelvén megfogalmazni. Az egészértékű program felírása után bemutatjuk, hogy az ELTE szuperszámítógépén, az Atlaszon [27] futtatva a programot milyen eredményeket értünk el. Ezen eredmények közé sorolható, hogy leellenőriztük a legfeljebb 12 csúcsú gráfokon, hogy az 1-2-3 sejtés fennáll. Ezenfelül a programot felhasználtuk a 2.3. Tételben található segédgráfok megtalálására.

Első lépésként egy nemlineáris feltételeket is tartalmazó rendszert adunk meg a sejtés modellezésére, majd megmutatjuk, hogyan lehet egészértékű lineáris programra átfogalmazni ezt a felírást.

4.1. Az IP modell

Tekintsük először az imént említett nemlineáris feltételeket is tartalmazó rendszert:

$$x_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i : 1 \leq i \leq |E| \quad (2a)$$

$$1 \leq x_i \quad \forall i : 1 \leq i \leq |E| \quad (2b)$$

$$x_i \leq 3 \quad \forall i : 1 \leq i \leq |E| \quad (2c)$$

$$y_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i : 1 \leq i \leq |V| \quad (2d)$$

$$y_i = \sum_{j \in \Delta(i)} x_j \quad \forall i : 1 \leq i \leq |V| \quad (2e)$$

$$y_i \neq y_j \quad \forall i, j : v_i v_j \in E \quad (2f)$$

Röviden értelmezzük a felírt modellt: Az élekhez egészértékű változókat rendelünk a (2a) feltételben, amelyek értéke 1 és 3 közé esik a (2b) és (2c) korlátok szerint. Ez felel meg annak, hogy az adott élhez mekkora súlyt rendelünk. Legyen y_i a (2d) feltétel szerint a csúcsokhoz rendelt egészértékű változó, és legyen $\Delta(i)$ az élindek azon részhalmaza, amelyre $j \in \Delta(i)$ esetén az e_j él (a j -edik él) illeszkedik v_i -re. Ezek szerint a (2e) egyenlőségben azt fogalmazzuk meg, hogy minden csúcshoz definiálunk egy új y_i változót, úgy, hogy y_i -be az i -edik csúcsra illeszkedő élek súlyainak összege kerül.

Végül a (2f) egyenlőtlenség annak a tömör megfogalmazása, hogy bármely él két végpontján az y értékek különböznek, amely feltétel nem lineáris kifejezés. Ezt úgy linearizáljuk új z_{ij} bináris változók bevezetésével, hogy z egyik lehetséges értéke implikálja, hogy $(y_i - y_j) \geq \epsilon$, míg a másik lehetséges érték az $(y_j - y_i) \geq \epsilon$ kifejezést implikálja, ahol ϵ pozitív pici szám. Ekkor, ha megoldható a modell, akkor x egy megengedett $\{1, 2, 3\}$ -élsúlyozásnak feleltethető meg, mivel a megoldhatóságba beletartozik, hogy minden z -hez kell értéket rendelni, ami azt jelenti, hogy egy él két végén lévő szám nem egyezhet meg. Tehát a linearizáláshoz szükséges új változók és új feltételek a következők:

$$z_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i < j : \exists e = v_i v_j \in E \quad (2g)$$

$$y_i - y_j \leq -\epsilon + M z_{ij} \quad \forall i < j : \exists e = v_i v_j \in E \quad (2h)$$

$$y_i - y_j \geq \epsilon - (1 - z_{ij})M \quad \forall i < j : \exists e = v_i v_j \in E \quad (2i)$$

Azt állítjuk, hogy a (2g), (2h) és a (2i) feltételeket hozzávéve a modellhez kiválthatjuk a (2f) egyenlőtlenségeket. Ennek az ellenőrzéséhez először tegyük fel, hogy $z_{ij} = 1$. Ebből következik, hogy $(y_i - y_j) \geq \epsilon$. Először is helyettesítsünk be a (2h) egyenlőtlenségbe:

$$y_i - y_j \leq -\epsilon + M \quad (2j)$$

ha M elég nagy, akkor ez biztosan teljesül. A (2i) egyenlőtlenség, miután behelyettesítünk z_{ij} -be:

$$y_i - y_j \geq \epsilon - 0 \cdot M \quad (2k)$$

Tehát ha $z_{ij} = 1$, akkor abból következik, hogy $(y_i - y_j) \geq \epsilon$, azaz $y_i \neq y_j$, mivel az y koordinátái egész változók összegei és mivel $\epsilon > 0$ pozitív szám.

Nézzük a második esetet, azaz tegyük fel, hogy $z_{ij} = 0$. Ekkor a (2i) egyenlőtlenségbe helyettesítve azt kapjuk, hogy:

$$y_i - y_j \geq \epsilon - M \quad (2l)$$

ami szintén teljesül, ha M elég nagy. Hasonlóan a (2h) megfogalmazása a $z_{ij} = 0$ esetben:

$$y_i - y_j \leq -\epsilon + 0 \cdot M \quad (2m)$$

$$y_j - y_i \geq \epsilon \quad (2n)$$

Tehát ha $\epsilon > 0$ és $z_{ij} = 0$, akkor abból következik, hogy $(y_j - y_i) \geq \epsilon$, azaz $y_i \neq y_j$.

A bizonyítás során két helyen is megemlítettük, hogy az érintett egyenlőtlenség biztosan teljesül, ha M elég nagy konstans. Nézzük meg, hogy pontosan mekkorának kell lennie. Jelölje $\Delta(G)$ a G gráf maximális fokát, a (2j) egyenlőtlenség miatt M értékét legalább $(3\Delta(G) - 1 + \epsilon)$ -ra kell állítani, mivel y_i maximális értéke $3\Delta(G)$, míg y_j minimális értéke 1. Szóval, ha M értékét az előbb említett $(3\Delta(G) - 1 + \epsilon)$ értékre állítjuk, akkor biztosan teljesülő egyenlőtlenséget kapunk. A második felében szereplő (2l) egyenlőtlenség esetében is hasonlóan járhatunk el, azaz y_i minimális értéke 1, y_j maximális értéke $3\Delta(G)$, és -1 -gyel szorozva ugyanazt a korlátot kapjuk, mint az előző esetben. Hátra marad még ϵ megválasztása. Láthatjuk a modell alapján ϵ -nak az az egyetlen szerepe van, hogy előírja, hogy a szomszédos címkéknek legalább ϵ -nyival kell eltérniük. Továbbá, ha két címke különbözik, akkor legalább 1 a különbség közöttük, mivel az y_i változók csak egész értékeket vehetnek fel, ezért ϵ -t megválaszthatjuk 1-nek, és ezáltal M -et $3\Delta(G)$ -nak.

4.1. Megjegyzés. Ez a modell könnyen megváltoztatható úgy, hogy ne azt ellenőrizze le, hogy a G gráfunk 1-2-3 tulajdonságú-e, hanem azt, hogy 1-2 tulajdonságú-e. Ehhez egyszerűen cseréljük le a (2c)-ben található 3-as felső korlátot 2-re, és kész is a modell, amely egy input gráfról eldönti, hogy 1-2 tulajdonságú-e. Annak érdekében, hogy az $\{a, b\}$ -élsúlyozásos feladatot modellezzük, nagyobb mértékű, de technikailag hasonló módosításokat kellene végrehajtani a modellben, ezért ennek a leírását nem részletezzük.

4.2. Számítógépes eredmények

A dolgozat következő részében térjünk át az Atlaszon [27] elért eredmények vizsgálatára a fentebb bemutatott IP modell alkalmazásával.

n	Összefüggő gráfok száma n csúcson	Nem 1-2 tulajdonságúak száma	1-2 tulajdonságú gráfok aránya
2	1	1	0%
3	2	1	50%
4	6	1	83.33%
5	21	2	90.48%
6	112	5	95.54%
7	853	5	99.41%
8	11117	10	99.91%
9	261080	19	99.9927%
10	11716571	101	99.9991%
11	1006700565	306	99.9999696%
12	164059830476	2072	99.9999987%

1. táblázat. A futási eredmények összefoglalása

Az IP modellt a LEMON [28] és a CPLEX [29] felhasználásával implementáltuk. A programot elsősorban arra terveztük, hogy ellenőrizze, hogy az input gráf 1-2 tulajdonságú-e, és csak akkor ellenőrizze az 1-2-3 tulajdonságot, ha az 1-2 nem teljesül rá. Majd miután elkészült a program a helyességéről a következőféleképpen bizonyosodtunk meg: Ha a solver adott egy megoldást az adott gráfra, akkor azt leellenőriztük, hogy valóban megfelel-e egy megengedett csúcsszínezésnek, ha pedig azt mondta az adott gráfra, hogy nem 1-2 tulajdonságú, akkor egy lényegesen lassabb egzakt programmal leellenőriztük, hogy valóban nincsen megengedett élszűlyozása. Amint az 1. táblázatban láthatjuk, nagyon kevés nem 1-2 tulajdonságú gráf van, amelyeken az egzakt programot is le kellett futtatnunk, ezért összességében nem növelte meg a futásidőt szignifikánsan ezen ellenőrzések összesége sem. A programmal a legfeljebb 12 csúcsú gráfokon le tudtuk ellenőrizni az 1-2-3 sejtés helyességét, bár már a 12 csúcsú gráfokra is két hétig futott a szuperszámítógépen. A következő csúcsszámra, azaz a 13 csúcsú gráfokra a becslésünk szerint megközelítőleg 6614 napig futna a program. Látható, hogy jelentős gyorsítások nélkül a 13 csúcsú gráfokra már aránytalanul hosszú időráfordítással lehetne leellenőrizni a sejtést. A futási eredményeket egészen 12 csúcsig az 1. táblázatban foglaljuk össze.

Láthatjuk az 1-es táblázatban, hogy a csúcs szám növelésével egyre valószínűbb, hogy egy tetszőlegesen kiválasztott gráf rendelkezik az 1-2 tulajdonsággal. Ez nem váratlan Addario-Berry, Dalal és Reed [15] eredménye fényében, miszerint, ha G egy Erdős-Rényi véletlen gráf, akkor aszimptotikusan majdnem biztosan 1-2 tulajdonságú. Emellett, amint látható a táblázatban, az egy csúcsú gráf nincsen feltüntetve, mert annak élei sincsenek, ezért érdektelen a szempontunkból, míg a 2 csúcsú gráfról az egyik legelső megfigyelés alapján tudjuk, hogy nem 1-2 tulajdonságú.

További területeken is használtuk a programunkat. Például a 2.3. Tétel bizonyításában található a -kényszerítő segédgráfok struktúráját a program segítségével sejtettük

meg. Ezenfelül átfogó tesztelés után azt a sejtést fogalmazhatjuk meg, hogy ha a és b is pozitív, akkor pontosan az 1-2-tulajdonságú páros gráfok a - b tulajdonságúak.

5. Nyitott kérdések

Végül jelen dolgozat zárásaként betekintőt nyújtunk további érdekes nyitott problémákba a témakör iránt érdeklődők számára.

Az egyik érdekes problémakör páros gráfokhoz kapcsolódik. Amint láttuk Thomasen, Wu és Zhang [2] eredménye szerint polinom időben eldönthető, hogy létezik-e egy páros gráfnak $\{1, 2\}$ -élsúlyozása. Azt is igazolják, hogy pontosan a páratlan multi-kaktuszok azok a páros gráfok, amelyeknek nem létezik megengedett $\{1, 2\}$ -élsúlyozása. Ettől az eredménytől vezérelve elkezdtek más számpárookra is vizsgálni a feladatot. Az a - b tulajdonságot minden $-10 \leq a < b \leq 10$ párra, a legfeljebb 14 csúcsú gráfokon leellenőrizve, azt sejtjük, hogy ha a és b is pozitív, akkor pontosan az 1-2-tulajdonságú páros gráfok a - b tulajdonságúak.

A 3.1. Fejezetben megadtunk egy polinomiális algoritmust, mely fákra megoldja a megkezdett súlyozás befejezhetőségét. Viszont ez az algoritmus semmit nem mond arról a strukturális problémáról, amely a megkezdett súlyozás befejezhetetlenségét okozza. Érdekes kérdés az is, hogy kicsi favastagságú gráfokra is kiterjeszthető-e a dinamikus program. Nyitott kérdés, hogy kezelhető-e ilyen módon a feladat valamely másik változata, például amikor az élsúlyok összege helyett azok szorzatát tekintjük.

Köszönetnyilvánítás

Köszönetet szeretnék mondani témavezetőmnek, Madarasi Péternek, hogy végigvezetett ezen témakörben és fáradhatatlanul segített bármilyen kérdéssel fordultam hozzá. Továbbá köszönöm szépen Édesanyámnak a dolgozat átolvasását és nyelvtani javításait.

A munkát és egy angol nyelvű beszámoló [30] elkészülését az LP2021-1/2021 számú MTA Lendület pályázat támogatta.

Hivatkozások

- [1] Andrzej Dudek and David Wajc. On the complexity of vertex-coloring edge-weightings. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 13(3):45–50, 2011.

- [2] Carsten Thomassen, Yezhou Wu, and Cun-Quan Zhang. The 3-flow conjecture, factors modulo k , and the 1-2-3-conjecture. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 121:308–325, 2016.
- [3] László Lovász. Antifactors of graphs. *Periodica Mathematica Hungarica*, 4(2-3):121–123, 1973.
- [4] Kasper Szabo Lyngsie. On neighbour sum-distinguishing $\{0, 1\}$ -edge-weightings of bipartite graphs. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, 20, 2018.
- [5] Michał Karoński, Tomasz Łuczak, and Andrew Thomason. Edge weights and vertex colours. *Journal of Combinatorial Theory Series B*, 91(1):151–157, 2004.
- [6] Gary Chartrand, Paul Erdős, and Ortrud R Oellermann. How to define an irregular graph. *The College Mathematics Journal*, 19(1):36–42, 1988.
- [7] Ralph J Faudree, Richard H Schelp, Michael S Jacobson, and Jenő Lehel. Irregular networks, regular graphs and integer matrices with distinct row and column sums. *Discrete Mathematics*, 76(3):223–240, 1989.
- [8] Ralph J Faudree and Jeno Lehel. Bound on the irregularity strength of regular graphs. In *Colloq Math Soc Janos Bolyai*, volume 52, pages 247–256, 1987.
- [9] Martin Aigner and Eberhard Triesch. Irregular assignments of trees and forests. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 3(4):439–449, 1990.
- [10] Till Nierhoff. A tight bound on the irregularity strength of graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 13(3):313–323, 2000.
- [11] Ben Seamone. The 1-2-3 conjecture and related problems: a survey. *arXiv preprint arXiv:1211.5122*, 2012.
- [12] Yinghua Duan, Hongliang Lu, and Qinglin Yu. L-factors and adjacent vertex-distinguishing edge-weighting. *East Asian Journal on Applied Mathematics*, 2(2):83–93, 2012.
- [13] Hongliang Lu, Xu Yang, and Qinglin Yu. On vertex-coloring edge-weighting of graphs. *Frontiers of Mathematics in China*, 4(2):325–334, 2009.
- [14] Louigi Addario-Berry, Ketan Dalal, Colin McDiarmid, Bruce A Reed, and Andrew Thomason. Vertex-colouring edge-weightings. *Combinatorica*, 27(1):1–12, 2007.
- [15] Louigi Addario-Berry, Ketan Dalal, and Bruce A Reed. Degree constrained subgraphs. *Electron. Notes Discret. Math.*, 19:257–263, 2005.

- [16] Tao Wang and Qinglin Yu. On vertex-coloring 13-edge-weighting. *Frontiers of Mathematics in China*, 3(4):581–587, 2008.
- [17] Maciej Kalkowski, Michał Karoński, and Florian Pfender. Vertex-coloring edge-weightings: towards the 1-2-3-conjecture. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 100(3):347–349, 2010.
- [18] Liang Zhong. The 1-2-3-conjecture holds for dense graphs. *Journal of Graph Theory*, 90(4):561–564, 2019.
- [19] Jakub Przybyło. The 1–2–3 conjecture almost holds for regular graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 147:183–200, 2021.
- [20] Arash Ahadi, Ali Dehghan, Mohammad-Reza Kazemi, and Esmail Mollaahmadi. Computation of lucky number of planar graphs is NP-hard. *Information processing letters*, 112(4):109–112, 2012.
- [21] Ali Dehghan, Mohammad-Reza Sadeghi, and Arash Ahadi. The complexity of the sigma chromatic number of cubic graphs. *arXiv preprint arXiv:1403.6288*, 2014.
- [22] Ali Dehghan, Mohammad-Reza Sadeghi, and Arash Ahadi. Algorithmic complexity of proper labeling problems. *Theoretical Computer Science*, 495:25–36, 2013.
- [23] Ali Dehghan, Mohammad-Reza Sadeghi, and Arash Ahadi. On the complexity of deciding whether the regular number is at most two. *CoRR*, abs/1403.1182, 2014.
- [24] László Lovász. The factorization of graphs. ii. *Acta Mathematica Hungarica*, 23(1-2):223–246, 1972.
- [25] Gérard Cornuéjols. General factors of graphs. *J. Comb. Theory Ser. B*, 45(2):185–198, 1988.
- [26] András Frank, Lap Chi Lau, and Jácint Szabó. A note on degree-constrained subgraphs. *Discrete Mathematics*, 308(12):2647–2648, 2008.
- [27] <https://hpc.iig.elte.hu>.
- [28] Balázs Dezső, Alpár Jüttner, and Péter Kovács. Lemon—an open source c++ graph template library. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 264(5):23–45, 2011.
- [29] IBM ILOG CPLEX. 12.7. *CPLEX User’s Manual*, 2017.
- [30] Péter Madarasi and Máté Simon. On vertex-coloring $\{a, b\}$ -edge-weightings of graphs. `egres.elte.hu`, TR-2022-06, Egerváry Research Group, Budapest, 2022.