

Eötvös Lóránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Konform térelméletek gráfelméleti vizsgálata

TDK dolgozat

Készítette:

Bene Róbert

Fizika bsc. II.

Témavezető:

Dr. Bántay Péter

ELTE Fizikai Intézet, Elméleti Fizika Tanszék

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Alapfogalmak	9
2.1. Csúcspontok és csúcsponthalmazok szomszédsága	9
2.2. Ekvilokalitás	10
2.3. Faktorgráf (defláció)	11
2.4. Háló struktúra	12
2.5. Gráfok és hálók kapcsolata	12
3. Fizikai háttér ismertetése	14
3.1. Orbifoldizáció	14
3.2. Gráfok és hálók	16
4. Az eljárás részletes ismertetése	18
4.1. Lokalitási diagrammokra vonatkozó feltételek	18
4.2. Vizsgálandó gráfok előállítása	19
4.3. Irreducibilitás vizsgálata	21
4.4. Asszociált háló modularitásának vizsgálata	21
5. Konkrét példa bemutatása	24
5.1. Lokalitási gráf	24
5.2. Lokalitási diagramm	25
5.3. Asszociált háló	26
6. Talált gráfok összesítése	29
6.1. Kettő csúcspontú gráfok	29
6.2. Három csúcspontú gráfok	29

6.3. Négy csúcspontú gráfok	30
7. Összegzés	33
8. Függelék	34

1. Bevezetés

Dolgozatomban a kétdimenziós konform kvantumtérelméletekhez rendelhető úgynevezett lokalitási gráfokkal, valamint ezek faktorgráfjaival a lokalitási diagrammokkal és az ezekből képezhető hálókkal fogok foglalkozni. Mindez azért fontos, mert ezeken az objektumokon keresztül jó képet kaphatunk a vizsgált térelmélet mértékszimméria csoportjairól, az pedig közzismert, hogy a mai modern fizikában a szimmetriák vizsgálata óriási szerepet kapott, kiemelten foglalkozva a mértékszimmetriákkal.

Szimmetria alatt mindig azt értjük, ha egy transzformáció hatására egy objektum adott lényegi tulajdonsága változatlan marad, a transzformációra invariáns. Fizikában kiemelt figyelmet élveznek azok a szimmetriák, amelyek egy rendszer időfejlődésével kapcsolatosan lépnek fel, tehát arra vonatkoznak, hogy egy vizsgált objektum hogyan változtatja az állapotát az idő múlásával. Azért is különösen fontos ez a témakör, mert Noether tétele alapján tudjuk, hogy a szimmetriák mögött mindig megmaradó mennyiséget kereshetünk.

Szimmetriákon belül különbséget tehetünk tényleges szimmetria és mértékszimmertia között. (Elvi szinten legalábbis, gyakorlatban azonban annak eldöntése hogy mely szimmetriák valódiak és melyek mértékszimmetriák, nagyon bonyolult és egyáltalán nem triviális probléma.) Ezt úgy értelmezhetjük, hogy adott rendszerek időfejlődését állapotjelzőkkel írjuk le, melyek egy állapotteret alkotnak, a leírás azonban lehet redundáns és megtörténhet hogy az állapotjelzők több különböző értéke is ugyanahhoz az állapothoz kapcsolódik. Elsőre azt hihetnénk, hogy ilyen esetben a rendszer valami mélyreható szimmetriáját fedeztük fel, pedig itt a szimmetria egyszerűen a paraméterezésben rejlik. Az ilyen jellegű szimmetriákat tehát, melyek az állapottér bármely pontját ugyanazon fizikai állapotnak megfelelő pontba transzformálják, nevezzük mértékszimmetriáknak. Ezek összessége egy adott elméletben gyakran úgynevezett mértékcsoportot alkot. A szimmetriákon belül megkülönböztethetünk globális és lokális szimmetriákat is. Globális szim-

metria nem szükségszerűen mértékszimméria, azonban a lokális szimmetriák - melyek folytonosan változnak a téridőben - csak mértékszimmériák lehetnek [11].

Fontos megjegyzés, hogy mivel a szimmetriák csoportot alkotnak, létezhetnek a szimmetria csoportoknak faktorcsoportjai. A mértékszimméria csoportoknak ebből következően szintén lehetnek faktorcsoportjai melyek létezésének a dolgozat folyamán még szerepe lesz. Mértékszimméria csoportok faktorcsoportjait általában normális részcs csoportjaik segítségével szokás létrehozni. Gyakorlati problémák megoldását nagyban meg tudja könnyíteni az ezekkel való munka, hiszen ilyen esetekben a cél általában az, hogy az adott mértékszimméria csoport transzformációinak hatását vizsgáljuk valamilyen fizikai rendszerben. Minden mértékszimmériát figyelembe véve és ezekkel dolgozva a probléma nagyon számításigényes lehet, azonban ezen csoportok faktorcsoportjaival dolgozva és a faktorcsoport szimmetriáit használva a számítási igény jelentősen csökkenthető, hiszen a faktorcsoport elemeinek száma jócskán kevesebb lehet, mint az eredeti csoporté. Még fontosabb előnye ezek használatának az, hogy a mértékszimméria csoporton belüli bonyolult kapcsolatok ilyen módon egyszerűsödnek. A helyzet hasonló ahhoz, mint amikor egy szerkezet vizsgálatát a részeinek vizsgálatára vezetjük vissza. A módszer több lépésben is végezhető, a durvábbtól a finomabb modellezés felé haladva olyan faktorcsoportokon keresztül, melyek egyre szofisztikáltabbak, egyre jobban közelítenek az eredeti szimméria csoporthoz. Hasznos, megértést segítő példa, ha egy kétdimenziós fázistérre gondolunk, melyben a trajektóriák körök és feltételezzük, hogy az adott körökhöz rendelt állapotok megegyeznek, csak a paraméterezésünk miatt a leírás redundáns. Ebben az esetben a szimmetriacsoporthoz kissé hanyagul fogalmazva a körök szerint faktorizálva egy olyan fázistérre kapunk, melyben a trajektória már csak egy félegyenes, amely jóval egyszerűbb és könnyebben átlátható leírást ad. Itt például még azt az értékes fizikai következtetést is levonhatjuk belőle, hogy csak a középponttól való távolság határozza meg a dinamikát, tehát a rendszer paraméterezéséhez egy paraméter is elég lenne.

A mértékszimetriák megértést segíti, ha a jól ismert vákuumbeli klasszikus elektrodinamika példájára gondolunk [9]. Ebben az esetben egyértelmű állapotleírást adnak az elektromos és mágneses térerősségekkel való leírások, azonban vannak problémák melyek megoldása egyszerűbb az elektromágneses potenciálokkal használatával, csak hogy ez nem egyértelmű. Ilyenkor a mértékszimetriák a mértéktranszformációk az elektromágneses potenciálokon. Ez a következő módon látható. A negyedik Maxwell egyenlet kielégíthető ha $\mathbf{B}$ -t egy $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ vektortér rotációjaként vesszük fel, majd ezt a harmadik Maxwell egyenletbe visszaírva kapjuk a következő alakot:

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\text{rot}\mathbf{A}$$

Megfelelő mellékfeltételek teljesülése esetén ezt átrendezhetjük a következő alakra, ha a jobb oldalon a hely és idő szerinti differenciálás sorrendjét megcseréljük:

$$\text{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$$

Innen már látható, hogy a zárójeles kifejezés egy skalártér negatív gradienseként állítható elő - hiszen rotációja nulla - ezt a skalárteret jelölje $\Phi(\mathbf{r},t)$. Az előzőekből következik, hogy $\mathbf{E}$ a következő alakba írható:

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

Itt $\mathbf{A}$ egy vektorpotenciál, Φ pedig skalárpotenciál. Őket együttesen elektromágneses potenciáloknak nevezzük. A mértéktranszformációk úgy kapcsolódnak ide, hogy $\mathbf{B}, \mathbf{E}$ és $\mathbf{A}, \Phi$ között a kapcsolat nem egyértelmű, hiszen:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad}\chi$$

$$\Phi' = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}$$

az ilyen módon bevezetett új potenciálok ugyanazt a $\mathbf{B}$ -t és $\mathbf{E}$ -t adják mint a transzformáción nem átesett potenciálok. Az így kapott potenciálok tehát csak egy

transzformáció erejéig meghatározottak. Az ilyen jellegű transzformációkat nevezzük mértéktranszformációnak. Mivel ez $\mathbf{B}$ -t és $\mathbf{E}$ -t nem változtatja meg, a Maxwell egyenletek a fentebb látott transzformációra invariánsak.

Szemléletes példa még a mértéktranszformációkkal kapcsolatban a részecskék megkülönböztethetetlenségének elve a kvantummechanikában [10]. A klasszikus mechanikával ellentétben a kvantummechanikában nincsen értelme elektronpályákról beszélni és ha egy elektron helyzetét pontosan ismerjük is egy adott pillanatban, a következő pillanatban a koordinátáira vonatkozóan már semmi határozott információt nem mondhatunk. Egy adott pillanatban tehát hiába lokalizálunk és azonosítunk atomokat, a következő pillanatokban az azonosítás szempontjából semmire sem jutunk. Ha egy későbbi időpillanatban sikerül is lokalizálni az elektronok egyikét valamely pontjában a térnek, nem tudhatjuk, melyik elektron van a vizsgált pontban. Ezek alapján külön-külön részecskék történetének követése sem lehetséges. A kvantumelméletben tehát az azonos részecskék "egyéniességüket" elvesztik. Egyszerűen látható a dolog lényege két részecskét tartalmazó rendszer esetén. Ismert már, hogy a részecskék azonossága miatt, a két részecske felcserélése esetén a rendszer állapotai szükségszerűen fizikailag ekvivalensek, tehát a rendszer hullámfüggvénye a felcserélés hatására csak egy fázistényezővel változik meg. Legyen a rendszer hullámfüggvénye $\psi(\xi_1, \xi_2)$, ahol ξ_1 és ξ_2 a megfelelő részecske spin-vetületének és három koordinátájának összességét jelöli. Ekkor a következő követelmény szabható ki:

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = e^{i\alpha} \psi(\xi_2, \xi_1)$$

Itt α egy konstans valós szám. Kétszeres felcserélés után logikusan az eredeti állapotra kell, hogy jussunk, ebből tehát következik, hogy $e^{2i\alpha}=1$, amiből látható, hogy $e^{i\alpha}=\pm 1$. Tehát:

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = \pm \psi(\xi_2, \xi_1)$$

Látszik tehát, hogy az, hogy a részecskéket hogyan azonosítjuk önkényes és a rendszer

lényeges fizikai tulajdonságai ettől a választástól nem függenek. Egyik azonosításáról a részecskéknek egy másikra áttérni szintén mértéktranszformáció.

A szimmetriacsoport feltérképezésének folyamata történhet más kiindulási alapról is. Elképzelhető, hogy alapvetően nem ismerjük az adott rendszer mértékszimetriáit, csak a rendszer bizonyos (később részletezett) adatait és ezek alapján próbáljuk ezeket a mértékszimetriákat rekonstruálni. Kérdés, hogy ez lehetséges-e. A válasz természetesen itt sem triviális, azonban bizonyos típusú térelméleti modellek esetén úgy néz ki, hogy lehetséges. Ilyen eset a fontos kétdimenziós konform térelméletek is. A módszert, amellyel az adatokból visszafejthetők a mértékszimetriák orbifold dekonstrukciónak nevezzük[4].

Minden két dimenziós konform modellnél megfigyelhető, hogy a mértékszimetriák csoportokat alkotnak és egy adott térelméleti modell esetén több mértékcsoport is létezhet[1]. A szimmetriák bevezetése tehát több lépésben történhet, ahogy, mint már ismert, a csoport faktorizációja is. Egy adott térelmélethez tartozó szimmetriacsoportok és ezek részcsoporthai bizonyos relációk alapján hálószerű típusú algebrai struktúrát alkotnak. Egy-egy térelmélethez az eddigi tapasztalatok szerint több szimmetria csoport és ezek normális részcsoporthálójához tartozhat, azonban ezek együttese még mindig összefoglalható egy hálószerű hálóba, melynek fontos és szükséges matematikai tulajdonsága, hogy moduláris legyen. Térelméleti modellekhez ezt a legnagyobb, mindent magában foglaló hálót szokás felírni, ez a legcélravezetőbb. Cél tehát, ha a térelméletek mértékszimetriáit szeretnénk vizsgálni, hogy ezt a hálót meghatározzuk és az az egyáltalán nem triviális kijelentés, mely szerint ez a háló a mértékszimetriák ismerete nélkül is meghatározható szolgál dolgozatunk kiindulási alapjául. Fontos megjegyezni, hogy úgy, ahogy egy térelmélethez több szimmetria csoport is tartozhat, egy-egy dekonstrukciós háló is tartozhat több térelmélethez. Talán éppen ettől lesz igazán érdekes a téma, hiszen lehetséges, hogy ezek a hálókön keresztüli kapcsolatok valamilyen mélyebb, fizikailag is értelmezhető kapcsolatra utalnak a térelméletek között [6]. Ha a hálót a már korábban említett, mértékszimetriákat

nem felhasználó módszerrel szeretnénk meghatározni, annak menete onnan ered, hogy a háló meghatározását vissza lehet vezetni az úgynevezett lokális gráfok asszociált hálójának meghatározására. A lokális gráfok az adott térelmélet szuperszelekciós szektorai közötti lokális relációkon alapulnak. Ha a lokális gráfok kapcsolódásait reprezentáló irányítatlan gráfokat képezünk, melyek csúcspontjai a szuperszelekciós szektoroknak felelnek meg, akkor a megfelelő relációk alapján, melyeket később részletezni fognak, létre lehet hozni ugyanazt a dekonstrukciós hálót, melyet közvetlenül a térelméletből mértékszimetriák alapján is megkapnánk, csak az előbb említett módszerrel jelentősen kevesebb számítási kapacitás szükséges hozzá. Célszerű persze a számítási igényét az eljárásoknak minél tovább csökkenteni, ami ezesetben megtehető olyan módon, hogy a már említett gráfoknak az ekvilokális osztályok alapján képzett faktorgráfjait, úgynevezett deflációit veszem. Ez azért tehető meg, mert bizonyítható, hogy adott gráf a deflációból képzett háló meg fog egyezni az eredeti gráfból képzett hálójával és minket elsősorban ennek létrehozása érdekel. Tapasztalatok és levezetések alapján megadhatóak azok a matematikai tulajdonságok, amiket ezeknek a deflációknak tudniuk kell, ahhoz, hogy a belőlük képzett hálók térelméletek asszociált hálói legyenek. Ez a kérdéskör állt dolgozatomban középpontjában. Munkám során kis számú csúcspontig (7) létrehoztam az összes olyan gráfot, amelyek két dimenziós konform térelméleti modellek lokális diagrammjai lehetnek. A térelméleti modellek és a belőlük képzett gráfok részletes kapcsolódási pontjai a harmadik fejezetben olvashatóak.

2. Alapfogalmak

Dolgozatom ezen fejezetében a téma megértéséhez szükséges főbb definíciókkal fogom megismertetni az olvasót. Ezek közül már több elhangzott a bevezetésben is, de fontosnak érzem ezeket szisztematikusan, pontosan is ismertetni. Mivel gráfok és hozzájuk kapcsolódó fogalmak illetve tételek gyakran elő fognak kerülni a dolgozatban ezért először is ezeknek a fogalmaknak a definiálására térek ki. A definíciókat próbálom minél érthetőbb és emészthetőbb formában megfogalmazni a pontosság lehető legnagyobb mértékben való megtartása mellett. Precíz, formális definíció az összes használt fogalomhoz megtalálható a függelékben. Első és egyik legfontosabb definíció melyre kitérek a csúcspont és csúcsponthalmaz szomszédsága.

2.1. Csúcspontok és csúcsponthalmazok szomszédsága

Egy $V(\mathcal{G})$ csúcspont szomszédságán csúcspontok azon halmazát értjük, amelyek mindegyike kapcsolatban van $V(\mathcal{G})$ -vel, tehát él köti össze őket. Ezen halmaz eleme lehet természetesen akár maga $V(\mathcal{G})$ is, amennyiben van hurokéle, azaz adott csúcspont eleme lehet saját szomszédságának. Hasonló módon adódik csúcspontok halmazának szomszédsága vagy környezete is. Ha csúcspontok egy $X \subset V(\mathcal{G})$ részhalmazát vesszük, ennek szomszédsága azon $Y \subset V(\mathcal{G})$ csúcsponthalmaz, melynek minden eleme X halmaz minden elemével kapcsolatban áll, azaz X halmaz minden elemét Y halmaz minden elemével él köti össze [8]. Fontos itt megjegyezni, hogy Y halmaz csúcspontjain kívül a gráfban nincs más csúcspont, melyet X halmaz minden elemével él köt össze (hiszen ekkor definíció szerint ez a csúcspont is eleme lenne Y -nak), viszont létezhet olyan csúcspont, mely X -nek nem eleme és Y minden elemével él köti össze, hiszen X egy általunk önkényesen kijelölt csúcsponthalmaz, melynek elemeit mi választottuk ki.

Speciális eset ebben a kérdéskörben az a típusú csúcsponthalmaz, melyre teljesül, hogy

nem létezik olyan nem X -beli csúcspont, mely Y -nak minden elemével kapcsolatban van. Ha X ilyen, abból következik, hogy Y szomszédsága X , azaz X csúcsponthalmaz szomszédságának szomszédsága önmaga. Azokat a csúcsponthalmazokat melyek ezzel a tulajdonsággal rendelkeznek zártnak nevezzük. Kicsit továbbgondolva láthatjuk azt is, hogy amennyiben két X és Y halmaz zárt, ezek metszete is zárt és zárt halmaz szomszédsága is zárt, ezért mondhatjuk, hogy az a halmaz, melynek elemei adott gráfnak zárt csúcsponthalmazai, a tartalmazási relációval ellátva önduális hálót alkot. Önduális hálónak egy olyan részbenrendezett halmazt nevezünk, melyben elemek bármely részhalmazának létezik legkisebb felső és legnagyobb alsó korlátja, valamint értelmezett az elemeken egy antiton leképezés, melynek négyzete az identikus leképezés[7]. Annak bizonyítása hogy ezek a tulajdonságok tényleg teljesülnek az így definiált struktúrára és ezen tulajdonságok kimondása a függelék első négy tételében és ezek bizonyításaiban található.

2.2. Ekvilokalitás

Egy gráf két csúcspontja akkor ekvilokális, ha környezeteik megegyeznek, azaz pontosan ugyanazokkal a csúcspontokkal szomszédosak. Korábban már ismertettem, hogy csúcsponthalmaz szomszédsága alatt mit értünk, ennek felhasználásával kimondható, hogy két csúcsponthalmaz akkor ekvilokális, ha a szomszédságaik megegyeznek, azaz ha két X, Y csúcsponthalmaz elemeire vonatkozóan, azon csúcspontok halmaza a gráfban, melynek minden elemét X minden elemével él köti össze, ekvivalens azzal a csúcsponthalmazzal melyről elmondható, hogy minden elemét Y minden elemével él köti össze, akkor X és Y ekvilokálisak.

Itt fontos kitérni arra, hogy az ekvilokalitás ekvivalencia reláció, hiszen szimmetrikus, reflexív és tranzitív. Ezen három feltétel teljesülése a fogalom megértése után talán intuitívan, szinte természetesen is látható, azonban az állítás pontos kimondását és bizonyítását a függelék ötödik tétele és annak bizonyítása fejezi ki. Mint ekvivalencia

reláció az ekvilokalitási reláció particionál, a halmazt amin értelmezve van ekvivalencia osztályokra osztja. Esetünkben tehát a halmaz, amin ez a reláció értelmezve van az a gráf csúcspontjainak részhalmazait tartalmazó halmaz. A probléma szempontjából melyet dolgozatomban vizsgálók csak a zárt csúcsponthalmazok lesznek majd fontosak, azonban ha általános esetben egy gráfnak az ekvilokalitás alapján kreált ekvivalencia osztályairól beszélünk, minden csúcsponthalmazt szükséges belevenni.

2.3. Faktorgráf (defláció)

Következő fontos fogalom egy gráf deflációja, másszóval faktorgráfja. Ismert, hogy az ekvivalencia osztályok diszjunktak és uniójukként a teljes alaphalmaz előáll. Ezen tulajdonságok nagyon hasznosak számunkra, mert ilyen módon ezek alapján az ekvilokalitási reláció alapján képezett osztályokból a halmazt mintegy faktorizálva készíthetünk egy másik, kisebb elemszámú de számunkra lényeges tulajdonságaiban nem eltérő halmazt. Ezen halmaznak a faktorizálás definíciójából következően minden eleme csupán egyelemű lesz, azaz ha ebből egy gráfot készítünk, ezen gráf ekvilokalitási osztályai is mind egyeleműek lesznek, tehát a deflációban nem lesznek ekvilokális csúcspontok. Ennek következménye, hogyha a deflációban két csúcspont szomszédos, akkor az eredeti gráfban az ekvilokalitási osztályaik minden csúcspontja páronként szomszédos. Ennek bizonyítása a függelékben megtalálható. Ezt a tulajdonságot nevezzük irreducibilitásnak (az ekvilokalitási osztályok egyeleműségét) és az ilyen gráfokat irreducibilis gráfoknak hívjuk. Mivel a fentebb levezett módon minden gráf deflációja irreducibilis és én a lokalitási gráfok deflációit, a lokalitási diagrammokat vizsgálom, ezért csak irreducibilis gráfokkal foglalkozom. Tehát a defláció csúcspontjai az eredeti gráf ekvilokalitási osztályai.

2.4. Háló struktúra

A bevezetés során gyakran előkerült a háló, mint algebrai struktúra és a háló moduláris tulajdonsága. A hálót többféle megközelítésben is szokás definiálni, azonban számunkra hasznosabb az a megközelítés, mely úgy hangzik, hogy adott részbenrendezett halmazt hálónak nevezünk, ha eme halmaz bármely kételemű részalmazának létezik legkisebb felső és legnagyobb alsó korlátja. Az, hogy a zárt csúcsponthalmazokból tartalmazási relációval képzett struktúrára ez teljesül a függelékben be van bizonyítva [7]. Esetünkben a részbenrendezett halmaz oly módon áll elő, hogy a zárt csúcsponthalmazok a rendezési relációval ellátva részbenrendezettek, hiszen bizonyos halmazok egymással rendezési relációba hozhatóak, vannak köztük halmazok, melyek egymás részalmazai, azonban vannak olyanok melyekben nincsenek másik halmazzal átfedő elemek, ilyen módon a tartalmazási reláció szempontjából ezek viszonyáról nem tudunk mondani semmit.

Adott L háló moduláris, ha:

$$a \leq c \rightarrow a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c$$

teljesül minden $a, b, c \in L$ -re.[7]

2.5. Gráfok és hálók kapcsolata

Miután a szükséges definíciók tisztázásra kerültek, fontosnak érzem összefoglalásként megemlíteni kissé formálisabban is, hogy ezek használatával hogyan lehet a gráfokat a háló típusú algebrai struktúrákkal összekapcsolni. Ismert már, hogy $x \in V(\mathcal{G})$ csúcspont $\mathcal{G}(x)$ szomszédsága:

$$\mathcal{G}(x) = \{y \in V(\mathcal{G}) \mid \{x, y\} \in E(\mathcal{G})\}$$

Csúcspontok X halmazára általánosítva pedig:

$$\mathcal{G}(X) = \{y \in V(\mathcal{G}) \mid \{x, y\} \in E(\mathcal{G}), \forall x \in X\}$$

Ebből már triviálisan látszik, hogyha $X \subseteq Y$ akkor $\mathcal{G}(Y) \subseteq \mathcal{G}(X)$, valamint $X \subseteq \mathcal{G}^2(X) = \mathcal{G}(\mathcal{G}(X))$. Legyen

$$L(\mathcal{G}) = \{X \subseteq V(\mathcal{G}) \mid X = \mathcal{G}^2(X)\}$$

csúcspontok azon részhalmazainak összessége, melyek megegyeznek a szomszédságuk szomszédságával. Ekkor $X, Y \in L(\mathcal{G})$ esetén $X \cap Y \in L(\mathcal{G})$ és $\mathcal{G}(X) \in L(\mathcal{G})$, tehát az $L(\mathcal{G})$ halmaz a tartalmazási relációra nézve egy önduális háló, mint az már ismert. Erről elmondható, hogy egy olyan részbenrendezett halmaz, amelyben elemek bármely részhalmazának létezik felső és legnagyobb alsó korlátja, illetve értelmezett az elemeken egy antiton leképezés, melynek négyzete az identikus leképezés. Azaz, kissé pongyolán fogalmazva, ha adott lokalitási diagramm zárt csúcsponthalmazából képezünk egy halmazokból álló halmazt majd ezt ellátjuk a tartalmazási relációval, belátható, hogy egy hálót kapunk, mely azon térelmélet dekonstrukciós hálójá lesz, mely térelmélethez a lokalitási diagramm tartozik.

Ezekon kívül vannak egyéb nem feltétlenül mindenki által ismert fogalmak és tételek amelyekre később még hivatkozni fogok, azonban ezeket részletesen el fogom magyarázni mikor használok őket és a további pontos definíciók illetve a később használt valamint a fentebb már kimondott tételek bizonyításai is mind részletesen megtalálhatók a függelékben.

3. Fizikai háttér ismertetése

Az alapfogalmak részletes ismeretével hátunk mögött, ebben a fejezetben szeretnék képet adni arról, hogy a tényleges, térelméletekre vonatkozó absztrakt elméleti háttér és a konkrét munka amit végeztem hogyan kapcsolódik össze. Elsőként megemlíteném, hogy ugyan a dolgozat keretein belül a konform térelméletek tárgyalására szorítkozom, az eljárás valószínűleg működni tud általánosabb térelméletek esetén is, azonban ez még egy feltáratlan terület és a gráfok származtatása mind elméleti mind pedig gyakorlati szempontból számottevően egyszerűbb a konform elméletek speciális esetében. Konform térelméletek esetén már néhány viszonylag egyszerűen származtatható jellemző alapján (konform súlyok, operátorszorzat-kifejtések [3]) elvégezhető az adott modell jellemzése. Általánosan elmondható még az is, hogy állapotok azonosítása révén sok térelmélet származtatható egy másik modellből, ahol az ilyen módon azonosított állapotokat szükségszerűen szimmetria köti össze, ami a származtatott modellben mértékszimetriaként manifesztálódik.

3.1. Orbifoldizáció

Ahhoz hogy a korábban már említett de nem részletezett dekonstrukciós hálók illetve lokalitási gráfok és diagrammok kapcsolatait és származtatását megértsük, elsőként meg kell ismerkednünk az orbifoldizáció fogalmával. Konform térelméletek esetében az állapotok azonosítását orbifoldizációnak nevezzük, az így kapott modellt pedig az eredeti modell orbifoldjának. Az azonosított állapotokat összekötő szimmetriák által alkotott csoportot ebben az esetben az orbifold modell twist-csoportjának nevezik [4].

Azért fontos ez a problémakör, mert ez fog elvezetni a dekonstrukció hálókhoz. Ide kapcsolódóan fontos kérdés, hogy egy adott térelméleti modelltől felismerhető-e, hogy orbifoldja egy másik modellnek és ha igen, mi az eredeti modell és a megfelelő twist cso-

port. A korábban már említett orbifold dekonstrukció eljárása ezekre a kérdésekre megadja a válaszokat. Szükséges azonban megemlíteni, hogy egy konkrét modellnek több orbifold dekonstrukciója lehet, hiszen nem szükséges az összes állapot azonosítást egyszerre feloldani, lehetséges az állapotok csak egy részhalmazát is vizsgálni. Ezt nevezzük parciális dekonstrukciónak [4]. Adott modell különböző parciális dekonstrukciói egy rendezett struktúrát az úgynevezett dekonstrukciós hierarchiát alkotják. Érzékelhető ezek alapján, hogy ilyen módon léteznie kell maximális dekonstrukciónak is adott modellre vonatkozóan. Egyáltalán nem triviális, azonban a dolgozat témáján túlmutató, ezért itt nem részletezett okokból konform térelméleti modellek esetén egy adott térelméleti modellnek több inekvivalens maximális dekonstrukciója létezhet, vagyis több, eltérő módon realizálható valamely más modell orbifoldjaként. Ennek következtében a parciális dekonstrukciók nem alkotnak hálót, viszont kimutatható és belátható, hogy minden modellhez természetes módon hozzárendelhető az úgynevezett, korábban már emlegetett dekonstrukciós hálója amelynek részét alkotja maga a dekonstrukciós hierarchia, ezért a dekonstrukciók feltérképezésének alapfeladata a dekonstrukciós háló meghatározása [5]. Látható tehát, hogy adott modell tulajdonságairól rengeteget elárul a dekonstrukciós hierarchiája, hiszen ez a parciális dekonstrukciókon keresztül megmutatja, hogy a vizsgált modell mely más modelleknek orbifoldja. Mivel a dekonstrukciós háló ismeretével a dekonstrukciós hierarchia meghatározható, érthetővé válik, miért is annyira fontos ezen háló megtalálása.

A dekonstrukciós háló meghatározása mint azt a korábbi fejezetekben már említettem két módon történhet. Egyrészt véghezvihető direkt módon, szimmetriák alapján azonban a már említett számítási kapacitás korlátok miatt ez csak viszonylag egyszerű modellek esetén lehetséges, mivel a számítási kapacitás exponenciálisan nő a modell méretét jellemző úgynevezett primér terek (másnéven szuperszelekciós szektorok) számával. A direkt módszer már 1-2 tucat primér tér esetén csődöt mond, azonban az igazán érdekes jelenségek ennél sokkal nagyobb modellek esetén kezdődnek, ezért célszerű más

megközelítést keresni, ez lesz a lokalitási gráfokon és ezek deflációin alapuló, általam is végzett eljárás.

3.2. Gráfok és hálók

A dekonstrukciós hálók más megközelítésbeli meghatározása abból a felismerésből indul, hogy az megegyezik a modell úgynevezett lokalitási grájának illetve az ebből deflációval képzett lokalitási diagrammjának asszociált hálójával. A lokalitási gráf csúcspontjai az elmélet primér terei és két csúcspont akkor szomszédos, ha a megfelelő primér terek operátorszorzat kifejtése reguláris, azaz egyértékű függvénye szeparációjuknak [4]. Mivel a lokalitási gráf mérete megegyezik a konform modellével (csúcspontok száma a primér terek számával) ezért a számítási igény továbbra is exponenciális függvénye a modell méretének, ugyanúgy, mint a direkt eljárás esetén, azonban a korábban már részletezett faktorgráf meghatározásával és ezen gráf tulajdonságainak vizsgálatával a számítási igény drasztikusan csökkenthető, hiszen a defláció asszociált hálója izomorf az eredeti lokalitási gráf asszociált hálójával. Fontos, hogy az eljárás nem iterálható, mert a gráf deflációja irreducibilis, azaz izomorf a saját deflációjával. Ezekből következően azonban már annak vizsgálata a kulcs, hogy mely irreducibilis gráfok azok, melyek konform modellek lokalitási diagrammjai lehetnek. Eddigi tapasztalatok alapján felállíthatóak bizonyos követelmények, melyeknek az ilyen jellegű gráfoknak meg kell felelni, hogy lokalitási diagrammok lehessenek. Ilyen módon tehát elérhetővé válik a dekonstrukciós hálók meghatározásának egy olyan módja, mely a bonyolult mértékszimetriákkal kapcsolatos összefüggéseket nem igényli, ezen keresztül a modell fontos tulajdonságainak vizsgálata is lehetővé válik, mert a háló meghatározása után a dekonstrukciós hierarchia a korábban említett módon ismertté válik. Mindehhez annyit szükséges tenni, hogy adott csúcspontig minden nem izomorf gráfra le kell ellenőrizni a megfelelő feltételek teljesülését és kiválogatni belőlük azokat, melyek a kirótt feltételeket teljesítik. Ilyen módon

létrejön egy adatbázis azon gráfokból, melyek konform térelméletek lokalitási diagrammjai lehetnek. A következő fejezetben ennek a vizsgálatnak a folyamatát mutatom be.

4. Az eljárás részletes ismertetése

Ahogy korábban említettem, kutató munkám célja az volt, hogy kis számú csúcspontokra előállítsam az összes lokalitási diagrammot. A gráfok előállítását hét csúcspontú gráfokig végeztem el, azon egyszerű okból kifolyólag, hogy az ennél nagyobb számú csúcsponttal rendelkező gráfokon az algoritmusok lefuttatása rengeteg időt vett volna igénybe az általam használt módszerekkel. Érdekes azonban megjegyezni, hogy mivel itt deflációk gráfjait vizsgáltam és állítottam elő, ezért a konkrét lokalitási gráfok, melyeknek én a faktorgráfjait vizsgálom ennél sokkal több csúcspontot is tartalmazhatnak.

Érdekes észrevenni, hogy a már említett, primér terek kapcsolataiból eredeztetett lokalitási gráfokra épülő megközelítés a bonyolult elméleti háttere ellenére milyen konkrét, viszonylag könnyen érthető algoritmusra vezet amikor a lokalitási diagrammok előállítása a cél. Többek között ebben rejlik ennek a megközelítésnek a nagy előnye.

A munka menete úgy történt, hogy a gráfok legenerálása, vagy adatbázisból megszerzése után a gráfokra vonatkozó feltételeknek a teljesülését vizsgáltam sorjában, a legkevésbé számításigényestől haladva a legszámításigényesebbek felé. A vizsgálatokat a gráfok adjacencia mátrixait használva végeztem el, numerikus számításokra ezt a megközelítést találtam leginkább alkalmasnak és ilyen módon ki lehetett használni több, Pythonban található, lineáris algebrai problémák megoldására szolgáló eszközt.

4.1. Lokalitási diagrammokra vonatkozó feltételek

Alább pontokba szedve láthatóak azon követelmények melyeket adott gráfoknak teljesíteni kell, hogy térelméletek lokalitási diagrammjai lehessenek:

- Mivel irányítatlan gráfokról van szó (ez a tulajdonság a térelméleti modellek általam nem részletezett jellemzőiből következik) ezért szükséges, hogy a gráf adjacencia mátrixa szimmetrikus legyen.

- A gráfoknak pontosan egy univerzális vertexe kell, hogy legyen, azaz egy olyan csúcspontja, amely az összes csúcsponttal kapcsolatban van. (Itt beleértve saját magát is, hiszen a hurkok megléte megengedett.)
- A gráfnak minden ekvilokalitási osztálya egyelemű, tehát a gráf irreducibilis. Ez azt jelenti, hogy a gráfon belül nincsen kettő vagy több olyan csúcsponthalmaz, melyek szomszédsága megegyezik.
- Ha a gráf csúcsponthalmazainak zárt részhalmazát vesszük, és ezen halmazokból a tartalmazási reláció segítségével hálót képezünk, akkor ez a háló moduláris kell, hogy legyen.

4.2. Vizsgálandó gráfok előállítása

A munka első részében a szűrési feladatok elvégzéséhez a Python programnyelvet használtam. Mivel adjacencia mátrixokkal terveztem a problémát megoldani, szükség volt a megadott számú csúcspontig az összes lehetséges gráf adjacencia mátrixára. Ezt min-det legenerálni rengeteg idő és számítási kapacitás lenne, hiszen például 7 csúcspontú gráf esetén az adjacencia mátrix 7×7 -es, és mindegyik eleme lehet 1 vagy 0, ezért itt az összes mátrix legenerálásához 2^{49} -en elemet kellene legyártani, amely belátható időn belül nem tud megvalósulni, ráadásul utána a szükséges követelményekre való szűrés miatt ezeken a mátrixokon még végig kellene iterálni for ciklusokkal és különböző feltételek meglétét vizsgálni. Érezhető, hogy ez a megközelítés nem járható út, nem beszélve arról, hogy az így előállított gráfoknak nagyrésze biztosan izomorf lenne más, már korábban előállított gráfokkal és gráfok izomorfiainak vizsgálatára általános, nem speciális gráfok esetén nincsen bevett eljárás melynek komplexitása nem túlságosan bonyolult és magas szintű ahhoz, hogy ezen dolgozat keretein belül meg lehessen valósítani. Ezen okokból a szükséges mátrixokat egy adatbázis használatával értem el [12].

Következő lépésként az említett adatbázisból letöltött fileokat a Pythonban beolvasva és a numpy modul segítségével, mintegy listákként megkaptam a megfelelő gráfok szomszédsági mátrixaiból álló listákat, csúcspontok száma szerint bontva, izomorfia erejéig, tehát ezek a listák izomorf gráfokat már nem tartalmaztak. Szükséges kiegészítést kellett azonban ehhez tennem, hiszen az így kapott mátrixok mind olyan gráfokat reprezentáltak, melyek nem tartalmaztak hurokéleket, azonban a térelméleti modellek származtatható gráfok esetén semmi sem tiltja a hurokélek meglétét, sőt ezek szükségesek is, hiszen például az univerzális vertex esetén a minden csúcsponttal való kapcsolat magában foglalja azt is, hogy saját magával is él kösse össze, azaz biztosan kellenek hurokélek.

Hogy ezt a problémát áthidaljam, továbbra is Pythonban az összes mátrixhoz hozzáadtam az összes olyan mátrixot, melyek eleme a főátlón kívül csupa 0, a főátlóban pedig a nullák és egyesek összes lehetséges kombinációja megtalálható. Ezzel már tényleg az összes szükséges gráfot tartalmazta az adatbázis, a probléma ezzel kapcsolatban az, hogy ebben már izomorf gráfok is vannak. Ennek egyrésről nem tulajdonítottam nagy jelentőséget, mert az összes szűrés után olyan kis számú gráf marad, hogy azokból könnyedén kiválogathatóak az izomorfak kellő elszántsággal, valamint úgy gondolom, hogy egy ilyen gráfokat tartalmazó adatbázis meglepte akkor is értékes eredmény, ha izomorf gráfokat tartalmaz. Erre aztán a későbbiekben lehet építkezni és az is előfordulhat, hogy nem gráfelméleti hanem a térelméletekből következő egyéb követelmények alapján az izomorf gráfokkal kapcsolatos probléma megszüntetheővé válik majd. (Itt is megjegyezném, hogy sajnos általános alakú gráfok esetén nincsen bevett eljárás arra, hogy hogyan lehet biztosan megállapítani, hogy két gráf nem izomorf. A gráfok spektrálmélete használatával bizonyos lineáris algebrai feltételek teljesülése esetén két gráf izomorfizmusa egyértelmű, azonban ennek hiánya nem.)

A szimmetrikus tulajdonság ellenőrzése nem igényelt munkát, mivel az adatbázis ahonnan a szükséges adatokat kinyertem irányítatlan gráfokat tartalmazott, a főátlóbeli elemek

módosításai pedig a szimmetriát nem rontják el.

4.3. Irreducibilitás vizsgálata

Következő szűrési feladatként az ekvilokalitási osztályok egyeleműségére vonatkozó kritériumot vizsgáltam. Ennek vizsgálatát meg lehet tenni egy olyan kóddal, ami a mátrix sorát minden sorával összehasonlítja és attól függően, hogy talál-e legalább kettő egyformát, a mátrixot benn tartja az adatbázisban vagy kidobja, azonban ennek megírása nehézkes, a lefutása lassú és nem is túl elegáns.

Hogy erre találjak egy jobb módszert lineáris algebra ismereteimhez nyúltam vissza, innen ugyanis ismert, hogy ha egy mátrix két vagy több sora vagy oszlopa megegyezik, akkor a determinánsa biztosan nulla. Ilyen módon, a szomszédsági mátrix jelentését ismerve könnyen látható, hogy ha a mátrix determinánsa 0, akkor a gráf melyet ő reprezentál biztosan nem irreducibilis. Itt tehát az adjacencia mátrixok determinánsait vizsgáltam, és amelyeknek ez 0 volt, azzal nem dolgoztam tovább. Persze itt felmerülhet problémának az, hogy vajon ez az állítás fordítva is igaz-e. Tehát hogy teljesül-e az, hogyha egy mátrixnak a determinánsa 0, akkor biztosan van-e legalább kettő egyforma sora. Általános esetben a válasz nem, ha egy sor egy másik sor többszöröse például akkor is 0 a determináns, azonban esetünkben csak 0-t és 1-eket tartalmaz a mátrix, tehát ilyen eshetőség nem lép fel. A nem nulla determinánsú mátrixok tehát mind olyan gráfokat reprezentálnak, melynek minden ekvilokalitási osztálya egyelemű, tehát a további szűrésben ezekkel a mátrixokkal dolgoztam csak.

4.4. Asszociált háló modularitásának vizsgálata

Az utolsó és egyben legösszetettebb szűrési feladat a gráfból tartalmazási relációval készített háló modularitásának vizsgálatára vonatkozik. A háló létrehozása olyan módon történik,

hogy megkeressük a gráf csúcspontjainak azon halmazait melyek zártak, azaz a szomszédságuk szomszédsága önmaga, ilyen módon kapunk egy csúcsponthalmazokból álló halmazt. Ez a halmaz a tartalmazási relációval ellátva részbenrendezetté válik, hiszen bizonyos elemei egymást tartalmazzák, de nem minden eleme állítható egymással tartalmazási relációba.

Számítási eljárások szempontjából ez ismét egy nehezen skálázható probléma, hiszen adjacencia mátrixok alapján a megoldás menete olyan módon indul, hogy mivel meg kell határozni a zárt csúcsponthalmazokat, az összes során és a sorok összes lehetséges kombinációján a mátrixnak végig kell iterálni, megnézni melyik az a csúcsponthalmaz, mellyel az adott sorokon való végigiterálás alapján a kiindulási csúcsponthalmaz minden eleme szomszédos, majd ezen csúcsponthalmaznak szintén hasonló módon ismét vizsgálni kell a szomszédságát és ha az megegyezik a kiindulási csúcsponthalmazzal, akkor a kiindulási csúcsponthalmaz zárt. A sorok összes kombinációjának végignézése miatt és hogy minden egyes eshetőséghez szintén szomszédságot kell keresni és ezt a kiindulással összehasonlítani, ez az eljárás erősen számításigényes, azonban ennél egyszerűbb járható utat ennek a problémának a kezelésére nem találtam.

Miután a zárt csúcsponthalmazok meghatározása megtörtént, a háló modularitását kell ellenőrizni. Modularitásnál gyengébb feltétel a rétegzettség mellyel szintén megelégedhetünk, első körben ennek ellenőrzése volt a célom. A háló rétegzettsége esetünkben lényegében annyit takar, hogy ha a zárt csúcsponthalmazok halmazát ellátjuk tartalmazási relációval, akkor egy hálót kapunk, melynek aztán a fogalom megértése miatt Hasse-diagramját vesszük. A Hasse-diagram a részbenrendezett halmazok szemléltetésére nagyon jól alkalmas ábrázolási módszer. Ez lényegében egy irányított gráf, amelyben az alaphalmaz alkotják a gráf pontjait. Ezen alaphalmaz esetünkben a csúcsponthalmazokat tartalmazó halmazunk, a gráf pontjai pedig ezeknek a csúcsponthalmazoknak felelnek meg. A gráf kettő, x és y csúcspontja között csak akkor halad él, ha $x < y$ teljesül, és nem

létezik olyan z elem, hogy $x < z < y$ egyenlőtlenség fennáll. Az él irányítása a diagrammon olyan, hogy y pontot x felett helyezzük el, ezzel jelezvén, hogy y tartalmazza x -et. Mivel ez az ábrázolásmód nem tartalmaz hurokéleket, ezért ez a jelölésmód teljesen megfelelő az irányítottság szemléltetésére. Ha egy háló rétegzett, az annyit tesz, hogy a Hasse-diagramjának egy adott pontjából bármely tőle különböző, de egymással azonos szinten lévő elemekhez ugyanannyi lépésben lehet eljutni, azaz az adott két pont közötti úton ugyanannyi élen kell keresztülmenni.

Mivel ennek a problémának a megoldására Pythonban nem láttam járható utat, amely ne lenne túlságosan bonyolult, lassú és skálázhatatlan, ezért ezen részfeladat megoldása a GAP program segítségével történt. Az erre írt kódsor éppen a fent említett követelmény megvalósulását ellenőrzi le, azonban diszkrét algebrai problémamegoldó szoftvercsomag lévén az ebben található eljárásokkal a probléma gyorsabban és hatékonyabban oldható meg. A szoftver segítségével nem az enyhébb rétegzettség, hanem az erősebb modularitás feltételét sikerült ellenőriznem. Szintén a GAP szoftver segítségével írható olyan kód is, mely közvetlenül az adjacencia mátrixokból képzett adjacencia listák alapján is meg tudja mondani az adott gráfhoz tartozó háló rétegzettségét illetve modularitását.

Az adjacencia listák olyan listák, melyeknek annyi eleme van, ahány csúcspontja annak a gráfnak amit reprezentál és az adjacencia lista minden eleme szintén egy lista, mely belső lista azoknak a csúcspontoknak az indexeit tartalmazza, melyeket az adott csúcsponttal (amelyikhez ez a belső lista tartozik) él köt össze.

5. Konkrét példa bemutatása

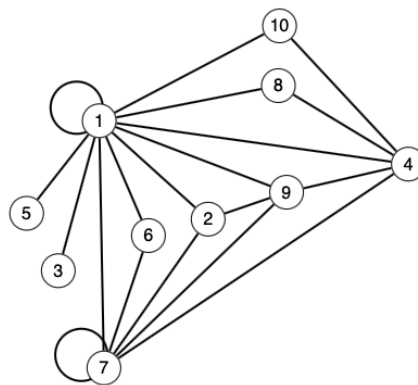
Dolgozatomban következő részében egy konkrét példán keresztül fogom bemutatni a fentebb ismertetett elméleti háttér és gyakorlati eljárás működését. A térelméleti modell melynek egy lokálitási gráfjával az elméletet illusztrálni fogom a $c=4/5$ -öd centrális töltési Virasoro minimálmodell.

5.1. Lokálitási gráf

A fentebb említett modellnek egy lokálitási gráfja az a gráf, melynek adjacencia listája a következő:

$[[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10],[1,7,9],[1],[1,7,8,9,10],[1],[1,7],[1,2,4,6,7,9],[1,4],[1,2,4,7],[1,4]].$

A gráf melyet az adott adjacencia lista reprezentál a következő ábrán látható.



$c=4/5$ -öd centrális töltésű Virasoro minimálmodell lokálitási gráfja

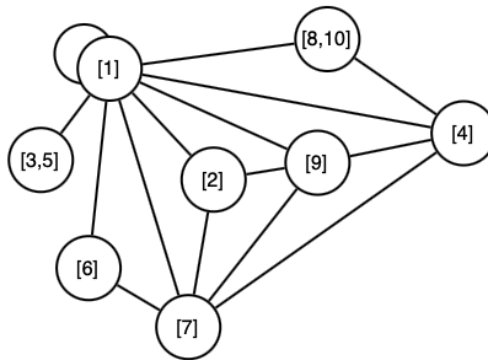
Az már ránézésből is látható, hogy a lokálitási gráfokkal kapcsolatos egyik fontos kitélt, az univerzális vertex létezését teljesíti, hiszen az egyes számú csúcspont láthatóan minden csúcsponttal kapcsolatban van beleértve saját magát, azaz él köti össze velük.

A következő mérföldkő amit szeretnénk elérni, hogy megalkossuk ennek a lokalitási gráfnak a deflációját. Mint korábban már ismertettem, a deflációkat, azaz faktorgráfokat az ekvilokalitási osztályok segítségével lehet megalkotni, olyan módon, hogy a lokalitási gráfnak megkeressük az ekvilokalitási osztályait, majd ezeket egy-egy csúcsponttal reprezentáljuk. A faktorgráfban azon csúcspontok lesznek összekötve, melyekre teljesül az a feltétel, hogy az eredeti gráfban (lokalitási gráfban) a két ekvilokalitási osztálynak melyekhez az említett csúcspontok tartoznak volt legalább egy-egy olyan eleme, melyeket egymással él kötött össze.

Megjegyzésként megemlíteném, hogy ha egy adott ekvilokalitási osztálybeli csúcspontot a gráf egy másik csúcspontjával él köt össze, akkor az említett ekvilokalitási osztály összes többi elemét is él köti az adott csúcsponttal. Ez tulajdonság az ekvilokalitási osztály definíciójából szinte triviális módon származik, a belátása megtalálható a függelékben, a nyolcadik tétel és ennek bizonyítása tartalmazza. A most megfogalmazott feltétel alapján tehát, megkereshetjük a lokalitási gráf ekvilokalitási osztályait, azaz azon csúcspontokat, melyek szomszédsága megegyezik.

5.2. Lokalitási diagramm

A fentebb látható gráf esetén kettő kételemű és hat egyelemű ekvilokalitási osztály van. A kételemű ekvilokalitási osztályok 3,5 és 8,10 csúcspontokat tartalmazó osztályok. Az ábráról könnyedén látható az is, hogy ezen csúcspontokra teljesül a kiszabott feltétel. Ez alapján a deflációt már meg tudjuk alkotni, mely gráfnak vizualizálása alább látható.



$c=4/5$ -öd centrális töltésű Virasoro minimálmodell lokálitási gráfjának deflációja

Az ábrán a csúcspontra írva azt jelöltem, hogy melyik ekvilokalitási osztályt reprezentálja az adott csúcspon. A faktorgráfokra kiszabott fontos feltétel volt, hogy ezen gráfok ekvilokalitási osztályai mind egyeleműek legyenek, azaz a gráf irreducibilis legyen. Az ábrát megvizsgálva szemmel is könnyedén belátható ennek teljesülése jelen esetben, hiszen ez az állítás éppen azt jelenti, hogy nincs a gráfban kettő vagy több olyan csúcspon, melyeknek szomszédsága megegyezik. Látható, hogy ebben az esetben alig lett csak egyszerűbb a defláció strukturája, mint a lokálitási gráfé, azonban elgondolható, hogy abban az esetben, ha például lokálitási gráfnak csak csak három ekvilokalitási osztálya lett volna, akkor a deflációnak mindössze három csúcsponja lenne, ami már szignifikáns egyszerűsödés. Nagyobb gráfok esetén persze a faktorizálás akár nagyságrendi csökkenéseket is okozhat, előfordulhat, hogy például egy 2000 csúcsponjú gráf ilyen módon megalkotott faktorgráfja csak pár száz, vagy éppen pár tíz csúcsponntal rendelkezik.

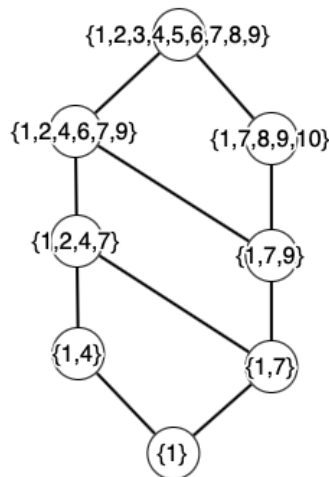
5.3. Asszociált háló

A faktorgráf megalkotása után a következő lépés már a háló elkészítése, ami azonban a legösszetettebb lépése az eljárásnak. Ennek első lépéseként meg kell határozni a defláció

csúcspontjainak zárt halmazait, azaz azokat a csúcsponthalmazokat, melyekre teljesül, hogy szomszédságuk szomszédsága önmaguk. Ez lehetséges a GAP program vagy Python segítségével, én ebben az esetben az általam Pythonban írt kódsort használok. Ez alapján az adódik, hogy a defláció zárt csúcsponthalmazai a következők:

[1], [1,4], [1,7], [1,7,9], [1,7,8,9,10], [1,2,4,7], [1,2,4,6,7,9], [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]

Mint azt korábban már említettem, ezen zárt csúcsponthalmazok lesznek az asszociált háló elemei. Miután a háló elemei megvannak, ellenőrizni kell annak modularitását, vagy rétegzettségét. Észben tartva, hogy ebben a fejezetben az eljárás szemléltetése a célom, a lentebb látható ábra tartalmazza az ezen halmazokból képzett háló Hasse-diagramját. Maga az eljárás persze nem igényli, a Hasse-diagram vizualizációját, hiszen attól függetlenül, hogy a rétegzettség definíciója például szemléletesen ezen keresztül magyarázható, nem szükséges ennek ábrázolása is. Az ábrán a diagram csúcspontjai a megfelelő halmazokat jelölik, az egyértelműség kedvéért minden csúcsponton jelöltem, hogy melyik halmaznak felel meg.



c=4/5-öd centrális töltésű Virasoro minimálmodell asszociált hálójának Hasse-diagrammja

Nagyon fontos ám a dolgozatban kevésbé emlegetett része az eljárásnak annak lehetősége, hogy a hálóból visszafelé határozzuk meg a deflációkat és azokból a lokalitási gráfokat. Az eljárás ezen része nem képezi a szűken vett témáját a dolgozatomnak, azonban mindenképpen említésre érdemes. Jelen tapasztalatok szerint úgy tűnik, számítási kapacitás és skálázhatóság szempontjából az eljárás ezen módja jobb, mint a térelméletekből indulva a hálók meghatározása, ha célunk, hogy minél több lokalitási gráfot meghatározzunk, azonban ennek a módszernek a matematikai háttere számottevően bonyolultabb tehát ennek megértése nagyobb előképzettséget és elszántságot követel művelőjétől.

6. Talált gráfok összesítése

Ebben a fejezetben az eljárás lefuttatása után kapott gráfokat fogom ismertetni és egy kisebb minta adatbázis összeállítását megkísérelni kettő, három és négy csúcspontú gráfokra. Ugyan ennél több csúcspontra lefutott az algoritmus, de az így kapott gráfok szomszédsági listái és ábrái nehezen átláthatóak és adott számú csúcsponthoz több száz, vagy több ezer megfelelő gráf is tartozik, emiatt a példákat csak négy csúcsig mutatom be. Az adatbázis nem tartalmaz izomorf gráfokat, tehát minden egymással izomorf gráfot, mely az eljárás lefuttatásával adódott, az itt látható ábrákon csak egyszer tüntetek fel, hiszen az izomorf gráfok többszöri feltüntetése nem járna hozzáadott értékkel.

6.1. Kettő csúcspontú gráfok

Miután az egy csúcspontú gráfok esete triviális a kettő csúcspontról álló gráfokkal kezdem a felsorolást. Ezen gráfok közül összesen kettő felel meg a követelményeknek ám ezek izomorfak, tehát izomorfia erejéig összesen egy darab megfelelő két csúcspontú gráf található. Ez alább látható:

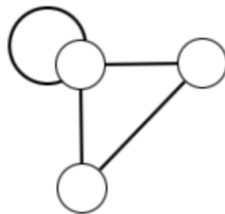
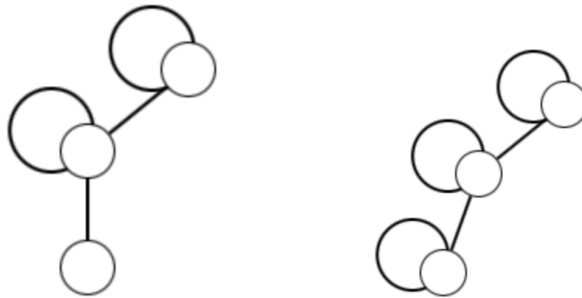


2 csúcspontú lokalitási diagramm

6.2. Három csúcspontú gráfok

Három csúcspontú gráfok esetén hat darab különböző gráf található mely a követelményeknek megfelel, azonban ezek közül összesen három darab van melyek nem izo-

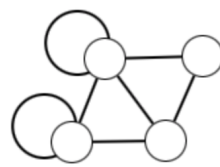
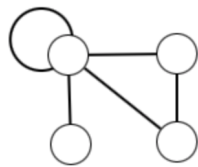
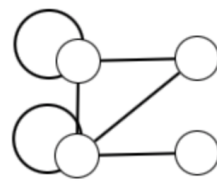
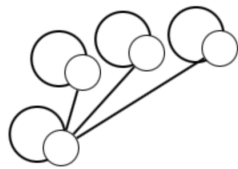
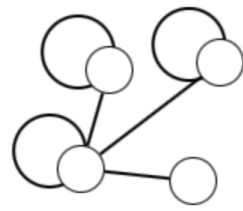
morfak. Ezek alább láthatóak:

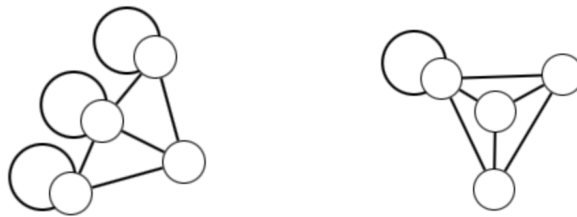


3 csúcsponútú lokalitási diagrammok

6.3. Négy csúcsponútú gráfok

Négy csúcsponútú gráfok esetén már érzékelhetővé válik a feltételeket ki-elégítő gráfok számának gyors növekedése, ebben az esetben ugyanis már tizennyolc darab különböző gráf elégíti ki a feltételeket melyek közül nem izomorf összesen nyolc darab, ezek alább láthatóak:





4 csúcsponútú lokalitási diagrammok

A kapott eredmények a további csúcsponatokra hasonló struktúrában szintén adódnak, ilyen módon nagyobb számú csúcsponttal rendelkező gráfok esetén is megkonstruálhatóak a megfelelő szomszédsági listák és ezek alapján a gráfok vizualizációja. Bár a számítási kapacitások korlátoossága miatt az eljárással én csak hét csúcspontig tudtam az algoritmusokat lefuttatni, kellően erős számítógéppel és rendelkezésre álló idővel ezt sokkal nagyobb méretű gráfokra is el lehetne végezni, mert maga az algoritmus a nagyobb méretű gráfokra is jól működik.

7. Összegzés

Kutatásom során célom az volt, hogy adott csúcspontig előállítsam az összes olyan gráfot, melyek két dimenziós konform kvantumtérelméletekhez tartozó lokalitási diagrammok lehetnek. Ez azért jelentős, mert a lokalitási diagrammokból a térelmélet dekonstrukciós hálóját megalkotható, melyből a dekonstrukciós hierarchia következtethető. A dekonstrukciós hierarchia ismeretében már meg lehet mondani, hogy a vizsgált modell mely más modelleknek orbifoldja, tehát térelméletek közötti kapcsolatokat ismerhetünk meg ezen információk feltárásával.

Hogy az ilyen gráfokat elő tudjam állítani, megírtam és adott csúcspontig bezáróan minden gráfra lefutattam azokat az algoritmusokat, melyek ellenőrzik az ahhoz szükséges feltételek meglétét, hogy a gráf lokalitási diagramm lehet-e vagy sem. Ilyen módon kutatási célomat sikerült teljesítenem, az algoritmusok megírása és lefuttatása után megkaptam a keresett gráfokat.

Az így létrejött, lehetséges lokalitási diagrammokból álló adatbázis lehetőséget nyújt további kutató munkára, hiszen a meghatározott gráfok ismeretében, ezek és hálójuk segítségével nem triviális, de a diagrammok és asszociált hálók szerkezetében felismerhető összefüggések alapján a térelméletek közötti további, eddig feltáratlan kapcsolatokra lehet következtetni.

8. Függelék

1. Tétel. Ha $X, Y \in L(\mathcal{G})$ akkor $X \cap Y \in L(\mathcal{G})$, azaz $\mathcal{G}^2(X \cap Y) = X \cap Y$

Bizonyítás. Definíció szerint:

$$\mathcal{G}(X) = \{x' \in V(\mathcal{G}) \mid \{x, x'\} \in E(\mathcal{G}) \forall x \in X\}$$

$$\mathcal{G}(Y) = \{y' \in V(\mathcal{G}) \mid \{y, y'\} \in E(\mathcal{G}) \forall y \in Y\}.$$

Az egyszerűség kedvéért vezessük be $X \cap Y \equiv Z$ jelölést. Ennek a halmaznak az elemeit pedig z -vel jelöljük. Ekkor definíció szerint $\forall z \in Z$ -re teljesül, hogy:

$$\{z, x'\} \in E(\mathcal{G}) \forall x' \in \mathcal{G}(X)$$

$$\{z, y'\} \in E(\mathcal{G}) \forall y' \in \mathcal{G}(Y)$$

Ismert még emellett a leképezés antiton tulajdonságából, hogy:

$$\mathcal{G}(X), \mathcal{G}(Y) \subseteq \mathcal{G}(Z)$$

Most vezessük be a $\mathcal{G}(X) \cup \mathcal{G}(Y) \equiv F$, melynek elemei f -ek. Az előzőleg belátott tulajdonságokból következik, hogy $\forall z \in Z$ -re teljesül:

$$\{f, z\} \in E(\mathcal{G}) \forall f \in \mathcal{G}(X) \cup \mathcal{G}(Y)$$

Ezek alapján $\mathcal{G}(X \cap Y) = \mathcal{G}(X) \cup \mathcal{G}(Y) \cup A$, ahol A halmaz definíciója:

$$A : \{a \mid a \in \mathcal{G}(X \cap Y), a \notin \mathcal{G}(X) \cup \mathcal{G}(Y)\}$$

A leképezés tulajdonságai alapján ismert, hogy $X \cap Y \subseteq \mathcal{G}^2(X \cap Y)$, tehát $X \cap Y \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{G}(X) \cup \mathcal{G}(Y) \cup A)$. A következőkben $\mathcal{G}(\mathcal{G}(X) \cup \mathcal{G}(Y))$ halmazt vizsgáljuk, melynek elemeit hívjuk f' -nek. Definíció szerint $\forall f' \in \mathcal{G}(\mathcal{G}(X) \cup \mathcal{G}(Y))$ -re teljesül:

$$\{f, f'\} \in E(\mathcal{G}) \forall f \in \mathcal{G}(X) \cup \mathcal{G}(Y)$$

A leképezés tulajdonságai és az előzőekben kimondott összefüggésekből kijelenthető, hogy:

$$X \cap Y \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{G}(X) \cup \mathcal{G}(Y)) \subseteq X \cup Y$$

Mostmár csak azt kell belátni, hogy $X \cup Y$ halmaznak nincsen olyan eleme, mely $\mathcal{G}(\mathcal{G}(X) \cup \mathcal{G}(Y))$ halmaznak eleme, de nem eleme $X \cap Y$ halmaznak. Azaz lássuk be, hogy nem létezik k , amire

$$k \in X \cup Y, k \notin X \cap Y, \{k, f\} \in E(\mathcal{G}) \forall f \in \mathcal{G}(X) \cup \mathcal{G}(Y)$$

feltétel teljesül. Ehhez vegyünk egy $x \in X$, $x \notin Z$ elemet. Mivel $x \notin Z$ tudjuk, hogy $x \notin Y$, emiatt azonban $x \notin \mathcal{G}^2(Y)$. Mivel $\mathcal{G}(\mathcal{G}(X) \cup \mathcal{G}(Y)) \subseteq \mathcal{G}^2(Y)$ emiatt $x \notin \mathcal{G}(\mathcal{G}(X) \cup \mathcal{G}(Y))$. Éppen ezt szeretnénk volna belátni. $y \in Y$, $y \notin Z$ elemekre teljesen analóg módon belátható ugyanez. A leképezés antiton voltából emellett következik:

$$\mathcal{G}(\mathcal{G}(X) \cup \mathcal{G}(Y) \cup A) \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{G}(X) \cup \mathcal{G}(Y))$$

Ezt és a korábbi összefüggéseket felhasználva kijelenthető

$$X \cap Y \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{G}(X) \cup \mathcal{G}(Y) \cup A) \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{G}(X) \cup \mathcal{G}(Y)) \subseteq X \cup Y$$

Ezekután mivel:

$$X \cap Y \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{G}(X) \cup \mathcal{G}(Y)) \subseteq X \cup Y$$

és beláttuk, hogy $x \in X$ és $y \in Y$, $x, y \notin Z$ elemekre $x, y \notin \mathcal{G}(\mathcal{G}(X) \cup \mathcal{G}(Y))$, így egyértelműen kijelenthető, hogy:

$$X \cap Y = \mathcal{G}(\mathcal{G}(X) \cup \mathcal{G}(Y))$$

Emellett mivel A -t éppen úgy definiáltuk, hogy a szomszédságába nem tartoznak olyan elemek melyek csak X -nek vagy csak Y -nak elemei, viszont $\forall z \in X \cap Y$ -ra $z \in \mathcal{G}(A)$, kijelenthető, hogy azon elemek, melyek $\mathcal{G}(X) \cup \mathcal{G}(Y)$ és A minden elemének szomszédságába beletartoznak, csakis az $X \cap Y$ halmaz elemei és $\mathcal{G}(\mathcal{G}(X) \cup \mathcal{G}(Y) \cup A) = \mathcal{G}(\mathcal{G}(X) \cup$

$\mathcal{G}(Y))$. Tehát $X \cap Y = \mathcal{G}^2(X \cap Y)$. Ezt akartuk bebizonyítani. Emellett sikerült egy olyan összefüggést is belátni, amely analóg az egyik De Morgan-azonossággal, hiszen $X \cap Y = \mathcal{G}(\mathcal{G}(X) \cup \mathcal{G}(Y))$.

□

2. Tétel. Ha $X \in L(\mathcal{G})$, akkor $\mathcal{G}(X) \in L(\mathcal{G})$

Bizonyítás. Tudjuk, hogyha $\mathcal{G}(X) \in L(\mathcal{G})$, akkor $\mathcal{G}^2(\mathcal{G}(X)) = \mathcal{G}(X)$.
 $\mathcal{G}^2(\mathcal{G}(X)) = \mathcal{G}(\mathcal{G}(\mathcal{G}(X))) = \mathcal{G}(\mathcal{G}^2(X)) = \mathcal{G}(X)$. Ezzel az állítást beláttuk.

□

3. Tétel. Az elemek bármely részhalmazának létezik legnagyobb alsó korlátja.

Bizonyítás. Alsó korlát alatt olyan halmazt értünk, mely az elemek adott részhalmazának részhalmaza, mégpedig a legnagyobb részhalmaza. Korábban azt már beláttuk, hogy ha $X, Y \in L(\mathcal{G})$ akkor $X \cap Y \in L(\mathcal{G})$. Triviálisan látható, hogy $L(\mathcal{G})$ halmaz X, Y elemekből álló részhalmazának legnagyobb alsó korlátja $X \cap Y$, ami maga is mindig eleme $L(\mathcal{G})$ halmaznak, tehát az már biztos, hogy $L(\mathcal{G})$ halmaz bármely kételemű részhalmazának mindig van legnagyobb alsó korlátja.

□

4. Tétel. Az elemek bármely részhalmazának létezik legkisebb felső korlátja.

Bizonyítás. Először azt célszerű belátni, hogy a halmaz minden kételemű részhalmazának létezik felső korlátja, tehát egy létezik olyan U halmaz, melyre teljesül, hogy $X, Y \subseteq U$, tehát $X \cup Y \subseteq U$ és $U \in L(\mathcal{G})$. A leképezés tulajdonságai alapján ismert, hogy:

$$X \cup Y \subseteq \mathcal{G}^2(X \cup Y) \rightarrow \mathcal{G}^2(X \cup Y) = X \cup Y \cup B$$

ahol B halmaz:

$$B : \{b \mid \{b, c\} \in E(\mathcal{G}), \forall c \in \mathcal{G}(X \cup Y), b \notin X \cup Y\}$$

Azaz B azon elemek halmaza, melyek $\mathcal{G}^2(X \cup Y)$ halmaznak elemei de nem elemei $X \cup Y$ -nak. Most vizsgáljuk meg $X \cup Y \cup B$ halmazt. A leképezés tulajdonságai alapján ismertek a

következők:

$$\mathcal{G}(X \cup Y \cup B) \subseteq \mathcal{G}(X \cup Y), \mathcal{G}(X \cup Y) = \mathcal{G}(X) \cap \mathcal{G}(Y) \rightarrow \mathcal{G}(X \cup Y \cup B) \subseteq \mathcal{G}(X) \cap \mathcal{G}(Y)$$

ebből pedig következik $\mathcal{G}(\mathcal{G}(X) \cap \mathcal{G}(Y)) \subseteq \mathcal{G}^2(X \cup Y \cup B)$ összefüggés, ahol

$$\mathcal{G}(X \cup Y \cup B) = \{k \mid \{k, g\} \in E(\mathcal{G}) \forall g \in X \cup Y \cup B\}$$

Emellett ismét a leképezés tulajdonságaiból tudjuk, hogy:

$$X \cup Y \subseteq (X \cup Y \cup B) \subseteq \mathcal{G}^2(X \cup Y \cup B)$$

B halmaz definíciója és a fent ismertetett összefüggések következményeként kimondható, hogy $B \subseteq \mathcal{G}^2(X \cup Y \cup B)$, valamint B definíciójából látszik, hogy $\mathcal{G}(X \cup Y) \subseteq \mathcal{G}(B)$. Ezekből már következik, hogy $\mathcal{G}(X \cup Y \cup B) = \mathcal{G}(X \cup Y)$. Mivel a bizonyítás elején $X \cup Y \cup B$ halmazt éppen úgy definiáltam, mint $\mathcal{G}^2(X \cup Y)$, ezért:

$$\mathcal{G}(\mathcal{G}(X \cup Y \cup B)) = \mathcal{G}(\mathcal{G}(X \cup Y)) = \mathcal{G}^2(X \cup Y) = X \cup Y \cup B$$

Ezzel tehát beláttuk, hogy $X \cup Y \cup B \in L(\mathcal{G})$, amiből következik, hogy $L(\mathcal{G})$ halmaz minden két elemű részhalmazának van felső korlátja. Mivel azt nem szabtuk meg, hogy mennyi B halmaz lehet amivel ez teljesül, kimondhatjuk, hogyha $\exists B' \subseteq B_k \forall k \in N$, akkor $X \cup Y \cup B'$ a legkisebb felső korlát. A B-t definiáló összefüggésből következi, hogy B_k halmazok között biztosan létesíthető rendezés, tehát egyértelműen meghatározható melyik tartalmazza melyiket, ezáltal biztosan létezik B' , mely minden B_k -nak részhalmaza, tehát biztosan létezik X, Y kételemű részhalmaznak legkisebb felső korlátja. $\square$

5. Tétel. Az ekvilokalitás ekvivalencia reláció, tehát reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

Bizonyítás. Miután a gráfpontok környezeteinek ekvivalenciáját visszavezettük a halmazok egyenlőségére, amiről pedig tudjuk, hogy ekvivalencia reláció, véleményem szerint a bizonyítást ezzel le is tudtuk. $\square$

6. Tétel. *Az ekvilokalitási reláció a gráfot ekvivalencia osztályokra bontja, particionálja.*

Bizonyítás. Mivel beláttuk az ekvilokalitásra vonatkozóan, hogy ekvivalencia reláció, az ekvivalencia relációkról pedig tudjuk, hogy a halmazt amin definiálva vannak ekvivalencia osztályokra bontják, így az ekvilokalitás is ekvivalencia osztályokra bontja a gráfpontok halmazát. Ettől függetlenül lássuk be.

1.) Az osztályok diszjunktak:

Jelöljük az ekvivalencia osztályokat A_k -val, legyen A_1, A_2 két ekvivalencia osztály, tegyük fel, hogy ezeknek van közös eleme, ezt jelölje 'a'. Az A_k osztály elemeit jelölje a_{ki} Ekkor

$$a \in A_1, a \in A_2 \implies a = a_{1i} = a_{2j} (\forall i, j)$$

hiszen az ekvivalencia relációról beláttuk, hogy tranzitív. Az ekvivalencia osztályok definíciójából pedig következik, hogy

$$\forall a_{1i} = a \implies \forall a_{1i} \in A_2$$

$$\forall a_{2j} = a \implies \forall a_{2j} \in A_1$$

Illetve definíció szerint ismert, hogy

$$\forall a_{1i} \in A_1$$

$$\forall a_{2i} \in A_2$$

Ebből viszont látszik, hogy

$$\forall a_{1i} \in A_1 : \forall a_{1i} \in A_2 \implies A_1 \subseteq A_2$$

$$\forall a_{2j} \in A_2 : \forall a_{2j} \in A_1 \implies A_2 \subseteq A_1$$

$$A_1 \subseteq A_2, A_2 \subseteq A_1 \implies A_1 = A_2$$

Tehát az ekvivalencia osztályok vagy diszjunktak, vagy megegyeznek.

2.) Minden csúcspont valamelyik osztálynak eleme:

Az A_k osztályokat úgy definiálhatjuk, hogy

$$A_k = \{a_{ki} \mid a_{ki} = a\}$$

azonban mivel a reláció reflexív, minden csúcspont biztosan bele tartozik a saját maga által generált ekvivalencia osztályba, ugyanis saját magával minden csúcspont relációban áll, tehát minden csúcspont valamely osztálynak eleme. $\square$

7. Tétel. Amennyiben x_1 szomszédos y_1 -gyel és x_1 ekvilokális x_2 -vel valamint y_1 ekvilokális y_2 -vel, akkor x_2 biztosan szomszédos y_2 -vel.

Bizonyítás. A tétel alapján ismert, hogy

$$\mathcal{G}(x_1) = \mathcal{G}(x_2)$$

$$\mathcal{G}(y_1) = \mathcal{G}(y_2)$$

$$\{x_1, y_1\} \in E(\mathcal{G})$$

A második és harmadik egyenlet valamint az ekvilokalitási reláció definíciójának együttes következménye, hogy:

$$x_1 \in \mathcal{G}(y_1) \implies x_1 \in \mathcal{G}(y_2) \implies \{x_1, y_2\} \in E(\mathcal{G})$$

Az első egyenlet és az ekvilokalitás definíciójának következményeként pedig:

$$y_2 \in \mathcal{G}(x_1) \implies y_2 \in \mathcal{G}(x_2) \implies \{x_2, y_2\} \in E(\mathcal{G})$$

Ezzel be is láttuk, hogy a tétel teljesül. $\square$

8. Tétel. Ha két ekvilokalitási osztály X és Y szomszédos akkor $\forall x \in X$ szomszédos $\forall y \in Y$ -al azaz osztályok minden eleme szomszédos a másik osztály minden elemével.

Bizonyítás. Az ekvilokalitási osztály definíciójából ismert, hogyha $y_1, y_2 \in Y$, ahol Y egy ekvilokalitási osztály, akkor $\mathcal{G}(y_1) = \mathcal{G}(y_2)$. Ebből már látható, hogy y_1 és y_2 akkor és csak akkor tartozik egy ekvilokalitási osztályba, ha szomszédságuk megegyezik, tehát ha $\{x, y_1\} \in E$ akkor szükségszerűen $\{x, y_2\} \in E$. Kettőnél több elemre ezzel analóg módon ugyanez az állítás adódik. Ezzel az állítást beláttuk. $\square$

Ebből következik, hogy amennyiben $\mathcal{G}'$ két eleme X és Y ekvilokális, akkor a két $\mathcal{G}'$ -beli elemnek megfelelő $\mathcal{G}$ -beli halmazok szomszédsága megegyezik, tehát $\mathcal{G}(X) = \mathcal{G}(Y)$.

9. Tétel. *A $\mathcal{G}'$ defláció irreducibilis, azaz minden ekvilokalitási osztálya egyelemű.*

Bizonyítás. X, Y legyenek $\mathcal{G}'$ gráf pontjai. Tegyük fel, hogy ez a két pont ekvilokális, ekkor a nyolcadik tétel és következménye alapján $\mathcal{G}(X) = \mathcal{G}(Y)$. A szomszédsági reláció definíciójából következően:

$$\forall x \in X, \forall y \in Y : \mathcal{G}(x) = \mathcal{G}(y)$$

Tehát minden x és y elem szomszédsága megegyezik, ez pedig éppen azt jelenti, hogy minden x és y elem egy ekvilokalitási osztályba tartozik, ekkor azonban $\mathcal{G}'$ gráfban X és Y nem két külön pont, ellentmondásra jutunk. Ezzel az állítást beláttuk $\square$

10. Tétel. *Tetszőleges $X \in L(\mathcal{G})$ zárt halmaz ekvilokalitási osztályok uniójaként állítható elő.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy X halmaz egy adott ekvilokalitási osztály elemeit tartalmazza, de nem mindet. Ekkor $\mathcal{G}^2(X)$ az egész ekvilokalitási osztály, tehát $X \notin L(\mathcal{G})$. Ha X halmaz több ekvilokalitási osztály elemeit tartalmazza, hasonló módon belátható, hogyha bármelyik ekvilokalitási osztálynak nem minden elemét tartalmazza akkor X nem zárt. Beláttuk tehát, hogy ha X -et nem ekvilokalitási osztályok uniójaként állítjuk elő, akkor biztosan nem zárt, ebből azonban következik, hogy $\forall X \in L(\mathcal{G})$ biztosan ekvilokalitási osztályok uniójaként áll elő. $\square$

11. Tétel. Az a leképezés amely mindegyik $X \in L(\mathcal{G})$ halmazhoz hozzárendeli az általa tartalmazott ekvilokalitási osztályok összességét egy izomorfizmus $L(\mathcal{G})$ és $L(\mathcal{G}')$ hálók között, amely felcserél a megfelelő dualitási leképezésekkel.

Bizonyítás. Egy leképezés izomorfizmus, ha struktúramegőrző és bijektív. A tételben leírt leképezést jelölje Φ . Ismert:

$$\mathcal{G}(X) = \{x' \mid \{x', x\} \in E \forall x \in X\}$$

valamint a 10. tétel kimondja, hogy $\forall X \in L(\mathcal{G}), \forall X' \in L(\mathcal{G}')$ ekvilokalitási osztályok uniójaként áll elő. Az ekvilokalitási osztályok szomszédságának definíciójából és az előző állításokból következik, hogy:

$$\{N_i, M_j\} \in E(G) \forall i, j$$

Ahol N_i X által, M_j pedig $\mathcal{G}(X)$ által tartalmazott ekvilokalitási osztályokat jelöli. Ebből következik, hogy $L(\mathcal{G}')$ -ben:

$$\{N'_i, M'_j\} \in E(G') \forall i, j$$

ahol N'_i és M'_j az N_i és M_j ekvilokalitási osztályokat reprezentáló pontok és ebből már látható, hogy $\Phi(\mathcal{G}(X)) = \mathcal{G}(X')$ és $\mathcal{G}(\Phi(X)) = \mathcal{G}(X')$. Ez azonban azt jelenti, hogy a $\Phi: L(\mathcal{G}) \rightarrow L(\mathcal{G}')$ leképezés struktúra tartó. A leképezés bijektív mivolta pedig szinte triviálisan látszik, hiszen $L(\mathcal{G})$ minden eleme ekvilokalitási osztályok uniójaként áll elő, és amennyiben $X \in L(\mathcal{G}), Y \in L(\mathcal{G}), X \neq Y$, akkor:

$$\bigcup_i N_i (= X) \neq \bigcup_j M_j (= Y)$$

Ebből azonban a Φ leképezés definíciója alapján következik, hogy $X' \in L(\mathcal{G}'), Y' \in L(\mathcal{G}')$

$$\bigcup_i N'_i (= X') \neq \bigcup_j M'_j (= Y')$$

tehát $X \neq Y \rightarrow X' \neq Y'$. □

Hivatkozások

- [1] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Sénéchal (1997) *Conformal Field Theory*, Springer, New York.
- [2] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, and A.B. Zamolodchikov (1984) *Infinite conformal symmetry in two-dimensional Quantum Field Theory*, Nucl. Phys. B241:333–380.
- [3] R. Dijkgraaf, C. Vafa, E. Verlinde, and H. Verlinde (1989) *The operator algebra of orbifold models*, Commun. Math. Phys. 123:485.
- [4] P. Bantay (2019) *A short guide to orbifold deconstruction*, SIGMA 15:027.
- [5] P. Bantay (2020) *FC sets and twistors: the basics of orbifold deconstruction*, Commun. Math. Phys. 379 (2):693-721.
- [6] P. Bantay (2020) *Deconstruction hierarchies and locality diagrams of conformal models*, arXiv:2104.04964 [hep-th].
- [7] G. Gratzner (2011) *Lattice Theory*, Birkhauser Verlag, Basel.
- [8] V. K. Balakrishnan (1997) *Graph Theory*, McGraw-Hill.
- [9] K. Nagy (2002) *Elektrodinamika*, Nemzeti Tankönyvkiadó Rt. Budapest.
- [10] E.D. Landau, E.M. Lifshic (1978) *Elméleti fizika III.:Kvantummechanika*.
- [11] P.Bantay *Permutáció orbifoldok és alkalmazásaik*.
- [12] B.McKay *Collection of Graphs*, <http://users.cecs.anu.edu.au/bdm/data/graphs.html>.