

RELATIVISZTIKUS RÉSZECSKÉK KLASSZIKUS MOZGÁSÁNAK VIZSGÁLATA KÜLÖNBÖZŐ TENZORI RANGÚ MEZŐKBEN

TDK-DOLGOZAT

KÉSZÍTETTE: Szepessy Dávid, fizikus BSc II.

TÉMAVEZETŐ: Dr. Cserti József és Dr. Dávid Gyula



EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

2021 ŐSZE

Tartalomjegyzék

I. BEVEZETÉS	3
1. Áttekintés	3
2. A dolgozatban használt jelölések és konvenciók	8
3. A relativisztikus dinamikai előismeretek rövid összefoglalása	9
II. ÁLTALÁNOS DINAMIKA A SPECIÁLIS RELATIVITÁSELMÉLETBEN	11
4. A Novobátzky-effektus és a relativisztikus Newton-törvény	11
4.1. A Novobátzky-effektus szemléletes levezetése	11
4.2. Miért nem közismert jelenség a Novobátzky-effektus?	13
4.3. A Novobátzky-effektus matematikai levezetése	14
4.4. A relativisztikus mozgásegyenlet általános alakja	14
5. A mozgásegyenletek származtatása variációs elvből	15
5.1. Variálás hármajelölésben	15
5.2. A kovariáns Lagrange-formalizmus	16
5.3. A szabad részecske Lagrange-függvénye	18
III. A RELATIVISZTIKUS KEPLER-PROBLÉMA VIZSGÁLATA SKALÁR- ÉS VEK-TORMEZŐBEN	19
6. Az általános mozgásegyenletek	19
7. Megmaradó mennyiségek centrális potenciálban	21
7.1. Az energia	21
7.2. Az impulzusmomentum	22
7.3. A Kepler-potenciál	23
8. A részecskepályák levezetése	24
9. A részecskepályák elemzése	27
9.1. Kötött pályák	28
9.1.1. A kötött pályák szimmetriatulajdonsága	30
9.2. Szabad pályák	32
10. Új, korábban nem ismert részecskepályák	33
10.1. Skalármező: az R sugáron belül	33
10.1.1. A radiális ejtés	33
10.1.2. Általános eset	35
10.2. Elektrosztatikus eset: a centrumba spirálózó pályák	38
IV. ÖSSZEFOGLALÁS	42

V. FÜGGELÉK	43
A. A tömegről	43
B. A Marx-paradoxon	44
VI. SZEMÉLYES MEGJEGYZÉSEK	45

I. rész

BEVEZETÉS

1. Áttekintés

A dolgozatomban a speciális relativitáselmélet mechanikájának bizonyos problémáit elemzem. Bár felmerül a kérdés, mi szükség ilyen vizsgálatokra több mint száz évvel a relativitáselmélet születése után, furcsa módon mégis az a helyzet, hogy a relativitáselmélet egyik fejezete, a tömegpontok mozgásegyenleteit tárgyaló relativisztikus dinamika az elmélet kevéssé kidolgozott, torzóban maradt része. Még inkább ez a helyzet a mozgásegyenletek megoldásaival, a ténylegesen megvalósuló részecskepályákkal kapcsolatban. A vizsgálatok és a példatárakban megjelent, részletesen megoldott feladatok csak egyetlen részterületre, a töltött részecskék elektromágneses mezőben történő mozgására koncentrálnak. Ez az a terület, ahol az egyenletek megoldásainak gyakorlati, technikai alkalmazása is megvalósult: a részecskegyorsítóknál a fénysebességtől csak egy hajszállal elmaradó sebességű részecskék mozgása a relativisztikus dinamika jól ismert egyenleteit követi.

Ez az aránytalanság tükröződik a legtöbb tankönyv tárgyalásmódjában is [1, 2, 3]. A relativisztikus dinamika alapfogalmainak bevezetése után a következő fejezet rögtön a töltött részecskék elektromágneses mezőben történő mozgásait elemzi. Kimarad az *általános* relativisztikus dinamika, a különböző jellegű mezőkben végzett mozgások általános törvényei és e mozgások egymással való összehasonlítása, a hasonlóságok és különbségek elemzése. A tankönyvek általában nem is említenek másfajta, az elektromágnesestől eltérő mezőket, így aztán nincs is mit összehasonlítaniuk.

Ez a tartalmi aránytalanság ugyanakkor súlyos elméleti problémákhoz is vezet. E tankönyveket tanulmányozva az olvasó azt hiszi, hogy az elektromágneses mezőben végzett mozgások bizonyos tulajdonságai univerzálisan érvényesek, ezek a relativisztikus dinamika általános törvényei. Mint a dolgozatomban bemutatom (elsősorban az ELTE-n az ötvenes és a nyolcvanas években végzett kutatásokra támaszkodva), ez korántsem igaz: a nevezett tulajdonságok nem általánosak, csak az elektromágneses eset specialitásai.

Kivételt jelent Barut könyve [8]. Ebben a szerző a közismert és sokat tárgyalt elektromágneses mezőbeli mozgás mellett felsorol néhány más hipotetikus relativisztikus mozgásfajtát is, köztük a skalár- és tenzormezőben végbemenő mozgást, illetve egy elektromos és mágneses dipólmomentummal rendelkező részecske csatolási tenzorral leírható kölcsönhatását a térerősségtenzorral megadott elektromágneses mezővel, emellett kitér a spinnel rendelkező tömegpont relativisztikus mozgására is. Eközben összegyűjti a különböző szerzők által az ötvenes években és a hatvanas évek elején elért elszórt eredményeket. Mindegyik esetben konstruktív úton felírja, illetve Lagrange-formalizmus segítségével levezeti a vizsgált mozgásra vonatkozó kovariáns mozgásegyenleteket, később bemutatja a Hamilton-formalizmus alkalmazhatóságát is. Azonban ez a könyv sem tér ki a kapott mozgásegyenletek tartalmi, fizikai összehasonlítására, a különböző képletek mögött rejlő eltérő fizikai jelenségek elemzésére. Nem ejt szót a (nyugalmi) tömeget jelentő eltérő fizikai mennyiségek szerepére a különböző jellegű egyenletek esetén. Pedig mint látni fogjuk, a jelenségkör központi kérdése a (nyugalmi) tömeg állandó vagy változó volta, a változására vonatkozó egyenletek levezetése és esetleges megoldása. Barut egyáltalán nem foglalkozik az egyenletek megoldásával, azaz a különböző mezők és csatolások esetén megvalósuló mozgások összehasonlításával, a kialakuló lehetséges pályák leírásával. Könyve további részében ő is a gyakorlati esetben legfontosabbnak tartott feladattal, a relativisztikus elektrodinamika kiépítésén dolgozik. Így e könyv sem változtat azon az általános tendencián, amely az elektromágneses eset hangsúlyos tárgyalásával és a többi eset perifériára szorításával, jellegzetességeik elhanyagolásával jellemezhető.

Az általános dinamika elhanyagoltságát elősegítette az is, hogy a tudomány korábban nem ismert más, ténylegesen létező erőt az elektromágnesesen kívül, amely a részecskéket relativisztikus sebességre gyorsíthatná. Ez a helyzet 2012-ben megváltozott: ekkor fedezték fel a genfi LHC részecskegyorsítóban a Higgs-részecskét (a felfedezést egy év múlva Nobel-díjjal jutalmazták), amely a négyesskalár-jellegű Higgs-mező kvantuma. Ma már tehát tudjuk, hogy a négyesvektor-jellegű elektromágneses mezőn kívül legalább egy négyesskalármező ténylegesen létezik a természetben. Mint látni fogjuk, az ilyen erőterben megvalósuló mozgás törvényei alapvetően eltérnek az elektromágneses esetben megszokottól. Legitim tehát feltenni a kérdést a relativisztikus mozgás általános törvényeire vonatkozóan, és keresni a mozgásegyenletek tényleges megoldásait.

Érdekes, hogy e programot az ELTE kutatói Novobátsky Károly professzor kezdeményezésére, Marx György vezetésével az ötvenes években részlegesen megvalósították. Eredményeik azonban az akkori politikai és tudományos viszonyok következtében nem jutottak el a tudomány főáramába, egy részüket más kutatók később (más kontextusban) újra felfedezték, másik részük pedig még ma sem közismert.

A most következő történeti fejezetek Dávid Gyula Fizikai Szemlében megjelenőben levő cikke [27] alapján készültek.

A relativisztikus dinamika kezdetei

Einstein a speciális relativitáselmélet kinematikáját megalapozó első cikke után néhány hónappal, még 1905-ben közölt egy másik cikket, amelyben egy sokat idézett gondolat kísérlet alapján levezette a nevezetes $E_0 = Mc^2$ képletet, megalapozva a szűkebben vett relativisztikus dinamikát. (Ezt a gondolatmenetet több későbbi cikkben csiszolta, finomította, a legutolsó verzió 1946-ból való ([9], ill. lásd a függelék A.1. alfejezetét).)

Minkowski 1907-ben megalkotta a négydimenziós téridő fogalmát, és megmutatta, hogy az Einstein által levezetett Lorentz-transzformációk ennek a négyestérnek a hiperbolikus forgatásai. Ugyancsak ő vezette be a négyesvektorokat és a négyestenzorokat. Némi kezdeti idegenkedés után Einstein és más fizikusok is elfogadták a geometriai interpretációt, és áttértek a négyesmennyiségek használatára.

Eközben a kor vezető fizikusai elfogadták a speciális relativitáselméletet mint az egész elméleti fizika új általános keretelméletét, és elkezdtek a részletek kidolgozását. A speciális és általános relativitáselmélet forradalmának lezárulásával elkészült az ilyenkor szokásos enciklopédikus összefoglaló mű, Hermann Weyl: Tér, idő, anyag című könyve [6]. Weyl nyomán fogadták el a fizikusok azt az általános értelmezést, mely szerint egy rendszer tömegét négyesimpulzus-vektorának abszolút értéke adja meg (lásd a függelék A.2. alfejezetét).

Nem szokványos tömegelméletek

Einstein figyelme a speciális relativitáselmélet megalkotása után ennek kiterjesztése, a gravitáció relativisztikus elmélete: az általános relativitáselmélet kiépítése irányába fordult. Ez végül tíz év intenzív matematikai munka után sikerült. Einsteinnel párhuzamosan azonban sokan mások is kísérleteztek a gravitáció jelenségének beillesztésével a speciális relativitáselméletbe.

Einsteintől különböző módon próbálkozott Nordström finn fizikus [20, 5]: ő a gravitáció közvetítőjéül egy négyesskalár-mezőt választott. Ez az elmélet sikeresen írta le a (passzív) gravitáció egyik alapvető tulajdonságát, a tömegtől való függetlenségét. Ugyanakkor egy érdekes (a tudománytörténetben először ekkor felbukkanó) jelenséghez vezetett: a Nordström-féle gravitációs mezőben mozgó részecske tömege nem volt állandó, mozgás közben változott. Ez azonban nem okozott nagyobb gondokat, hiszen a végső mozgásegyenletből a tömeg kiesett, minden test egyformán gyorsult. Nordström elmélete egy ideig annyira sikeres volt, hogy Einstein is elfogadta, és abbahagyta az általános relativitáselmélet fejlesztését. Hamarosan azonban elméleti nehézségek merültek fel, így Einstein visszatért

az általános relativitáselmélet geometriai koncepciójához.

Mai szemmel nézve Nordström elmélete nem a kivétel, hanem a szabály volt – látni fogjuk, hogy egy konzekvensen kiépített relativisztikus dinamikában a külső erők hatására a tömeg általában változik. A kivétel éppen az akkoriban részletesen vizsgált példa, az elektromágneses mezőben mozgó részecske esete.

A harmincas években néhány relativisztikus tankönyvben felmerült az elektromágnesestől eltérő jellegű erőkben lezajló relativisztikus mozgás gondolata. Néhány alapképlet felírásán azonban nem jutottak túl, és hamar megállapodtak abban, hogy a természetben csak a négyesvektormező által közvetített elektromágneses erő fordul elő. (Az elfogadott gravitációelmélet ekkor már az általános relativitáselmélet volt.)

1.1. A kvantumelmélet és a relativisztikus tömeg

Sommerfeld a hidrogénatom elektronjának Bohr-féle körpályáját ellipszispályává való általánosításán dolgozva észrevette, hogy a hidrogénatom alapállapotában a körpályán mozgó elektron sebessége a fénysebesség 137-ed része (mai fogalmakkal kifejezve: $v/c = e^2/\hbar c = 1/137$). A magot sokkal jobban megközelítő ellipszispályák magközeli részén ez a sebesség még nagyobb lehet, jobban megközelítheti a fénysebességet. Adódott tehát, hogy a mozgás leírására a relativisztikus mechanikát kell alkalmazni. Sommerfeld ezért kiszámolta a hidrogénatom magjának centrális Coulomb-erőterében kialakuló kötött elektronpályákat, figyelembe véve a relativisztikus effektusokat.

A Schrödinger–Heisenberg–Dirac-féle modern kvantummechanika megszületése után kidolgozták az elektronok és fotonok közös kvantumelméletét, a kvantumelektrodinamikát (QED). Ennek sikerei nyomán az elméleti fizikusok új megmagyarázni való jelenségek után néztek. Kínálkozott az időközben felfedezett új jelenségkör, a magerő (mai nevén az erős kölcsönhatás) fizikája. Amikor azonban a QED matematikai apparátusát a magerőre akarták alkalmazni, nem várt nehézségekbe ütköztek.

A magerő és a „klasszikus mezodinamika”

Eközben az atommag szerkezetének meghatározása párhuzamosan folyt a kvantumelmélet kialakulásával, annak egyes eredményeit (pl. az alagúteffektus felfedezését) rögtön alkalmazták egyes magfizikai jelenségek (pl. az alfa-bomlás) magyarázatára. Hamar nyilvánvalóvá vált, hogy a magerő a természet merőben új jelensége, ami nem vezethető vissza a jól ismert elektromágneses kölcsönhatásra. Egyebek között erre utalt (a töltésfüggetlenség mellett) a magerők véges hatótávolsága is.

A távolsággal exponenciálisan eltűnő erő mezőelméletét Yukawa dolgozta ki 1937-ben. Addigra már ismerték a QED nemrelativisztikus verzióját, mely szerint az elektromágneses kölcsönhatást a töltött részecskék közötti fotoncsere közvetíti, a foton az elektromágneses mező kvantuma, ami (az elmélet mértékinvarianciája következtében) nulla tömegű, és az elmélet négyesvektor-jellege miatt egyes spinű részecske. Yukawa a magerők véges hatótávolságából arra következtetett, hogy ezt az erőt nem nulla, hanem közepes (a proton és az elektron tömege közé eső) tömegű részecske közvetíti (innen a neve: közepes tömegű, azaz mezon), amelynek spinje nulla, és így egy négyesskalár-mező kvantuma. A negyvenes évek végén felfedezték a Yukawa-féle nulla spinű mezont, mai nevén a piont.

Eközben a magerők hatékonyabb elméleti leírására készen kínálkozott a QED esetében kiválóan bevált elméleti apparátus. Itt azonban nem várt nehézségekbe ütközött a kutatás.

A kvantumelektrodinamika a keresett fizikai mennyiségeket (amelyek összehasonlíthatók a kísérleti tapasztalattal) a Dirac által bevezetett finomszerkezeti állandó ($\mu = e^2/\hbar c = 1/137$) hatványai szerint haladó sor formájában adja meg. Ezért már a hatványsor első tagjai is hozzávetőleges tájékoztatást adnak a vizsgált jelenségről. Amikor ugyanezt az elméleti apparátust a magerők leírására próbálták alkalmazni, azzal a problémával szembesültek, hogy a finomszerkezeti állandónak megfelelő konstans értéke a magerők esetén kb. 10, ezért egyáltalán nem várható az e paraméter szerint haladó hatványsor

konvergenciája, de még létezése sem, a sor első tagjai pedig nem adnak semmiféle releváns információt.

Ebben a tudománytörténeti pillanatban (1948) hangzott el Paul Diracnak, a relativisztikus kvantummechanika megteremtőjének és a QED egyik kezdeményezőjének új javaslata. Így érvelt: a QED megelőzte a klasszikus elektrodinamika, ennek megismerésével alakultak ki az elektromágnesesség alapfogalmai, melyek kvantumos megfelelőivel a QED dolgozik. A magerők fizikájában viszont közvetlenül a kvantumos jelenségekkel találkoztunk, és nincs semmiféle elképzelésünk arról, hogy ezek milyen klasszikus fogalmakkal írhatók le. Hiányzik ugyanis a skalármező megfelelő klasszikus elmélete, a „klasszikus mezondinamika”. Ha hiányzik, akkor teremtsük meg! A következő években világszerte intenzív kutatások indultak meg ebbe az irányba. Felelevenítettek sok korábbi, már a harmincas években felmerült ötletet, és számos új elgondolást is kipróbáltak. Átfogó képet ad erről a pezsgről Ivanenko és Szokolov akkoriban megjelent, magyarra is lefordított könyve [7].

Ebbe az elméleti programba kapcsolódott be Budapesten az ELTE-n működő Novobátszky-iskola.

A Novobátszky-iskola eredményei

Az ELTE Elméleti Fizikai Tanszékét vezető Novobátszky Károly professzor és tanítványai (elsősorban Marx György, Györgyi Géza és Szamosi Géza) az ötvenes évek elején átfogó kutatást kezdtek a klasszikus mezondinamika kiépítésre. Első felismerésük az volt, hogy a keresett mozgások igen nagy valószínűséggel relativisztikusak lesznek.

Amikor azonban elővették a relativitáselmélet tankönyveit, a relativisztikus mechanika általános fogalmainak bevezetése után nem találták meg az „általános dinamika” fejezetet, hanem közvetlenül az elektromágneses mezőben lezajló részecskemozgás tárgyalása következett. Ennek oka az a fentebb vázolt tudománytörténeti helyzet volt, ami az 1910-es évektől kezdve nagyrészt az elektromágneses erők hatására mozgó részecskékre összpontosított, lévén ez az egyetlen kísérletileg vizsgálható szituáció, a későbbi elképzelések szerint pedig az egyetlen ténylegesen létező mező.

A Novobátszky-iskola tehát nekilátott az alapoktól felépíteni a relativisztikus dinamika hiányzó fejezeteit. Ennek során nemcsak az eredeti célt, a skalármezőben való mozgást vizsgálták, hanem a relativisztikus dinamika általános törvényeit is. Részletesen kidolgozták az általános és a speciális esetek mozgásegyenleteit és ezek jellegzetességeit. Érdekes módon nem sokat foglalkoztak viszont a mozgásegyenletek tényleges megoldásaival, a pályák kiszámításával – tág teret hagyva ezzel jelen dolgozat vizsgálódásainak. Kutatásaik eredményeit számos cikkben publikálták [13, 15, 18], később gyümölcsöző együttműködést építettek ki egy varsói és egy leningrádi egyetem kutatóival. Cikkeik azonban az akkori politikai és tudománypolitikai helyzetben nem jutottak el a nyugati tudomány képviselőihez. Eredményeik egy részét később egészen más (kvantummezőelméleti) kontextusban nyugaton újra felfedezték, más részük még ma sem közismert. A témakör legátfogóbb tárgyalása Marx György doktori disszertációjában található meg [11].

A magyar kutatók első és legfontosabb felismerése az volt, hogy egy külső mezőben mozgó részecske tömege általában nem marad állandó, hanem a négyeserő hatására megváltozik [12]. Az eredmények első említése Novobátszky egy 1953-ban, más témáról (kvantumelméletről) írott cikkében [10] található. A későbbi kutatások során Novobátszky tanítványai ezt az effektust vették alapul a további jelenségek vizsgálatához. Ezért e jelenséget dolgozatban Novobátszky-effektusnak fogom nevezni. Az effektust leíró képletet (8) szemléletes fizikai érveléssel, valamint kovariáns matematikai számítással is le fogom vezetni.

Kiderült, hogy a Novobátszky-effektus alól egyetlen kivétel van: az az eset, amikor a mező által kiváltott négyeserő merőleges a részecske négyessebességére, ekkor az erő tömeget változtató belső munkája zérus, ezért a tömeg állandó. Ez pedig éppen a korábban leggyakrabban vizsgált elektromágneses mező esete. Ez egyben magyarázatul szolgál arra, hogy a korábbi kutatók miért nem figyeltek fel erre a jelenségre.

Marx és Szamosi megmutatták [15, 16, 17, 18], hogy a skalármezőben mozgó részecske egy pillanatra elérheti a fénysebességet. Tömege ekkor egy pillanatra nullára csökken. Marx és a Varsóban dolgozó Werle eredményei [19] szerint egy tömegpont sztatikus $\Phi(\mathbf{r})$ skalármezőben végzett relativisztikus mozgása ekvivalens egy klasszikus részecske effektív potenciáltérbeli mozgásával. Ez az effektív potenciál $W = \Phi + \Phi^2$ alakú, azaz negatív irányban divergáló vonzó erőtér esetén is pozitív értékre, taszító jellegűbe csap át (lásd a dolgozat 10.1. alfejezetét).

Fel lehet írni olyan hipotetikus erőtvényeket is, amelyekben a részecske a kovariáns erőtvény és a végig kovariáns tárgyalás ellenére túllépi a fénysebességet. Ezt a jelenséget nevezzük Marx-paradoxonnak ([11], ill. lásd a függelék B. részét). A Novobátzky-iskola foglalkozott a relativisztikus variációs elvek kérdésével is [14], de nem jutottak el egy kovariáns Lagrange-formalizmus kiépítéséhez.

A relativisztikus dinamikával foglalkozó Novobátzky-iskola működése 1956 után – tagjai egy részének külföldre távozása következtében – félbeszakadt. Eredményeik sajnos nem jutottak el a nemzetközi nyilvánossághoz. Később Marx György és tanítványai magfizikai problémák megoldására alkalmazták az atommagot összekötő skalármezőben fellépő relativisztikus effektusokat [21, 22, 23].

Novobátzkyék munkásságát a nyolcvanas években Dávid Gyula folytatta. Kidolgozta a kovariáns Lagrange-formalizmust, amely a speciális mellett az általános relativitáselméletben is alkalmas a részecskék kovariáns mozgásegyenleteinek levezetésére tetszőleges külső mezőben való mozgás esetén. Ez a formalizmus automatikusan számot ad a Novobátzky-effektusról, és visszaadja a Marx cikkeiben a tömeg változására levezetett képleteket. Megmutatta, hogy a részecske tömegét minden Lagrange-függvénnyel leírható rendszer esetén a Beltrami-függvény (más néven a Hamilton-függvény) adja meg [24, 25, 26, 27]. Az ideális folyadék relativisztikus hidrodinamikájában pedig levezette, hogy a részecskeszámra vonatkozó kontinuitási egyenlet mellett fennálló dinamikai egyenlet megegyezik a skalármezőben mozgó relativisztikus pont részecske mozgásegyenletével, ahol a skalárpotenciál szerepét a folyadék fajlagos entalpiája játssza [24].

Kitekintés: a relativisztikus tömeg a mai kvantum-mezőelméletben (QFT)

A Maxwell-féle elektrodinamika jól bevált egyenleteinek mintájára, annak $U(1)$ szimmetriáját nemkommutatív mértékcsoporthoz általánosítva Yang és Mills 1952-ben felírta a róluk elnevezett egyenleteket. Ezek azonban csak a nulla tömegű részecskék leírására voltak alkalmasak. A QFT más jellegű problémáinak megoldására Higgs, Englert és Brout 1964-ben feltételezték egy nem eltűnő várható értékű skalármező létezését. E mező a Yang-Mills-féle mértékmezőkkel kölcsönhatva a Higgs-mező η várható értékével és a g csatolási állandóval arányos effektív tömeget ad a mértékbozonoknak: $M = g\eta$. Később ezt a gondolatot a Higgs-mező és a fermionok kapcsolatára is kiterjesztették.

Az $M = g\eta$ képlet fennállását a CERN LHC gyorsítójának 2020-as mérései nagy pontossággal megerősítették [32]. Ez a képlet a (8) Novobátzky-formula $m = 0$ érték melletti speciális esete: a részecskének nincs eleve adott tömege, a teljes tömeget a skalármezőtől kapja. Higgs és társai tehát a QFT keretei között ismét felfedezték Novobátzky 1950-es képletét, amiről a 4. fejezetben látni fogjuk, hogy nem kvantumjelenség, hanem tisztán relativisztikus dinamikai effektus. A mai fizika egyik csúcsteljesítménye, a Standard Modell tehát részben e régi budapesti felfedezésen alapul.

A dolgozat célja

A dolgozat elsődleges célja a különböző tenzori jellegű mezőkben (skalármezőben és vektormezőben) végbemenő relativisztikus mozgások összehasonlítása, párhuzamos vizsgálata, a hasonlóságok és a különbségek elemzése. Ezért igyekszem elkerülni a felesleges bonyodalmakat. Mindkét mező esetén feltételezem, hogy a mező forrása egy nagy (végtelen tömegűnek feltételezett) test, amely egy inerciarendszer origójában nyugszik, és gömbszimmetrikus mezőt hoz létre maga körül. A jelenségek

leírására szolgáló vonatkoztatási rendszerként természetesnek kínálkozik az a rendszer, amelyben a forrás nyugszik.

Mivel a fentebb vázolt történeti okok miatt a relativisztikus dinamika mozgásegyenleteinek levezetése nem közismert, ezért a dolgozat elején részletekbe menően foglalkozom e kérdéssel.

A mozgásegyenleteket először teljes általánosságban, majd az adott szituációra specializálva vezetem le. A sztatikus centrális mező speciális megmaradási tételekhez vezet, ezek kihasználása egyszerűsíti a mozgásegyenletek felírását. Később olyan segédparamétereket vezetek be, amelyek tartalmazzák a mozgásállandókat, és lehetővé teszik a két eset párhuzamos tárgyalását.

Bár numerikusan ki lehetne számítani a pályák időfüggését, ezzel nem foglalkozom, és az időváltozó kiküszöbölésével áttérek a pálya polárkoordinátás egyenletére. Igen nagy szerencse, hogy az egyenlet mindkét mező esetén egzaktul megoldható. Így a továbbiakban a különböző jellegű pályák grafikus bemutatása és tulajdonságaik vizsgálata, az újonnan felfedezett jelenségek matematikai és fizikai magyarázata következik.

A dolgozat felépítése

A Bevezetés hátralevő részében összefoglalom a használt jelöléseket és a tankönyvekben szereplő relativisztikus dinamikai alapismereteket. Már itt felhívom a figyelmet arra, hogy ezek egy része később tévesnek bizonyul. A II. rész a relativisztikus dinamika általános törvényeiről szól. A 4. fejezet a Novobátszky-effektus szemléletes, majd formális matematikai levezetését tartalmazza. A szemléletes érvelés tőlem származik, a formális levezetés Novobátszky eredeti gondolatmenetét követi. Az 5. fejezetben a külső erőterben mozgó részecske mozgásegyenleteit variációs elvből vezetem le, előbb hármajjelölésben, majd a kovariáns Lagrange-formalizmus felhasználásával. Az utóbbi módszer Dávid Gyulától származik.

A dolgozat III. része e mozgásegyenleteket specializálja a négyesskalár- és négyesvektor-mező esetére. Az utóbbinak azt a speciális esetét vizsgálom, amikor a négyesvektormező tisztán elektrosztatikus. A jobb összehasonlíthatóság érdekében a kétféle mező esetét párhuzamosan tárgyalom. A 6. fejezetben levezetem a mozgásegyenleteket. A 7. fejezetben megkeresem a sztatikus centrális potenciál esetén érvényes megmaradó mennyiségek, az energia és az impulzusmomentum képleteit.

Innentől számítva a dolgozat minden képlete és ábrája a saját eredményem. A 8. fejezetben a kétféle mező esetén levezetem a részecskepályák egyenletét, és egzakt megoldást adok rájuk. A 9. fejezetben a különböző lehetséges pályák grafikus bemutatása és elemzése következik. A 10. fejezetben bemutatom a dolgozat legfontosabb új eredményeit. Mindkét mező esetén találtam új, korábban nem ismert jellegű részecskepályákat: a skalármező esetén a taszítógömb határán konvexitást váltó, az elektrosztatikus esetben pedig a vonzócentrumba spirálozó pályákat. Részletesen elemzem e megoldások fellépésének fizikai és matematikai feltételeit.

A függelék a tömegre vonatkozó megfontolásokat, illetve a relativisztikus dinamika egyes problémáit ismerteti. A dolgozatot személyes megjegyzések és irodalomjegyzék zárja.

2. A dolgozatban használt jelölések és konvenciók

Vektorok: A hármajvektorokat félkövér szedéssel ($\mathbf{r}$), a négyesvektorokat indexes írással (x^k) jelölöm.

Indexek: Az ábécé közepéről vett kis latin négyesindexek (k, l, m stb.) a 0, 1, 2, 3, a kis görög hármajindexek (α, β, γ stb.) pedig az 1, 2, 3 értékeket veszik fel. Az indexek le- és felhúzását a $g_{kl} = \text{diag} < 1, -1, -1, -1 >$ metrikus tenzorral végezzük.

A fontosabb négyesvektorok komponensei:

$$\begin{aligned} \text{négyeshelyvektor: } x^k &= \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} & \text{négyessebesség: } u^k &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \\ \text{négyesimpulzus: } p^k &= \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} & \text{négyeserő: } K^k &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{dE}{dt} \\ \mathbf{F} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. A relativisztikus dinamikai előismeretek rövid összefoglalása

Alább a dolgozat későbbi részeiben előismeretként feltételezett, tankönyvekben megtalálható speciális relativisztikus dinamikai alapképletek és -ismeretek következnek – ehhez Hraskó Péter: A relativitáselmélet alapjai [4] és uő: Relativitáselmélet [3] c. könyveit veszem alapul. A következő fejezetben az itt leírtak Novobátsky-féle módosítását és általánosítását mutatom be. Azokat az állításokat, amelyek ennek során érvényüket veszítik, az adott pontban jelzem. Az alább bevezetett négyesvektorok komponenseit lásd az előző (2.) alfejezetben.

1. A relativisztikus dinamika feladata a relativisztikus mozgásegyenletek felállítása és megoldása, az eközben fellépő fogalmak, mennyiségek definiálása és értelmezése.
2. Ehhez a klasszikus fizikában keresett $\mathbf{r}(t)$ helyett a Lorentz-kovariáns négyeshelyvektort keresem a (szintén kovariáns, skalár) $\tau = \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$ sajátidő függvényében: $x^k(\tau)$.

A klasszikus mechanikában használt sebesség- és gyorsulásvektor analógiájára a mozgás leírására használatos a négyessebesség- és a négyesgyorsulás-vektort mint az x^k helyvektor τ sajátidő szerinti első és második deriváltját: $u^k = \frac{dx^k}{d\tau}$ és $a^k = \frac{du^k}{d\tau}$. Könnyedén belátható a négyessebesség c -re normáltságát kifejező

$$u_k u^k = c^2, \quad (1)$$

valamint a négyessebesség- és négyesgyorsulás-vektor ortogonalitását kifejező

$$a_k u^k = 0 \quad (2)$$

azonosságot.

3. Felírom a szabad részecske hatásintegrálját ([1], ill. lásd az 5.3. alfejezetet):

$$S = -mc^2 \int d\tau = -mc^2 \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt, \quad (3)$$

mely tartalmaz egy tömegdimenziójú konstans paramétert.

4. Ebből meghatározom a szabad részecske energiáját és impulzusát:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$p_\alpha = \frac{mv_\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Látható, hogy a $v \ll c$ nemrelativisztikus határesetben az impulzus $p_\alpha = mv_\alpha$, amiből a Lagrange-függvényben szereplő m paramétert azonosítjuk a szabad részecske tömegével (lásd a függelék A.2. részét).

5. Észreveszem, hogy az alábbi számnégyes négyesvektorként transzformálódik a Lorentz-csoportra nézve: $p^k = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}$. Ez a négyesimpulzus-vektor, mely így írható: $p^k = mu^k$. Mivel a négyessé-

besség időszerű vektor, ezért a négyesimpulzus is az, tehát a négyzetének van pozitív négyzetgyöke; az (1) egyenlet alapján a négyesimpulzus abszolútértéke $\sqrt{p_k p^k} = mc$. Ezzel megadtam a tömeg relativitáselméletben használt definícióját: a tömeg – eltekintve a c szorzótól – a négyesimpulzus abszolútértéke (lásd a függelék A.2 részét). A négyesimpulzus nullkomponense adja a test teljes energiáját. Mivel a test teljes energiája egy négyesvektor komponense, a belső (nyugalmi) energia pedig egy négyesskalár, e két mennyiség különbségeként nem rendelhető a testekhez kovriánsan definiált, különálló mozgási energia.

6. Felteszem, hogy a relativitáselméletben megtartható a Newton-törvény $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ alakja, és kiterjeszthető négyesvektorokra:

$$ma^k = \frac{dp^k}{d\tau} = K^k. \quad (4)$$

A 4.4. alfejezetben látni fogjuk, hogy ez a feltételezés téves.

7. Ezt az egyenletet összevetve az (2)-vel adódik, hogy a négyeserő mindig ortogonális a négyessé-
bességre:

$$K_k u^k = 0. \quad (5)$$

A 4.1. alfejezetben látni fogjuk, hogy (4)-gyel együtt ez az egyenlet is érvényét veszti.

8. Az ily módon bevezetett négyeserő komponensei (4) alapján kiszámíthatóak a négyesimpulzus komponenseiből. A négyeserő tartalmazza a hármaserőt és a test teljes energiáját változtató teljesítményt is.
9. A test belső (!) energiája és tömege között fennáll az $E_0 = Mc^2$ összefüggés (lásd a függelék A.1. részét).

II. rész

ÁLTALÁNOS DINAMIKA A SPECIÁLIS RELATIVITÁSELMÉLETBEN

A relativitáselméletben az egyidejűség relativitása miatt nem lehet pontrendszerek mechanikájáról beszélni (hiszen nem értelmezhető a távoli események egyidejűsége). Így a testek közötti kölcsönhatást vagy mezők közvetítik, vagy kontaktkölcsönhatás történik a két test között. Ezért ebben a részben egyetlen pontszerű részecske mozgását vizsgálom adott külső mezőben.

4. A Novobátzky-effektus és a relativisztikus Newton-törvény

Az alapkérdés, amely problémát vet fel a (3. fejezetben összefoglalt, hagyományos) relativisztikus dinamikával kapcsolatban, hogy ha a testek mozgása egy négyesvektor-egyenlettel írható le, hogyan lehetséges, hogy – a newtoni mechanikában megszokott módon – elegendő három adat (az $\mathbf{F}$ hármaseserő) megadása egy test mozgásának meghatározásához. A most következő szakaszban ezt a kérdést fogom tárgyalni. Két válaszlehetőséget fogok részletesen elemezni:

- (1) A kérdésre látszólag (a tankönyvek alapján) nagyon egyszerű a válasz: a mozgásegyenlet mellett az (5) $K_k u^k = 0$ egyenletnek mint *természeti törvénynek* is teljesülnie kell, ezért a mozgásegyenlet négy komponense lineárisan összefüggő; a négyeserő négy komponense tehát nem független egymástól. Az alább következő alfejezetben megmutatom azonban, hogy ez a gondolatmenet hibás.
- (2) A négyeserő négy komponense valóban független egymástól. Ekkor viszont nem lehet igaz az (5) egyenlet, ennek helyébe tehát új egyenletet kell állítani. Az (5) egyenlet viszont (4)-ből következik, tehát ebben az esetben a (4) mozgásegyenlet helyett is új egyenlet szükséges..

4.1. A Novobátzky-effektus szemléletes levezetése

Az (1) lehetőség vizsgálatához vegyünk egy konkrét példát: hogyan mozog egy test, amelyre egy sebességgel arányos

$$\mathbf{F} = k\mathbf{v} \tag{6}$$

erő hat? Ha megoldottuk a (4) mozgásegyenletet (amit elvileg megtehetünk, hiszen a (6) erőképlet az (1) feltételezés szerint egyértelműen meghatározza a test mozgását), a mozgásból kiszámítható a test által egységnyi sajátidő-intervallum alatt felvett energiát. Mivel a négyeserő $\frac{1}{c} \frac{dE}{d\tau}$ nullkomponense éppen ezzel a mennyiséggel arányos, így a négyeserő nullkomponense következik a másik háromból. (Hogy később visszautalhassak rá, leszögezem: a pontos megoldás nélkül is biztos, hogy - ha a sebesség kezdetben nem volt nulla - a test gyorsuló mozgást fog végezni.)

Ez a gondolatmenet azonban hibás: a négyeserő nullkomponense nemcsak a kinetikus energia, hanem a belső energia megváltozását is tartalmazza – mivel ez utóbbi a négyeserő által közvetített kölcsönhatás alkalmazott modelljétől függ, ezért a négyeserő komponensei valójában függetlenek egymástól. Úgy gondolhatjuk, hogy a megoldás receptje kézenfekvő: a teljesítményt szét kell választani a belső energia és a kinetikus energia megváltozására – az elsőt rá lehet bízni arra, aki relativisztikus termodinamikát szeretne csinálni, a mechanikában úgyis csak a második fog kelleni. (Látni fogjuk, hogy ez a megoldás téves.)

A kérdést tehát sikerült egyszerűsítenem: ha az előző bekezdésben vázolt recept megvalósítható, az (1), ha nem, a (2) válasz bizonyul igaznak. E kérdés eldöntéséhez vizsgáljuk meg azt a gondolat-

kísérletet, amellyel Einstein eredetileg levezette az $E_0 = Mc^2$ képletet! Ebben Einstein egy K -ban nyugvó testre bocsátott z és $-z$ irányú fénnyaláb elnyelődését vizsgálta az eredeti K és egy ahhoz képest $v \ll c$ sebességgel mozgó K' inerciarendszerben. (A kísérlet leírását, az azzal kapcsolatos legfontosabb következtetéseket és a tömegre használt M jelöléssel kapcsolatos megjegyzéseket lásd a függelék A részében.) A kísérlettel kapcsolatos következtetések közül fontos lesz, hogy az érvényteleníti a tömegmegmaradás törvényét (hiszen a belső energiára semmiféle különálló megmaradási törvény nem vonatkozik), illetve hogy – mivel a levezetés nem a Lorentz-transzformáció képletein alapul – ez a képlet új feltételt szab a newtoni mechanika alkalmazhatóságára: nemcsak a $v \ll c$ -nek kell teljesülnie, hanem a belsőenergia relatív változásának is elhanyagolhatónak kell lennie. W -vel jelölöm a két fénnyaláb által átadott teljesítményt.

A négyeserő (melyet a fénnyaláb kifejt az álló testre az elnyelődéskor) és a négyessebesség K -ban a (2. szakaszban felírt) definíciójuk alapján

$$K^k = \begin{pmatrix} W/c \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{ és } u^k = \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Mivel K a test sajátrendszere, a belsőenergia-változást rögtön a sajátidővel lehet kifejezni a teljesítményből: $dE_0 = W d\tau$, ebből pedig felírható a tömeg megváltozását:

$$dM = \frac{W}{c^2} d\tau. \quad (7)$$

Vizsgáljuk meg, hogyan néz ki ugyanez a folyamat abból a K' rendszerből nézve, amely K x tengelye mentén negatív irányban mozog $\mathbf{v} = v \cdot \mathbf{e}$ sebességgel. A négyeserő komponensei ebben a rendszerben Lorentz-transzformációval $K'^0 = \chi K^0$ és $K'^\alpha = \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} \cdot \chi K^0$ (ahol χ a rapiditás, mellyel kifejezve a sebesség $\mathbf{v} = c \cdot \mathbf{e} \cdot \text{th}\chi$), a négyeserő és -sebesség tehát

$$K'^k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} W/c \\ \frac{W}{c^2} \mathbf{v} \end{pmatrix} \text{ és } u'^k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}.$$

A négyeserő komponenseit leolvastva megállapítható, hogy a teljesítmény $W' = W$ és az erő $\mathbf{F}' = W/c^2 \cdot \mathbf{v}$. Ebben a rendszerben tehát már nem erőmentes a test, mégis állandó sebességgel mozog (pont ezt használta ki Einstein az eredeti gondolkísérletben). Ennek ellenére az erő megegyezik az impulzusváltozással, melyet a tömeg megváltozása okoz:

$$\frac{d}{dt'} \frac{M \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dM}{dt'} = \mathbf{v} \frac{dM}{d\tau} = \frac{W}{c^2} \mathbf{v}.$$

(Bár a két rendszerben a teljesítmény különböző, amennyivel nagyobb K' -ben az energiaváltozás adott sajátidő-intervallum alatt, annyival nagyobb a sajátidőhöz tartozó rendszeridő-intervallum.)

Mit észlel a K' -ben ülő megfigyelő a kísérlet során? Az ő rendszerében éppen a negyedik bekezdésben felvázolt (6) példa valósul meg (hiszen az erő $\mathbf{F}' = W/c^2 \cdot \mathbf{v}$ arányos a sebességgel). Ezért ez a megfigyelő azt tapasztalja, hogy egy (6) sebességgel arányos erő hatására a test megőrzi az egyenletes mozgását. A negyedik bekezdés végén azonban megállapítottam, hogy egy ilyen erő hatására a test szükségszerűen gyorsuló mozgást végez. A két állítás ellentmondásban áll egymással, ezért kijelenthető, hogy a (2) válasz bizonyult igaznak: a hármaserő nem határozza meg egyértelműen a test mozgását, így a mozgásegyenlet négy komponense független egymástól. Hátra van még azonban a (2) lehetőség tárgyalásánál feltett két kérdés megválaszolása: mi lép az (5) $K_k u^k = 0$ és a (4) $ma^k = K^k$ egyenlet helyébe?

Mielőtt erre választ adnék, lépünk meg egy apró általánosítást. Természetesen nem minden mozgásra igaz, hogy a sajátrendszerben a test erőmentes. Vegyünk egy általános esetet, amelyben

nem élünk ezzel a feltételezéssel; ekkor a négyeserő és a négyessebesség a sajátrendszerben:

$$K^k = \begin{pmatrix} W/c \\ \mathbf{F} \end{pmatrix} \text{ és } u^k = \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

E két mennyiség skalárszorzata $\mathbf{F}$ -től függetlenül $K_k u^k = W$. Mivel a sajátrendszerben a mozgási energia megváltozása elhanyagolhatóan kicsi (mert négyszetesen tartalmazza a sebességet), ezért a teljes W teljesítmény a nyugalmi energiát változtatja. Így a tömegváltozásra felírt (7) egyenlet bármely K_k négyeserő esetén érvényes, és négyesvektorokkal írható (hiszen bármi is a hármaserő, a négyessebesség utolsó három komponense a sajátrendszerben mindig nulla):

$$\frac{dMc^2}{d\tau} = K_k u^k, \quad (8)$$

illetve $d\tau$ -val átszorozva:

$$dMc^2 = K_k dx^k \quad (9)$$

(a Novobátszky-képlet).

A (8) és a (9) egyenletek felírásával elértem a célt (és megválasztam az előző bekezdésben feltett első kérdést): négyesskalár-egyenletet adtam a tömegváltozásra, mely csak négyesmennyiségeket tartalmaz, tehát minden megfigyelő számára érvényes. Ezt a képletet Novobátszky-képletnek, az általa leírt jelenséget, ti. hogy egy általános esetben a négyeserő a testek (négyesimpulzusának abszolútértékét, vagyis) tömegét is megváltoztatja, Novobátszky-effektusnak¹ nevezzük. Novobátszky elmélete a Lorentz-kovarianciából kiindulva arra a következtetésre jut, hogy a négyeserő komponenseinek valóban függetlennek kell lenniük, a mozgásegyenlet négy komponenséhez pedig négy változó: M és $\mathbf{v}$ tartozik.

A fenti gondolatmenetből látszik, hogy a Novobátszky-effektus nem ír le mást, mint a belső energia változását kísérő tömegváltozást, amely az $E_0 = Mc^2$ képlet közvetlen következménye (a várakozásokkal összhangban tényleg teljesül, hogy az adott sajátidő-intervallumon bekövetkező tömegváltozás invariáns). A gondolatmenet elején feltettem a kérdést: hogyan mozog egy test, ha rá egy (6) sebességgel arányos $\mathbf{F} = k\mathbf{v}$ erő hat? Most már tudjuk a választ: bárhogymozoghat, hiszen az $\mathbf{F}$ hármaserő nem határozza meg teljesen a mozgást, az a négyeserő függetlenül megadható nullkomponensétől is függ. Hát persze: ha mozgás közben a belső energiával együtt megváltozik a test legfontosabb dinamikai tulajdonsága, azaz a tömege is, akkor ezt nyilván figyelembe kell vennünk a mozgásegyenletek felírásánál. Másképp: mivel az $E_0 = Mc^2$ összekapcsolja a dinamikából ismert tömeget és a termodinamikából ismert belső energiát, ezért a fizikának ez a két területe beleszól egymás működésébe. Novobátszky felfedezéséből egyebek mellett az is következik, hogy nem működik az (1) opcióban felvázolt recept: a relativitáselméletben nem választhatjuk szét a belső energia és a kinetikus energia megváltozását, nem csinálhatunk külön relativisztikus mechanikát és termodinamikát.

4.2. Miért nem közismert jelenség a Novobátszky-effektus?

Érdemes megvizsgálni az elektromágneses mezőben mozgó részecske speciális esetét. Ekkor a négyeserő az F^{kl} elektromágneses tértenzorból adódik: $K^k = eF^{kl}u_l$. A Novobátszky-képlet jobb oldalán ekkor $K_k u^k = eF_{kl}u^l u^k$ szerepel, ami F_{kl} antiszimmetriája miatt nulla (lásd a 6. fejezet (42) egyenletét követő diszkusziót). Így az elektromágneses mezőben mozgó részecskére valóban igaz, hogy a tömeg konstans (ezzel visszacapjuk a tankönyvekből ismert (14) mozgásegyenletet, és teljesül a négyeserő és -sebesség ortogonalitása is); ez azonban a természet azon tulajdonsága miatt

¹Érdemes megemlíteni Hráskó Péter kritikáját az elnevezéssel kapcsolatban: mivel az elméletben nincs akkora predikciós kapacitás, hogy laboratóriumban vizsgálható effektust lehessen belőle kipróbálni, az *effektus* megnevezés félrevezető.

van így, miszerint F_{kl} egy antiszimmetrikus tenzor, nem pedig azért, mert a $K_k u^k = 0$ egyenlőség külön természeti törvény volna.

Látható tehát, hogy a (8) $K_k u^k$ skalárszorzat határozza meg a tömeg változását és az értéke általában nem nulla. Hogyan lehetséges mégis, hogy mégsem közismert ez a jelenség? A relativisztikus mozgásegyenletek levezetésénél a legtöbb gondolatmenet abból a megállapításból indul ki, hogy a test pillanatnyi sajátrendszerében teljesül a $v \ll c$ határeset, ezért ebben a rendszerben a Newton-törvény továbbra is igaz marad. Ebben a következtetésben azonban megfelelnek arról, hogy a newtoni fizikának mint relativisztikus határesetnek az érvényességéhez még egy feltételnek teljesülnie kell: a ΔE_0 -nak is elhanyagolhatónak kell lennie. Ezért egy ilyen gondolatmenet *automatikus* tartalmazza azt a rejtett feltevést, hogy a tömeg konstans. A probléma felett azért is lehetett könnyen átsiklani, mert az elektromágneses kölcsönhatás, amelyben a relativitáselmélet jóslatait kísérletileg is ellenőrizni tudták (és ezért hamar és részletesen kidolgozták), pont abba a speciális esetben tartozik, amikor a tömeg nem változik – ha nem így volna, valószínűleg a speciális relativitáselmélet megszületését követő években rájöttek volna a Novobátczy-effektusra.

4.3. A Novobátczy-effektus matematikai levezetése

Az előző alfejezetben levezettem a tömeg változását általános K^k négyeserő esetén megadó (9) Novobátczy-képletet. Hogy szemléletesebb képet adjak a jelenség háttéréről, a levezetés során hármasmjelöléssel dolgoztam. Ugyanerre az eredményre el lehet jutni kizárólag kovariáns tárgyalásmóddal, relativisztikus jelölésekkel. A

$$\frac{dp^k}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} (M u^k) = K^k \quad (10)$$

(a relativisztikus Newton-törvény)

mozgásegyenletből indulok ki, de nem teszem fel, hogy a tömeg konstans. (Ha megelőlegzem, hogy a Newton-törvény két alakja közül az egyik négyesvektorokra is igaz lesz, joggal választom ezt a felírást – hiszen itt még nem éltem azzal a feltételezéssel, hogy a tömeg kivihető a deriválás elé, így ez az általánosabb alak. Azt, hogy a Newton-törvény ebben a felírásban tényleg igaz marad, az fogja nyomatékossítani, amikor az 5.2. alfejezetben variációs elvből is származtatónak bizonyul.) A deriválás után

$$\frac{dM}{d\tau} u^k + M \frac{du^k}{d\tau} = K^k. \quad (11)$$

Ha ezt az egyenletet skalárisan megszorozom u_k -val, az első tagban (1) $u_k u^k = c^2$, a másodikban pedig (2) $u_k a^k = 0$, így megkapom a (8) Novobátczy-képletet:

$$\frac{dM c^2}{d\tau} = u_k K^k. \quad (12)$$

4.4. A relativisztikus mozgásegyenlet általános alakja

A (12) egyenletet visszaírva a (11) sorba, és a négyeserőt kiemelve megkapjuk az általánosan is érvényes relativisztikus mozgásegyenletet:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} u_l K^l u^k + M \frac{du^k}{d\tau} &= K^k, \\ M \frac{du^k}{d\tau} &= \left(\delta_l^k - \frac{u^k u_l}{c^2} \right) K^l. \end{aligned} \quad (13)$$

Ebben a tömeg $M = M(\tau)$ a sajátidő függvénye, és a (9) Novobátczy-képlet (az lévén egy differenciálegyenlet) megoldásaként kapható meg. Arról, hogy a Novobátczy-képlet mikor integrálható, az 5.2. alfejezet ötödik bekezdésében lesz szó.

Vegyük észre, hogy a (13) mozgásegyenlet jobb oldalán a négyessebességre ortogonális Minkowski-síkra vetítő projektor szorozza a négyeserőt. Ez a projektor gondoskodik arról, hogy bár a K^k négyeserő általában nem ortogonális az u^k négyessebességre, a (13) képlet bal oldalán lévő a^k négyesgyorsulás mégis merőleges lesz u^k -ra, tehát teljesül a (2) képlet.

A négyeserő négyessebességre ortogonális komponense okozza tehát a négyesimpulzus irányának megváltozását (ami a hármasyorsulásnak felel meg). A Novobátczy-képletből pedig látható, hogy a négyeserő négyessebességgel párhuzamos komponense felelős a négyesimpulzus abszolútértékének megváltozásáért (mely a tömegnek felel meg). A Novobátczy-képlet ennél fogva hasonlít a klasszikus fizika munkatételére: a négyeserő négyesmunkája adja a tömeg megváltozását. A klasszikus fizikában a munkatétel csak speciális (konzervatív) erők esetén integrálható (és adható meg a kinetikus energia a hely függvényeként), általános esetben a kinetikus energia függ a test előéletétől: a mozgás során a test *begyűjti* a különböző pontokból a kinetikusenergia-járulékokat. Hasonlóképpen a relativitáselméletben a tömeg csak speciális alakú négyeserők esetén adható meg csupán az x^k helyvektor függvényeként; általános esetben a téridő adott pontján a test tömege nemcsak a helyi viszonyoktól függ, hanem a test előéletétől is, a test begyűjti a trajektória pontjain az infinitezimális tömegjárulékokat.

Speciális esetben visszakapjuk a tankönyvekből ismert relativisztikus mozgásegyenletet: ha (9)-ből az adódik, hogy a tömeg $M = m$ állandó, a (8) Novobátczy-képlet alapján teljesül a négyeserő és a négyessebesség ortogonalitása, ezért a mozgásegyenletben a tömeg kivihető a deriválás elé:

$$\frac{dp^k}{d\tau} = m \frac{du^k}{d\tau} = ma^k = K^k. \quad (14)$$

5. A mozgásegyenletek származtatása variációs elvből

Természetes és fontos törekvés, hogy az előző részben levezetett egyenleteket hatáselvből is szeretnénk származtatni. Fontos, mert a hatáselvből származtatott egyenletekről matematikai tétel mondja ki [31], hogy biztosan ellentmondásmentesek. A továbbiakban egyetlen relativisztikus részcseke adott külső mezőben történő mozgását vizsgálom, ezért a Lagrange-formalizmus általános koordinátáinak szerepét az x^k négyeshelyvektor komponensei, az általános sebességek szerepét pedig az u^l négyessebesség-vektor komponensei játsszák. Ahhoz, hogy a hatás kovariáns voltát garantálni tudjam, azt egy sajátidő szerinti $S = \int L d\tau$ integrálként kell felírnom (ahol $L(x^k, u^l)$ ² a Lagrange-függvény, melynek természetesen szintén négyesskalárnak kell lennie). A hatásintegrál felírása után többféle variációs eljárással is eljuthatunk a mozgásegyenletekig. A következő két szakaszban egy, a tankönyvekben általában megtalálható, hármasyjelöléssel dolgozó és egy, a tankönyvekben nem megtalálható, végig kovariáns formában, négyesjelöléssel dolgozó módszert mutatok be.

5.1. Variálás hármasyjelölésben

Ha a fent említett, $S = \int L d\tau$ alakban felírt hatásintegrálban a sajátidőről az ismert $d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ helyettesítéssel áttérek a rendszeridő szerinti integrálásra, valamint a Lagrange-függvényben

²A Lagrange-függvény nem függhet a sajátidőtől, mert a sajátidő nemcsak az adott téridőpontbeli (helyi) viszonyoktól függ, hanem a test korábbi trajektóriájára is jellemző mennyiség.

szereplő x^k és u^k négyesmennyiségeket kifejezem az $\mathbf{r}$, t és $\mathbf{v}$ hármasmennyiségekkel, vissza is vezetem a problémát a klasszikus fizikából ismert variációs feladatra, amelyben az

$$L_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (15)$$

felel meg a Lagrange-függvénynek. Ez a Minkowski-térbeli bázisválasztás annak felel meg, hogy a kiindulási, kovariáns egyenleteket egy konkrét inerciarendszerbe írom át (a gyökös kifejezésben szereplő v is értelemszerűen ebben a rendszerben jelenti a test sebességét). Ezután nincs más dolgunk, mint alkalmazni a klasszikus fizikában tanultakat. A mozgásegyenleteket szokás szerint a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_0}{\partial v_\alpha} = \frac{\partial L_0}{\partial x_\alpha} \quad (16)$$

Euler–Lagrange-egyenletek adják. Mivel a variációs eljárásom semmit sem változtattam, csupán a Lagrange-függvénybe írtam be egy szorzótényezőt, igazak maradnak a ciklikus változókhoz tartozó megmaradási tételek és a Beltrami-tétel (ha a Lagrange-függvény nem függ explicit módon az időtől, akkor az alábbi mennyiség a mozgás során állandó) is:

$$E = \frac{\partial L_0}{\partial v_\alpha} v_\alpha - L_0. \quad (17)$$

5.2. A kovariáns Lagrange-formalizmus

Bár a fenti eljárás teljes és helyes egyenletekre vezet, az emberben mégis hiányérzetet hagy: ha a relativitáselméletben *mindennek* kovariánsnak kell lennie, miért van az, hogy egy ponton csak úgy tudjuk folytatni a levezetést, hogy egy konkrét inerciarendszerben írjuk fel az egyenleteket? Gyakorlatiasabban: a fent vázolt variációs eljárásból miért nem származtatható a (10) relativisztikus Newton-törvény? Ez a kérdés ösztönzi az embert egy olyan variációs módszer: a kovariáns Lagrange-formalizmus kidolgozására, amely végig kovariáns formában, négyesskalárokkal és -vektorokkal dolgozik. Az alábbiakban Dávid Gyula eredményei következnek.

Első lépésben ugorjunk vissza az

$$S = \int L d\tau \quad (18)$$

egyenlethez, amelyben még a sajátidő szerinti integrál szerepel! A klasszikus eset analógiáját követve a hatás megváltozását valamilyen $\delta S = \int d\tau (...) \delta x^k$ alakban kell keresnünk, hogy azt mondhassuk: mivel a δx^k tetszőleges lehet, ezért a zárójeles mennyiségnek zérusnak kell lennie. A relativitáselméletben az x^k helyvektor azonban nem változtatható meg tetszőlegesen, mert teljesülnie kell a négyessebesség normáltságát kifejező (1) $u_k u^k = c^2$ egyenletnek – így a fent szereplő δx^k *nem* tetszőleges. Ez egy anholonom kényszert ró ki a variációs problémára, mely általában nem vehető figyelembe Lagrange-multiplikátorral, csak a δS precíz, oldalakat betöltő felírásával. Megmutatható azonban, hogy ebben az esetben szerencsénk van, és a precíz számolás ugyanarra az eredményre vezet, mintha bevezetnénk egy (sajátidőtől függő) multiplikátort. Jelöljük ezt a multiplikátort (későbbi számolásainkat megkönnyítendő) $\frac{M(\tau)}{2}$ -vel; ekkor a Lagrange-függvény

$$L'(x^k, u^k, M(\tau)) = L(x^k, u^k) - \frac{M(\tau)}{2} (g_{kl} u^k u^l - c^2) \quad (19)$$

alakú, melyet ötváltozós Lagrange-függvényként, x^k és M szerint variálva megkapjuk az eredeti probléma megoldásait leíró differenciálegyenleteket.

Számítsuk ki a vesszős Lagrange-függvényhez tartozó kanonikus impulzust és erőt, és fejezzük ki az eredeti L -hez tartozó $p_k = \frac{\partial L}{\partial u^k}$ és $Q_k = \frac{\partial L}{\partial x^k}$ mennyiségekkel!

$$p'_k = \frac{\partial L'}{\partial u^k} = \frac{\partial L}{\partial u^k} - \frac{M}{2} \frac{\partial}{\partial u^k} (g_{lm} u^l u^m - c^2) = p_k - M u_k \quad (20)$$

$$Q'_k = \frac{\partial L'}{\partial x^k} = \frac{\partial L}{\partial x^k} = Q_k \quad (21)$$

A hozzájuk tartozó Euler–Lagrange-egyenlet:

$$\frac{d}{d\tau} p'_k = Q'_k, \quad (22)$$

amibe a fentieket behelyettesítve:

$$\frac{d}{d\tau} (Mu_k) = \frac{dp_k}{d\tau} - Q_k. \quad (23)$$

A multiplikátorhoz mint változóhoz tartozó Euler–Lagrange-egyenlet visszaadja a kényszert:

$$g_{lm} u^l u^m - c^2 = 0. \quad (24)$$

Végül vizsgáljuk meg a vesszős Lagrange-hoz tartozó $B' = p'_k u^k - L'$ Beltrami-függvényt: mivel L' nem függ explicite τ -tól és a τ szerinti integrál felső határa nincs rögzítve (hiszen a τ sajátidő a konkrét trajektóriától függ), így B' konstans és az értéke zérus³. Helyettesítsük be a (20), (19) és (24) egyenleteket:

$$B' = p_k u^k - L - Mc^2 = B - Mc^2 = 0. \quad (25)$$

Az eredeti L Lagrange-függvényhez tartozó B Beltrami-függvény tehát megadja az $M(\tau)$ multiplikátor értékét.

Látható, hogy a variációs elvből levezetett (23) mozgásegyenlet meggyegyező alakú a (10) relativisztikus Newton-törvénnyel és a négyeserőt a

$$K_k = \frac{dp_k}{d\tau} - Q_k \quad (26)$$

kifejezés adja. Ezzel egyúttal megkaptuk a (19) egyenletben bevezetett multiplikátor *fizikai* jelentését: ez a mennyiség a tömeg. Ebben a formalizmusban tehát nem is kérdés, hogy a tömeg $M(\tau)$ a sajátidő függvénye és általában nem konstans.

Figyelemre méltó eredmény, hogy a tömegre a Beltrami-függvény segítségével kapott

$$M = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial L}{\partial u^k} u^k - L \right) \quad (27)$$

összefüggés nem differenciális alakú, és segítségével a Lagrange-függvényből a tömeg mindig kiszámítható. Ezzel megválaszoltuk azt a kérdést is, mely esetekben integrálható a (8) Novobátszky-egyenlet. Ha a négyeserő (26) alakban írható (más szóval: ha a négyeserő egy Lagrange-függvényből származtatható), a Novobátszky-képlet integrálható és a megoldása a (27) függvény.

Végezetül lássuk a receptet, hogyan tudjuk levezetni egy tetszőleges relativisztikus egyrészecske-pontmechanikai problémához tartozó kovariáns mozgásegyenleteket:

1. Felírjuk a rendszer $L(x^k, u^k)$ Lagrange-függvényét.
2. Kiszámítjuk a $p_k = \frac{\partial L}{\partial u^k}$ és a $Q_k = \frac{\partial L}{\partial x^k}$ mennyiségeket.
3. A p_k és Q_k mennyiségekből kiszámítjuk a $K_k = \frac{dp_k}{d\tau} - Q_k$ négyeserőt és a $B = p_k u^k - L$ Beltrami-függvényt.
4. Az $M = \frac{1}{c^2} B$ képletből meghatározzuk a tömeget.⁴

³Lásd Györgyi Géza jegyzetének 45. oldalát [29].

⁴Ahogy azt láttuk, ez az egyenlet minden esetben a (9) Novobátszky-képlet kiintegrált alakja. Ezzel az egyenlettel a relativisztikus Newton-törvény mint egyenletrendszer túlhatározottá válik; az egyenlet ekvivalens az alanti vektor-egyenlet u^k -val vett lineárkombinációjával.

5. A végső mozgásegyenletet a (10) relativisztikus Newton-törvény adja: $\frac{d}{d\tau}(Mu_k) = K_k$.
6. Ez az egyenlet átírható a (13) projektoros alakra. Ez is négyesvektor-egyenlet, de u^k -val skálárisan szorozva azonosan nullát ad, tehát lineárisan összefüggő; a hiányzó negyedik egyenlet a tömeg (27) képlete.

Ezzel felvázoltam a speciális relativitáselmélet általános dinamikáját. Megmutattam, hogy Novobátzky elmélete az általános érvényű (8) és (10) összefüggéseket állítja az (5) és a (4) egyenletek helyébe, és ugyanezeket az egyenleteket levezettük a kovariáns Lagrange-formalizmusból is. A dolgozat következő részében ezen eredmények felhasználásával tárgyalok egyes relativisztikus mozgásokat. Először a legegyszerűbb esetet: a szabad részecske mozgását vizsgálom.

5.3. A szabad részecske Lagrange-függvénye

Hogyan írjuk le a fentiek alapján a szabad részecske mozgását? A részecske szabad állapota azt jelenti, hogy rá a Poincaré-csoport bármely transzformációját hajtva ugyancsak megengedett állapotot kapunk. Balázs Márton 1999-ben precíz matematikai bizonyítással belátta [30], hogy ennek a feltételnek csak az

$$S = -mc^2 \int d\tau \quad (28)$$

hatásintegrál felel meg (ez megegyezik (3)-mal), amelyből a Lagrange-függvény

$$L = -mc^2.$$

Ellenőrzésképpen nézzük meg, hogy a kétféle variációs formalizmussal megkapjuk-e a szabad részecske mozgásegyenletét!

Hármasjelölésben

$$L_0 = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

ebből $\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ és $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$. Az Euler–Lagrange-egyenlet: $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$, tehát a részecske hármassimpulzusa, így hármassebessége is állandó.

Kovariáns jelöléssel $L = -mc^2$, amiből $p_k = 0$ és $Q_k = 0$, tehát a négyeserő $K_k = 0$. A Beltrami-függvény $B = -L = mc^2$, amiből a tömeg $M = m$ konstans. A mozgásegyenlet ekkor $m \frac{du_k}{d\tau} = 0$. Ennek megoldása $u^k(\tau) = \text{konst.}$ Megkaptuk tehát, hogy a tömeg és a négyessebesség is állandó.

A következőkben a relativisztikus részecskék bonyolultabb, adott külső mezőben való mozgását vizsgálom.

III. rész

A RELATIVISZTIKUS KEPLER-PROBLÉMA
VIZSGÁLATA SKALÁR- ÉS VEKTORMEZŐBEN

A fent bemutatott eszköztárral vizsgálom meg a két legegyszerűbb tenzori rangú mezőben: a skalár- és a vektormezőben mozgó tömegpont esetét. Miért pont ezekkel az esetekkel érdemes foglalkozni? A relativitás elvére hivatkozva erős okunk van feltételezni, hogy a részecskék közötti alapvető kölcsönhatásokat közvetítő mezők kovariánsak a Lorentz-transzformációra, *tehát* – a speciális relativitáselmélet teljesítőképességének határai között – tárgyalhatóak a fent ismertetett formalizmussal. A természetben meglévő egyszerűség pedig abban enged reménykedni, hogy talán a legegyszerűbb (tenzori rangú) esetek is alkalmasak bizonyos kölcsönhatások leírására. És valóban: a négyesskalár-elmélet a Higgs-mező által közvetített kölcsönhatás, a négyesvektor-elmélet pedig az elektromágneses kölcsönhatás relativitáselméletbeli leírására alkalmas (ehhez a négyesvektor komponenseit

$$A_k = \begin{pmatrix} \Psi \\ -\mathbf{A} \end{pmatrix} \quad (29)$$

módon kell választani, ahol Ψ az elektrosztatikus potenciál, $\mathbf{A}$ pedig a hármass elektromágneses vektorpotenciál).

A relativitáselméletben mezőn (a Lorentz-kovarianciát szem előtt tartva) a *tér-idő* pontjain értelmezett függvényt (vagy azokon folytonosan eloszló anyagot) értek (ami hármasmennyiségekkel kifejezve idő- és térfüggést jelent). A skalármezőt $\Phi(x^k)$ -vel, a vektormezőt pedig $A_k(x^l)$ -val fogom jelölni (Φ és A_k természetesen négyesmennyiségek). A mezők saját dinamikáját leíró mezőegyenleteket, illetve az ezekhez tartozó négyesintegrál alakú hatásintegrált nem vizsgálom, a mezőket adotttnak tekintem. Bár a vektormezőben mozgó részecske esetét Arnold Sommerfeld, a skalármezőben mozgóét pedig Marx György vizsgálta már korábban, mégis mindkét esetben sikerült új, eddig nem ismert eredményekre bukkannom. Az általános mozgásegyenletek felírását követően célozom a Kepler-potenciálra specializált eset részletes analízise: kiszámítani a lehetséges pályákat és összehasonlítani a Kepler-féle kúpszeletekkel.

6. Az általános mozgásegyenletek

Ebben a részben párhuzamosan mutatom be a két esetben az általános (kovariáns) mozgásegyenletek felírását.

Első lépésként írjuk fel a külső mezőben mozgó részecske hatásintegrálját! A szabad részecske hatásintegrálja az 5.3. alfejezetben levezetett (28) $S = -\int mc^2 d\tau$, ehhez kell hozzáadnunk a kölcsönhatási tagot.

SKALÁRMEZŐ

A lehető legegyszerűbb hatásintegrált feltételezve a kölcsönhatási tag (egy g konstans skalár csato-

VEKTORMEZŐ

Tételezzük fel itt is a lehető legegyszerűbb kölcsönhatási tagot! Az integrálási mennyiséggel le kell kötni az integrandusban szereplő A_k szabad-indexét, amit legkönnyebben (minimális csatolást

lasi állandóval szorozva) maga a Φ skalármező.

Így a teljes hatásintegrált az

$$\begin{aligned} S &= -mc^2 \int d\tau - g \int \Phi(x^k) d\tau = \\ &= - \int \left(mc^2 + g \Phi(x^k) \right) d\tau \end{aligned} \quad (30)$$

kifejezés adja, melyből a Lagrange-függvény:

$$L = -c^2 \left(m + \frac{g}{c^2} \Phi(x^k) \right). \quad (31)$$

A kanonikus impulzus és erő:

$$p_k = 0 \text{ és} \quad (32)$$

$$Q_k = \frac{\partial L}{\partial x^k} = -g \partial_k \Phi(x^l). \quad (33)$$

A kettőből megadható a négyeserő, mely

$$K_k = \frac{dp_k}{d\tau} - Q_k = g \partial_k \Phi(x^l) \quad (34)$$

a skalármező négyesgradiense. Mivel a kanonikus impulzus zérus, a Beltrami-függvény

$$B = p_k u^k - L = -L$$

a Lagrange-függvény ellentettje. Ebből a tömeg

$$M = \frac{1}{c^2} B = -\frac{1}{c^2} L = m + \frac{g}{c^2} \Phi(x^k). \quad (35)$$

Az M fenti alakja a skalármezőre felírt (8)

Novobáztzy-képlet közvetlen integrálásával is megkapható. A kovariáns Lagrange-formalizmus tehát automatikusan számot ad a Novobáztzy-effektusról.

A skalármezőben mozgó részecske kovariáns mozgásegyenlete tehát:

$$\frac{d}{d\tau} (M u_k) = g \partial_k \Phi, \text{ ahol} \quad (36)$$

$$M = m + \frac{g}{c^2} \Phi. \quad (37)$$

Ez a mozgásegyenlet nem szerepel a tankönyvekben, mert azok rendre csak az elektromágneses mezőben mozgó ponttöltés esetét tárgyalják.

feltételezve, azaz a skalár e csatolási állandót használva, mely az elektromágneses esetben a részecske elektromos töltését jelenti) az $S = -\frac{e}{c} \int A_k(x^l) dx^k$ módon tehetek meg (az $1/c$ szorzó egyszerű konvenció). Bővítsük ezt $d\tau$ -val, hogy össze tudjuk adni a két integrált, és megkapjuk a teljes hatásintegrált:

$$\begin{aligned} S &= -mc^2 \int d\tau - \frac{e}{c} \int A_k(x^l) u^k d\tau = \\ &= - \int \left(mc^2 + \frac{e}{c} A_k(x^l) u^k \right) d\tau. \end{aligned} \quad (38)$$

Ebből a Lagrange-függvény:

$$L = -mc^2 - \frac{e}{c} A_k(x^l) u^k, \quad (39)$$

a p_k és Q_k mennyiségek pedig:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial u^k} = -\frac{e}{c} A_k \text{ és} \quad (40)$$

$$Q_k = \frac{\partial L}{\partial x^k} = -\frac{e}{c} \frac{\partial A_l}{\partial x^k} u^l. \quad (41)$$

Számítsuk ki ezek alapján a négyeserőt! A teljes időderiválásnál a kanonikus impulzusban szereplő A_k -t $A_k(x^l(\tau))$ közvetett függvényként kell deriválni.

$$\begin{aligned} K_k &= \frac{d}{d\tau} p_k - Q_k = -\frac{e}{c} \frac{\partial A_k}{\partial x^l} \frac{dx^l}{d\tau} + \frac{e}{c} \frac{\partial A_l}{\partial x^k} u^l = \\ &= \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_l}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^l} \right) u^l = \frac{e}{c} F_{kl} u^l \end{aligned} \quad (42)$$

Az utolsó egyenlőséggel bevezettem az $F_{kl} = \partial_k A_l - \partial_l A_k$ elektromágneses térerősségtenzort, mely a definíciója szerint antiszimmetrikus. Látható, hogy ez a tenzor hozza létre a négyeserőt a négyessebességből, *tehát* ez a két vektor ortogonális egymásra. A Beltrami-függvény

$$B = p_k u^k - L = -\frac{e}{c} A_k u^k + mc^2 + \frac{e}{c} A_k u^k = mc^2$$

konstans, melyből a tömeg

$$M = \frac{B}{c^2} = m \quad (43)$$

szintén konstansnak adódik. (Lásd a 4.2. alfejezet első bekezdését.)

Végül felírom a vektormezőben mozgó részecske kovariáns mozgásegyenletét:

$$m \frac{du_k}{d\tau} = \frac{e}{c} F_{kl} u^l. \quad (44)$$

Ez az egyenlet megegyezik a tankönyvekben megtalálható mozgásegyenlettel [1, 2].

7. Megmaradó mennyiségek centrális potenciálban

Az általános mozgásegyenletek után mindkét mező esetén egy speciális esetet fogok vizsgálni: felteszem, hogy egy adott inerciarendszerben nyugvó pontszerű forrás gömbszimmetrikus mezőt hoz létre maga körül (hogy a vektormező esetén mit jelent a gömbszimmetria, arról két bekezdés múlva lesz szó részletesebben), és ebben a mezőben vizsgálom a részecske mozgását. Ezért célszerű a mozgást abban az inerciarendszerben vizsgálni, melyben a forrás nyugszik. Az ebben felvett Minkowski-rendszert K -val jelölöm.

Ebben az esetben a rendszernek két szimmetriája van: időben eltolható és a forrás körül elforgatható. E két szimmetriához négy megmaradó mennyiség: az E energia és a $\mathbf{J}$ impulzusmomentum három komponense tartozik. Mivel centrális mezőkről van szó, ezért – a klasszikus mechanikához hasonlóan – az $\mathbf{F}$ hármaserőnek nincs a kezdőhely és kezdősebesség által meghatározott síkra merőleges komponense. Ezért a $\mathbf{J}$ impulzusmomentum-vektor iránya megmarad, tehát mindkét esetben síkmozgásról beszélhetünk. Ennek megfelelően a forgásszimmetriához legjobban illeszkedő koordinátákban: síkbeli polárkoordinátákban fogok dolgozni. Keressük tehát az E energiát és az impulzusmomentum J abszolútértékét mint megmaradó mennyiséget.

SKALÁRMEZŐ

Ha a forrás nyugalomban van, az általa keltett mező is sztatikus, így a $\Phi(x^k)$ mező nem függ az időtől: $\Phi(x^\alpha)$.

VEKTORMEZŐ

Tegyük fel, hogy a forrás csak elektromos mezőt kelt! Így összesen három feltételezéssel élünk: (1) választható olyan bázis a Minkowski-térben és olyan mérték az A_k négyespotenciálhoz, amelyen az A_k négyesvektorok *minden pontban* csak nullkomponense van, (2) választható olyan bázis a Minkowski-térben, amelyen az A_k mező sztatikus és (3) ez a két bázis azonos. Ha ez adott, a gömbszimmetria már következik abból, hogy nincs ki-tüntetett irány. Ezek a feltételezések szinte már abszurd mértékben erős feltételeknek tűnnek; csak azért érdemes mégis ennyire speciális esettel foglalkozni, mert egy ismert fizikai rendszer: a nyugvó ponttöltés elektrosztatikus mezeje például pont ezt az esetet valósítja meg. Ezekkel a feltételekkel tudjuk, hogy (K -ban) csak elektrosztatikus mező lesz, tehát a vektormező α -komponensei minden pontban nullák: $A_k = \begin{pmatrix} \Psi \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$. Ekkor a (39)

Lagrange-függvény

$$L = -mc^2 - \frac{e\Psi(x^\alpha)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (45)$$

alakúra egyszerűsödik.

7.1. Az energia

Most már rátérhetünk a megmaradó mennyiségek keresésére. Ebben a szakaszban az időeltolási szimmetriához tartozó megmaradó mennyiséget, az E energiát határozom meg.

SKALÁRMEZŐ

Mivel K -ban $\Phi(x^\alpha)$ nem függ az időtől, ezért a (34) négyeserő nullkomponense (az $x^0 = ct$ időkoordináta szerinti derivált) ebben a rendszerben zérus: $K_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\alpha \Phi \end{pmatrix}$. Így a (10) mozgásegyenlet nullkomponenseként $\frac{d}{d\tau}(Mu_0) = 0$, tehát $Mu_0 = \text{konst.}$ Vegyük észre, hogy c -vel bővítve ez éppen a részecske

$$E = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (46)$$

teljes energiája! (A rendszer hármajelöléssel felírt

$$L_0 = -Mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (47)$$

Lagrange-függvényéhez tartozó (17) kanonikus energia ugyanerre az eredményre vezet.) Ezzel meg is kaptuk az időeltolási szimmetriához tartozó megmaradó mennyiséget. Érdekes megjegyezni, hogy a (46) képletben az M tömeg (35) szerint tartalmazza a skalármező Φ értékét.

VEKTORMEZŐ

A vektormező esetében nem tudjuk olyan frapáns gondolatmenettel megkapni az energia képletét, mint a skalármező esetében. Vegyük hát alapul a rendszer Lagrange-függvényét, és írjuk fel a hármajelölésből adódó kanonikus energiát! A Lagrange-függvény hármajelölésben (45)-ből (15) alapján:

$$L_0 = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\Psi. \quad (48)$$

Ebből a kanonikus impulzus egyszerű deriválással $p_\alpha = \frac{mv_\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Ezt behelyettesítve a (17) képletbe, a kanonikus energiára

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\Psi \quad (49)$$

adódik. Ez tehát a rendszer időeltolási szimmetriájából eredő megmaradó mennyiség.

Látni fogjuk, hogy meghatározó különbséget ad a skalár- és a vektormező esete között, hogy a (49)-cel ellentétben a (46)-ban a mezőt tartalmazó tag tartalmazza a $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ tényezőt is.

7.2. Az impulzusmomentum

A forgásszimmetriához tartozó harmadik (még ki nem használt) megmaradó mennyiség a $\mathbf{J}$ impulzusmomentum-vektor J abszolútértéke. Bár adódna a klasszikus fizikában megszokott $mr^2\dot{\varphi}$ képlet, a relativitáselméletben egy bonyolultabb mennyiség lép ennek a helyébe. Ennek meghatározásához fel kell írni a (47) és a (48) Lagrange-függvényt polárkoordinátákban, és ki kell számítani a φ -hez konjugált kanonikus impulzust. A két Lagrange-függvény ugyanúgy

$$L_0 = -Mc^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + V(r) \quad (50)$$

alakban tartalmazza a sebességet, így ugyanolyan alakú lesz a keresett kanonikus impulzus. (A skalármezőnél $V(r) = 0$ és $M = m + \frac{q}{c^2}\Phi$, a vektormezőnél $V(r) = -e\Psi(r)$ és $M = m$. Minderre azért van szükség, hogy a két esetet együtt tárgyalhassam.)

Írjuk fel a sebességnégyzetet polárkoordinátákban! Az ívelemnégyzet $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$, amelyet dt^2 -tel elosztva megkapjuk a

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \quad (51)$$

sebességnégyzetet. Ezzel kifejezve a vizsgált Lagrange-függvényünk:

$$L_0(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = -Mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}{c^2}} + V(r).$$

Mivel ez nem függ φ -től, így az ehhez konjugált kanonikus impulzus valóban megmarad. Ez egyszerű

deriválással és (51) visszahelyettesítésével

$$p_\varphi = J = \frac{Mr^2\dot{\varphi}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (52)$$

Ez tehát a relativitáselméletben (megfelelő (50) alakú Lagrange-függvénnyel leírható rendszer esetén) a forgásszimmetriához tartozó megmaradó mennyiség (az impulzusmomentum abszolútértékének) általános alakja. Ezen az általános alakon mindkét vizsgált esetben lehet valamelyest egyszerűsíteni az alábbiak szerint.

SKALÁRMEZŐ

Vessük össze a két megmaradó mennyiséget! Az energia (46) alakjából látható, hogy az impulzusmomentum fenti képletében az $\frac{M}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E}{c^2}$ mennyiség külön is megmarad. Így ezt elhagyva is megmaradó mennyiséget kapunk. Szorozzuk ezt meg a (35) m konstanssal, hogy a mennyiség dimenziója megegyezzek az impulzusmomentuméval! Így megkapjuk a forgásszimmetriához tartozó megmaradó mennyiség végső, a klasszikus esetben felírttal véletlenül egyező

$$mr^2\dot{\varphi} \quad (53)$$

alakját.

Mivel a skalármező esetén a képlet végső (53) alakjában módosítottam az eredeti (52) képlethez képest, a kapott mennyiséget mindkét esetben egységesen j -vel jelölöm. Így a két-két megmaradó mennyiség:

$E = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$	$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\Psi$
$j = mr^2\dot{\varphi}$	$j = \frac{mr^2\dot{\varphi}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

7.3. A Kepler-potenciál

Hogy konkrét részecskepályákat vizsgálhassak, specializálnom kell a $\Phi(r)$ és $\Psi(r)$ potenciálok alakját. Vegyük a legkézenfekvőbb, Kepler-féle (vonzó) $-1/r$ -es potenciált. A vektormező esetén kísérletek alapján tudjuk, hogy létezik ilyen alakú potenciál (pl. a ponttöltés potenciálja), a skalármező esetén pedig feltételezzük ilyen alakú mező létezését. Írjuk fel, mi lesz az egyenletek alakja ilyen potenciál esetén!

VEKTORMEZŐ

Mivel a vektormezőben mozgó részecske (43) tömege konstans, így a helyébe az m konstans tömeget írhatjuk. Így a végső alak a skalármezőénél némileg bonyolultabb

$$J = \frac{mr^2\dot{\varphi}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (54)$$

lesz.

SKALÁRMEZŐ

A továbbiakban tehát felteszem egy sztatikus, forgásszimmetrikus, $\Phi(r) = -k/r$ alakú négyesskalármező létezését, és a mezőhöz egy g skalár csatolással csatolt részecske mozgását vizsgálom abban a rendszerben, amelyben a mező statikus. Ekkor a (35) tömeg $M = m - \frac{gk}{c^2} \frac{1}{r} = m \left(1 - \frac{gk}{mc^2} \frac{1}{r} \right)$ alakú. Ez potenciál akkor vonzza a g csatolási állandójú részecskét, ha $gk > 0$. Egyszerűsítésként bevezetve az

$$R = \frac{gk}{mc^2} \quad (55)$$

hosszúságdimenziójú paramétert, a tömeg

$$M(r) = m \left(1 - \frac{R}{r} \right). \quad (56)$$

Az energia

$$E = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (57)$$

Az impulzusmomentum pedig

$$j = mr^2 \dot{\varphi}. \quad (58)$$

E három egyenletre lesz szükség a részecskepályák meghatározásához.

VEKTORMEZŐ

A továbbiakban a centrumba helyezett $Z \cdot e > 0$ töltés által keltett elektrosztatikus potenciálban mozgó $-e$ ponttöltés mozgását fogom vizsgálni. Ez a relativisztikus hidrogénatom-probléma (Z rendszámú atommaggal). (Különösképpen érdemes ezt a problémát vizsgálni, ha számításba vesszük, hogy a az első Bohr-pályán keringő elektron sebessége a hidrogénatomban $c/137$, más atommagok esetén pedig a rendszámmal egyenesen arányosan nagyobb.) A potenciál ekkor $\Psi(r) = Ze/r$, a (49) energia pedig $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{Ze^2}{r}$. Vezessük be az

$$R = \frac{Ze^2}{mc^2} \quad (59)$$

hosszúságdimenziójú paramétert; ezzel az energia

$$E = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{R}{r} \right). \quad (60)$$

Az impulzusmomentum pedig

$$j = \frac{mr^2 \dot{\varphi}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (61)$$

E két egyenletre lesz szükség a részecskepályák levezetéséhez.

8. A részecskepályák levezetése

A megoldás során csak az imént összefoglalt két-két megmaradó mennyiséget fogom felhasználni. Bár numerikus integrálással meg lehetne határozni a mozgás $r(t)$ és $\varphi(t)$ időfüggését is, az alapvető célom az idő kiküszöbölésével kapható $r(\varphi)$ részecskepályák meghatározása. A differenciálegyenletek levezetése során be fogok vezetni új, egyszerűsítő mennyiségeket. A vektormező esetében azt várom, hogy nemrelativisztikus határesetben visszakapom a klasszikus fizikából ismert Kepler-féle kúpszeleteket.

Fejezzük ki a sebességet az energia képletéből!

SKALÁRMEZŐ

(57)-ből és (56)-ból

$$v^2 = c^2 \left(1 - \frac{M^2 c^4}{E^2} \right) = c^2 \left[1 - \frac{m^2 c^4}{E^2} \left(1 - \frac{R}{r} \right)^2 \right].$$

VEKTORMEZŐ

(60)-at átrendezve

$$v^2 = c^2 \left[1 - \frac{m^2 c^4}{E^2 \left(1 + \frac{mc^2 R}{E} \right)^2} \right].$$

Vezessük be az

$$\alpha = \frac{mc^2}{E} \quad (62)$$

dimenziótlan paramétert! Ez a paraméter tartalmazza az energiát: ha $\alpha < 1$ (tehát a részecske energiája nagyobb, mint a végtelenben, a centrumtól nagyon távol vett nyugalmi energiája), akkor a mozgás szabad⁵; ha $\alpha > 1$, a mozgás kötött. Ezzel kifejezve a sebességnégyzetet:

$$v^2 = c^2 \left[1 - \alpha^2 \left(1 - \frac{R}{r} \right)^2 \right] \quad (63) \quad \left| \quad v^2 = c^2 \left[1 - \frac{\alpha^2}{\left(1 + \alpha \frac{R}{r} \right)^2} \right] \quad (64)$$

(51) alapján írjuk fel a sebességnégyzetet polárkoordinátákban:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2.$$

Fejazzuk ki $\dot{\varphi}$ -ot az impulzusmomentumból, és ezt behelyettesítve fejazzuk ki $\dot{r}$ -ot r -rel!

(58)-ból egyszerű átrendezéssel:

$$\dot{\varphi} = \frac{j}{mr^2}. \quad (65)$$

Fejazzuk ki a gyökös kifejezést az energiából:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\alpha}{1 + \alpha R/r}.$$

Ezt behelyettesítve a (61) impulzusmomentum

$$j = \frac{mr^2 \dot{\varphi} (1 + \alpha R/r)}{\alpha},$$

ahonnan

$$\dot{\varphi} = \frac{j\alpha}{(1 + \alpha \frac{R}{r}) mr^2}. \quad (66)$$

Ezt felhasználva

$$\dot{r}^2 = c^2 \left[1 - \alpha^2 \left(1 - \frac{R}{r} \right)^2 - \beta^2 \frac{R^2}{r^2} \right]. \quad (67)$$

Ezt felhasználva

$$\dot{r}^2 = c^2 \left[1 - \alpha^2 \frac{1 + \beta^2 \frac{R^2}{r^2}}{\left(1 + \alpha \frac{R}{r} \right)^2} \right]. \quad (68)$$

Itt bevezettem a j impulzusmomentumot tartalmazó

$$\beta = \frac{j}{Rmc} \quad (69)$$

dimenziótlan paramétert. Láthatjuk, hogy mindkét egyenlet

$$\dot{r}^2 = K - V_{eff}(r) \quad (70)$$

alakban írható. A radiális mozgásra tehát – ahogy a klasszikus fizikában vizsgált centrális mozgások esetén is – bevezethető egy effektív potenciál, és a radiális mozgás ebben az effektív potenciálban történő egydimenziós mozgásnak felel meg.

A következő lépésben áttérek az $r(t)$ függvényről a pálya egyenletének $r(\varphi)$ függvényére! Ezzel kifejezve $\dot{r} = r' \cdot \dot{\varphi}$ (ahol a vessző a φ szerinti deriválást jelöli). Ha ide megint behelyettesítem a (65) és (66) $\dot{\varphi}$ -ot a j paraméterrel és az r változóval kifejezve, az előző egyenletből megkapom a pályát leíró $r' = f(r)$ differenciálegyenletet.

⁵Ez a *szabad* jelző nem tévesztendő össze a korábban használt *szabad részecske*, azaz erőmentes mozgást végző részecske fogalmával. Itt és a továbbiakban a *szabad* kifejezés a *kötött* ellentétét jelenti: a kötött részecske a vonzócentrum körüli véges tartományban mozog, a szabad részecske viszont eltávozhat a végtelenbe.

$\dot{\varphi}$ -ot behelyettesítve

$$\dot{r} = r' \frac{j}{mr^2}.$$

Ezzel az egyenletünk $R^2 m^2 / j^2$ -tel szorozva:

$$\left(r' \frac{R}{r^2}\right)^2 = \frac{1}{\beta^2} \left[1 - \alpha^2 \left(1 - \frac{R}{r}\right)^2 - \beta^2 \frac{R}{r^2}\right].$$

$\dot{\varphi}$ -ot behelyettesítve

$$\dot{r} = r' \frac{j\alpha}{(1 + \alpha R/r) mr^2}.$$

Ezzel az egyenletünk $(1 + \alpha R/r)^2$ -tel és $(Rm/j\alpha)^2$ -tel szorozva:

$$\left(r' \frac{R}{r^2}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} \left[\left(1 + \alpha \frac{R}{r}\right)^2 - \alpha^2 \left(1 + \beta^2 \frac{R}{r^2}\right)\right].$$

Vegyük észre, hogy az egyenletek bal oldalán éppen a $-R/r$ mennyiség φ szerinti deriváltjának négyzete szerepel! Így a bal oldalak:

$$\left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{-R}{r}\right)\right]^2.$$

Térjünk át az egyenletek jobb oldalára! Gyűjtsük össze az R/r előforduló hatványainak együtthatóit:

$$\frac{1}{\beta^2} \left[1 - \alpha^2 + 2\alpha^2 \frac{R}{r} - (\alpha^2 + \beta^2) \frac{R^2}{r^2}\right].$$

$$\frac{1}{\alpha^2 \beta^2} \left[1 - \alpha^2 + 2\alpha \frac{R}{r} - \alpha^2 (\beta^2 - 1) \frac{R^2}{r^2}\right].$$

Alakítsunk teljes négyzetté és emeljük ki az R/r együtthatóját!

$$\frac{1}{\beta^2} \left[1 - \frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} - (\alpha^2 + \beta^2) \left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{R}{r}\right)^2\right]$$

$$\frac{1}{\alpha^2 \beta^2} \left[1 - \alpha^2 + \frac{1}{\beta^2 - 1} - \alpha^2 (\beta^2 - 1) \left(\frac{1}{\alpha(\beta^2 - 1)} - \frac{R}{r}\right)^2\right]$$

Vegyük észre, hogy – mivel a deriválás eltünteti a konstansokat – az egyenletek így írhatóak:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{R}{r}\right)\right]^2 &= \\ &= \frac{1}{\beta^2} \left[1 - \frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} - \right. \\ &\quad \left. - (\alpha^2 + \beta^2) \left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{R}{r}\right)^2\right]. \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{\alpha(\beta^2 - 1)} - \frac{R}{r}\right)\right]^2 &= \\ &= \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} \left[1 - \alpha^2 + \frac{1}{\beta^2 - 1} - \right. \\ &\quad \left. - \alpha^2 (\beta^2 - 1) \left(\frac{1}{\alpha(\beta^2 - 1)} - \frac{R}{r}\right)^2\right]. \end{aligned} \quad (72)$$

Ezzel sikerült a két egyenletet azonos szerkezetűre hozni. A megfelelő

$$u = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{R}{r} \quad (73)$$

$$u = \frac{1}{\alpha(\beta^2 - 1)} - \frac{R}{r} \quad (74)$$

változóban az egyenletek

$$u'^2 = A^2 - n^2 u^2 \quad (75)$$

alakúak, ahol A és n a fenti egyenletekből leolvasható konstansok. Így a pályae egyenleteket elemi módszerekkel megoldható differenciálegyenletté alakítottam. Az egyenlet megoldása:

$$u = \frac{A}{n} \cos[n(\varphi - \varphi_0)], \quad (76)$$

ahol φ_0 integrációs állandó, melyet az általánosság elvesztése nélkül nullának választhatunk. Ha ebbe behelyettesítem az egyenletekből leolvasható u függvényt, illetve az A és n paramétereket, rövid számolás után megkapom a pálya egyenletét, mely mindkét esetben ilyen alakú:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos(n\varphi)}; \quad (77)$$

a benne szereplő paraméterek pedig

$$\begin{aligned} p &= \left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) R, \\ \varepsilon &= \frac{1}{\alpha^2} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha^2 \beta^2} \text{ és} \\ n &= \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}}, \end{aligned} \quad (78)$$

ahol

$$\alpha = \frac{mc^2}{E}, \beta = \frac{j}{Rmc} \text{ és } R = \frac{gk}{mc^2}.$$

ahol

$$\begin{aligned} p &= \alpha (\beta^2 - 1) R, \\ \varepsilon &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha^2 \beta^2} \text{ és} \\ n &= \sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2}}, \end{aligned} \quad (79)$$

$$\alpha = \frac{mc^2}{E}, \beta = \frac{j}{Rmc} \text{ és } R = \frac{Ze^2}{mc^2}.$$

9. A részecskepályák elemzése

Látható, hogy a pálya egyenlete azonos alakú a két esetben, és nagyon hasonló a kúpszeletek polárkoordinátás egyenletéhez. A különbséget a koszinusz argumentumában megjelenő n szorzó adja. Első ránézésre nem is látszik, hogy bármi lényeges különbség volna a pályák között a két esetben, meghatározó különbséget fog azonban jelenteni, hogy a skalármező esetében $n > 1$, a vektormezőben pedig $n < 1$.

A Kepler-problémához hasonlóan itt is vannak szabad és kötött pályák. Ha a (77) pályaegyenletben $\varepsilon \geq 1$, akkor a nevezőnek van zérushelye, így a pálya bizonyos φ szögű félegyeneseihez tartva elnyúlik a végtelenbe: a mozgás szabad. $\varepsilon < 1$ esetén ez nem történhet meg, tehát a mozgás kötött. Ha megvizsgálom az ε -ra kirótt feltételt, mindkét esetben azt találom, hogy a mozgás akkor szabad, ha $\alpha < 1$, és akkor kötött, ha $\alpha > 1$. Ez megegyezik a fizikai várakozásainkkal: ha $\alpha < 1$, akkor a részecske energiája nagyobb, mint a végtelen távoli pontban vett nyugalmi energiája. Ha $\alpha > 1$, az összenergia kisebb, mint a végtelenben vett nyugalmi energia, tehát a mozgás kötött.

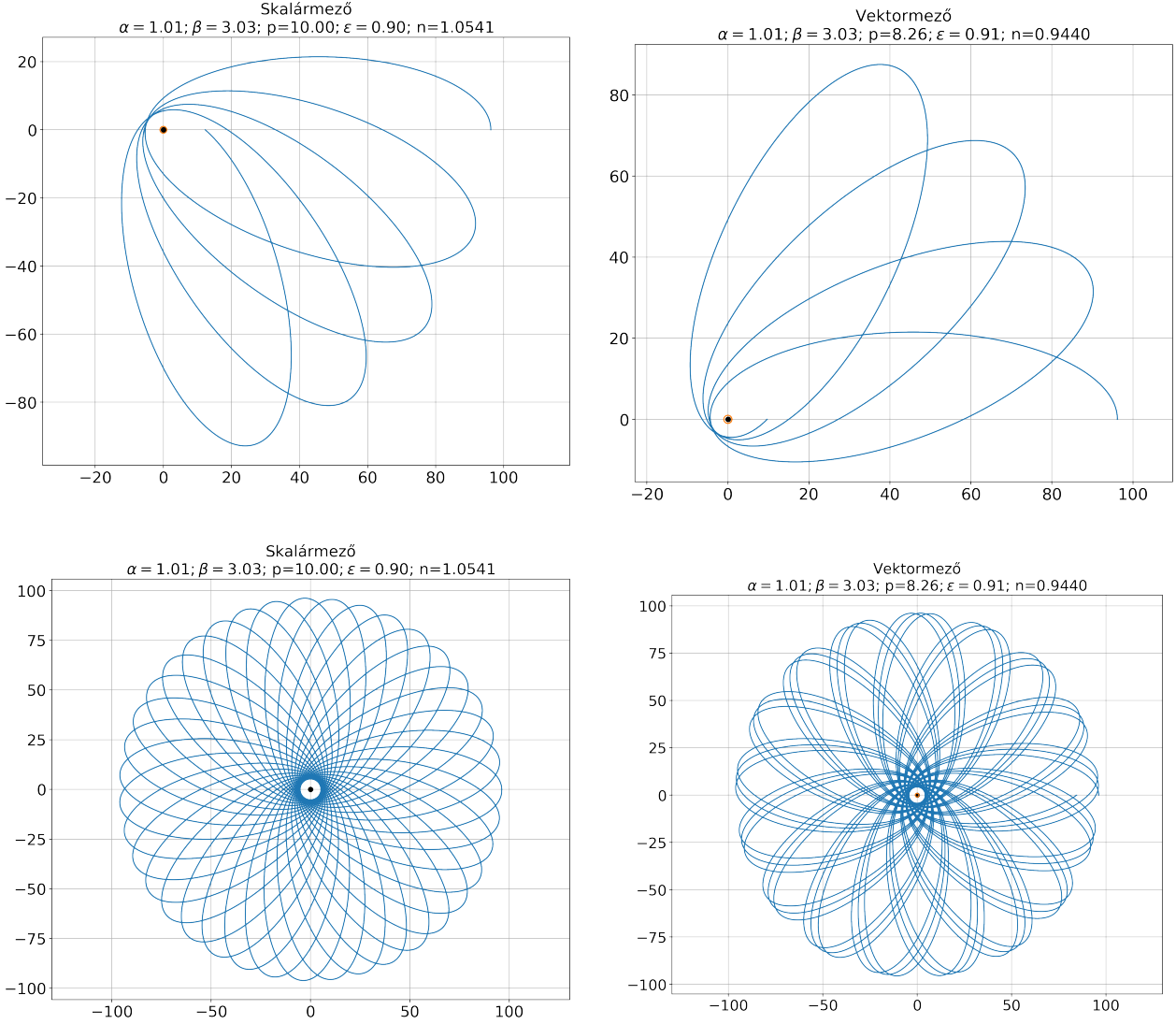
Láthatjuk, hogy az ε képletében mindkét esetben gyökvonás szerepel. Ez feltételt ró ki a benne szereplő α és β paraméterek között. Megmutatható azonban, hogy ez az a – klasszikus Kepler-problémánál is megjelenő – feltétel, hogy adott j impulzusmomentummal indított testnek van egy ehhez tartozó minimális sebessége (energiája), ezért egy adott β -hoz tartozik egy minimális α érték.

A vektormező esetén az n pályaparaméter képletében viszont előfordulhat, hogy a gyök alatt negatív érték szerepel (ez fizikailag új helyzetet jelent), ennek a kérdésnek a részletes tárgyalására a 10.2. alfejezetben térek ki.

Az alább következő ábrákon a tájékozódásul feltüntetett narancssárga körök egységesen az $r = R$ sugarat jelölik.

9.1. Kötött pályák

1-hez közeli n esetén a pályák hasonlóak lesznek az ellipszisekhez.⁶ A koszinusz azonban $n\varphi = 2\pi$ szögelfordulás alatt veszi fel a maximumát, ezért két aphélium (naptávol) között nem 2π szögelfordulás van, hanem $2\pi/n$. Az aphélium szögelfordulása tehát egy periódus alatt $\Delta\varphi = 2\pi(1/n - 1)$. Ez a skalármező esetében ($n > 1$) negatív, így az ellipszis *alulfordul*; a vektormező esetében ($n < 1$) pozitív, tehát az ellipszis *túlfordul*. Általános (irracionális) n esetén a pálya nem záródik.



1. ábra. Kötött részecskepályák skalármezőben és vektormezőben $n \approx 1$ esetén. Skalármezőben az ellipszis alulfordul, vektormezőben túlfordul. Fent a pálya első négy periódusa, alul pedig ugyanezen pálya folytatása látható. Általános n érték esetén a pálya nem záródik. Az alsó ábrákon mindkét esetben szépen látható a külső és a belső érintési kör.

Mivel a (77) pályaegyenlet a mozgásegyenletek egzakt megoldása, így természetesen akkor is érvényes, ha n nem 1-hez közeli. Ekkor a pályák már nem hasonlítanak ellipszisekhez. A részecske radiálisan az

$$r_{\max} = \frac{\alpha^2 + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2(\alpha^2 - 1)}}{\alpha^2 - 1} R \quad (80)$$

$$r_{\max} = \frac{1 + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha^2\beta^2}}{\alpha^2 - 1} \alpha R \quad (81)$$

⁶Hasonló pályákkal gyakran találkozhatunk centrális potenciálban végzett perturbációs számítás eredményeként, illetve a Schwarzschild-téridő bolygópályáinál is. Ezekkel ellentétben itt egzakt eredményekről beszélek, melyek 1-től lényegesen különböző n -ekre is igazak.

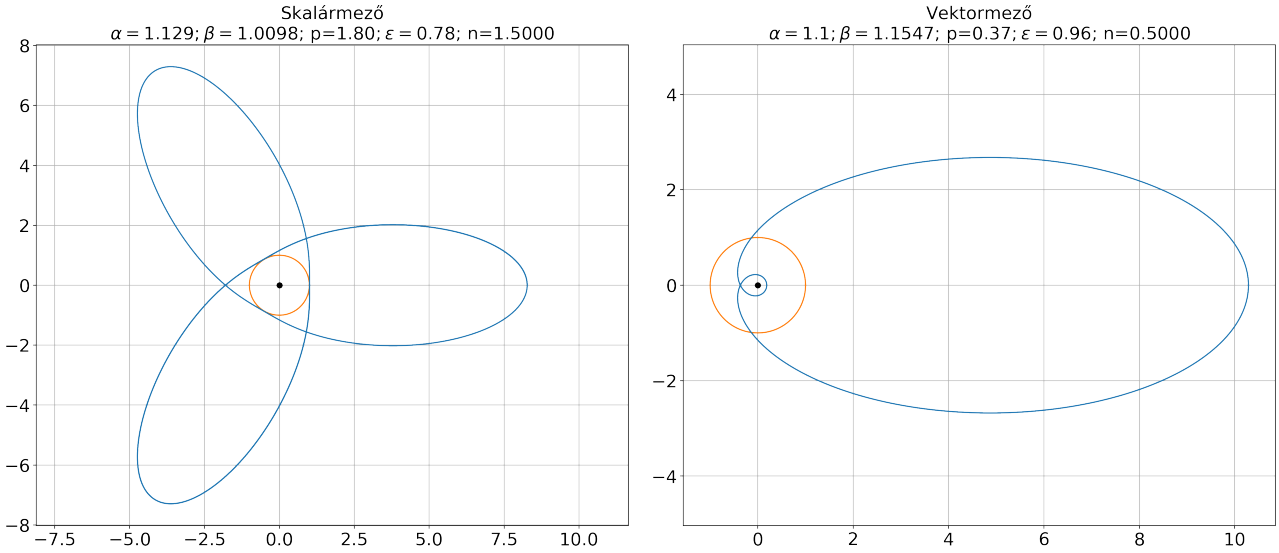
maximális és az

$$r_{min} = \frac{\alpha^2 - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2(\alpha^2 - 1)}}{\alpha^2 - 1} R \quad (82)$$

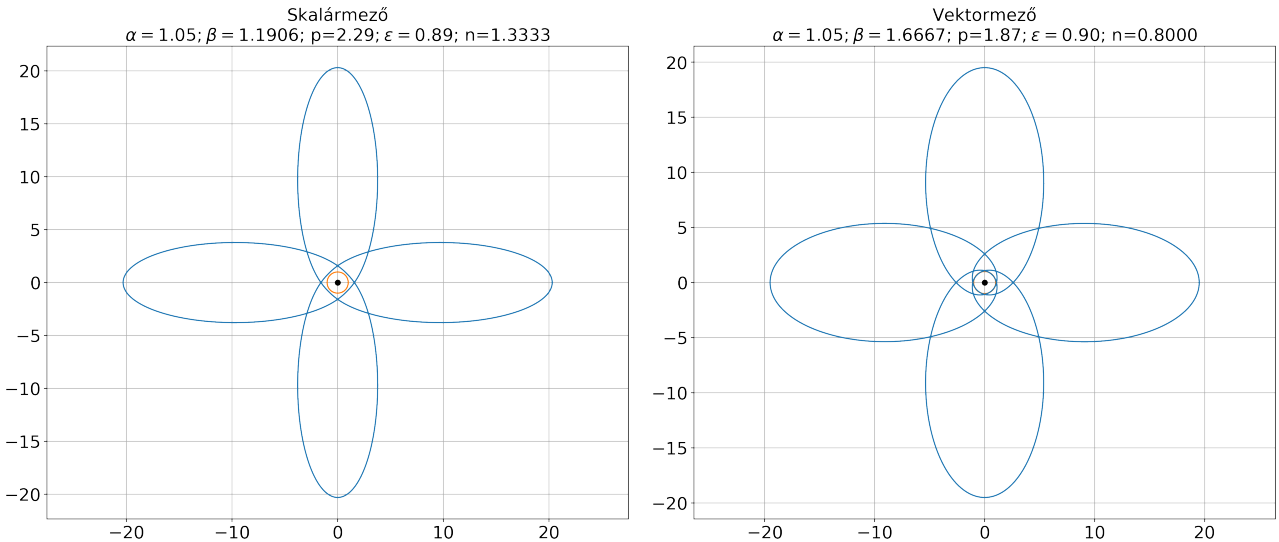
$$r_{min} = \frac{1 - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha^2\beta^2}}{\alpha^2 - 1} \alpha R \quad (83)$$

minimális sugár között mozog. A külső és belső érintési pont között π/n a szögelfordulás.

Speciális esetben, ha n racionális, a pálya záródik; ha n egész (ami a skalármező esetén lehetséges), a pálya egy teljes kör (2π szögelfordulás) után záródik.



2. ábra. Kötött mozgások skalármezőben és vektormezőben speciális n értékekkel. Balra: $n = 1,5$ esetén a pálya három körbefordulás után záródik. Az R sugarú kör érintésénél látható pályaalak azzal magyarázható, hogy az érintési pont körül a pálya negyedrend függvénnyel közelíthető. Jobbra: $n = 0,5$ esetén a pálya két körbefordulás után záródik. A pálya metszi önmagát.



3. ábra. Kötött mozgások skalármezőben és vektormezőben speciális n értékekkel. Balra: $n = 4/3$ esetén a pálya három körbefordulás ($\Delta\varphi = 6\pi$) után záródik. Jobbra: $n = 0,8$ esetén a pálya öt körbefordulás ($\Delta\varphi = 10\pi$) után záródik.

9.1.1. A kötött pályák szimmetriatulajdonsága

A klasszikus Kepler-probléma esetén egy adott energiával és impulzusmomentummal (α -val és β -val) indított kötött mozgásra kiszámítható a $T(\alpha, \beta)$ periódusidő. Ehhez a φ paraméterről át kell térnem a ϑ Kepler-paraméterre. A $\dot{\varphi} = J/mr^2$ egyenletben a

$$\frac{d\varphi}{d\vartheta} = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1+\varepsilon\cos\vartheta}$$

derivált segítségével $d\varphi$ -t $d\varphi$ -val kell kifejezni, illetve az r helyébe az

$$r(\vartheta) = a(1 + \varepsilon \cos \vartheta)$$

függvényt kell írni. Így a $\vartheta(t)$ függvényre – a $\varphi(t)$ -vel ellentétben – megoldható differenciálegyenletet kapok:

$$dt = \frac{1}{\omega} (1 + \varepsilon \cos \vartheta) d\vartheta, \quad (84)$$

ahol $\omega(\alpha, \beta)$ paraméter. Integrálás után:

$$\omega t = \vartheta + \varepsilon \sin \vartheta \quad (85)$$

Mivel a mozgás ϑ szerinti periodicitása ugyancsak 2π , ezért az egyenletből a periódusidő

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

módon kifejezhető.

Ismert eredmény, miszerint a számolásból az adódik, hogy a periódusidő csak az energiától (α) függ, az impulzusmomentumtól (β) nem. Ennek oka a probléma rejtett $SO(4)$ -szimmetriája: a hagyományos tárgyalásmód szerint ezzel magyarázható a pályák záródása és az, hogy a periódusidő nem függ az impulzusmomentumtól [28]. Ebből következik Kepler III. törvénye is, melyben a periódusidő tisztán a félnagy tengellyel kifejezhető.

A fentiek ismeretében meglepő eredmény, hogy az általam vizsgált mindkét probléma kötött mozgásaira az adódik, hogy a periódusidő csak az energiától függ, noha a pályák egyik esetben sem záródnak.

A számolás a klasszikussal analóg. A (65) és a (66) egyenletekben $d\varphi$ -t $d\vartheta$ -val kell kifejezni, és az r helyébe az $r(\vartheta)$ függvényt írni. A (pályák nem-záródását okozó, tehát lényeges) különbség ott jelenik meg, hogy a $d\varphi/d\vartheta$ deriváltban megjelenik az n paraméter is. Így a (84) egyenlettel megegyező szerkezetű egyenletet kapok, melyben az ω paraméter

$$\omega_t = \frac{c}{\alpha^2 R} \sqrt{\alpha^2 - 1}^3 \quad \left| \quad \omega_t = \frac{c}{\alpha^3 R} \sqrt{\alpha^2 - 1}^3.$$

Itt a t index a rendszeridőre utal. Az egyenletet átírhatom sajátidőre, ha dt helyébe $d\tau = d\tau / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ -et írunk, a gyökös kifejezésre pedig (63)-ból és (64)-ből helyettesítünk. Ekkor szintén megoldható differenciálegyenletet kapok.⁷ A τ -ra vonatkozó ω paraméter

$$\omega_\tau = \frac{c}{\alpha R} \sqrt{\alpha^2 - 1}^3 \quad \left| \quad \omega_\tau = \frac{c}{\alpha^2 R} \sqrt{\alpha^2 - 1}^3.$$

Ha (80)-ból és (81)-ből kifejezem az

$$a := \frac{r_{max} + r_{min}}{2} \quad (86)$$

⁷Ez nem triviális eredmény: a sajátidő és a rendszeridő között nem csak egy skalárral való szorzás van, hiszen a sebesség változik, amit a gyökös kifejezés sugárfüggése ír le.

félnagy tengelyt az energia függvényében, a β -t tartalmazó tagok kiesnek, és azt találom, hogy a félnagy tengely csak α -tól függ. Ennek az $a(\alpha)$ függvénynek az $\alpha(a)$ inverzét az $\omega(\alpha)$ összefüggésekbe helyettesítve megkapom Kepler III. törvényének itt érvényes módosítását: a periódusidőt mint a félnagy tengely függvényét.

Az eredményeket alább foglaltam össze. A periódusidők:

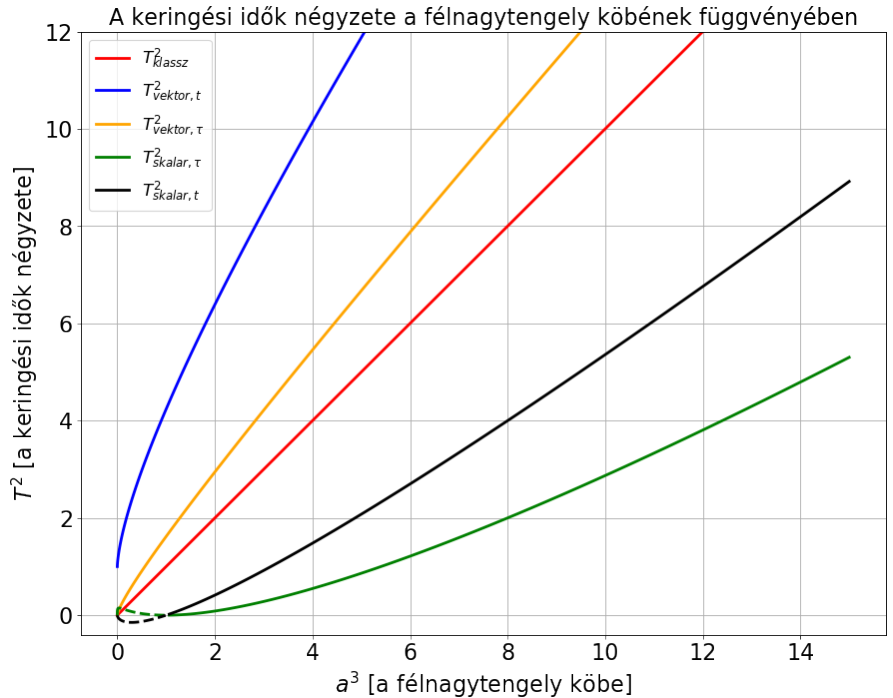
$$\begin{array}{l|l} T_\tau = \frac{2\pi R}{c} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}^3}, & T_\tau = \frac{2\pi R}{c} \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 - 1}^3}, \\ T_t = \frac{2\pi R}{c} \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 - 1}^3}, & T_t = \frac{2\pi R}{c} \frac{\alpha^3}{\sqrt{\alpha^2 - 1}^3}, \end{array}$$

Kepler III. törvénye pedig:

$$\begin{array}{l|l} T_t^2 = \frac{4\pi^2}{c^2} \frac{a^3}{R} \left(1 - \frac{R}{a}\right), & T_t^2 = \frac{4\pi^2}{c^2} \frac{a^3}{R} \left[\frac{R}{2a} \left(3 + \frac{R^2}{a^2}\right) + \left(1 + \frac{R^2}{a^2}\right) \sqrt{1 + \frac{R^2}{4a^2}} \right], \\ T_\tau^2 = \frac{4\pi^2}{c^2} \frac{a^3}{R} \left(1 - \frac{R}{a}\right)^2. & T_\tau^2 = \frac{4\pi^2}{c^2} \frac{a^3}{R} \left[\frac{R}{2a} + \sqrt{1 + \frac{R^2}{4a^2}} \right]. \end{array}$$

Azt látjuk tehát, hogy az eredmények alapján az általam vizsgált két mozgásra is fennállnak a következő szimmetriatulajdonságok: (1) a periódusidő csak az energiától függ, az impulzusmomentumtól nem, illetve (2) a periódusidő kifejezhető a félnagy tengellyel (Kepler III.). A klasszikus esetben ez kiegészül egy további tulajdonsággal: (3) a pályák záródnak. A hagyományos tárgyalás szerint ez a három tulajdonság egy közös okra: egy rejtett SO(4)-szimmetriára vezethető vissza. Érdekes eredmény tehát, hogy az itt vizsgált mozgásokra a hagyományosan egymásból következőnek gondolt három tulajdonságból kettő teljesül, a harmadik nem. Vajon

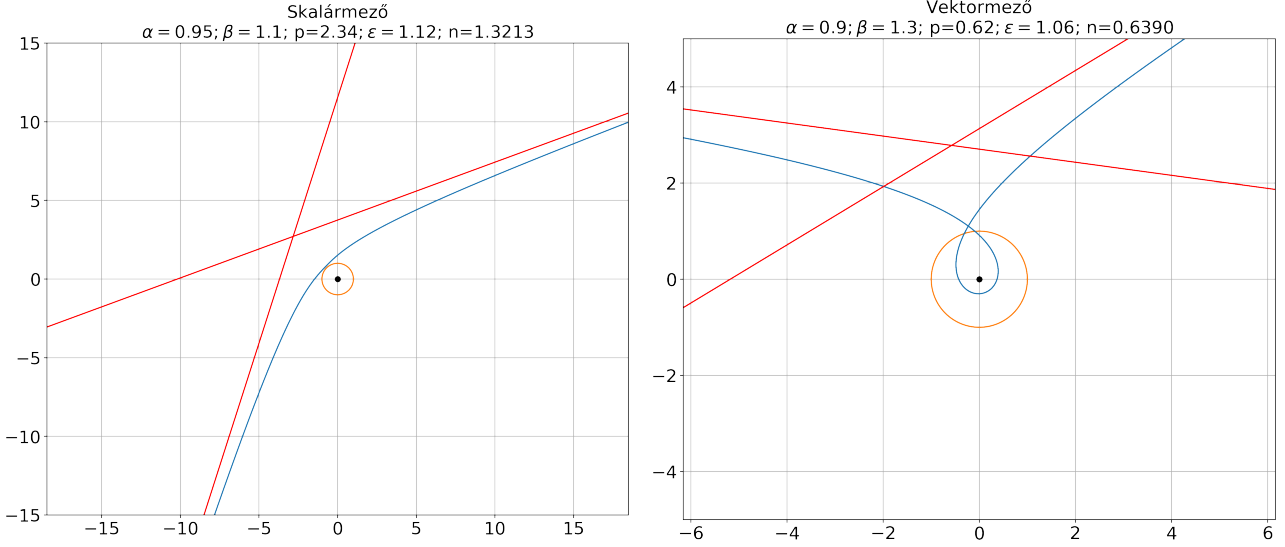
ez is valamilyen magasabb rendű, rejtett szimmetria eredménye? Ha nem, mi magyarázza az (1) és (2) szimmetriákat? A téma mindenképpen további kutatásra érdemes – részeredményeim már vannak, melyek talán egy későbbi dolgozat tárgyát képezhetik.



4. ábra. A $T^2(a^3)$ összefüggések görbéi a klasszikus eset egyeneséhez képest (az együtthatókat úgy választottam, hogy ennek meredksége 1 legyen; továbbá egységesen $R = 1$). A szaggatott vonal jelöli, hogy (80)-at és (82)-t (86)-ba beírva a skalármező esetén mindig $a > R$, ezért az ábrán az $a < 1$ tartomány nem releváns (lásd a 10.1. alfejezetet). A félnagy tengely növelésével a görbék meredksége tart a klasszikus eset egyenesének meredkségéhez.

9.2. Szabad pályák

Ha n közelebb 1-hez, a pályák hasonlóak lesznek a Kepler-problémából ismert hiperbolákhoz. A koszinusz argumentumában megjelenő n szorzó miatt azonban a pálya asszimptotái által közrezárt szög ($\pi +$ a sebességvektor szögelfordulása) az n -edrészére változik az $n = 1$ hiperbolához képest.



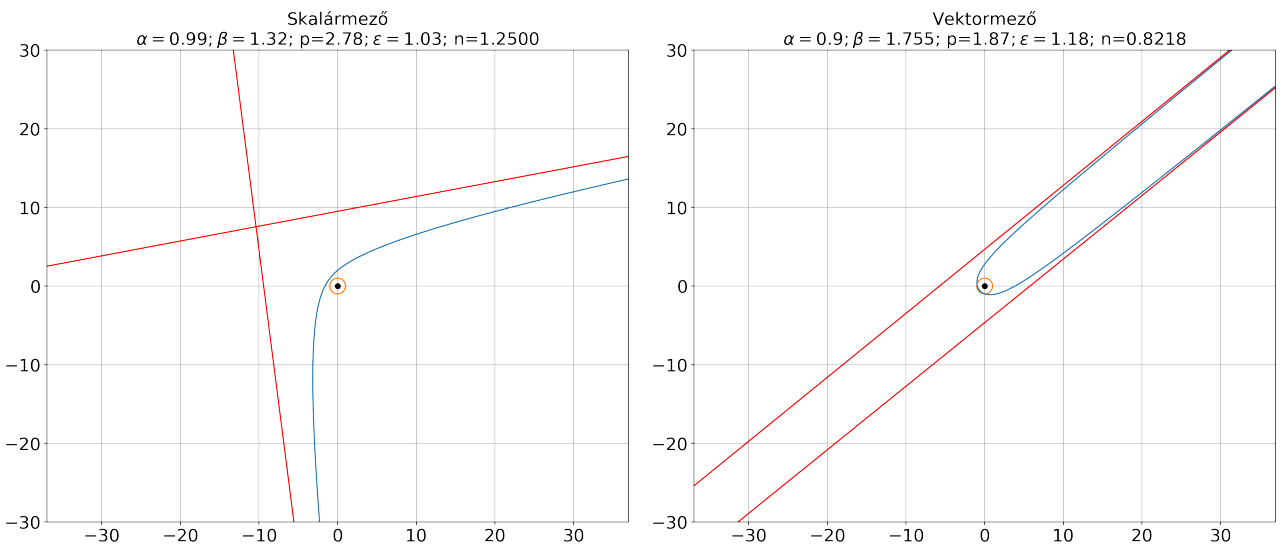
5. ábra. Szabad mozgások skalármezőben és vektormezőben. A pályák kétszer asszimptotikusan divergálnak. Jobbra: A pálya egyszer metszi önmagát. Az elektrosztatikus esetben a pálya tetszőleges alkalommal metszheti önmagát.

Általános n esetén a részecske a végtelenből érkezik,

$$r_{min} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2(1 - \alpha^2)} - \alpha^2}{1 - \alpha^2} R \quad (87)$$

$$r_{min} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha^2\beta^2} - 1}{1 - \alpha^2} \alpha R \quad (88)$$

sugárig megközelíti a centrumot, és adott szögelfordulás után a végtelenbe távozik. Az asszimptoták által bezárt szög n -edrésze az azonos p és ε , de $n = 1$ paraméterekkel vett hiperbola asszimptotái által bezárt szögnek. A skalármező esetén ezért lehetségesek olyan pályák, ahol az asszimptoták által bezárt szög kisebb π -nél, akár csak a klasszikus tasztítópotenciálban (!) megvalósuló Kepler-hiperbolák esetén (lásd a 9. és a 10. ábra jobb oldalát). Az elektrosztatikus esetben pedig lehetséges, hogy a bezárt szög nagyobb 2π -nél, tehát a görbe önmagát metszi.



6. ábra. Szabad mozgások skalármezőben és vektormezőben. Balra: Az asszimptoták derékszöget zárnak be egymással. Jobbra: Speciális paraméterek esetén az asszimptoták párhuzamosak.

10. Új, korábban nem ismert részecskepályák

Mint a bevezetőben említettem, Arnold Sommerfeld a speciális relativitáselmélet megszületése után megvizsgálta a relativisztikus hidrogénatom problémáját, és az 1. ábra jobb oldalán láthatókhöz hasonló megoldásokat kapott. Marx György az ötvenes években felírta a skalármezőben történő mozgás (36) és (37) egyenleteit [13, 18], konkrét megoldásokat és pályákat azonban nem számolt.

Az eddig bemutatott ábrák tehát újdonságot jelentenek, jellegükre azonban számítani lehetett. Az alábbiakban viszon mindkét mező esetén olyan új, jellegükben az előzőektől lényegesen különböző részecskepályákat mutatok be, amelyek váratlan, fizikailag is új effektusokat írnak le.

10.1. Skalármező: az R sugáron belül

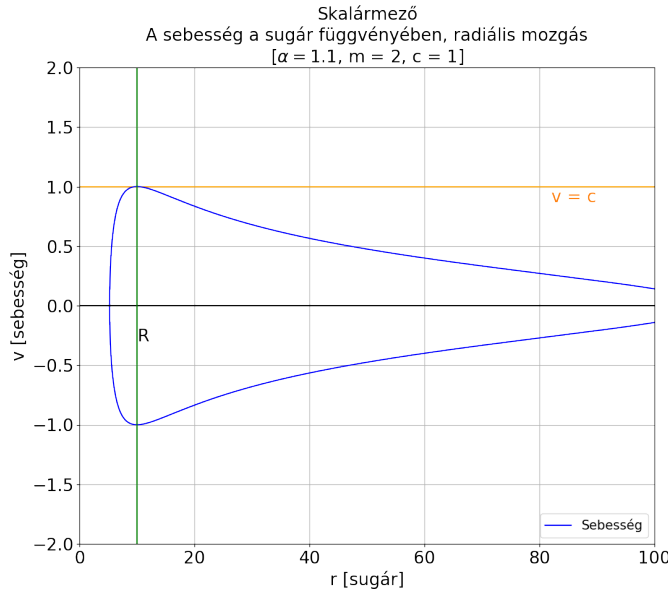
10.1.1. A radiális ejtés

Vizsgáljuk meg a tisztán radiális mozgás esetét: azt az esetet, amikor a részecskét tangenciális kezdősebesség nélkül beejtjük a potenciálba (tehát az impulzusmomentum $j = 0$)! Ez a legtöbb centrális problémánál érdektelen eset: a részecske a folyamatos vonzóerő hatására gyorsulva bezuhan a centrumba, ahol a modell érvényét veszti, hiszen valamilyen ütközés történik a mezőt keltő forrással. A skalármezőnél azonban érdekesebb eredményre fogok jutni. (A radiális ejtés esetét Marx György a [18] cikkben kvalitatíve már tárgyalta.)

Térjünk vissza a (67) egyenletre, és írjuk be, hogy $\beta = 0$! Ekkor az egyenlet

$$\dot{r}^2 = c^2 \left[1 - \alpha^2 \left(1 - \frac{R}{r} \right)^2 \right]. \quad (89)$$

Az egyenletet a t rendszeridő szerint egyszer deriválva látható, hogy a sebességnek maximuma van az $r = R$ helyen. Itt $\dot{r}^2 = c^2$, tehát a részecske eléri a fénysebességet. Mivel az $r = R$ maximumhely, beljebb haladva a sebesség csökken.

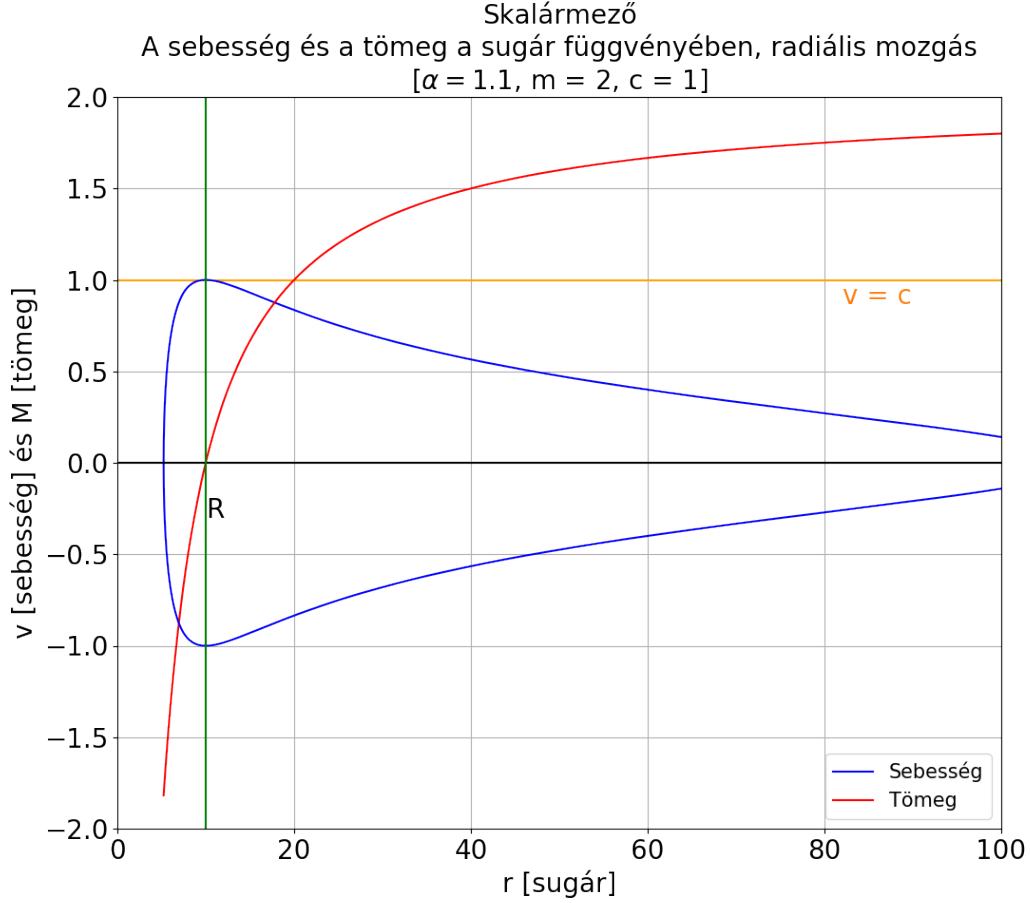


7. ábra. Kötött radiális mozgás skalármezőben. A részecske sebessége befelé haladva nő, és az $r = R$ helyen eléri a fénysebességet. Továbbhaladva befelé a sebesség csökken, majd nullává válik. A mozgás kötött állapot esetén periodikus.

Vizsgáljuk meg (89) zérushelyeit! Az egyik zérushely (ez csak $\alpha > 1$, tehát kötött mozgás esetén létezik) $r_{max} = \frac{R}{1 - 1/\alpha}$ az ejtés helye, hiszen ezen a helyen a tömeg (56) képletébe behelyettesítve éppen $M = E/c^2$ (tehát a részecske energiája tisztán nyugalmi). Ezen kívül azonban van még egy $r_{min} = \frac{R}{1 + 1/\alpha} < R$ zérushely, ahol a részecske sebessége zérus. Van tehát egy minimális sugár, amelynél nem hatol beljebb a részecske.

A részecske mozgása tehát az alábbiak szerint jellemezhető. A részecske elkezd gyorsulni a centrum felé, és az elengedés helyétől függetlenül (!) az $r = R$ sugáron eléri egy pillanatra a fénysebességet, majd lassulni kezd. Az $r = r_{min}$ helyen a részecske visszafordul, kifelé gyorsulva az R sugáron ismét eléri egy pillanatra a fénysebességet, majd (kötött mozgás esetén) az r_{max} -ot elérve a mozgás periodikusan ismétlődik.

Láthatjuk, hogy – az előzetes várakozásokkal ellentétben – az R sugáron belül a befelé mélyülő potenciál ellenére a részecske lassul, tehát rá taszítóerő hat. (Ennek alapján az $r < R$ tartományt taszítógömbnek fogom nevezni.) Mi lehet ennek az oka? Vizsgáljuk meg a részecske M tömegét a mozgás során! Az (56) képlet alapján látható, hogy a mozgás során a tömeg csökkenni kezd, az R sugáron nullává válik, a taszítógömbön belül pedig negatív lesz. A negatív tömegű testre ható vonzóerő pedig taszítóhatást fejt ki, amely kifelé gyorsítja a részecskét.



8. ábra. A 13. ábrán látható kötött radiális mozgás skalármezőben. A mozgás első felében a sugár csökkenésével a sebesség nő, a tömeg csökken. R -ben a sebesség eléri a fénysebességet, a tömeg pedig nullává válik. A taszítógömbben a részecske tömege negatív, aminek hatására a részecske kifelé gyorsul (a sebességgörbe konkáv).

A mozgás pontos leírása a következő. A részecske gyorsuló mozgást végez a centrum felé, és a sugár csökkenésével csökken a tömege. A taszítógömb felszínén a tömeg egy pillanatra nullává válik és a részecske egy pillanatra eléri a fénysebességet.⁸ Ezután (a taszítógömbön belül) a részecske tömege negatívvá válik, ezért a vonzócentrum által kifejtett vonzóerő kifelé mutató gyorsulást eredményez a részecskén. Emiatt a részecske lassulni kezd, és az $r_{min} = \frac{R}{1 + 1/\alpha}$ sugáron egy pillanatra megáll. Visszafordulva kifelé gyorsulva a eléri a taszítógömb felszínét, ahol a tömeg ismét nullává válik és a sebessége eléri a fénysebességet. Ezután a tömeg pozitívvá vált, a részecske lassul, majd (kötött állapot esetén) a kiindulópont elérése után a mozgás periodikusan ismétlődik.

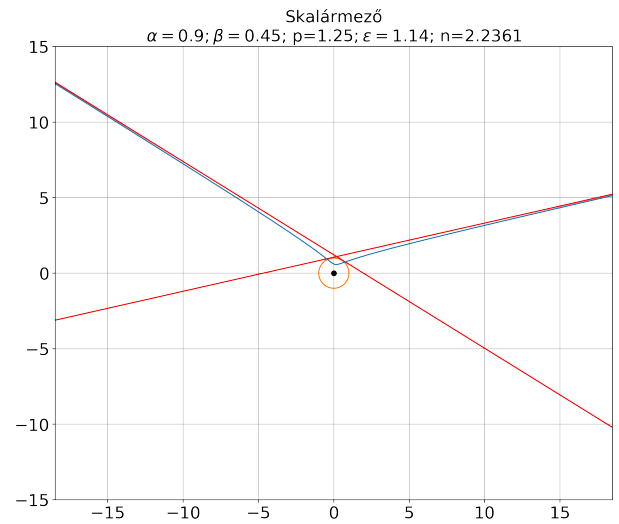
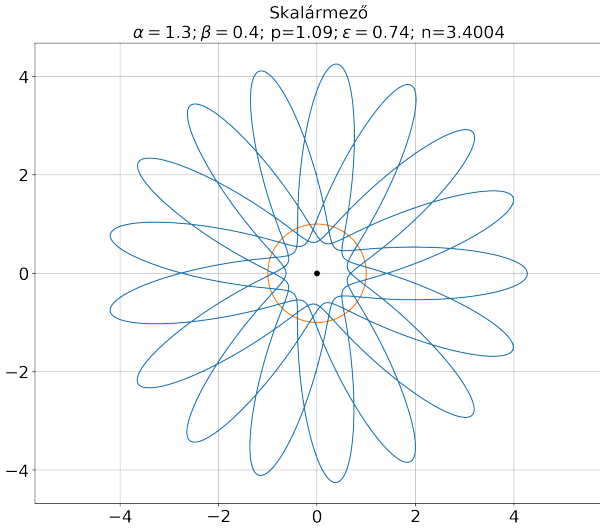
⁸Ez összhangban van a relativitáselmélet azon megállapításával, miszerint egy részecske tömege akkor lehet zérus, ha a sebessége megegyezik a fénysebességgel. [3]

10.1.2. Általános eset

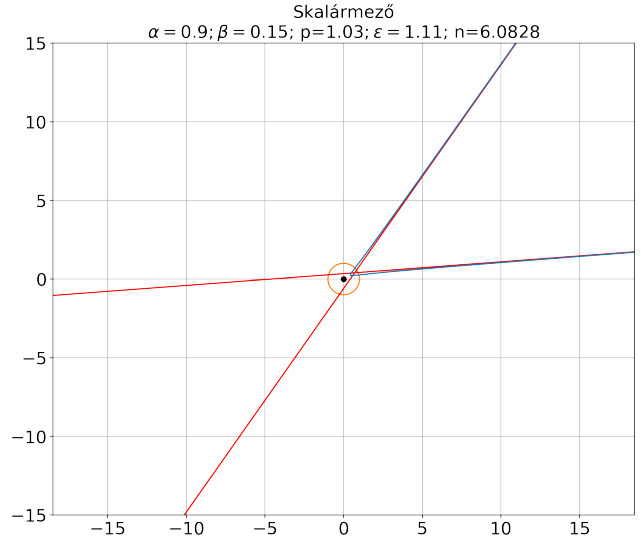
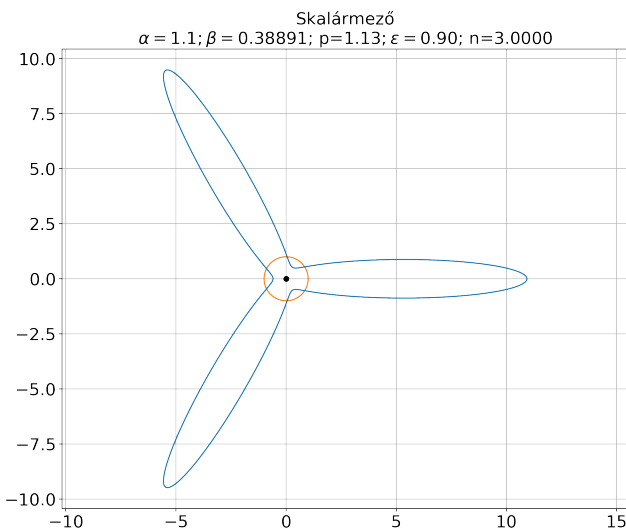
Mi a helyzet, ha nem tisztán radiális mozgásról beszélünk? Vajon ebben az esetben is fellépnek az előző bekezdésben tárgyalt jelenségek a taszítógömbben? Először is vizsgáljuk meg, egy általános esetben mi a feltétele annak, hogy a részecske behatoljon a taszítógömbbe! Ehhez a kötött mozgás esetén (82)-re, szabad mozgás esetén (87)-re kell teljesülnie, hogy $r_{min} < R$. Ez mindkét esetben a

$$\beta < 1 \quad (90)$$

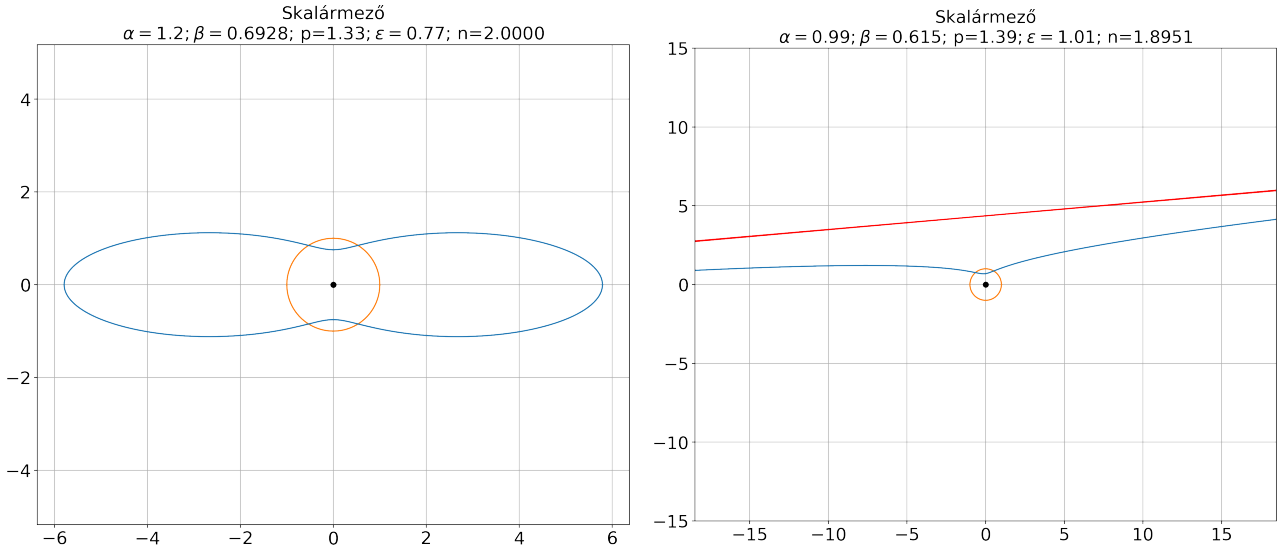
feltételt adja. Ha ez teljesül, mind a kötött, mind a szabad pályák behatolnak a taszítógömbbe. Ha szemügyre vesszük a tömeg (56) képletét, láthatjuk, hogy az csak a sugártól függ. Ezért a tömeg α -tól és β -tól függetlenül (!) minden esetben zérussá válik az $r = R$ sugáron. Az $r < R$ taszítógömbben pedig minden esetben negatív lesz. Ha a negatív tömeg miatti taszítóhatásról felállított gondolatmenet helyes, két dolog várható a tömegről megállapítottak alapján: (1) az R sugáron a sebesség (nagysága, bár az iránya a konkrét α és β paraméterektől függ) egy pillanatra eléri a fénysebességet és (2) az $r > R$ tartományban a pályagörbe a vonzás miatt konkáv, az $r < R$ tartományban pedig a taszítás miatt konvex. A (2) állítás ekvivalens azzal, hogy az $r = R$ sugáron a görbének inflexiós pontja van.



9. ábra. A taszítógömbbe behatoló kötött és szabad mozgások skalármezőben. A pálya taszítógömbön belüli szakasza konvex. A taszítógömb felszínén a pályának inflexiós pontja van. Jobbra: A részecske sebességvektorának szögelfordulása negatív. Ilyen jelenség a klasszikus Kepler-pályák esetén csak taszítópotenciálban lehetséges.



10. ábra. A taszítógömbbe behatoló kötött és szabad mozgások skalármezőben. Balra: $n = 3$ esetén a pálya záródik. Jobbra: Viasszaszórás. Megfelelően nagy n esetén a részecskék viasszaszóródnak.



11. ábra. A taszítógömbbe behatoló kötött és szabad mozgások skalármezőben. Balra: $n = 2$ esetén a pálya tükrörszimmetrikus. Jól kivehető a taszítógömb felszínén a pálya inflexiós pontja. Jobbra: Speciális n esetén a két asszimptota megegyezik. A végtelenből érkező részecskék szóródási szöge zérus.

Az (1) állítás a (63) képlet alapján könnyedén belátható. Ha a jobb oldalon $r = R$, az egyenlet alapján $v^2 = c^2$, tehát a sebesség tényleg eléri egy pillanatra a fénysebességet. Mivel a jobb oldalnak maximuma van ebben a pontban, a sebesség minden más pontban kisebb a fénysebességnél.

A (2) állításhoz vizsgáljuk meg a görbe görbületét! Ha ez nulla az $r = R$ helyen, akkor ott valóban inflexiós pont van. Vegyük fel a síkgörbét

$$\mathbf{r}(\varphi) = r(\varphi) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

alakban! A görbe görbülete arányos a $\mathbf{g} = \mathbf{r}' \times \mathbf{r}''$ vektor abszolútértékével. $\mathbf{g}$ abszolútértéke jelen esetben a vektor g_3 harmadik komponensével egyezik meg, mivel $r_3 = 0$. A számolást leegyszerűsítendő áttértek az $u(\varphi) = 1/r(\varphi)$ változóra, majd számítom ki a deriváltvektorokat és végezzük el a vektoriális szorzást. Elemi trigonometrikus azonosságok felhasználásával azt kapom, hogy

$$g_3 = \frac{u''(\varphi)}{u(\varphi)} + 1.$$

Inflexiós pont ott van, ahol $g_3 = 0$, tehát ahol teljesül az

$$\frac{u''(\varphi)}{u(\varphi)} = -1 \quad (91)$$

egyenlet. Most helyettesítsük be, hogy a vizsgált görbékre $u(\varphi) = \frac{1 - \varepsilon \cos(n\varphi)}{p}$. Így az inflexiós pont feltétele:

$$\varepsilon n^2 \cos(n\varphi) = \varepsilon \cos(n\varphi) - 1. \quad (92)$$

Rögrön láthatjuk, hogy a klasszikus Kepler-pályák esetében (ahol $n = 1$) az egyenlet ellentmondásra vezet, így ott soha nincs inflexiós pont a pályákon.

A skalármező esetén (78) felhasználásával kifejezem az egyenletből $\cos(n\varphi)$ -t:

$$\cos(n\varphi) = \frac{-1}{\varepsilon(n^2 - 1)} = \frac{-\beta^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha^2 \beta^2}}. \quad (93)$$

Ahhoz, hogy az egyenletnek legyen φ -ben megoldása, a koszinusz értékének -1 és 1 között kell lennie. Megmutatható, hogy $\beta < 1$ esetén ez a feltétel α -tól függetlenül teljesül, $\beta > 1$ esetén pedig α -tól

függetlenül nem teljesül. Tehát $\beta < 1$ -nél mindig van inflexiós pont a pályán, $\beta > 1$ -nél pedig soha nincs. Emlékezzünk vissza: pont (90) $\beta < 1$ volt a feltétele a taszítógömbbe való behatolásnak. Tehát ha a részecske behatol a taszítógömbbe, minden esetben lesznek inflexiós pontok a pályán, ha pedig nem hatol be a taszítógömbbe, soha nem lesznek.⁹

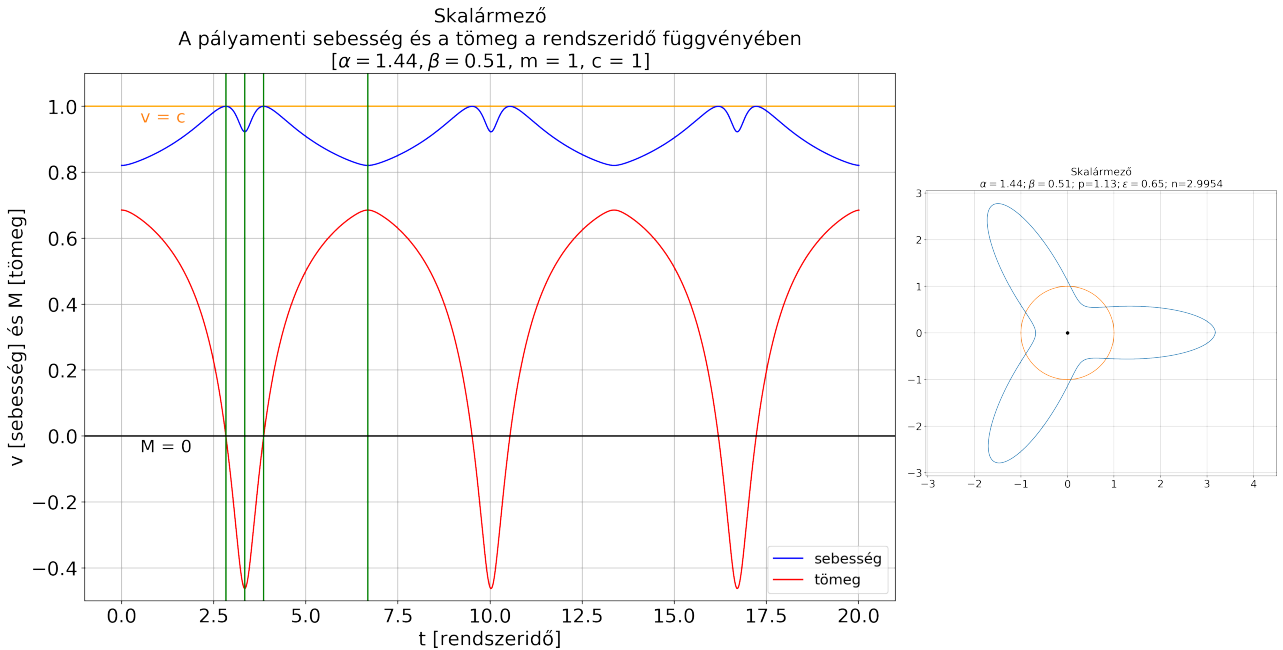
Határozzuk meg a $\beta < 1$ esetén fellépő inflexiós pontok helyét! Ehhez helyettesítsük vissza az inflexiós pont φ helyét meghatározó (93) egyenletet a (77) pályae egyenletbe, és használjuk ki, hogy (78) $p = \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right) R$:

$$r = \frac{p}{1 + \frac{1}{n^2 - 1}} = R.$$

Az inflexiós pontok tehát ott lépnek fel, ahol a pálya metszi a taszítógömb felszínét. Ezzel az (1) és a (2) állítás is igaznak bizonyult.

A taszítógömbbe behatoló (szabad és kötött), nem tisztán radiális mozgások a következőképpen történnek. A részecske a vonzás hatására (a centrumból nézve) konkáv pályán közelít a centrum felé. Eközben csökken a tömege és nő a sebessége. A taszítógömb felszínén a sebesség egy pillanatra eléri a fénysebességet és a tömeg nullává válik. Ebben a pontban a pályán inflexiós pont van: konkávból konvexszé vált. Behatolva a taszítógömbbe, a részecske sebessége csökken, és a negatív tömege miatti taszítóhatás miatt a pálya (szintén a centrumból nézve) kifelé görbül, konvex. A részecske sebessége kötött mozgás esetén a (82), szabad mozgás esetén a (87) r_{min} sugáron eléri a minimumát, de a negatív tömeg miatt a pálya továbbra is konvex. Amikor a részecske kilép a taszítógömbből, a sebessége ismét eléri egy pillanatra a fénysebességet, a tömege pozitívvá vált, és a pálya újabb inflexiós ponton ismét konkávvá válik.

(90) alapján kiszámítható, hogy egy szórási kísérletben végtelenből érkező részecskenyaláb esetén a taszítógömbbe való behatolás hatáskeresztmetszete $\sigma = \frac{R^2 \pi}{1 - \alpha^2}$.



12. ábra. Egy általános, taszítógömbbe behatoló kötött mozgás jellemzése skálármezőben. Balra: A sebesség (kékkel) és a tömeg (pirossal) a rendszeridő függvényében (numerikusan meghatározott adatok). Amikor a sebesség eléri a fénysebességet, a tömeg nullává válik. A taszítógömbön belül a tömeg negatív. A minimális sugáron a tömeg és a sebesség egyszerre éri el a minimumát. Jobbra: A grafikonon bemutatott mozgás pályája.

⁹Ugyanez a számolás elvégezhető az elektrosztatikus esetre is. Ekkor azonban arra jutunk, hogy a koszinuszra kirótt feltétel ellentmondáshoz vezet, tehát az elektrosztatikus esetben nincs inflexiós pont a pályán. Érdekeség, hogy az ellentmondás nem az $n < 1$ -ből, hanem az ε és az n α -val és β -val kifejezett alakjából adódik.

A negyvenes évek végén feltételezték, hogy a nukleonok között ható magerők rövid távolságon taszításba csapnak át, és ezzel próbálták magyarázni az atommagok véges sűrűségét. A Novobátzky-iskola ezt a jelenséget a most tárgyalt „relativisztikus taszítás” segítségével próbálta értelmezni, hiszen a magerőket a Yukawa-féle skalármezővel írták le. Később a magerőkre más, bonyolultabb elmélet született (Walecka-féle skalár-vektor-modell). Ezért a mai magfizika nem használja a taszítógömb fogalmát. Ennek ellenére igen érdekes fizikai jelenség a tömeg negatívvá válásának következtében taszítóba átcsapó vonzóerő.

10.2. Elektrosztatikus eset: a centrumba spirálozó pályák

Az 1.1. szakaszban megállapítottam, hogy a klasszikus fizikai modellben minél közelebb kerül az elektron a centrumhoz, annál nagyobb sebességre tesz szert – így vélhetően minél jobban megközelíti az elektron a centrumot, annál jobban érvényesülnek a relativisztikus effektusok: a centrumot jobban megközelítő pályák jobban torzulnak a Kepler-pályákhoz képest. Érdekesnek tűnik megvizsgálni, mennyire lehetséges a centrum megközelítése. Ehhez vegyük alapul a minimális sugár (83) és (88) képleteit! Láthatjuk, hogy adott β mellett, ha α csökken, a minimális sugár is csökken és az $\alpha = 0$ határesetben eléri a nullát. Ez teljesen természetes, hiszen az $\alpha = 0$ nem érhető el.¹⁰ Ha α -t rögzítjük, β -t csökkentve r_{min} szintén csökken, és $\beta = 1$ -ben eléri a nullát. Ez figyelemre méltó eltérésnek tűnik a klasszikus Kepler-pályákhoz képest, amelyek sosem érhetik el az $r_{min} = 0$ -t. Mi történne, ha a β paramétert tovább csökkentenénk? Mit jelentene a minimális sugárra formálisan adódó negatív érték?

Vegyük észre, hogy más probléma is adódik ebben az esetben: ha $\beta < 1$, az n pályaparaméter (79) képletében a gyök alatt negatív szám szerepel!

A problémára többféle megoldás is elképzelhető. (1) A ε -ban szereplő gyök kapcsán a 9. fejezet utolsó bekezdésében megállapítottam, hogy az csupán azt a (klasszikus esetben is megjelenő) feltételt jelenti, miszerint egy adott impulzusmomentumhoz tartozik egy minimális energia, így α és β között fennáll egy egyenlőtlenség. Hasonlóképp az n -ben szereplő gyökvonás által kirótt feltétel is lehet egy, a fizika más területéről ismert egyenlőtlenség β -ra. (2) Ha az (1) lehetőség nem vezet eredményre, vissza kell térnem oda, ahol a gyökvonást először elvégeztem, és diszkutálnom azt az esetet, ha az $(1 - 1/\beta^2)$ mennyiség negatív.

Az (1) lehetőségként azt kell megvizsgálnunk, ismerünk-e olyan fizikai törvényt, amely biztosítja, hogy $\beta > 1$. Mivel β az impulzusmomentumot tartalmazó mennyiség, eszünkbe juthat, hogy pont ilyen jellegű feltételt ismerünk a kvantummechanikából, ahol az impulzusmomentum nem választható tetszőlegesen kicsinek, minimális értéke $\hbar$. Konkrét számításához vegyük a legkézenfekvőbb esetet: a hidrogénatomot! Ekkor β (69) képletébe behelyettesítve

$$\beta = \frac{j}{Rmc} = \frac{jc}{e^2}.$$

Vegyük az impulzusmomentum kvantumát: $\beta = \frac{\hbar c}{e^2}$! Ez pont a finomszerkezeti állandó reciproka, tehát $\beta = 137$, ami jóval nagyobb egynél. Azt találtuk, hogy ebben az esetben van olyan fizikai törvény, amely szükségtelenné teszi a (2) lehetőség elemzését. Ez azonban csak a hidrogénatom $Z = 1$ esetén van így. Mivel általános Z esetén $\beta = \frac{jc}{Ze^2}$, így $Z > 137$ rendszámú atommag esetén lehetséges a $\beta < 1$ eset. Sommerfeld csak a hidrogénatomot vizsgálta, így nem foglalkozott ezzel az esettel.

Az (1) lehetőséget analizálva azt találtuk, hogy megfelelően nagy Z választása mellett nincs olyan fizikai feltétel, mely biztosítaná, hogy az $n = \sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2}}$ gyök alatt pozitív szám álljon. Vizsgáljuk meg, mit mondhatunk a pályaeqyenletről ebben az esetben! Ehhez térjünk vissza oda, ahol először

¹⁰Pontosabban: mivel β rögzített, az $\alpha \rightarrow 0$ ($E \rightarrow \infty$) határeset azt jelenti, hogy a részecskét centrálisan lőjük be a potenciálba.

elvégeztük a kérdéses gyökvonást! Ez a (72) egyenlet. Kihasználva, hogy most a $\beta < 1$ esetet vizsgáljuk, az alábbi differenciálegyenletet kapjuk:

$$\left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{-1}{\alpha(1-\beta^2)} - \frac{R}{r} \right) \right]^2 = \frac{1}{\alpha^2\beta^2} \left[1 - \alpha^2 - \frac{1}{1-\beta^2} + \alpha^2(1-\beta^2) \left(\frac{-1}{\alpha(1-\beta^2)} - \frac{R}{r} \right)^2 \right]. \quad (94)$$

Mivel a jobb oldalon álló konstans biztosan negatív, az $u(\varphi) = \frac{-1}{\alpha(1-\beta^2)} - \frac{R}{r}$ változóban az egyenlet alakja (75)-tel ellentétben:

$$u'^2 = -A^2 + n^2 u^2. \quad (95)$$

Az egyenlet elemi módszerekkel megoldható:

$$u(\varphi) = \frac{A}{n} \operatorname{ch}[(\varphi - \varphi_0)]. \quad (96)$$

Itt φ_0 integrációs állandó, melyet az általánosság elvesztése nélkül nullának választhatunk. Ebbe visszahelyettesítve u -t, A -t és n -et a pályaequation

$$r(\varphi) = \frac{p}{-1 + \varepsilon \operatorname{ch}(n\varphi)}, \quad (97)$$

a pályaparaméterek pedig

$$\begin{aligned} p &= \alpha(1-\beta^2)R, \\ \varepsilon &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha^2\beta^2} \text{ és} \\ n &= \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - 1}, \end{aligned} \quad (98)$$

ahol

$$\alpha = \frac{mc^2}{E}, \beta = \frac{j}{Rmc} \text{ és } R = \frac{Ze^2}{mc^2}.$$

A nevezőnek zérushelye van, ha $\operatorname{ch}(n\varphi) = 1/\varepsilon$, tehát itt is az $\varepsilon < 1$ jelenti a szabad mozgásokat, az $\varepsilon > 1$ pedig a kötötteket. (Mivel ε képlete ugyanaz, mint a (77) esetben, itt is az $\alpha < 1$ a szabad, az $\alpha > 1$ a kötött pálya feltétele.)

Van azonban a pályaequationnek egy szokatlan tulajdonsága: φ növekedésével a koszinusz hiperbolikusos taggal a nevező (a paraméterektől függetlenül) minden esetben divergál, tehát az $r(\varphi)$ közelít a nullához. Végtelen szögelfordulás után a pálya eléri az $r = 0$ origót. De vajon ez tényleg bekövetkezik véges idő elteltével, vagy a végtelen szögelfordulás végtelen időtartamot is jelent?

Ehhez vizsgáljuk meg a pálya úthosszát! Polárkoordinátákban $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2} = \sqrt{r'^2 + r^2} d\varphi$, ebbe kell behelyettesíteni a (97) $r(\varphi)$ függvényt. Így a végtelen szögelfordulás alatt megtett teljes út:

$$s = \int_0^\infty d\varphi \frac{p}{\varepsilon \operatorname{ch}(n\varphi) - 1} \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2 n^2 \operatorname{sh}^2(n\varphi)}{(\varepsilon \operatorname{ch}(n\varphi) - 1)^2}}. \quad (99)$$

Az integrál nem végezhető el egzaktul. Numerikus integrálással igazolható, hogy a görbe hossza a paraméterek minden kombinációjára véges (szabad mozgás esetén ez úgy értendő, hogy a részecskét egy véges sugárról indítjuk, ennek megfelelően az integrálás alsó határa a megfelelő φ_0).

Mit jelent ez az eredmény az időre nézve? Mivel a részecske sebessége¹¹ (64) alapján nő a mozgás során, ezért véges utat biztosan véges rendszeridő alatt tesz meg. (Ebből következően a sajátidő is véges.) Ezért a részecske véges út megtételével véges idő alatt valóban eléri a centrumot.

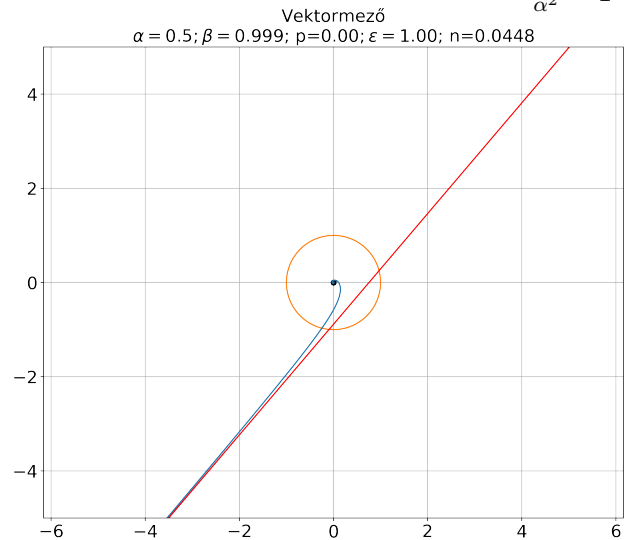
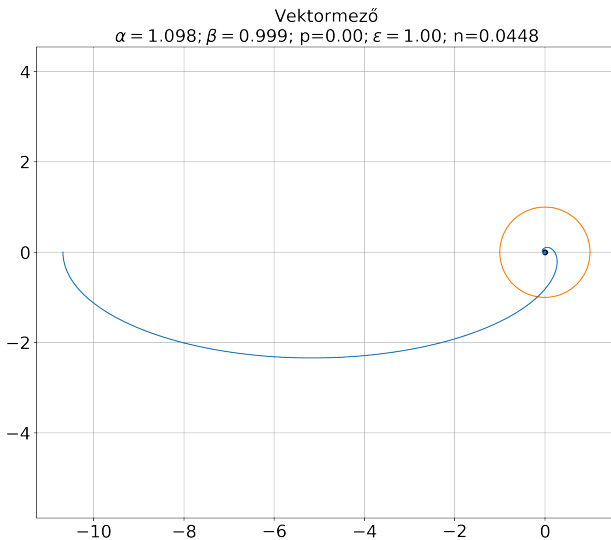
¹¹A függelék B részében bemutatott Marx-paradoxon kapcsán láttuk, hogy az első részben vázolt relativisztikus dinamikába a közhiadelemmel szemben nincs automatikusan beépítve a sebességre vonatkozó felső korlát. Ezért felmerülhet, hogy külön ellenőrizni kell, hogy a sebesség nem lépi-e át a fénysebességet a mozgás során. Mivel azonban arról a speciális mezőről van szó, amelyben a tömeg állandó, ezért ezt a kérdést minden relativisztikus dinamikával foglalkozó könyv részletesen tárgyalja, és negatív választ ad.

Vizsgáljuk meg részletebben annak $\beta < 1$ feltételét, hogy a centrumba spirálozó pályák lépjenek föl! A feltétel nem tartalmazza α -t, tehát nem függ az energiától, hogy fellép-e ilyen pálya. Láttuk, hogy az impulzusmomentum legkisebb értéke $\hbar$, ezért csak $Z > 137$ esetén lehetséges, hogy β kisebb legyen egynél. Egy ilyen adott Z mellett az impulzusmomentumra a $j < Ze^2/c$ feltételnek kell teljesülnie. Jelöljük a finomszerkezeti állandót μ -vel (hogy ne tévesszük össze az α -val); ezzel a feltétellel:

$$j < Z\mu\hbar. \quad (100)$$

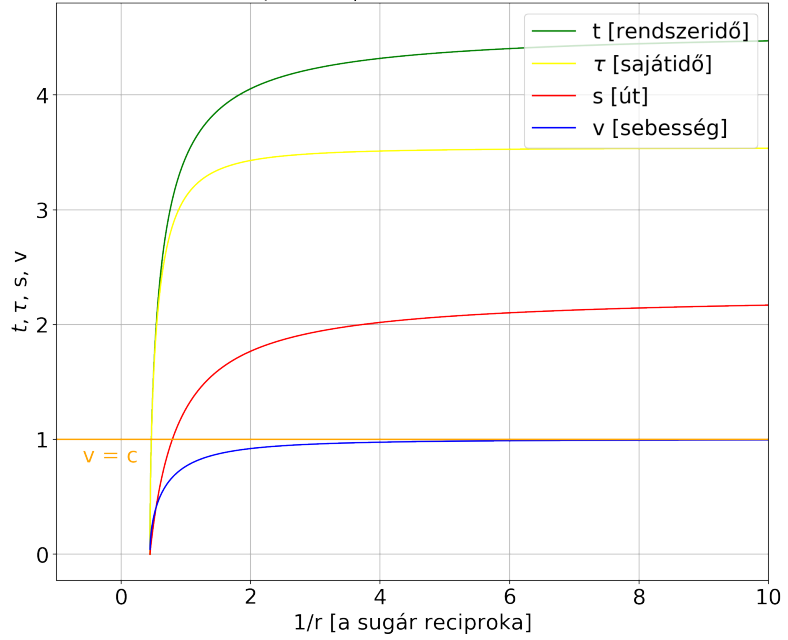
Az eredményem tehát a következő. Ha veszünk egy

$Z < 137$ rendszámú atommagot, a pályák a (77) Sommerfeld-féle elektronpályák, amelyek az ott leírtakban különböznek a Kepler-féle ellipszisektől és hiperboláktól. Ha azonban egy $Z > 137$ rendszámú atommagot veszünk, akkor *minden* $j < Z\mu\hbar$ impulzusmomentumú elektron bezuhan a magba, függetlenül az energiájától. Ez azt jelenti, hogy nemcsak a kötött, hanem a szabad részecskék (amelyek kezdősebességének radiális vetülete befelé mutat) is bespiráloznak az origóba, ha az impulzusmomentumuk a $Z\mu\hbar$ korlát alatti (annak ellenére, hogy elég energiájuk volna a végtelenbe távozni). Ezek az elektronok mindig véges idő alatt zuhannak be a magba. Érdekes volna a kérdés, hogy e véges idő letelte *után* mi történik az elektronnal, a modellem azonban itt érvényét veszti: szükségszerűen valamilyen ütközés történik a mezőt keltő forrással (atommaggal). (100) alapján kiszámítható, hogy egy végtelenből érkező részecskenyaláb esetén a bespirálozó pályák hatáskeresztmetszete $\sigma = \frac{R^2\pi}{\frac{1}{\alpha^2} - 1}$.

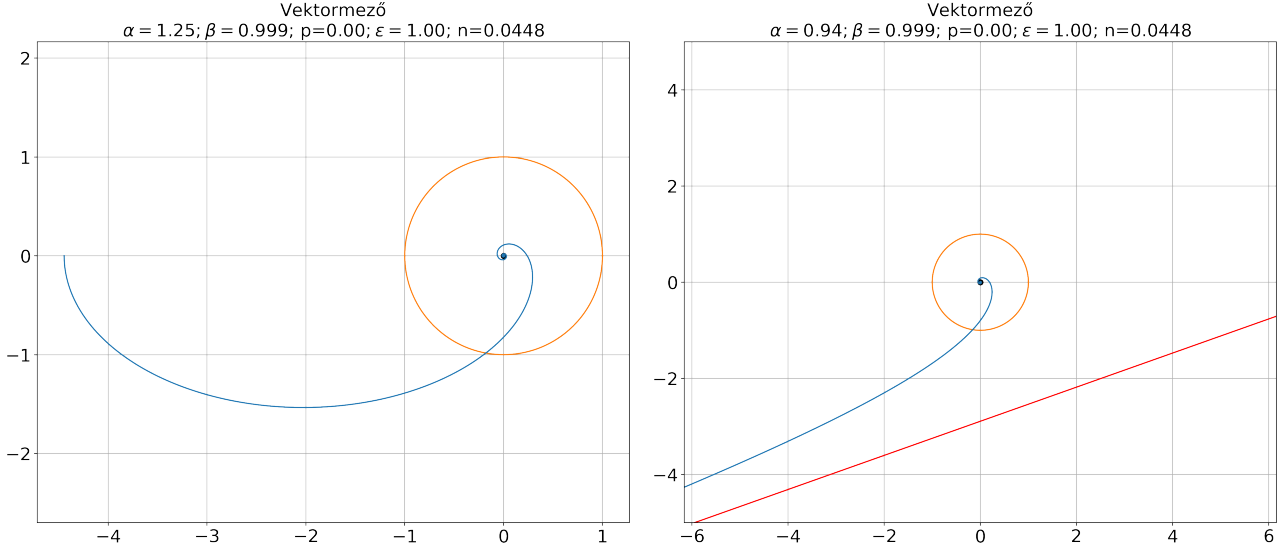


14. ábra. Centrumba spirálozó kötött és szabad pályák vektormezőben.

Vektormező
A rendszeridő, a sajátidő, az út és a sebesség a sugár reciprokanak függvényében
 $\alpha = 1.8; \beta = 0.1; p = 1.78; \varepsilon = 1.79; n = 9.9499$



13. ábra. A rendszeridő, a sajátidő, az út és a sebesség a sugár reciprokanak függvényében egy bespirálozó kötött mozgás esetén vektormezőben (numerikusan meghatározott adatok). A részecske véges út megtétele után, véges rendszeridő és sajátidő alatt beér a centrumba. A részecske sebessége a centrumhoz közeledve közelít a fénysebességhez.



15. ábra. Centrumba spirálozó kötött és szabad pályák vektormezőben. A részecske minden esetben végtelen szögelfordulással, de véges út és idő alatt beér a centrumba.

Ismert eredmény, hogy a klasszikus fizika Bohr-modelljében az első elektronpályán keringő elektron keringési sebessége az atommag töltésének növelésével nő, és $Z = 137$ rendszámnál eléri ($Z > 137$ esetén pedig meghaladja) a fénysebességet – ami a relativisztikus kinematika állításaival nem fér össze. Az én eredményem megmutatta, hogy a $Z = 137$ eset a relativisztikus tárgyalásban is megmarad határesetnek, és e fölött az elektronok bezuhanhatnak a magba. Különösen figyelemreméltó eredmény, hogy a relativisztikus számításban is megmarad ez a $Z = 137$ -es eset mint két lényegesen különböző eset határa. Vegyünk egy analóg példát: a homogén E elektrosztatikus mezőben mozgó m tömegű és e töltésű részecske mozgását! A klasszikus fizika mozgásegyenleteiből kiszámítható, hogy a részecske $t_0 = \frac{mc}{eE}$ idő és $s_0 = \frac{mc^2}{2eE}$ út megtétele után eléri a fénysebességet. Amikor elvégezzük e számolás relativisztikus megfelelőjét, azt találjuk, hogy a részecske sebessége

$$v(t) = \frac{\frac{eE}{m}t}{\sqrt{1 + \left(\frac{eE}{mc}t\right)^2}} \quad (101)$$

módon közelít a fénysebességhez. Ez azt jelenti, hogy semmi különös nem történik az s_0 vagy a t_0 pontokban, ezek a pontok nem kitüntetettek. Ebből a példából is látszik, mennyire meglepő, hogy az általam tárgyalt esetben a Z paraméter $Z = 137$ értéke, melynél a klasszikus esetben a részecske eléri a fénysebességet, a relativisztikus tárgyalásmódban is megmarad kitüntetett értéknek.

A kvantum-mezőelmélet ismert elméleti jóslata, hogy egy túl nagy töltésű atommag körül vákuumpolarizációs jelenségek lépnek föl, emiatt az elektronpályák léte kérdésessé válik. Az elmélet szerint ez $Z > 137$ rendszámú atommagok esetén következik be. Ez a jelenség feltételezhetően az itt tárgyalt bespirálozó mozgás kvantumos megfelelője lehet.

IV. rész

ÖSSZEFOGLALÁS

A dolgozatban egy pontszerű, nyugvó forrás keltette centrálszimmetrikus, sztatikus Kepler-potenciálban mozgó relativisztikus pontrészcse mozgását vizsgáltam skalár- és vektormező esetén. A kovariáns mozgásegyenletek felírását követően párhuzamos tárgyalásban mutattam be a mozgásegyenletek megoldását, a pályae egyenleteket és a lehetséges részecskepályákat. Az irodalomban korábban nem szereplő, azonban új fizikai effektust nem tartalmazó eredmények tárgyalása után mindkét esetben bemutattam a korábbiaktól lényegesen különböző, új fizikai jelenségeket leíró részecskepályákat is.

Az I. rész történeti áttekintése után a II. részben bemutattam Novobáztzy Károly méltatlanul kevésbé ismert eredményeit, melyek kulcsfontosságúak a speciális relativitáselmélet általános dinamikájának felépítésében. Novobáztzy elmélete a Lorentz-kovarianciából kiindulva levezeti, hogy a testek tömege egy általános négyeserő hatására történő mozgás során változik. Megmutattam, hogy Novobáztzy eredménye egyenes következménye Einstein $E_0 = mc^2$ összefüggésének. Novobáztzy eredményeit felhasználva felírtam az általánosan érvényes relativisztikus mozgásegyenletet, a relativisztikus Newton-törvény általános alakját. Ezek után Dávid Gyula eredményei nyomán bemutattam a relativisztikus dinamikát kiteljesítő variációs eljárást: a kovariáns Lagrange-formalizmust, mely mindvégig kovariáns jelöléssel dolgozva elvezet a relativisztikus Newton-törvényhez, és automatikusan számot ad a Novobáztzy-effektusról.

A III. részben ezen általános dinamikai eredményeket alkalmaztam két speciális esetre: a nyugvó forrás által létrehozott gömbszimmetrikus, sztatikus potenciálban mozgó részecske esetére skalár- és vektormezőben. Mindkét esetben felírtam a kovariáns mozgásegyenleteket. Ezután a Kepler-potenciál esetére szorítkozva levezettem a skalármezőben és a vektormezőben lehetséges részecskepályákat, melyek mindkét esetben egzakt megoldásai voltak a mozgásegyenleteknek. Bemutattam az általános kötött és szabad mozgásformákat, és ábrák segítségével szemléltettem a lehetséges pályákat. Meglepő szimmetriát találtam a kötött mozgásokra, melyet részletesen elemeztem, az eredményeimet összevettem a kalsszikus esetre ismert szimmetriával. Ezek után mindkét esetben részletesen tárgyaltam részecskepályák egy speciális, a korábbiaktól lényegesen, fizikai jellemzőiben különböző típusát. A skalármező esetén elemeztem a taszítógömb fogalmát: ha a részecske egy bizonyos sugárnál közelebb kerül a centrumhoz, a tömege negatívvá válik, és emiatt a vonzóerő kifelé mutató gyorsulást okoz a részecskén. Az így kialakuló pályák a kritikus sugáron belül (a centrumból nézve) mindig konvexek. A vektormező esetén megmutattam, hogy a a részecske mozgását jellemző mozgásállandók bizonyos kombinációjánál a pályát leíró differenciálegyenletnek olyan megoldása van, mely szabad és kötött mozgás esetén egyaránt a centrumba spirálózó pályát ad. Ekkor a részecske végtelen szögelfordulás, de véges idő alatt bezuhan a centrumba.

A későbbiekben a kutatást (a Marx-paradoxon részletes vizsgálata mellett) két fő irányban szeretném folytatni: egyrészt szeretném tárgyalni az e dolgozatban bemutatott mozgások kvantumozott megfelelőjét, másrészt szeretném hasonló módszerekkel vizsgálni ugyanezen mezőkben a nem Kepler-jellegű potenciálban, illetve a más tenzori rangú mezőkben mozgó részecske esetét.

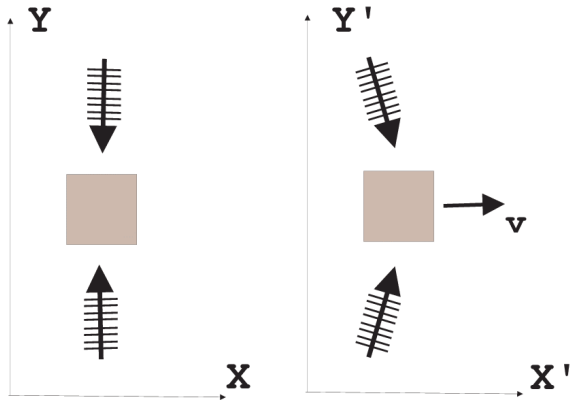
V. rész

FÜGGELÉK

A. A tömegről

A.1. Einstein gondolkísérlete az $E_0 = mc^2$ képletről

Alább ismertetem a gondolkísérletet, mellyel Einstein 1905-ben levezette az $E_0 = Mc^2$ képletet [9]. Nyugodjék egy M tömegű, E_0 belső energiájú test a K inerciarendszerben felvett Descartes-koordináta-rendszer origójában. Bocsássunk a z és $-z$ irányokból két egyforma hullámcsomagot a testre, melyeket az teljesen abszorbeál. A Maxwell-egyenletek alapján az egy-egy hullámcsomag ϵ energiája és $\mathbf{P} = (0, 0, \pm P)$ impulzusának z komponense között fennáll az $\epsilon = cP$ összefüggés. Vizsgáljuk az elnyelési folyamatot az eredeti K és egy ahhoz képest $\mathbf{v} = (-v, 0, 0)$, $v \ll c$ sebességgel mozgó K' inerciarendszerből. A $v \ll c$ nemrelativisztikus határeset következtében a test impulzusát a $\mathbf{p} = M\mathbf{v}$ képlettel számíthatjuk.



16. ábra. A folyamat K -ban és K' -ben. K -ban a test nyugalomban van a folyamat során, mert az átadott összimpulzus zérus. K' -ben a test v sebességgel mozog, ezért a hullámcsomagok v/c szögben érkeznek rá, így az átadott impulzus $\Delta\mathbf{P} = (2\frac{v}{c}P, 0, 0)$. Hráskó Péter ábrája.

Mivel K -ban a hullámcsomagok által átadott impulzusok összege nullvektort ad, ezért K -ban a test a folyamat során nyugalomban marad. Az elnyelés következtében a test energiája $\Delta E_0 = 2\epsilon$ -nal nő.

K' -ben az energiaváltozás ugyanennyi. A 16. ábráról leolvasható, hogy ebben a rendszerben a hullámcsomagok által átadott összimpulzus $\Delta\mathbf{P} = (2\frac{v}{c}P, 0, 0)$. A test sebessége azonban a folyamat során végig $\mathbf{v}$, hiszen a test K -ban nyugalomban marad. Ezért a test impulzusa csak úgy növekedhet, ha tömege $\Delta M = 2\frac{P}{c}$ -vel nő. ΔE_0 és ΔM képletét egybeírva adódik, hogy a test tömegének és belső energiájának megváltozása között fennáll a $\Delta E_0 = \Delta M c^2$ összefüggés. Mivel a termodinamika törvényei szerint a belsőenergia-változással járó állapotváltozás füg-

getlen attól, milyen módon közöltünk energiát a testtel, az összefüggésnek minden belsőenergia-változásra érvényesnek kell lennie. Némi további elmélkedéssel belátható, hogy a tömeg és a belső energia megváltozására felírt összefüggésnek delták nélkül is igaznak kell lennie, tehát $E_0 = Mc^2$.

A gondolkísérletben $v \ll c$ határesetben dolgoztunk, ezért az eredményünk új feltételt szab a newtoni mechanika alkalmazhatóságára: nemcsak a $v \ll c$ -nek kell teljesülnie, hanem a belsőenergia-változásnak is elhanyagolhatónak kell lennie. Szintén fontos következménye a gondolatmenetnek, hogy érvényteleníti a tömegmegmaradás törvényét: mivel a belső energiára nem vonatkozik megmaradási tétel, így a tömegre sem.

A.2. A dolgozatban használt jelölések és tudnivalók a tömeggel kapcsolatban

Ahogy a dolgozat főszövegében, az A.1. gondolkísérlet során is M -mel jelöltem a test tömegét. A dolgozat elején használt m -től való megkülönböztetéssel azt hangsúlyozom, hogy a testek tömege a relativitáselmélet szerint a klasszikus fizikában megszokottól eltérő módon nem konstans. A dolgozat későbbi részeiben $M(\tau)$ a testek tömegét jelöli és a sajátidő függvénye, m pedig a test egy speciális

állapotban (jellemzően a végtelen távoli pontban vett) tömegét jelöli, mely definíciója szerint konstans.

Az A.1. gondolat kísérlet azért is rendkívül intuitív, mert a nemrelativisztikus határeset miatt a klasszikus fizika tömegfogalmát használja. Ezzel rámutat, hogy – a dolgozatban is használt – tömegfogalom (a p^k négyesimpulzus abszolútértéke) makroszkópikus testekre minden esetben azt a mennyiséget adja, amelyet a *mérleg mutat*; illetve arra, hogy ennek a tömegfogalomnak semmi köze a fizikai mennyiségek némely ismeretterjesztő könyvben szereplő, *mozgási tömeg* elnevezésű kombinációjához.

B. A Marx-paradoxon

A speciális relativisztikus kinematika meghatározó eredménye, hogy nem enged meg olyan mozgásokat, amely során a test sebessége átlépi a fénysebességet. Ennek ismeretében alapvető elvárás volna a relativisztikus dinamikával szemben, hogy automatikusan tartalmazzon ezt a korlátot: ne engedjen meg olyan mozgásokat, amely során a sebesség átlépi a fénysebességet. Mutatható azonban olyan négyeserő, melynek hatására a test átlépi a fénysebességet. Marx például megmutatta, hogy egy Φ skalármezőhöz a tömege $1/M$ reciprokával csatolt részecske mozgásegyenlete hármasmennyiségekkel felírva a következő:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{c^4}{E^2} \nabla \Psi.$$

Ez az egyenlet a klasszikus fizika Newton-törvénye konzervatív mezőben. Ezért a mozgásegyenlet megoldása megfelelő mező esetén biztosan lehet olyan, hogy a test sebessége átlépje a fénysebességet (például homogén mező esetén a gyorsulás konstans). A relativitáselmélet irodalmában [2, 3] megtalálható egy másik példa is ilyen esetre: ha a $K^k = eF^{klmpq} u_l u_m u_p u_q$ négyeserőt egy megfelelő szimmetriatulajdonságokkal rendelkező F^{klmpq} ötindexes tenzor hozza létre a négysebességből, megfelelő inerciarendszerben a test gyorsulása konstans. A formálisan relativisztikus, szintaktikusan helyes egyenletek köre tehát nem egyezik meg a relativitáselmélet kinematikája által megengedett egyenletek körével. Ezt a paradoxont nevezzük Marx-paradoxonnak.

E két példa bizonyítja, hogy ha a relativisztikus dinamika nem tartalmaz egy megfelelő beépített feltételt a négyeserő megengedett lehetsége alakjára, biztosan nem tartalmaz korlátot a sebesség maximumára. Ezért a 3. fejezetben felvázolt, tankönyvekben szereplő relativisztikus dinamika biztosan nem tartalmaz olyan korlátot, amely biztosítaná, hogy a testek sebessége ne léphesse át a fénysebességet.

Az 5.2. alfejezetben megállapítottam, hogy a kovariáns Lagrange-mechanikából nem vezethető le akármilyen négyeserő, mert a négyeserőnek ki kell elégítenie a (26) egyenletet. Ezért érdemes megvizsgálni, vajon a (26) feltétel (kiegészítve azzal a megkötéssel, hogy a hatásnak valósnak kell lennie) kizárja-e az olyan négyeserőket, melyek hatására a test sebessége átléphetné a fénysebességet. Ezzel kapcsolatban vannak részeredményeim, ám a kérdés nem tekinthető lezártnak.

VI. rész

SZEMÉLYES MEGJEGYZÉSEK

Ezúton szeretném megköszönni Cserti Józsefnek a témavezetői munkáját. Szeretném megköszönni Dávid Gyulának a közös kutatómunkát, a kutatásom során kapott sok-sok tudományos és technikai segítséget, valamint a történeti részek pontos leírását. Szintén szeretném megköszönni Hraskó Péter Tanár Úr kifogyhatatlan lelkesedését és kíváncsiságát a fizika legszebb területe: a relativitáselmélet iránt – melyből talán sikerült ellesnem egy keveset a személyes beszélgetéseken és a Tanár Úr munkáit tanulmányozva.

Peti. Ez a szöveg rólad is szól. Mióta meghaltál, te jutsz eszembe a gondolatok, mondatok szünetében, ott vagy a szavak és a betűk között, csendben figyelsz a lap szélén, a csücsökben: benne vagy a szövegben. „A raktár / előtt poros lámpa ég. / Csak látszik, nem világít, / ilyen az ész, ha áhit.” Kedves barátom, sohasem feledlek. Nagyon hiányzol.

Hivatkozások

- [1] Landau, L. D. – Lifsic, E. M.: *Elméleti fizika, II. Klasszikus térelmélet*, Tankönyvkiadó, Bp. (1976)
- [2] Jackson, J. D.: *Klasszikus elektrodinamika*, Typotex, Bp. (2010)
- [3] Hraskó P.: *Relativitáselmélet*, Typotex, Bp. (2016)
- [4] Hraskó P.: *A relativitáselmélet alapjai*, Typotex, Bp. (2009)
- [5] Vizgin, V. P.: *A modern gravitációelmélet kialakulása*, Gondolat, Bp. (1989)
- [6] Weyl, H.: *Raum, Zeit, Materie (Tér, idő, anyag)*, Springer, Berlin (1919)
- [7] Ivanenko, D. – Szokolov, A.: *Klasszikus térelmélet*, Akadémiai kiadó, Bp. (1955)
- [8] Barut, A. O.: *Electrodynamics and classical Theory of Fields and Particles*, Dover Publications, Inc., New York (1964)
- [9] Einstein, A.: *Elementary derivation of the equivalence of mass and energy*, Technion Journal **5**: 16–17 (1946)
- [10] Novobátzky, K., Ann. Phys. VI. **11**: 285 (1953)
- [11] Marx György: *Relativisztikus dinamika*, doktori értekezés, kézirat, MTA (1956)
- [12] Marx, Gy.: *Innere Arbeit in der relativistischen Dynamik*, Acta Physica Hungarica **6**: 353-364 (1956)
- [13] Szamosi G. - Marx Gy.: *Tömegpont általános mozgásformái a relativisztikus dinamikában*, Magyar Fizikai Folyóirat **5**: 431-448 (1957)
- [14] Szamosi G. - Marx Gy.: *Variációs elvek a relativisztikus dinamikában*, Magyar Fizikai Folyóirat **5**: 511-522 (1957)
- [15] Marx, Gy. – Szamosi, G.: *Relativistic Motion in a Scalar Field*, Bulletin Academiae Pol. Scientifcae Class III, Warszawa **3**: 475-479 (1954)
- [16] Szamosi, G. - Marx, Gy.: *Classical Motion of the Nucleons in Scalar Meson Field*, Acta Physica Hungarica **4**: 221-238 (1955)
- [17] Szamosi, G. - Marx, Gy.: *Klassische Bewegung der Nukleonen in skalarem Mesonenfeld*, Annalen der Physik, Berlin VI **15**: 182-185 (1955)
- [18] Marx Gy., Szamosi G.: *Nukleon mozgása skaláris mezontérben*, Magyar Fizikai Folyóirat **3**: 141-156 (1955)
- [19] Werle, J., Bulletin Academiae Pol. Scientifcae Class III, Warszawa **1**: 281 (1953)
- [20] Nordström, G., Phys ZS. **13**: 1126 (1912)
- [21] Marx, Gy.: *Relativistic Effects in Heavy Nuclei*, Nuclear Physics **1**: 660-669 (1956)
- [22] Marx, Gy. – Németh, J.: *Pressure in Relativistically Degenerated Fermion Gas with Scalar Interaction*, Acta Physica Hungarica **18**: 77-82 (1964)

- [23] Kuti, J. – Marx, Gy.: *Scalar field with ground state of decreased symmetry*, Nuovo Cimento **35**: 155-157 (1964)
- [24] Dávid, Gy.: *Relativistic hydro- and thermodynamics in nonlinear scalar field*, Acta Physica Hungarica **56**: 217 (1984)
- [25] Dávid, Gy.: *Lagrangian Point Mechanics in Special and General Relativity Theory and the Problem of Relativistic Mass*, invited lecture on Conference „Mathematics, Physics and Philosophy in the Interpretations of Relativity Theory”, Bp. (2009)
- [26] Dávid Gy.: *Relativisztikus dinamika és a nyugalmi tömeg változása*, ETTE előadóest, Bp. (2017)
- [27] Dávid Gy.: *Relativisztikus dinamika*, Fizikai Szemle (2022, megjelenőben)
- [28] Györgyi G. sr.: *A Kepler-problémáról*, Fizikai Szemle (Fizikai Szemle 1965/3, 74. oldal)
- [29] Györgyi G.: *Elméleti Mechanika „A”*, egyetemi jegyzet
- [30] Balázs, M.. – Ván, P.: *Lagrange-formalism of point-masses*, TDK-dolgozat (1998), megjelent: arXiv:math-ph/0205040 (2002)
- [31] Kósa A.: *Variációszámítás*, Tankönyvkiadó, Bp. (1973)
- [32] Veres G.: *Mit talált a Nagy Hadronütköztető a Higgs-bozon óta?*, Atomcsill-előadás, 2021.10.07., 13. dia