

Klíímaváltozás mechanikai rendszerekben: párhuzamos dinamikai időfejlődések vizsgálata pillanatkép szemlélettel

János Dániel[†]

*Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar
Fizikus MSc 2. évfolyam*

Témavezető: Tél Tamás[‡], emeritusz professzor, ELTE TTK Elméleti Fizikai Tanszék

Kivonat

Ebben a dolgozatban megmutatjuk, hogy a belső dinamikához képest nem elhanyagolható időskálával rendelkező paraméterváltozásnak kitett mechanikai rendszereket tekinthetjük úgy, hogy keresztülmennek a saját klímaváltozásukon. Mivel az ilyen rendszerek általában kaotikusak, adott pillanatban sok lehetséges állapotuk lehet, így az időfejlődésüket - a valódi klímához hasonlóan - különböző kezdőfeltételekből indított párhuzamos dinamikai időfejlődések sokaságának segítségével követhetjük. Ennek a szemléletnek a segítségével, a sokaságból számított átlagokkal leszünk képesek leírni a rendszer pillanatnyi állapotát. A módszert három típusú rendszeren mutatjuk be: (i) gerjesztett disszipatív és (ii) Hamiltoni, valamint (iii) gerjesztetlen disszipatív rendszereken. Megmutatjuk, hogy legmegfelelőbb leírás a kiindulási sokaság megfelelő megválasztásával érhető el; ez a választás csak a gerjesztett disszipatív rendszerek (i) esetén tetszőleges, a gerjesztett Hamiltoni (ii) esetben a stacionárius fázistér KAM tóruszait vagy kaotikus tartományait, míg a gerjesztetlen disszipatív (iii) esetben a súrlódásmentes fázistér KAM tóruszait érdemes választani. A választott sokaság időfejlődésének pillanatképeken való ábrázolása remekül illusztrálja a fázistérben végbemenő változásokat, úgy mint a káosz erősödését, gyengülését, vagy eltűnését. Kimutatjuk továbbá egy Smale lópatkó struktúra (kaotikus nyereghalmaz) jelenlétét mindhárom esetben, melynek az eltűnése a káosz megszűnésének geometriai jele. A káosz erősségének mérésére az időfüggő sokaságban megfelelő eszköznek bizonyul az ún. sokaságátlagolt páronkénti távolság, amely görbájének a meredeksége egy pillanatnyi Ljapunov-exponensnek tekinthető, zérus értéke pedig a káosz megszűnését jelzi. Illusztratív példaként tipikusnak tekinthető alacsony dimenziós bistabil rendszereket használunk, melyekben csökkenő gerjesztést alkalmazunk az (i, ii) esetekben, hogy fenntartsuk az analógiát a (iii) esettel, ahol a gerjesztés hiánya miatt a teljes energia folyamatosan csökken.



2022. Június 27.

[†]email: janosidaniel22@gmail.com

[‡]email: tel@general.elte.hu

1. Bevezetés

Napjaink egyik legrelevánsabb, mindenki által tapasztalt jelensége a klímaváltozás. A tudományos háttér szerint az üvegházhatású gázok és aeroszolok által keltett változások az atmoszféra összetételében az átlagos felszíni hőmérséklet évtizedek óta tartó emelkedéshez vezettek, ahogyan az neves forrásokban, mint pl. az IPCC jelentésében is olvasható [70]. Az ún. sarkkörti erősítési mechanizmus [14] nagyobb hőmérsékletemelkedéshez vezet a sarkkörti régióban mint máshol, mivel az óceáni jég olvadása az albedó csökkenéséhez vezet. Mindezek miatt egy monoton csökkenés figyelhető meg az egyenlítő és a sarkok közötti hőmérsékletkülönbségben.

Az atmoszféra és az óceánok dinamikája turbulens, ezért a klíma káosz-szerű tulajdonságokkal rendelkezik és kiszámíthatatlan [16,20,39], a "kaotikus attraktora" azonban magas dimenziójú, ezért lehetetlen ábrázolni, és kiterjedését a kiszámíthatatlanság mértékeként kezelni. Kvalitatív szemlélettel annyit mondhatunk, hogy számos lehetséges állapot létezik, és stacionárius esetben a klíma párhuzamos állapotairól beszélhetünk. Ez a kép segít megérteni a *belső változatosság* fogalmát, ami a klímatudományban a káosz szinonímjaként használatos [70]: a dinamika kaotikus természete miatt adott pillanatban sok megengedett állapot létezik, akkor is, ha egyszerre csak egyet tudunk megfigyelni. Éves periodicitású, stacionárius klímában ezek az állapotok mindig ugyanazok az év egy adott napján.

A klímaváltozás azonban aperiodikus gerjesztés következménye, ilyen például a sarkok és az egyenlítő közötti hőmérsékletkülönbség, vagy a CO₂ koncentráció, amelyek évente nem elhanyagolható mértékben változnak. A kutatók körében az utóbbi időben terjedő nézet, hogy az éghajlatot megengedett klímátörténetek halmazával, párhuzamos klímarealizációkkal érdemes jellemezni, melyet *párhuzamos klímák elméletének* neveznek [33,73]. Az időfüggő belső változatosság megfelelő leírása eszerint akkor lehetséges, ha a megengedett forgatókönyvek teljes tárházát figyeljük, ami számos időfejlődés egyidejű megfigyelését jelenti egyazon fizikai rendszerben. Más szóval, olyan pályák *sokaságát* kell figyelembe venni, amelyek csak a kezdőfeltételeikben különböznek egymástól. Megjegyzendő, hogy ez a sokaság rövid idő után függetlenné válik ezektől a kezdőfeltételektől. A rendszer pillanatnyi állapota a sokaságról egy adott időpillanatban készített pillanatfelvétellel jellemezhető, így a *pillanatkép szemlélet* (*snapshot view*) kifejezés szintén használatos.

Ez a fogalom a dinamikai rendszerek elméletében született meg a nemautonóm dinamika megértésében elért fejlődés részeként. Az első ilyen irányú cikk [68] egy érdekes tulajdonságra hívta fel a figyelmet: egyetlen pálya a leképezésen elmosódott megjelenéshez vezet, míg az azonos folyamatnak kitett pályák sokasága strukturált mintázatot ad. Ennek a sokasághoz kapcsolódó mintázatnak, a snapshot kaotikus attraktornak állandóan változik az alakja, ellentétben a hagyományos kaotikus attraktorokkal, amelyek időfüggetlenek, ha periodikus gerjesztés esetén stroboszkopikus leképezésen figyeljük [61]. A snapshot attraktorok fogalmát számos időfüggő fizikai jelenség megértésére használták (lásd pl. [26,41,51–53,60,69,75,78]). Időközben a matematikai szakirodalomban felmerült egy kapcsolódó fogalom, az ún. pullback attraktor, amely az idő-tengely mentén elhelyezkedő összes snapshot attraktor uniójára utal [13,49]. Ezeknek az elképzeléseknek a terjedését felgyorsította az, hogy a klímadinamikában való jelentőségüket a pullback attraktorok nyelvén újra felfedezték, több mint 10 évvel ezelőtt [8,22,24,25]. Később az is világossá vált [18,42,64,65] hogy az éghajlatváltozással összefüggésben nem a zajszerű gerjesztés, hanem a paraméterek *folytonos* eltolódása a releváns, ezért a determinisztikus snapshot attraktorok időbeli alakulása ragadja meg a klímaváltozás lényegét.

E tanulmányok fontos következménye, hogy a kaotikus attraktorok hagyományos "egyetlen trajektória" szemlélete nem egyenértékű a "sokaság" szemlélettel [19], és a két megközelítés közül a sokaság alapú pillanatkép szemlélet az, amely alkalmas a változó éghajlat hű statisztikai leírására. Ennek oka, hogy a sokaság *természetes valószínűségi eloszlást* is képvisel a snapshot attraktoron, és az átlagokat ezen az eloszláson érde-

mes venni minden pillanatban.

A pillanatkép szemlélet alapvető jellemzői a következőkben foglalhatók össze:

- nemautonóm rendszerekben a végtelen idejű határérték értelmetlen, mivel a modellek egy idő után elhagyják az érvényességi tartományukat, csak véges idejű megfigyelések lehetségesek, ahogy ezt az általános időfüggőségű áramlások kapcsán korábban már hangsúlyozták (lásd pl. [28]),
- az egyetlen trajektórián alapuló következtetések nem megbízhatóak, mivel az ilyen pályák hosszú távon kiszámíthatatlanok, és így nem reprezentatívak,
- a sokaság tulajdonságai ezzel szemben teljesen kiszámíthatóak (összhangban a kaotikus rendszerek általános tulajdonságaival [72]), beleértve a valószínűségi eloszlásokat is,
- a rendszer pillanatnyi jellemzése lehetővé válik, az időbeli átlagok használata teljes mértékben elkerülhető,
- egyszerű mód kínálkozik egy időben változó rendszer belső változatosságának elemzésére, például a sokaság pillanatnyi valószínűségi eloszlásának statisztikai mennyiségei segítségével.

Ezt a megközelítést mára széles körben alkalmazzák a klímatudományban, és a kiterjedt sokaságok általánosan használt eszközzé váltak az éghajlatváltozás különböző jellemzőinek számszerűsítésére [2, 15, 29, 47, 56, 66], olyanokra mint például a térbeli mintázatok és korrelációk, úgynevezett éghajlati távkapcsolatok [5, 23, 30, 30–33, 77]. A klíma változás konkrét példájában a pillanatkép szemlélet egyenértékűen megfogalmazható a párhuzamos klímák elméleteként [33, 73]. Kvalitatív szempontból a Föld-rendszer számos másolatát képezhetjük el, amelyek különböző trajektóriákon mozognak, miközben ugyanazoknak a fizikai törvényeknek és gerjesztéseknek vannak kitéve.

Jelen dolgozat célja annak hangsúlyozása, hogy a klímatudományban felhalmozott ismeretek átvihetők a klasszikus mechanikába, azon belül a dinamikai rendszerek elméletébe, mivel a nemautonóm rendszerek számos jellemzője továbbra is feltárára vár. A megközelítésnek további jelentőséget ad az a tény, hogy a mechanikai rendszerek gyakran paradigmatiszta jellegűek, és így nagyszerű modelleket szolgáltatnak a bonyolultabb rendszerekhez. Napjaink éghajlata tulajdonképpen nem más, mint egy olyan rendszer, amely első közelítésben egy időfüggő, aperiodikus külső gerjesztésnek van kitéve. Az időskála, amelyen a gerjesztés amplitúdója monoton változik, nem sokkal kisebb, mint a rendszer alapvető belső időskála a paraméterdrift nélküli esetben. Egy valós éghajlat esetében ez az alapvető belső időskála lehet pl. egy év. Ennek alapján azt mondhatjuk, hogy egy mechanikai rendszer *klíma változáson megy át, ha olyan monoton (vagy szakaszosan monoton) paraméterváltozásnak van kitéve, amelynek időskála a belső dinamikához hasonló*. Ha a rendszernek több időskála van, mint ahogy a valós klímának is, akkor a paraméterdrift időskála távol kell lennie a szélsőséges esetektől, vagyis az adiabatikusan lassú változástól vagy a hirtelen ugrástól. A monotonitást azért írjuk elő, hogy hangsúlyozzuk a napjainkban tapasztalható klíma változással való hasonlóságot, míg általánosabb kontextusban ez a megkötés akár el is hagyható. Egy nemrég megjelent cikk [62] szerzői hasonló értelemben beszélnek egy rendszer klímájának alakulásáról, megengedve azonban a nem monoton paraméterváltozást (bár átlagosan adott trend mellett), mint ahogyan a paraméter hirtelen ugrását is.

A mechanikai rendszerek között az időben változó amplitúdóval gerjesztett nemlineáris oszcillátorok mutatják a legközvetlenebb analógiát a klíma változással. Az éghajlat szezonális megváltozása megfelel a gerjesztés periodikus komponensének, míg az időben változó amplitúdó a légköri széndioxid-koncentráció változásával, vagy a sarkok és az egyenlítő közötti hőmérséklet-kontraszt változásával analóg. Az ilyen rendszerek esetében átvihetjük a klímatudományból megtanult fontos összefüggéseket. Az általános rendszer dinamikája kaotikus

jellegű, de külső időfüggéssel is rendelkezik, és mivel a standard káoszelmélet eszközei, mint pl. a periodikus pályák elmélete [12], csak stacionárius rendszerekre vannak definiálva, ezek nem használhatók paraméterdrift jelenlétében. Az ilyen rendszerek azonban számos megengedett állapottal, azaz belső változatossággal rendelkeznek, amelyek időfüggése leírható egy *sokaság* követésével, azaz a *pillanatkép szemlélet* elfogadásával. A statisztikai mennyiségek, mint például átlagok vagy momentumok, a sokaság által meghatározott természetes eloszlás alapján definiálhatók, és ezek valóban időfüggek. Ha egy megfogható képet szeretnénk képzelni a pillanatkép szemlélet mögé, akkor beszélhetünk a rendszerek *párhuzamos dinamikai időfejlődésének elméletéről*, a párhuzamos klímák elméletének analógiájára. A közelmúltban ebben az irányban tett erőfeszítés a pillanatkép szemlélet alkalmazása a változó környezeti feltételek mellett kialakuló járványok [50], aperiodikusan gerjesztett Hamiltoni rendszerek [37, 38], átbillenési jelenségek [7, 46], és változó intenzitású nyílt áramlások advekciónak [76] vizsgálatában.

A párhuzamos dinamikai időfejlődések elmélete a dinamikai rendszerek számos ágában alkalmazható. Mi ezt a következő három típussal illusztráljuk:

- (i) Paraméterdriftnak kitett gerjesztett disszipatív rendszerek (2. szakasz). Mivel a Föld-rendszer dinamikája disszipatív, a klímatudománnyal való analógia ebben a típusban a legerősebb (bár a térbeli jellemzők nem jelennek meg). Itt egy, kezdetben a fázistér nagy területére kiterjedt sokaság fejlődését követjük időben. Ez jellemzően exponenciálisan konvergál a snapshot attraktorhoz, amely időben fejlődik. Miután a snapshot attraktorhoz való konvergencia megtörtént, meghatározhatók statisztikai átlagok, mint például Ljapunov-exponens jellegű mennyiségek. A dinamika egészen közel megszűnő gerjesztésekig követhető, és így a káosz kihalásának kérdése [44] is vizsgálható.

- (ii) Nemadiabatikus paraméterváltozásnak kitett gerjesztett Hamiltoni rendszerek (3. szakasz). Az ilyen rendszerekben nem léteznek attraktorok (a rendszer nem felejt el a kezdőfeltételeit), azonban a klímatudományból levont tanulságokat itt is érdemes átvenni, azaz itt is trajektóriasokaságok követésére van szükségünk. Egy kiterjesztett sokaság megfigyelése a dinamika strukturálatlan képéhez vezetne. Az egyértelmű jellemzéshez olyan speciális *alsokaságok* bizonyulnak hasznosnak, amelyek a stacionárius fázistér KAM-tóruszainak felelnek meg. Az idő előrehaladtával ezek a sokaságok minden pillanatban más-más alakot vesznek fel, ezért ezeket *snapshot (pillanatkép) tóruszoknak* nevezzük. A tóruszokon kívül időfüggő kaotikus tartományok is léteznek, amelyeket *snapshot kaotikus tartományoknak* nevezünk [37, 38] és amelyek szintén használhatóak alsokaságként.

- (iii) Gerjesztetlen disszipatív rendszerek (4. szakasz). Ebben az esetben nincs külső gerjesztés, ezért végül minden mozgás megáll, helyette a teljes energia az, ami monoton csökken az időben, és így egyfajta gerjesztés szerepét tölti be. Minden mozgás, és így a káosz is, elkerülhetetlenül tranziens, mivel azonban a tranziensek összetettsége maga is változik időben, a jelenségre a *duplán tranziens káosz* kifejezést alkották meg [10, 57]. Megmutatjuk, hogy akkor tárható fel effektíven a mozgás váza, ha a súrlódásmentes rendszer KAM-tóruszait használjuk kezdeti alsokaságként, amelyeket aztán azonnal alávétünk a disszipatív dinamikának.

Azért, hogy a leírást könnyen követhetővé tegyük, a példáinkat a kétfenekű potenciálok családjából vesszük. Hogy megőrizzük a hasonlóságot az energia monoton csökkenésével a harmadik példában, a másik két esetet csökkenő amplitúdójú gerjesztéssel fogjuk vizsgálni. A modellek egyszerűsége biztosítja néhány analitikus számítás lehetőségét is. Az első két esetben kihasználjuk azt a tényt, hogy olyan mozgó pontok azonosíthatók, legalábbis perturbatív megközelítésben, amelyek megtartják a stabilitási jellegüket (hiperbolikus, nódus vagy elliptikus) hosszú időn keresztül. Megmutatjuk, hogy fontos szerepet kapnak az ilyen típusú *snapshot hiperbolikus pontok* időben változó stabil és instabil sokaságai. Az instabil sokaság minden pillanatban a snapshot attraktor közelítésének tekinthető, míg a stabilról kiderül, hogy az időfüggő vonzási

tartományok közötti határvonal része. Hamiltoni esetekben mindkét sokaság a snapshot kaotikus tartomány alkotóeleme. Továbbá az első két esetben megmutatjuk Smale-lópatkó típusú struktúrák, *snapshot kaotikus lópatkó struktúrák* [44, 45, 54] jelenlétét, amelyeket snapshot hiperbolikus pontok stabil és instabil sokaságai rajzolnak ki, és bizonyítékot találunk a létezésükre a duplán tranziens káoszban is. Ennek az objektumnak a létezése, amelyet *snapshot kaotikus nyereghalmaznak* is nevezhetünk, közös jellemzője mindhárom (i)-(iii) vizsgált esetnek, időbeli változása pedig a káosz erősségének változását jelenti, és a káosz kihalásának geometriai jele minden esetben a lópatkó struktúra, vagyis a két sokaság nagyszámú metszéspontjainak eltűnése. Kvantitatívabban szinten megmutatjuk, hogy a trajektóriák páronkénti távolságának a párhuzamos dinamikai időfejlődéseken vett átlaga, az ún. *sokaságátlagolt páronkénti távolság* (ensemble-averaged pairwise distance, EAPD), egy olyan mennyiség, amely minden esetben hűen reprezentálja a káosz erősségét a belőle számolható pillanatnyi Ljapunov-exponens értékeken keresztül. Ez a módszer lehetővé teszi, hogy beazonosítsuk azt a pillanatot amikor a káosz eltűnik, úgy mint az az időpont, amikor ez a Ljapunov-exponens zérussá válik.

2. Gerjesztett disszipatív rendszerek: snapshot attraktorok

2.1. A modell

Vizsgáljunk egy paradigmatis alacsony dimenziós példát, a periodikusan gerjesztett Duffing-oszcillátort (lásd pl. [1, 40]):

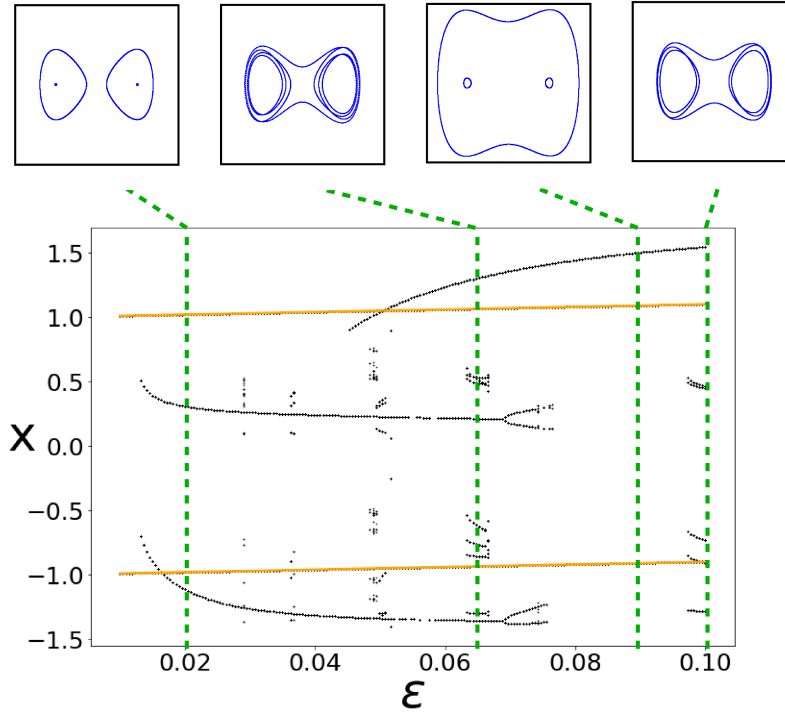
$$\ddot{x} = x - x^3 - 2\beta\dot{x} + \varepsilon \cos \omega t. \quad (1)$$

A gerjesztetlen $\varepsilon = 0$ eset megfelel az $x = \pm 1$ minimumú kétfenekű potenciálon történő mozgás standard problémájának. Az időegységet a lineáris tag, a hosszegységet a köbös tag határozza meg, az ω és β értékek pedig a dimenziótlan frekvenciát és csillapítási együtthatót jelölik. Stroboszkopikus leképezést hajtunk végre, vagyis csak a $t = Tn$ pillanatokat tekintjük, ahol $T = 2\pi/\omega$ a gerjesztési periódus, n pozitív egész szám. Az $\varepsilon \cos \omega t$ periodikus tag a klíma kontextusában az éves gerjesztésnek felel meg, állandó ε esetén a rendszer klímája stacionárius.

Az általában választott paraméterek (pl. $\beta = 0.125, \varepsilon = 0.3, \omega = 1$) esetén a rendszer egy tipikus kiterjedt kaotikus attraktorral rendelkezik, és az attraktor(ok) helyének paraméterfüggését egy komplex bifurkációs diagram tükrözi [1]. Itt $\omega = 1$ -et megtartjuk, de kis, $\beta = 0.01$ csillapítási állandót választunk annak érdekében, hogy kis, $\varepsilon < 0.1$ gerjesztési amplitúdók esetén is érdekes dinamikát találjunk. Ez lehetővé teszi számunkra a numerika¹ összehasonlítását az analitikus kifejezésekkel amelyeket a gyenge gerjesztés határértékben kapunk néhány egyszerű pályára, melyek paraméterváltozás esetén is érvényesek maradnak (lásd a 2.2 szakaszt). Az ebben a tartományban kapott bifurkációs diagramot az 1. ábra mutatja.

Domináns kaotikus attraktorok hiányában a diagram érdektelennek tűnhet, tévedés lenne azonban arra következtetni, hogy az amplitúdó időfüggése esetén sem figyelhető meg káosz ebben a tartományban. Ennek oka az, hogy a szokásos bifurkációs diagramok csak az *állandó* káosz létezését tükrözik, más képet kapunk azonban, ha a káosz *tranziens* formáját [54] is megengedjük. Ahogy [44]-ben rámutattak, a rendszert fix gerjesztési amplitúdók mellett jellemező tranziens káosz a dinamikát irányító kaotikus snapshot attraktorhoz vezethet a paraméterek változása esetén. Ezért készítettünk egy másik bifurkációs diagramot, amely lehetővé teszi, hogy hosszú életű, és így talán kaotikus tranzienseket is lássunk. A 2. ábrán látható eredmény az 1. ábrán mutatott hosszú távon megmaradó attraktoroktól is távol eső, elszórtan elhelyezkedő pontok felhőjét mutatja. Ez alátámasztja, hogy a gerjesztési amplitúdó szinte teljes vizsgált intervallumában vannak hosszú

¹A dolgozatban látható összes szimulációban az algoritmusok standard dupla pontossággal működnek.



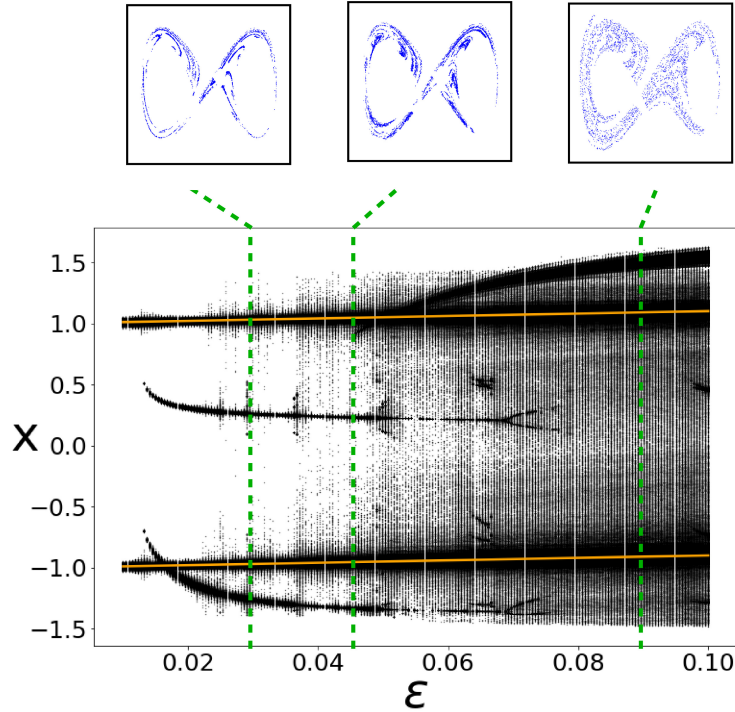
1. ábra. A gerjesztett Duffing-rendszer (1) bifurkációs diagramja fix ε gerjesztési amplitúdó mellett. Az attraktorok x koordinátáit a stroboszkopikus leképezésen ábrázoljuk (az első 450 iterációt elhagyva). A felső és alsó egyenes ágak két egyperiódusú attraktor létezését jelzik, melyek helyzete a potenciálmínimumokhoz tart az amplitúdó eltűnése esetén. Ezek átfedésben vannak a narancssárga vonalakkal, amelyek a (7) egyenletnek felelnek meg $\alpha = 0$ esetén. Létezik még két további egyperiódusú attraktor (hajlított görbék) melyek nagy oszcillációt képviselnek a potenciálvölgyekben, és egy nyereg-csomóponti bifurkációban születnek $\varepsilon \approx 0.01$ -nél. Egy harmadik kb. $\varepsilon = 0.05$ -nél jelenik meg, és egy egyperiódusú oszcillációt ír le mindkét potenciálvölgy körül. Ezek a pályák és viszonylag hosszú ε intervallumokban létező 5 és 7 periódusú attraktorok fázistérbeli képei (folytonos időben) a kis képeken láthatók.

életű tranziensek. Hogy lássuk, hogy ezek kaotikusak-e, különböző rögzített gerjesztési amplitúdóknál az ún. szétszórási módszerrel [54] meghatároztuk a mögöttes kaotikus nyereghalmazt. Három példa látható a kis képeken, amik azt mutatják, hogy a nyereghalmaz kiterjedése csökken ε csökkenésével. Vizsgálataink arra utalnak, hogy a tranziensek $\varepsilon \gtrsim 0.025$ esetén kaotikusak.

Bevezetjük a paraméterváltozást oly módon, hogy az ε amplitúdót időfüggővé tesszük: $\varepsilon \rightarrow \varepsilon(t)$. Ha $\varepsilon(t)$ változásának időskálája összehasonlítható az eredeti (1) rendszerével, vagyis $1/\omega$ -val vagy $1/\beta$ -val, továbbá monoton (vagy legalábbis szakaszosan monoton), akkor azt mondjuk, hogy a rendszer a saját klímaváltozásán megy keresztül. Más szóval: mind az éghajlati, mind a mechanikai rendszerek időfejlődése érzékeny a periodikus (szezónális) változásokra és a külső gerjesztés amplitúdójának megváltozására.

Vegyünk egy lineárisan időfüggő tagot, amely egy csökkenő rámpát képvisel, és egy zérus amplitúdójú platóban végződik. Ezt a következő differenciálegyenlet írja le:

$$\ddot{x} = x - x^3 - 2\beta\dot{x} + \varepsilon(t) \cos \omega t, \quad (2)$$



2. ábra. Hosszú életű tranzienseket is tartalmazó bifurkációs diagram. Hasonló mint az 1. ábra, de itt csak az első 50 iterációt hagyjuk el. 900, $-1 \leq x \leq 1$ között egyenletesen elosztott kezdőfeltételt követtünk mindegyik rögzített gerjesztési amplitúdó esetén. Vegyük észre, hogy mennyivel üresebb ehhez képest az 1. ábra. A kis képeken néhány, a 0,03, 0,045 és 0,09 ε értékekhez tartozó kaotikus nyergthalmaz látható.

ahol

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \varepsilon_0 - \alpha t & \text{ha } t \leq \varepsilon_0/\alpha, \\ 0 & \text{ha } t \geq \varepsilon_0/\alpha, \end{cases} \quad (3)$$

és α a paraméterváltozási ráta.

Definiáljuk továbbá a *forгатókönyvet* úgy, mint a gerjesztési amplitúdó $t = 0$ időpontban kezdődő időfejlődését amelyet az ε_0 és α paraméterek határoznak meg, valamint a periódusok azon n száma, ameddig a (2) dinamikát követjük. Azért, hogy a rámpa végpontja egy stroboszkopikus szakaszra érkezzen, a rátát úgy állítjuk be, hogy a rámpa a periódus n_0 egész számú többszörösénél érjen véget, vagyis kikötjük, hogy legyen $\alpha = \varepsilon_0/(n_0 T)$. A rámpa vége után a platón töltött periódusok számát $n' = n - n_0$ jelöli, ha $n > n_0$.

2.2. Snapshot hiperbolikus pontok és snapshot nóduspontok

Az instabil periodikus pályák a hagyományos káosz vázának tekinthetők, a káosz azon formájának, amely állandó vagy periodikus gerjesztésnek kitett disszipatív rendszerekben jelenik meg (lásd pl. [12, 61]). Az ilyen rendszerekben végtelen számú hiperbolikus ciklus létezik, és a mozgás a periodikus pályák közötti véletlen bolyongásnak képzelhető el. Statisztikai tulajdonságok, úgy mint az átlagos Ljapunov-exponens, a ciklusok lokális sajátértékeinek átlagával fejezhető ki.

Aperiodikus gerjesztésű rendszerekben *periodikus pályák nem léteznek*. Ugyanakkor egy snapshot attraktor tekinthető úgy, mint végtelen számú olyan *speciális* aperiodikus pálya uniója, amelyek a periodikus pályák analógiái abban az értelemben, hogy hosszú ideig megőrzik (in)stabilitásukat, más szóval olyan környezetben

vannak, amely szintén hosszú ideig (in)stabil marad. A legegyszerűbb és leggyakoribb esetben az ilyen stabil és instabil pályák a paraméterfüggetlen eset *periodikus* pályáiból öröklődnek. Az ilyen, hiperbolikus jelleggel rendelkező pontokat *snapshot hiperbolikus pontoknak* (SHP) nevezzük, [37] definíciója alapján. Megjegyezzük, hogy analóg objektumokat korábban vizsgáltak már az irodalomban (lásd pl. [21, 35, 55, 79]), melyeknek a megkülönböztetett hiperbolikus pályák, hiperbolikus központok vagy mozgó hiperbolikus pontok neveket adták. Mi azért ragaszkodunk a snapshot kifejezéshez, hogy hangsúlyozzuk, hogy snapshot-objektumok teljes halmaza létezik minden klímaváltozást szenvedő rendszerben. Ennek megfelelően látni fogjuk, hogy *snapshot nóduspontok* (SNP), azaz időfüggő attraktorpontok is léteznek, melyek a Hamiltoni határesetben *snapshot elliptikus pontokba* (SEP) mennek át.

Modellünk egyszerűsége lehetővé teszi az ilyen snapshot pontok explicit meghatározását akkor, ha a dimenziótlan $\varepsilon(t)$ a forgatókönyv során kicsi, ami esetünkben érvényes feltételezés. Egy SHP a gerjesztetlen eset $x, v = (0, 0)$ (ahol $v = \dot{x}$) instabil fixpontjából öröklődik. Viselkedése a (2) egyenletből a köbös tag elhanyagolásával kapott lineáris egyenlet vizsgálatával érthető meg. Ez egy standard módszerekkel megoldható inhomogén lineáris differenciálegyenlet (a részleteket lásd a Függelékben). Ennek az SHP-nak a fázistérbeli koordinátáira a következő kifejezést kapjuk:

$$\begin{aligned} x_H^*(t) &= A_H(\varepsilon_0 - \alpha t) \cos(\omega t + \phi_H) + B_H \cos(\omega t + \theta_H), \\ v_H^*(t) &= \dot{x}_H^*(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Az A_H, B_H, ϕ_H és θ_H paraméterek kifejezései megtalálhatók a Függelékben. Ez a snapshot hiperbolikus pont a fázistér origója körüli *spirális* görbe mentén mozog. A stroboszkopikus leképezésen a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} x_{H,n}^* &= A_H(\varepsilon_0 - \alpha nT) \cos \phi_H + B_H \cos \theta_H, \\ v_{H,n}^* &= -A_H(\varepsilon_0 - \alpha nT) \omega \sin \phi_H - A_H \alpha \cos \phi_H - B_H \omega \sin \theta_H, \end{aligned} \quad (5)$$

egy olyan pontot, ami egyenletesen mozog egy egyenes mentén a leképezés síkjában.

Analóg módon kapható meg egy snapshot attraktorpont-pár, avagy két snapshot nóduspont (SNP) analitikus kifejezése a (2) mozgásegyenlet $x = \pm 1, v = 0$, a gerjesztetlen rendszer stabil helyei körüli sorbafejtésével (a részleteket lásd a Függelékben). Az SNP-k x, v koordinátáira kapjuk:

$$\begin{aligned} x_N^*(t) &= \pm 1 + A_N(\varepsilon_0 - \alpha t) \cos(\omega t + \phi_N) + B_N \cos(\omega t + \theta_N), \\ v_N^*(t) &= \dot{x}_N^*(t), \end{aligned} \quad (6)$$

a stroboszkopikus leképezésen pedig

$$\begin{aligned} x_{N,n}^* &= \pm 1 + A_N(\varepsilon_0 - \alpha nT) \cos \phi_N + B_N \cos \theta_N, \\ v_{N,n}^* &= -A_N(\varepsilon_0 - \alpha nT) \omega \sin \phi_N - A_N \alpha \cos \phi_N - B_N \omega \sin \theta_N. \end{aligned} \quad (7)$$

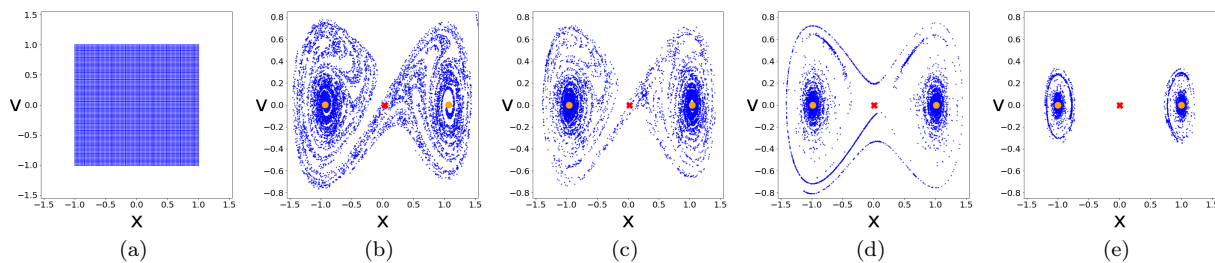
Az A_N, B_N, ϕ_N és θ_N paramétereket szintén megadjuk a Függelékben. Folytonos időben ezek a pontok $x = \pm 1$ körüli spirálon, míg a leképezésen egy egyenes mentén mozognak. Az alkalmazott közelítés pontosságát jól szemlélteti, hogy a nóduspontok koordinátái a rámpa nélküli esetben (a (7) egyenlet $\alpha = 0$ -ra kiértékelve) egybeesnek a numerikusan meghatározott stacionárius attraktorpontok pozícióival a teljes vizsgált ε tartományban, ahogyan az 1. ábra mutatja.

2.3. Snapshot attraktorok

Egy snapshot attraktor numerikusan nagyszámú pályának a fázistér egy kiterjesztett részén, jellemzően egyenletes eloszlásban való elindításával, majd ezen pályák sokaságának egy adott pillanatig való követésével, végül a helyzetüknek ezen a pillanatképen való ábrázolásával kapható meg. A disszipáció miatt a sokaság exponenciális módon elfelejti kezdeti alakját és eloszlását, ezért egy konvergencia idő után az eredmény a globális dinamikát irányító snapshot attraktornak tekinthető. Ezt azt is jelenti, hogy bármilyen forgatókönyvet veszünk, a kiterjedt sokaság mindig ehhez a snapshot attraktorhoz fog tartani. Ahogy telik az idő, ez az attraktor folyamatosan változtathatja alakját és a rajta lévő eloszlást.

A (3) forgatókönyv szerinti gerjeztési amplitúdó változásának kitett disszipatív Duffing-oszcillátor dinamikájának követéséhez $N = 10^4$ pontot indítunk a 3a ábrán látható tartományban, majd megmutatjuk a sokaság alakját néhány pillanatban a 3. ábra további panelein. Egy ettől független vizsgálatunk azt mutatja, hogy a konvergencia idő körülbelül 5 periódus, így a (b)-(e) panelekben látható objektumok valóban snapshot attraktorok. A párhuzamos dinamikai időfejlődés nyelvén ezek pillanatnyi állapotok unióját jelentik az összes megengedett forgatókönyv mentén.

A (b) és (c) panelek alakzatai fraktálszerűek, és a szokásos kaotikus attraktorokhoz hasonlóan fonalasak. Az alakzatok széles kiterjedése azt jelzi, hogy nagyszámú megengedett állapot létezik ezekben az esetekben, ami szintén a káosz jeleként értelmezhető. A klímatudománnyal analóg módon azt is mondhatjuk, hogy a sok lehetséges állapot jelenléte a mechanikai folyamat belső változatosságát jelzi. Bár a (d) panelen még látszanak szálak, a pontok többsége már két foltban halmozódik fel $(x, v) = (\pm 1, 0)$ körül. Itt a fixpontok körüli egyszerű mozgás kezd dominálni. Ez a folyamat az utolsó panelen fejeződik be, ahol a forgatókönyv már rátért a nulla gerjesztés platójára, azt jelezve, hogy a snapshot attraktor két fixpontattraktorra vált szét. A kék pontok szórása a két középpont körül korlátozott, a belső változatosság csökken, ahogy a káosz elkezd kihalni.



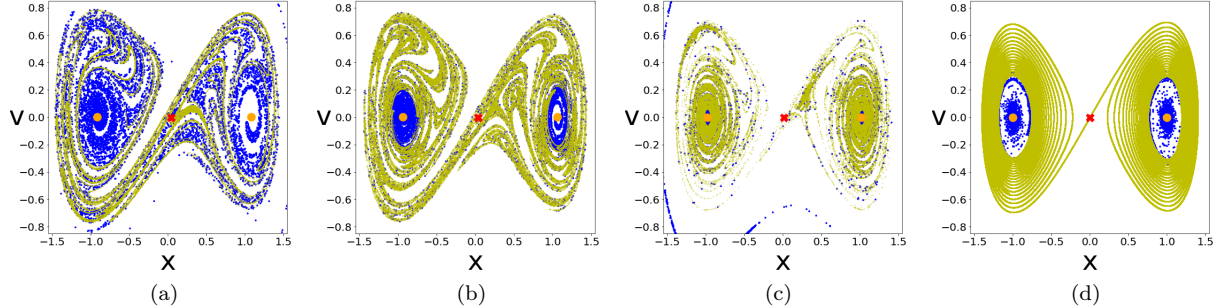
3. ábra. A disszipatív Duffing-rendszer snapshot attraktora. A 10^4 pontból álló, kezdetben az x -ben és v -ben is $[-1; 1]$ tartományban lévő négyzetet alkotó kiterjesztett sokaságot (a) kitesszük az $\varepsilon_0 = 0.1$, $\alpha \approx 0.0003$ ($n_0 = 50$), $\beta = 0.01$ forgatókönyvnek. Itt és az összes bemutatott numerikus példában a frekvencia $\omega = 1$. (b)-(e) A snapshot attraktor, vagyis a sokaság (kék pontok) alakulása az $n = 15, 30, 45, 60$ pillanatokban. A teljesség kedvéért a 2.2. szakaszban meghatározott snapshot pontokat rárajzoltuk a megfelelő estek snapshot attraktoraira. Az (5) egyenletből kapott SHP és a (6) egyenletből kapott SNP-k piros, illetve narancssárga színnel jelennek meg. Az utolsó képen $n = 60$, vagyis a snapshot attraktor a nulla gerjesztés platóján töltött $n' = 10$ lépés után látható.

Az adott pillanatok snapshot pontjai szintén megjelennek a 3. ábrán. Figyelemre méltó, hogy a pirossal jelölt $x_{H,n}^*$ snapshot hiperbolikus pont mindig a snapshot attraktorra esik. Megnyugtató látni, hogy még ha más snapshot hiperbolikus pontok nem is ismertek, legalább az, amelynek analitikus alakját sikerült megtalálnunk, valóban az attraktor része. A narancssárga színnel ábrázolt $x_{N,n}^*$ snapshot nóduspontok kezdetben

nem részei a snapshot attraktornak, de az idő előrehaladtával a snapshot attraktor konvergálni látszik ezekhez az egyszerű attraktorpontokhoz ((d), (e) panelek). A zérus gerjesztés platóján x_N^* a kétfenekű potenciál minimumának felel meg $x = \pm 1$ -nél.

2.4. Snapshot attraktorok és a snapshot hiperbolikus pontok instabil sokaságai

A szokásos kaotikus attraktorokról ismert, hogy megszerkeszthető az összes hiperbolikus ciklus instabil sokaságából. Ezek mindegyike sűrűn fekszik az attraktoron, így még egyetlen fixpont instabil sokasága is jó, az attraktortól szabad szemmel alig megkülönböztethető közelítést ad [72]. Annak kiderítésére, hogy snapshot attraktorokra is létezik-e analóg tulajdonság, előállítjuk az $x_{H,5}^*$ SHP instabil sokaságát. Ezt a (2), (3) dinamika szerint tesszük egy rövid ($dl = 0.2$ hosszúságú) szakaszt követve, amely az SHP körül, az átló mentén (ami a perturbálatlan esetben az instabil sokaság iránya) helyezkedik el $n = 5$ -nél. Ez a szakasz megnyúlik és meghajlik, és $n - 5$ periódus után az n pillanat instabil sokaságának közelítését adja. Ekkorra a snapshot hiperbolikus pont már $x_{H,n}^*$ -be került, de még mindig a snapshot attraktor része. A 4. ábrán ezzel a sárga színnel ábrázolt sokasággal fedtük le a snapshot attraktort (kék pontok) az $n = 10, 20$ és 40 időpontokban. Az egyezés meglehetősen meggyőző, és arra következtethetünk, hogy a snapshot attraktor egy adott pillanatban közelíthető az adott pillanat instabil sokaságával. Ezt az instabil sokaságot az $x_{H,n}^*$ SHP *snapshot instabil sokaságának* nevezhetjük; bár ez az instabil sokaság $x_{H,5}^*$ -ből indult, együtt fejlődik az $x_{H,n}^*$ mozgó SHP-vel. Az utolsó panelen sárga színnel mutatja a gerjesztetlen rendszer origójának instabil sokaságát; a kék snapshot attraktor spirális mintázata az origó instabil sokaságát követi, miután elértük a nulla gerjesztés platóját.



4. ábra. Snapshot attraktor (kék) és snapshot instabil sokaság (sárga) az $\varepsilon_0 = 0.1$, $\alpha \approx 0.0003$ ($n_0 = 50$), $\beta = 0.01$ forgatókönyvben, amely megegyezik a 3. ábrán vizsgálttal, itt azonban az $n = 10, 20, 40, 60$ lépéseket ábrázoljuk (a)-(d). A sárga instabil sokaságot (a)-(c)-ben egy $n = 5$ -nél $dl = 0.2$ hosszúságú, $x_{H,5}^*$ -öt átlósan keresztező, 10^5 pontból álló szakaszból indítottuk, míg (d)-ben a szokásos módon: egy rövid, az origót keresztező szakasz iterálásával. Az (5) SHP-t (piros) és a (7) SNP-eket (narancssárga) szintén ábrázoltuk.

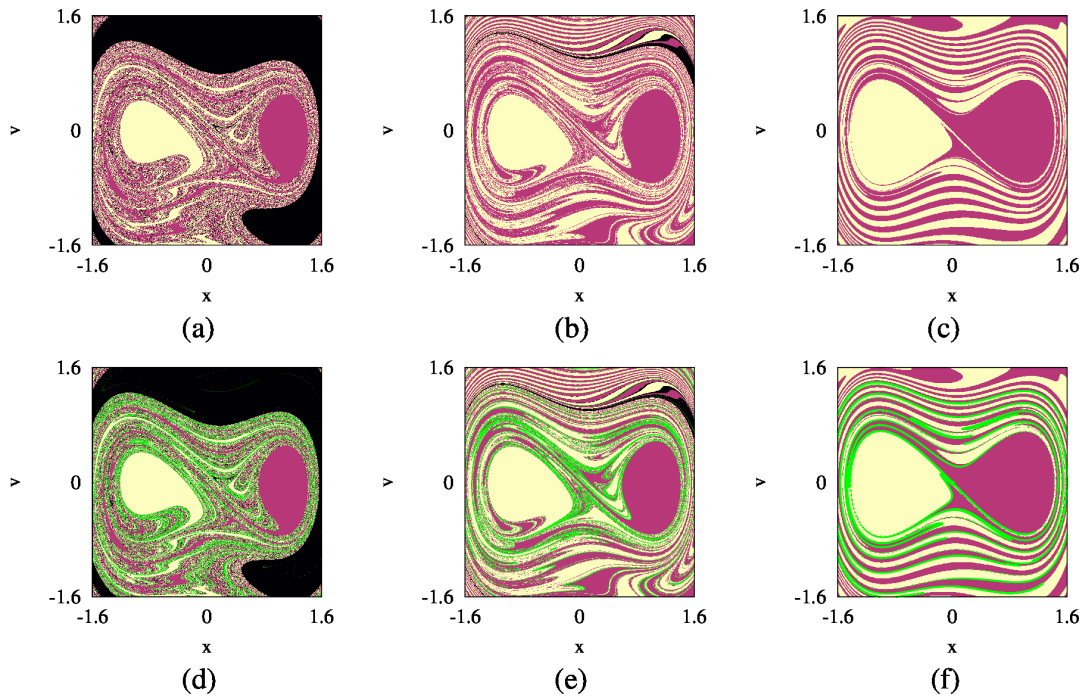
Hasonló módon kaphatunk meg *snapshot stabil sokaságokat* is, csak most egy $x_{H,n}^*$ -nél későbbi időpillanattól, a mellékátló mentén lévő szakaszból (a stabil sokaság iránya a perturbálatlan rendszerben) kiindulva, amelyet aztán a (2), (3) szerinti iterációnak vetünk alá időben visszafelé, az n időponthoz eljutva. Az így kapott mintázatot ezután az n pillanatban az $x_{H,n}^*$ SHP-hoz tartozó snapshot stabil sokaságnak mondjuk.

2.5. Időfüggő vonzási határok és snapshot stabil sokaságok

Az 5a-c ábrák a plató $(\pm 1, 0)$ hosszú távú fixpontattraktorainak vonzási tartományait mutatják színkódolással; azonos színek jelzik az azonos attraktorhoz vezető kezdeti feltételeket. A képek a vonzási tartományokat

különböző kezdő időpontokra mutatják ugyanabban a forgatókönyvben, vagyis a rámpa különböző részeihez tartoznak. Láthatjuk, hogy ahogy a rámpa végéhez közeledve a káosz gyengülni látszik, a vonzási határ simábbá válik.

Az 5d-f ábrákon a vonzási határokat összehasonlítjuk a vizsgált időpillanatok snapshot stabil sokaságaival. Az n időpillanathoz tartozó stabil sokaság az $n_0 = 50$ -ik periódusban egy dl hosszúságú, az origó körüli rövid intervallumból indul a mellékátló mentén. Azért ezt a pontot választottuk, mert a vonzási tartományok mintázatait a platón eltöltött hosszú idő után határozzuk meg, és a gerjesztetlen eset hiperbolikus fixpontja $(0, 0)$. Ezt a rövid szakaszt ezután időben visszafelé iteráljuk $50 - n$ hosszúságban. A snapshot stabil sokaság pontjait jelző zöld vonalak láthatóan nagyon jól fedik a medence határait.²



5. ábra. A $(\pm 1, 0)$ stabil fixpontok vonzási tartománya. A pályákat az (a) $n = 10$, (b) $n = 25$ és (c) $n = 40$ lépésektől indítottuk az $\varepsilon_0 = 0.1$, $\alpha \approx 0.0003$ ($n_0 = 50$), $\beta = 0.01$, $\omega = 1$ forgatókönyvben. A fekete területek olyan kezdeti feltételeket jelölnek, amelyek 300 időegység alatt nem érik el egyik attraktor 10^{-2} környezetét sem. Az alsó sorban látjuk a vonzási tartományokat az ugyanezen pillanatokhoz tartozó, $n_0 = 50$ -től a $(0, 0)$ instabil fixpontból indított zöld snapshot stabil sokaságokkal átfedve.

2.6. Snapshot lópatkó struktúrák

A Smale lópatkó szerkezeteket (vagy kaotikus nyergalmazokat) általában mind az állandó, mind a tranzienst káosz leglényegesebb összetevőjeként tartják számon [61, 72]. A tetszőleges időfüggésű esetek szakirodalmában viszonylag ritka; ilyen objektumokat azonosítottak például random leképezésekben [54], és változó erősségű gerjesztéseknek kitett időben folytonos rendszerekben, mind disszipatív [44, 45], mind Hamiltoni [37] esetek-

²A 2.4 szakasz végén leírtuk a snapshot stabil sokaságok létrehozásának módszerét. Mivel azonban a (4) SHP nagy sajátértékei miatt a körülötte lévő pontok nagyon gyorsan távolodnak egymástól (periódusonként $e^{2\pi} \approx 500$ rátával), hosszabb forgatókönyvek esetén ezt egy másik módszerrel kell kiegészíteni a numerikus megvalósításban. Nevezetesen, néhány iterációnként új sokaságokat kell indítani az SHP-ből, amelyekről azt mondhatjuk, hogy kiegészítik a meglévő snapshot stabil sokaságot. A mi konkrét esetünkben a forgatókönyv minden második periódusában indítottunk sokaságokat $dl = 0.02$ hosszúságú, a megfelelő SHP-kon átmenő szakaszokból. Ezt a módszert az 5. és a 6c ábrákon használtuk.

ben. Ezen felül aperiodikus időfüggésű folyadékáramlásokban időben változó, egymásba csomózódott sokaságok figyelhetők meg, amint azt egy turbulenciával kapcsolatos kísérletben szemléltették is [55], legújabban pedig snapshot kaotikus nyergek megfigyelési bizonyítékairól számoltak be a Nap plazmájában [11].

A lópatkó szerkezetben a kaotikus nyereghalmaz pontjai ugyanazon hiperbolikus pont stabil és instabil sokaságának metszéspontjai. Hagyományos esetekben az instabil és stabil sokaságok darabjai úgy kaphatók meg, hogy a fázistér egy x_H^* -n átmenő átlói mentén vett kis intervallumokat iteráljuk előre illetve hátrafelé, azonos számú periódusig. Ha azonban ugyanezt a módszert alkalmazzuk paraméterdrifttel rendelkező rendszerekre, a kapott sokaságok a paraméter, esetünkben a gerjesztési amplitúdó különböző értékeihez tartoznának.

További kihívás, hogy a paraméterdriftnek kitett rendszerekben figyelembe kell venni, hogy a hiperbolikus pont időben mozog. A fő probléma, hogy a sokaságok metszéspontjainak ugyanahhoz a pillanathoz kell tartozniuk, ami a mozgó hiperbolikus pontok (azaz SHP-k) esetében azt jelenti, hogy a pontoknak, amelyekből a sokaságokat indítjuk, különböző pillanatokhoz kell tartozniuk [37, 44, 45, 54].

Megköveteljük tehát, hogy a metszéspontok ugyanahhoz az időpillanathoz, mondjuk n -hez tartozzanak. E célból tekintsük az $n + \tilde{n}$ periódusban, az $x_{H,n+\tilde{n}}^*$ körüli mellékátló mentén egy rövid intervallumból indított stabil sokaságot, és iteráljuk $\tilde{n}$ hosszán visszafelé időben. Analóg módon az instabil sokaságot $n - \tilde{n}$ időpontban kell indítani egy rövid intervallumon az átló mentén $x_{H,n-\tilde{n}}^*$ körül, és alá kell vetni egy $\tilde{n}$ hosszúságú előre iterációnak. E sokaságok átfedésével egy *snapshot lópatkó struktúra* jelenik meg, amely az n időpillanathoz tartozik. A kifejezés használatát alátámasztja, hogy egy másik n időpillanatra a lópatkó vizuális megjelenése más lenne. Megjegyezzük, hogy $\tilde{n}$ választását a rendszer semmilyen belső kényszere nem határozza meg. Nagyobb értékek nagyobb metszéspont halmazt eredményeznének ugyanannál az n -nél, amely azonban tartalmazná a kisebb értékkel kapott metszéspontokat is.

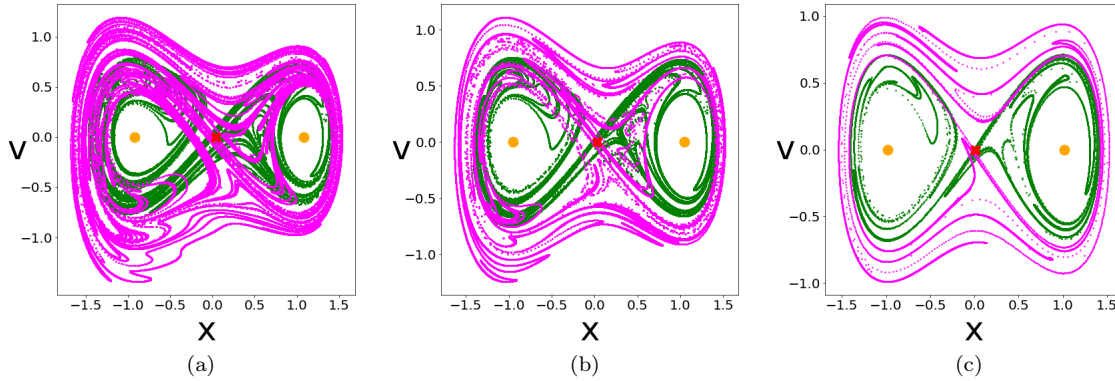
A 6. ábrán bemutatjuk a snapshot lópatkó struktúrát különböző időpontokban. Figyeljük meg, hogy a forgatókönyv elején ($\varepsilon = 0.08$, $n = 10$ az (a) panelen) a terület, ahol a két sokaság keresztezi egymást jelentős méretű, a rámpa közepén (b panel) kisebb, míg $\varepsilon = 0.02$, $n = 40$ -re majdnem eltűnik, itt a két sokaság már csak néhány pontban metszi egymást.

Hasonlóan ahhoz, ahogyan az időfüggetlen lópatkó szerkezetek megadják a káosz vázát egy stacionárius rendszerben, azt mondhatjuk, hogy egy snapshot lópatkó struktúra jelzi a káosz kiterjedését egy paraméterdriftnek kitett rendszerben. Tehát, a 6. ábra alapján azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a káosz erőssége a forgatókönyv során csökken, egészen addig, amíg a nyereghalmaz csak néhány pontra redukálódik. A káosznak ez a megszűnése további, számszerűsíthető vizsgálatot igényel, mégpedig a rendszer dinamikai instabilitásának tanulmányozásával.

2.7. A káosz erőssége

A káosz számszerűsítésére paramétereltolódásnak kitett rendszerekben több különböző mennyiséget is javasoltak már. Ilyenek például egy topologikus entrópia jellegű mennyiség (tágulási entrópia) [34], a snapshot attraktor kiterjedése vagy szórása [44], a teljes időintegrálra vonatkozó átlagos normált távolság [64], valamint egy keresztkorreláció alapú módszer [65]. Mi itt a [37]-ben javasolt fogalmat használjuk, amely lehetővé teszi egy, a rendszer káoszána leírására szolgáló mennyiség bevezetését, amelyet *pillanatnyi Ljapunov-exponensnek* fogunk nevezni.

Kaotikus rendszerek dinamikai instabilitását általában pontpárok közötti távolságok átlagos növekedési



6. ábra. Snapshot lópatkó szerkezet a 10., 25. és 40. lépéseknél az eddig vizsgált forgatókönyv szerint, ami az $\varepsilon(t) = 0.08, 0.05$ és 0.02 pillanatnyi amplitúdóknak felel meg. Itt $\tilde{n} = 5$ értéket veszünk, azaz a stabil sokaságot (rózsaszín) $x_{H,15}^*$ körül indítottuk el, és az (a) esetben $n = 10$ -ig iteráltuk vissza, ugyanez a (b) esetben $n = 30 \rightarrow 25$, a (c) esetben pedig $n = 45 \rightarrow 40$, míg az instabil időfejlődések (zöld) esetében (a) $n = 5 \rightarrow 10$, (b) $n = 20 \rightarrow 25$, (c) $n = 35 \rightarrow 40$. Figyeljük meg, hogy a forgatókönyv elején a terület, ahol a két sokaság keresztezi egymást, jelentős kiterjedésű, míg a rámpa végéhez közeledve az origó körüli néhány pontra zsugorodik. Az (5) és (7) szerinti SHP és SNP-k (piros és narancssárga) szintén fel vannak tüntetve.

rátájával jellemezzük [61]. Itt az átlagot a snapshot attraktor sokaságán értékeljük ki:

$$\rho(t) = \langle \ln r(t) \rangle, \quad (8)$$

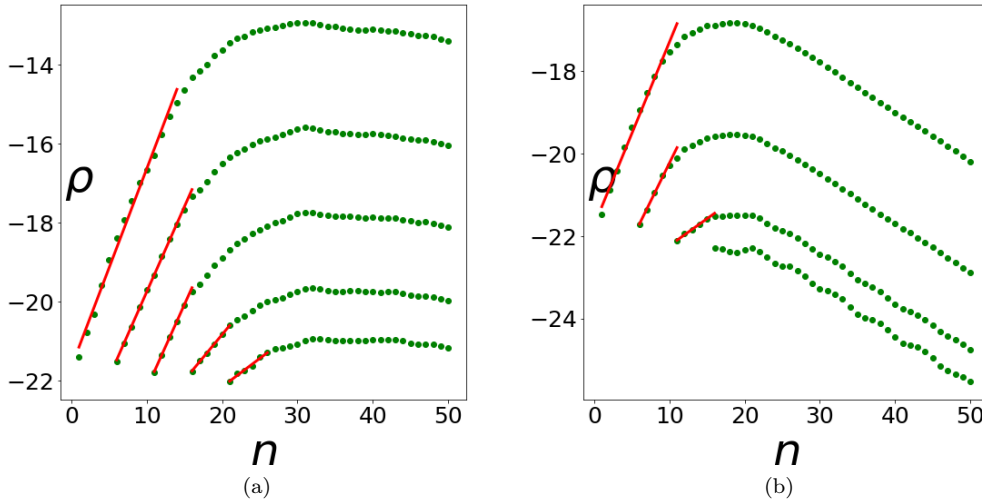
ahol $r(t)$ egy olyan pontpár távolsága az t időpontban, amely kezdetben közel volt egymáshoz a sokaságban, a zárójel pedig a sokaság felett vett átlagot jelöli.

A sokaságátlagolt páronkénti távolság (ensemble-averaged pairwise distance, EAPD) eredményeit az eddig használt forgatókönyvben a 7a ábra legfelső görbéje mutatja. A sokaság minden 10. pontjához egy $\Delta r_0 = \sqrt{2} \cdot 10^{-10}$ kezdeti távolságú párt rendeltünk (mindkét irányban 10^{-10} hozzáadásával). A görbe kezdeti, exponenciális szakaszára egy piros egyenest illeszthetünk, amelynek meredeksége $\lambda = 0.50 \pm 0.01$, ami kaotikus viselkedést jelez a forgatókönyv első részében. Azonban $n \approx 15$ -től kezdve a távolság növekedése lassulni kezd, míg végül $n \approx 30$ -nál megáll. Mivel a görbe meredeksége pillanatnyi Ljapunov-exponensnek tekinthető, amely itt eltűnik, arra következtetünk, hogy a rendszerben 30 periódus után megszűnik a kaosz. Ezt követően lassú csökkenés következik, ami káoszmentes/reguláris közeledést jelez a végső fixpontattraktorok felé. Figyeljük meg, hogy még a görbe csúcsa is jelentősen kis értéken van, ami azt jelenti, hogy a forgatókönyv során átlagosan nagyszámú pár maradt közel egymáshoz.

Az (a) panel további görbéi a forgatókönyv későbbi időpontjaiban indított sokaságokkal kapott eredményeknek felelnek meg. Ezekben az esetekben a sokaság kezdeti alakja a snapshot attraktor, amely ahhoz az n kiindulási időponthoz tartozik, ahol a sokaság által érzékelt gerjesztési amplitúdó $\varepsilon_n = \varepsilon_0 - \alpha n T$. A kezdeti piros egyenesek meredekségei azt jelzik, hogy a kezdeti Ljapunov-exponensek csökkennek, az attraktorok az eredeti forgatókönyv egyre későbbi szakaszaiban egyre kevésbé kaotikusak. Mindegyik görbe visszahajlik, és figyelemre méltó módon mindegyik $n = 30$ körül éri el a maximumát, ami azt jelzi, hogy azt a pillanatot, amikor a kaosz megszűnik, csak a rendszer és a forgatókönyv határozza meg, míg a megfigyelés kezdetének időpontja ezt nem befolyásolja. Az ehhez a pillanathoz tartozó gerjesztési amplitúdó $\varepsilon = 0,04$, amely viszonylag közel van 0,025-höz, ami az az érték, amely alatt a 2. ábra bifurkációs diagramján már nem található

tranzien káosz. Ez megerősíti [44] azon megfigyelését, miszerint a snapshot attraktorok megközelítőleg abban a tartományban veszítik el kaotikusságukat, ahol még tranzien káosz sem létezik a paraméterdrift nélküli rendszerben.

Annak a kérdésnek a megválaszolásához, hogy a görbék azonos maximuma erre a konkrét forgatókönyvre jellemző-e, vagy a rendszer valamilyen belső tulajdonságának következménye, megismételjük a szimulációt ugyanabban a forgatókönyvben, azzal a különbséggel, hogy a csillapítást $\beta = 0.02$ -re változtatjuk. Az eredményt a 7b ábrán figyelhetjük meg. Mint látható, a görbék maximuma ismét nagyjából ugyanaz, a helyük azonban most $n \approx 20$ -ra változott, ahol a gerjesztési amplitúdó $\varepsilon = 0.06$. Ebből arra következtethetünk, hogy az ehhez hasonló csökkenő amplitúdójú rendszerekben az azonos forgatókönyvvel indított EAPD görbéknek azonos időben van a maximumuk, magát az időpontot viszont adott forgatókönyvben a csillapítási együttható határozza meg.



7. ábra. Sokaságátlagolt páronkénti távolság az eddig használt forgatókönyvet a rámpa végéig követve. (a) Az illesztett piros egyenesek meredeksége fentről lefelé $0,50 \pm 0,01$, $0,43 \pm 0,05$, $0,42 \pm 0,006$, $0,22 \pm 0,008$, $0,14 \pm 0,1$, amik a snapshot attraktorok kezdeti Ljapunov-exponenseit jelentik. Figyeljük meg, hogy minden görbe körülbelül $n = 30$ -nál éri el a maximumát. (b) Ugyanezek a görbék $\beta = 0.02$ esetén (a forgatókönyv összes többi paramétere ugyanaz). Itt a káosz eltűnését jelző maximumok helye $n = 20$ körül van. Az illesztett egyenesek meredeksége fentről lefelé: 0.44 ± 0.01 , 0.37 ± 0.01 , 0.13 ± 0.06 .

3. Gerjesztett Hamiltoni rendszerek: snapshot tóruszok

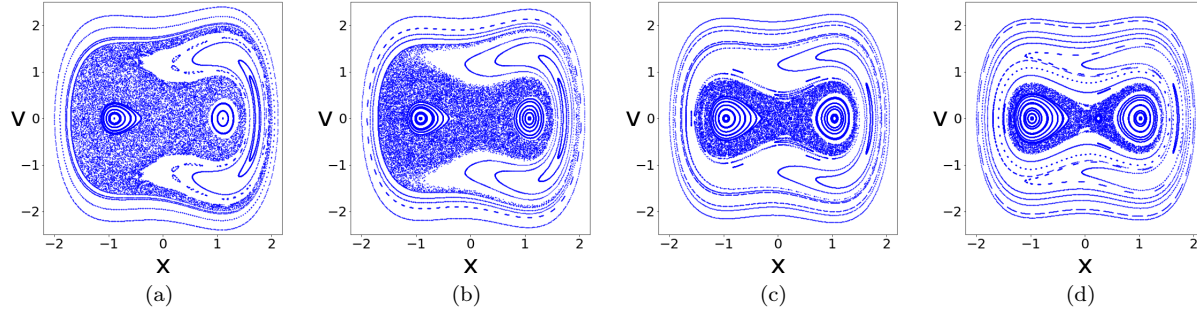
3.1. A modell

Ebben a szakaszban (2) disszipációmentes ($\beta = 0$) határesetét fogjuk vizsgálni:

$$\ddot{x} = x - x^3 + \varepsilon(t) \cos \omega t, \quad (9)$$

ahol $\varepsilon(t)$ -t (3) adja meg. Ezt a rendszert vizsgálták pl. [27]-ben $\alpha = 0$ -ra és [37]-ben $\alpha \neq 0$ -ra. A (9) rendszer Hamilton függvénye $H(p, x, t) = p^2/2 - x^2/2 + x^4/4 - x\varepsilon(t) \cos \omega t$. A gerjesztés miatt a teljes energia nem állandó, hanem rámpával rendelkező forgatókönyv jelenlétében átlagosan csökken.

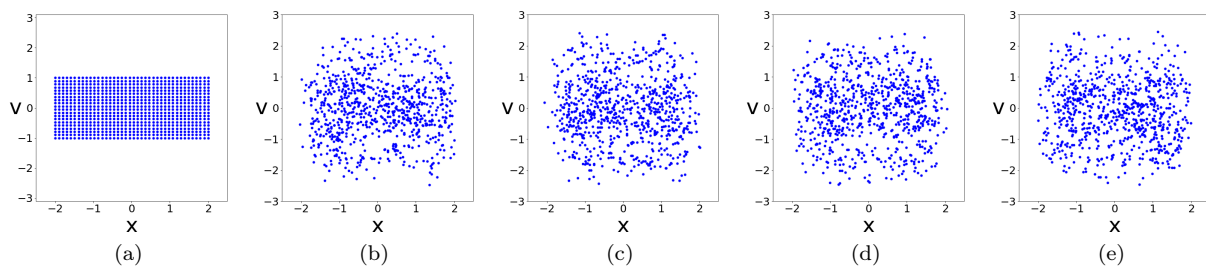
Drift nélkül ($\alpha = 0$) a rendszer tipikus osztott fázistérrel rendelkezik, amely kváziperiodikus tóruszok és kaotikus tartományok együtteséből áll. A fázisterek általános kinézete az ε_0 gerjesztési amplitúdótól függ; ahogy ennek az értéke csökken, úgy csökken a kaotikus tartomány mérete is, ahogyan azt a 8. ábra szemlélteti.



8. ábra. A stacionárius ($\alpha = 0$) Hamiltoni Duffing-oszcillátor (9) fázistere stroboszkopikus leképezésen ábrázolva különböző rögzített gerjesztési amplitúdók esetén: $\varepsilon(t) \equiv \varepsilon_0 = 0.1, 0.08, 0.04$ és 0.02 az (a), (b), (c) és (d) képeken. A trajektóriákat 41 kezdeti feltételből indítottuk el x -ben -2 és $+2$, $v = 0$ között egyenletesen elosztva, és $N = 1000$ iteráción keresztül követtük.

3.2. A sokaság választása

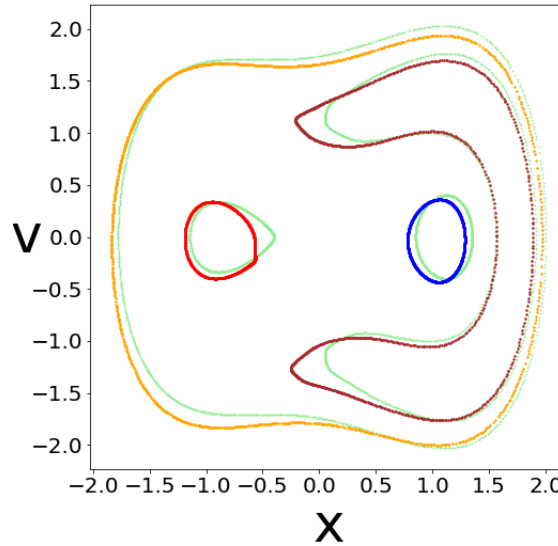
Ha paraméterdrift bevezetése után egy kiterjesztett sokaságból indulunk ki, ahogyan az a disszipatív esetekben jellemzően történik (lásd az előző szakasz), akkor egy strukturálatlan képet kapunk, ahogyan az a 9. ábrán látható. Ennek oka, hogy a fázistér alapvető komponensei, a tóruszok és a kaotikus tartományok egyaránt időfüggőek, ahogyan azt [37]-ben kimutatták, és a kiterjesztett sokaság túlságosan durva ahhoz, hogy ezeket az összetevőket szétválassza. Az azonban már ebben a fázisban is világos, hogy a sokaság tagjai hosszú időn keresztül szétszóródnak egy kiterjedt régióban, azaz erős belső változatosság van jelen az eltolódó dinamikában. Ez a tulajdonság a párhuzamos dinamikai időfejlődések pillanatkép szemléletének egy kifinomultabb alkalmazását indokolja.



9. ábra. Egy 800 pontból álló kiterjedt sokaság fejlődése (9) szerint, amelyet a stroboszkopikus leképezés 100 iterációján keresztül követünk az $\varepsilon_0 = 0.1$, $n_0 = 100$, $\alpha \approx 0.0002$ forgatókönyvben, az iterációk száma $n = 0, 25, 50, 75, 100$ (a)-(e). A sokaság az x -ben -2 -től $+2$ -ig, v -ben pedig -1 -től $+1$ -ig terjedő téglalapon indul (a panel). Látható, hogy ebben a kiterjedt sokaságban nem jelenik meg strukturált minta. Ennek a forgatókönyvnek a követésével a 8. ábra összes paneljén látható stacionárius esetet végigpásztázzuk.

Érdeemes ezért egy specifikusabb, a fázistér egyik alapkomponensére koncentráló alsokaságot kiválasztanunk [37]. Mivel egydimenziós objektumok, és egyszerűbbek, mint a kaotikus tartományok, vegyük a (9)

rendszer *tóruszait* $\alpha = 0$ -val, azaz a stacionárius fázistér tóruszait, és fejlesszük őket időben (9) szerint $\alpha \neq 0$ -val. Egy alapvető effektus szemléltetésére kiválasztunk 4 tóruszt, amelyek az eredeti fázistér különböző régióiban helyezkednek el (a 10. ábra világoszöld görbéi). A 9. ábra első képével történő összehasonlítás mutatja, hogy ezek a kezdeti sokaságok mennyire különböznek egy kiterjesztettől. Ezeket a sokaságokat rövid ideig követjük, és amint a 10. ábra szemlélteti, a forgatókönyv végére mind zárt görbék maradnak, tehát ezek a tóruszok túlélhetik a paraméterdriftet. Mivel időben változnak, [37]-ben a *snapshot tórusz* kifejezést vezették be rájuk. Az a tény, hogy a tóruszok zárt görbék maradnak, azt jelenti, hogy korlátozott belső változatosságú sokaságként azonosíthatjuk őket. Az is kiderült [37]-ben, hogy az idő előrehaladtával a deformált snapshot tóruszok felbomolhatnak, ami szerkezetük hirtelen megnyúlásából kezdődik, és akkor fejeződik be, amikor a tóruszok teljesen beágyazódnak a snapshot kaotikus tartományba. Ez a jelenség azonban ebben a rendszerben nem figyelhető meg, a gerjesztési amplitúdó csökkenése miatt.



10. ábra. Négy snapshot tórusz (színes görbék) 2 iteráció után. Négy kezdőfeltételt $x_0 = -0.4, 0.85, 1.55, 2$, $v_0 = 0$ $N = 1000$ -szer iteráltuk (9) szerint $\varepsilon_0 = 0.1$ és $\alpha = 0$ mellett, kialakítva így a világoszöld görbéket. Ezután az ezeket a tóruszokat alkotó pontokat kezdeti feltételekként használjuk, és az $\varepsilon_0 = 0.1$, $n_0 = 5$, $\alpha \approx 0.003$ forgatókönyvben iteráljuk $n = 2$ perióduson keresztül, ami az itt látható snapshot tóruszokhoz vezet. Figyelemre méltó, hogy a tóruszok zárt (de deformált) görbék maradtak.

3.3. Snapshot hiperbolikus és elliptikus pontok

A snapshot hiperbolikus - és nóduspontok jól definiáltak maradnak a disszipáció nélküli ($\beta = 0$) határesetben is. A (4) hiperbolikus pontok a következőre egyszerűsödnek:

$$x_H^*(t) = -\frac{\varepsilon_0 - \alpha t}{1 + \omega^2} \cos \omega t - \frac{2\alpha\omega}{(1 + \omega^2)^2} \sin \omega t \quad (10)$$

és $v_H^* = \dot{x}_H^*(t)$, a stroboszkopikus leképezésen

$$x_{H,n}^* = -\frac{\varepsilon_0 - \alpha T n}{1 + \omega^2}, \quad v_{E,n}^* = -\alpha \frac{\omega^2 - 1}{(1 + \omega^2)^2}. \quad (11)$$

A nódusok elliptikus pontokká alakulnak át, amelyeknek sajátértékei $\pm i\sqrt{2}$. Ezek a *snapshot elliptikus pontok* (SEP-k) (6) alapján a következő szerint adódnak:

$$x_E^*(t) = \pm 1 + \frac{\varepsilon_0 - \alpha t}{2 - \omega^2} \cos \omega t - \frac{2\alpha\omega}{(2 - \omega^2)^2} \sin \omega t \quad (12)$$

és $v_E^* = \dot{x}_E^*(t)$, a leképezésen pedig

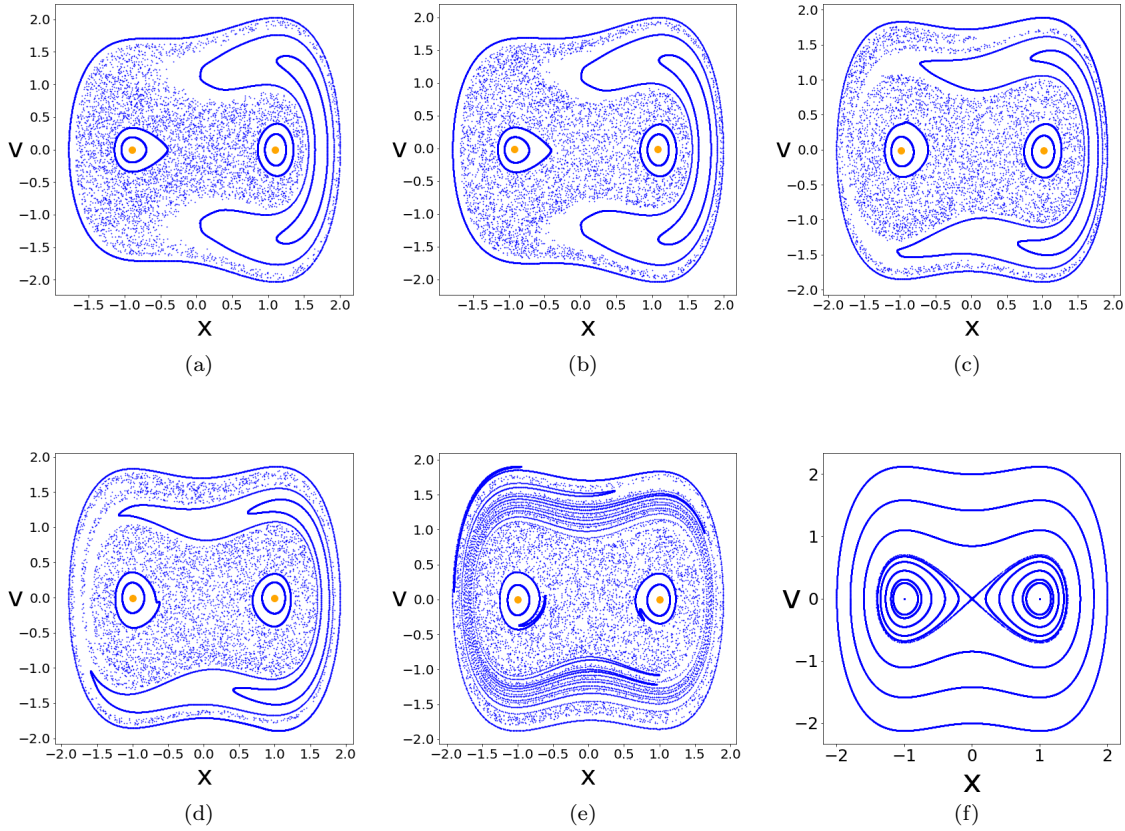
$$x_{E,n}^* = \pm 1 + \frac{\varepsilon_0 - \alpha T n}{2 - \omega^2}, \quad v_{E,n}^* = -\alpha \frac{2 + \omega^2}{(2 - \omega^2)^2}. \quad (13)$$

3.4. A snapshot fázisportré időfejlődése

Paraméterdrift jelenlétében érdemes mindkét alkomponens, tóruszok és kaotikus tartományok időbeli alakulását is követni. Ebben a szakaszban ezért nem csak a tóruszokat választjuk kezdeti sokaságnak, hanem a kezdeti fázistér kaotikus tartományát is. Ez utóbbi egy kiterjedt halmaz, amelynek alakját azonban az eredeti dinamika határozza meg, és nem mesterségesen van megválasztva, mint a 9. ábra első panelén. A fázistér pillanatnyi mintázatát a forgatókönyv során *snapshot fázisportré*nek nevezzük.

A 11. ábrán egy ilyen esetet mutatunk be. Az (a) panel az $\varepsilon_0 = 0.1$ -nél lévő stacionárius fázistér, amelyben néhány tórusz mellett egy kiterjedt kaotikus tartomány (elszórt kék pontok) is látható. A (b) panel a rámpa legelső stroboszkopikus pillanatához tartozik, ahol a gerjesztési amplitúdó 0.08, míg a (c) panel az utolsó előtti eset 0.02 amplitúdóval. Figyeljük meg a kezdeti tóruszok deformációját, hasonlóan a 10. ábra jelenségéhez, és hogy a pontozott régió is más alakot vesz fel. A kék pontok kiterjedt megjelenése miatt az ilyen snapshot kaotikus tartományok szignifikáns belső változatosságú sokaságokat képviselnek. Az elliptikus fixpontok itt SEP-kké válnak, amelyek koordinátáit (13) írja le, és narancssárgával káthatóak. A (d) panel az $n = n_0 = 5$ -ik iteráció pillanatát ábrázolja. A gerjesztés ekkorra elérte a zérus abszolút amplitúdót, és innentől kezdve ez így is marad, ami azt jelenti, hogy a következő lépésekben a gerjesztetlen ($\varepsilon = 0$) (9) egyenletet alkalmazzuk. Az (e) panel a fázistér mintázatának alakulását mutatja $n = 15$ -nél (10 platón töltött iteráció után). Figyeljük meg, hogy a snapshot tóruszok a két $x^* = \pm 1, v^* = 0$ elliptikus fixpont körül keringő vékony vonalakba kezdenek átmenni, vagyis közelítőleg belesimulnak a gerjesztetlen probléma (f panel) pályáiba.

A kék pontok halmazának alakulását körültekintőbben kell értelmezni. Az bizonyos, hogy ezek az (a) panelen látható kezdeti kaotikus tartomány képei a forgatókönyv szerint, az azonban valószínűtlen, hogy a kék pontok mindegyike kaotikus természetű területet jelöljön, mivel a plató gerjesztetlen dinamikája egyáltalán nem tartalmaz káoszt. A rámpán, pl. a (b) és (c) paneleken a kék pontok egy része minden bizonnyal kaotikus, és bár ennek a területnek a kiterjedése és alakja szemmel nem határozható meg, várható, hogy a mérete az idő múlásával csökken. A káosz hiánya a platón abból is látható, ha megfigyeljük, hogy ezek a pontok a gerjesztetlen kétfenekű potenciál jól ismert pályáit kezdik követni. A kaotikus tartományból kiinduló pontok nagy kiterjedéséből arra következtethetünk, hogy a szignifikáns belső változatosság nem feltétlenül a káosz jele Hamiltoni problémákban. A kezdeti káosz tehát vezethet nagyszámú megengedett állapot megjelenéséhez a fázistérben még a káosz megszűnése után is. Az utolsó panel a gerjesztetlen rendszer tipikus fázistérbeli pályáit mutatja be annak demonstrálására, hogy az (e) panelen látható keveredési mintázat a gerjesztetlen dinamika áramvonalait kezdte követni. A 3.5 szakaszban megmutatjuk, hogy a snapshot kaotikus tartomány mérete megbecsülhető az adott pillanathoz tartozó snapshot lópatkó szerkezet megszerkesztésével.

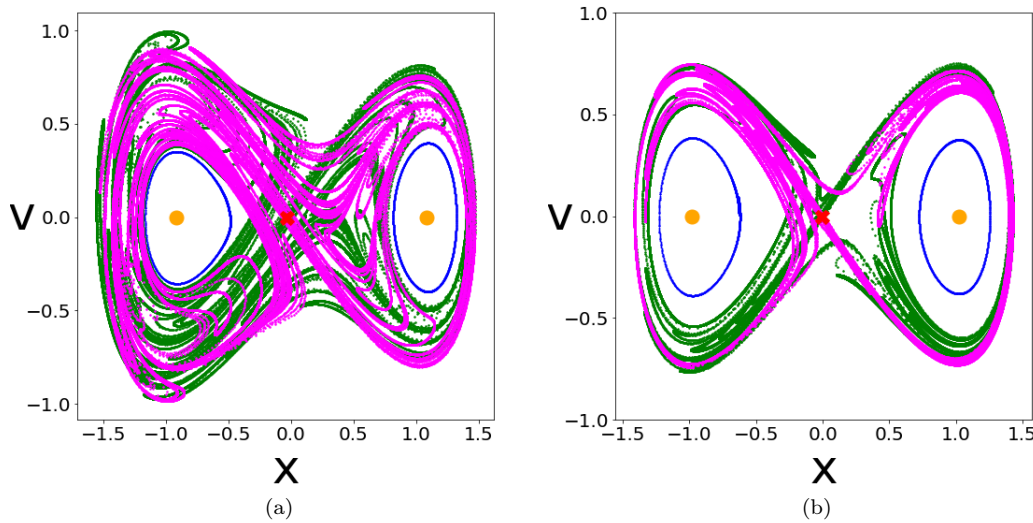


11. ábra. A snapshot fázisportré alakja egy forgatókönyv során. (a) Az $\varepsilon_0 = 0.1$, $N = 5000$ stacionárius rendszer a 10. ábrán láthatóakkal megegyező kezdőfeltételekkel, kiegészítve az $x_0 = -0.7, 0.95, 1.65$ három további tóruszal és $x_0 = 0.1$ -gyel ami a kaotikus tartományt képviseli, $v_0 = 0$ minden esetben. Az elliptikus fixpontokat szintén ábrázoltuk, narancssárgával. (b)-(d) Az $\varepsilon_0 = 0.1$, $\alpha \approx 0.003$ forgatókönyvvel kapott eredmények, amelyeknél $n_0 = 5$ iteráció után érjük el a gerjesztetlen eset platóját. A snapshot fázisportré az $n = 1$ (b), $n = 4$ (c) és $n = n_0 = 5$ (d) lépésekben látható. (e) A fázisportré az $n = 15$ -ik iterációnál, vagyis 10 platón töltött lépés után, $n' = 10$. (f) A gerjesztetlen ($\varepsilon = 0$) kétfenekű potenciál fázistere.

3.5. Hamiltoni snapshot lópatkó struktúra

A lópatkó megszerkesztésének elvei hasonlóak a disszipatív esethez. A mi Hamiltoni problémánkban $\tilde{n} = 5$, és a lópatkó szerkezetet az $\varepsilon_0 = 0.1$, $n_0 = 50$ forgatókönyv szerint $n = 10$ -re és $n = 40$ -re konstruáljuk, amint azt a 12. ábra szemlélteti. Kiemeljük, hogy a rámpán lejjebb haladva a 12b ábrán látható lópatkó kisebb, mint a 12a ábrán. Mivel a lópatkó szerkezet annak a területnek a közelítése, ahol káosz van jelen, arra következtethetünk, hogy ahogy a forgatókönyv egyre kevesebb káoszt tartalmazó fázistereken halad át (vö. 8. ábra), úgy zsugorodik a snapshot lópatkó struktúra, és így a snapshot káosz területe is. Ezért a snapshot kaotikus tartományok, mint például a 11a-11d ábrákon láthatóak (bár egy 10-szer gyorsabb forgatókönyvben), a rámpa végére elveszítik kaotikus jellegüket a legtöbb pontjukra.

A 12. ábra arra is magyarázatot ad, hogy tóruszok miért nem, vagy csak nagyon nehezen tudnak felbomlani ebben a csökkenő amplitúdójú rendszerben. Mindkét képen ábrázoltunk két snapshot tóruszt, amelyek kezdetben gyakorlatilag az elliptikus szigetek szélén helyezkednek el. Vegyük észre, hogy a (13) snapshot el-



12. ábra. Két Hamiltoni snapshot lópatkó struktúra. (a) Az $x_{H,15}^*$ hiperbolikus pontban indított stabil sokaság (rózsaszín) és az $x_{H,5}^*$ pontban indított instabil sokaság (zöld). Mindkét sokaságot ötször iteráltuk ($\tilde{n} = 5$), majd egymásra helyeztük, így megkapva a $n = 10$ időpillanat snapshot lópatkó szerkezetét, az $\varepsilon_0 = 0.1$, $n_0 = 50$, $\alpha \approx 0.0003$ forgatókönyvben. (b) Az $n = 40$ pillanat snapshot lópatkó szerkezete ugyanezen forgatókönyv szerint. A sokaságokat ebben az esetben is 5-ször iteráltuk, így a kiindulási pontok $x_{H,45}^*$ a stabil (rózsaszín) és $x_{H,35}^*$ az instabil (zöld) sokaság esetében. Mindkét esetben ábráztuk az $x_0 = -0.4, 0.85$, $v_0 = 0$ kezdeti feltételek snapshot tóruszait (kék), (13) SEP-it (narancssárga) és (11) SHP-it (piros). Figyeljük meg, hogy az (a) ábrán a struktúra nagyobb, mint a (b) ábrán, ami arra enged következtetni, hogy a forgatókönyv során az a régió, ahol valódi káosz van jelen, zsugorodik.

liptikus pontok (narancssárga) a snapshot tóruszok közepére esnek, melyek, mint látható, alig deformálódnak mert a lópatkó, és így a snapshot káosz is zsugorodik, így szinte lehetetlenné válik, hogy a snapshot tóruszok a kaotikus tartományba keveredjenek.

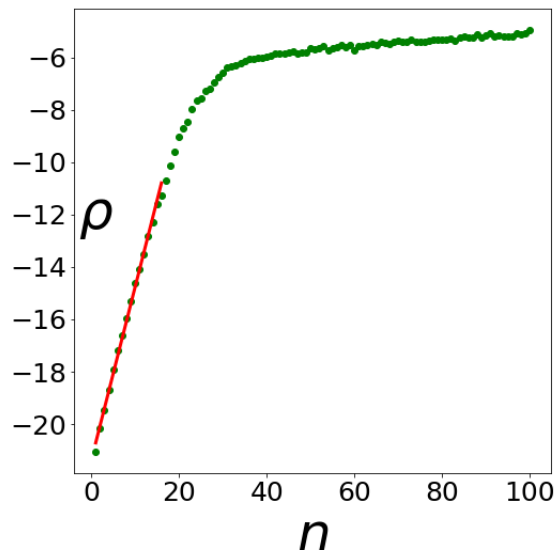
3.6. A káosz erőssége

Itt is érdemes a (8) EAPD-t használni a dinamikai instabilitás jellemzésére, ezúttal azonban olyan t időpontbeli pontpárokra alkalmazva, amelyek $t = 0$ -ban vagy egy tórusz, vagy egy kaotikus tartomány alsokaságában voltak egymáshoz nagyon közel, tehát (8)-ban a zárójel itt az *ezen az alsokaságon* vett átlagot jelöli.

A 13. ábra ezt a mennyiséget mutatja a kezdetben kaotikus sokaság időfejlődése során az $\varepsilon_0 = 0.1$, $\alpha \approx 0.0003$ forgatókönyvben, amely az $n_0 = 50$ -ik iterációnál éri el a gerjesztetlen esetet. A kezdeti sokaság minden 10. pontjához egy $\Delta r_0 = \sqrt{2} \cdot 10^{-10}$ kezdeti távolságú párt rendeltünk (10^{-10} hozzáadásával mindkét irányban). Itt, mivel kaotikus tartományban vagyunk, az exponenciális növekedés azonnal megindul, ellentétben a felbomlás folyamatán átmenő snapshot tóruszokkal (lásd a 19a ábrát és [37]-t). A figyelemre méltó jellemző itt az, hogy bár várjuk azt, hogy a görbe telítésbe menjen, ez a vártnál lényegesen alacsonyabb ρ értéknél történik. A kaotikus tartomány kezdeti szélessége körülbelül 3 egység (vö. 8d ábra), ezért azt várnánk, hogy a plató $\rho \approx \ln 3 \approx 1$ körül legyen, mivel a pontok távolsága nem lehet nagyobb, mint a kaotikus tartomány mérete. Ezzel ellentétben, a 13. ábrán a telítődést -5 körül látjuk. Ez részben azért van, mert a forgatókönyv második fele a gerjesztetlen probléma platóján telik (hasonlóan a 11. ábra forgatókönyvéhez), ahol egyáltalán nincs káosz. Néma enyhe növekedés itt is megfigyelhető, ami annak köszönhető, hogy közeli

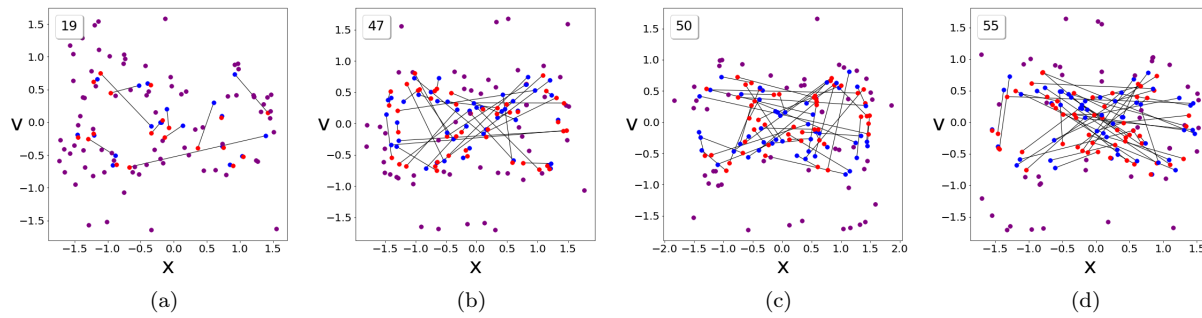
tóruszokon lévő pontpárok kissé eltérő sebességgel forognak, mivel a tóruszok különböző csavarodási számmal rendelkeznek, és így a pár időben közelítőleg lineárisan válik szét.

Vegyük észre azonban, hogy a görbe laposodó része $n = 30$ körül kezdődik, jóval az $n_0 = 50$ -nél lévő plató kezdete előtt. Az okot az előző szakasz megfigyeléseiben találhatjuk meg: bár kezdeti sokaságnak egy kaotikus tartományt választottunk, a snapshot lópatkó szerkezet zsugorodása miatt a ténylegesen kaotikus jellegű terület (vagyis az a régió, ahol a közeli pontok erősen széttartanak) is zsugorodik, amely azt eredményezi, hogy egyre kevesebb pár képes szétválni. Azt a következtetést vonhatjuk le tehát, hogy a káosz az átlagos viselkedésben körülbelül a 30. iterációnál tűnik el.



13. ábra. Az $x_0 = 0.1$, $v_0 = 0$ kaotikus tartományban mért EAPD mennyiség, amelyet 100 iteráción keresztül követtünk az $\varepsilon_0 = 0.1$, $\alpha \approx 0.0003$ ($n_0 = 50$) paraméterekkel. Mivel kaotikus tartományban vagyunk, a növekedési ráta rögtön exponenciális, vagyis lineáris az itt használt logaritmikus skálán. Az illesztett egyenes (piros) meredeksége a $\lambda = 0.66 \pm 0.009$ Ljapunov-exponens adja. Amint látható, a kiegyenesedés körülbelül $\rho = -5$ -nél következik be, mivel a forgatókönyv második felét a gerjesztetlen probléma szabályozza. Az is figyelemre méltó, hogy ez a lapos rész nem $n = n_0 = 50$ -nél kezdődik, hanem sokkal korábban, ami azt jelzi, hogy a forgatókönyv már belépett egy olyan régióba, ahol a káosz ereje csökken.

Hogy részletesebben megértsük a folyamatot, a 14. ábrán ábrázoljuk azokat a pontpárokat, amelyeket a forgatókönyvben követünk. Azokat, amelyek $\Delta r_c = 10^{-2}$ -nél nem távolodtak el jobban egymástól, "közeli" pontoknak tekintjük (ezeket általában szemmel nem lehet megkülönböztetni), és lilára színezzük. Az olyan párok esetében, ahol $\Delta r > \Delta r_c$ az egyik tag piros, a másik kék színű, és fekete vonallal vannak összekötve. A "nem közeli" pontpárok számát szintén megjelenítjük. Az első képen $n = 20$, tehát az exponenciális részben vagyunk; tíz lépéssel később (második kép) a nagy távolsággal rendelkező párok száma több mint kétszeresére nőtt, ezután azonban az ilyen párok száma már gyakorlatilag állandó.



14. ábra. A 13. ábra forgatókönyvében vizsgált pontpárok. A "közeli" párok lilával vannak jelölve, míg a többi kék és piros színű, és fekete vonallal vannak összekötve. A "nem közeli" párok számát a bal felső sarokban adjuk meg. A képek a forgatókönyvet négy különböző lépésben mutatják: (a) $n = 20$, (b) $n = 30$, (c) $n = n_0 = 50$ és (d) $n = 75$. Figyeljük meg, hogy $n = 30$ -tól kezdve az összekötött pontok száma lényegesen lassabban növekszik, mint korábban.

4. Gerjesztetlen disszipatív rendszerek: a disszipációmentes eset snapshot tóruszai

4.1. Mágneses inga

A Duffing-egyenlet a fent leírt módon nem képes gerjesztés nélkül kaotikus viselkedés leírására, mivel a fázistere csak kétdimenziós. Hogy megértsük, hogyan jelenhet meg a káosz gerjesztetlen disszipatív rendszerekben, a jól ismert mágneses inga példáját vesszük alapul, amelynek mozgása négydimenziós fázistérben írható le. A korábbi, gerjesztett esetekkel való összehasonlítás közvetett: itt a rendszer energiája az, ami időben változik, és pillanatnyi értéke a Duffing-rendszer pillanatnyi gerjesztési amplitúdójának analógiájaként tekinthető.

A hárommágnes probléma széles körben használt a káosz, pontosabban a tranziens káosz példaként (lásd pl. [10, 57, 63, 72]). Ugyanakkor [57]-ben kimutatták, hogy ez a rendszer mégsem a szokásos tranziens káoszt mutatja, mivel a tranziensek jellege is változik időben, ezért a *duplán tranziens* káosz elnevezést javasolták az ilyen esetek jellemzésére [10, 57–59]. Újabban a duplán tranziens káosz további jellemzőit is felfedezték [43], amely megfigyeléseket itt egy olyan rendszerre alkalmazzuk, amely különösen jól illeszkedik jelen dolgozat szellemiségéhez.

A Duffing-egyenlet bistabil jellegének fenntartása érdekében *két* azonos mágnest használunk az ingánkhoz. A rögzített mágnesek vízszintes síkja fölött egy rúdhoz rögzítünk egy vasgolyót, amelyet mindkét mágnes vonz. A golyóra a gravitáció, a vonzó mágneses erők, és a légellenállás hat. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy az inga rúdja hosszú a mágnesek közötti távolsághoz képest, ami lehetővé teszi, hogy a golyó dinamikáját teljes egészében egy sík (x, y) koordinátaival írjuk le, és kihasználjuk a kisszögű közelítés előnyeit: az inga x, y síkban történő lengését egy ω_0 sajátfrekvenciájú harmonikus oszcillátorként közelíthetjük. Feltételezzük továbbá, hogy a mágnesek síkja d távolságban fekszik e sík alatt.

A [63, 72] hivatkozások alapján, az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a golyó és a mágnesek között egy inverz négyzetes kölcsönhatási törvény áll fenn, mintha mágneses ponttöltések lennének. Így a következő

dimenziótlan mozgásegyenleteket kapjuk:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\beta \dot{x} + \sum_{i=1}^2 \frac{x_i - x}{D_i(x, y)^3}, \quad (14)$$

$$\ddot{y} = -\omega_0^2 y - 2\beta \dot{y} + \sum_{i=1}^2 \frac{y_i - y}{D_i(x, y)^3}, \quad (15)$$

ahol $(x_i, y_i) = (\pm 1, 0)$ az i -edik mágnes koordinátái ($i = 1, 2$). Az időegységet úgy választjuk meg, hogy a mágneses erő együtthatója egység legyen. A (14) és (15) egyenletekben ω_0 a sajátfrekvencia, β a csillapítási együttható, továbbá $D_i(x, y) = \sqrt{(x_i - x)^2 + y^2 + d^2}$ az inga golyójának i -edik mágnesről mért távolsága. A szimulációinkban az $\omega_0 = 0.3$, és $d = 0.3$ értéket állítjuk be.

Az attraktorok $(x^*, 0)$ helye a lengés síkjában nagyon közel van a mágnesek $(\pm 1, 0)$ helyéhez, mivel d kicsi az egységhez képest. Az eltérést d^3 -nel találjuk arányosnak, vezető rendben $x^* = \pm(1 - d^3(\omega_0^2 + 1/4))$ -et kapunk.

A paraméterek széles skáláján a (14) és (15) egyenletek origója egy hiperbolikus fixpont. Az origó körüli linearizált dinamika szétcsatlódik x -ben és y -ban. Az így keletkező konzervatív erő x -ben taszító: $\ddot{x} = a^2 x$, ahol $a^2 = (4 - 2d^2)(1 + d^2)^{-5/2} - \omega_0^2 > 0$ a vizsgált tartományban. Az y irányban ez az erő vonzó, $\ddot{y} = -\omega^2 y$, ahol $\omega^2 = 2(1 + d^2)^{-5/2} + \omega_0^2$. A disszipatív linearizált dinamika sajátértékei tehát:

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{a^2 + \beta^2} - \beta, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{\omega^2 - \beta^2} - \beta. \quad (16)$$

Egy sajátérték valós és pozitív, egy valós és negatív, kettő pedig komplex, negatív valós résszel (az alulcsillapított ($\beta < \omega$) esetekben, amilyeneket mi is vizsgálunk). A hiperbolikus pont tehát egy egydimenziós instabil, és egy háromdimenziós stabil sokasággal rendelkezik.

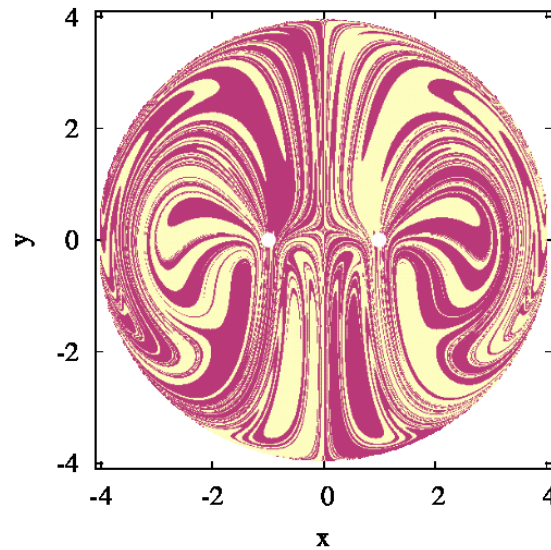
4.2. Időfüggő vonzási tartományok

A mágneses ingák dinamikáját hagyományosan a vonzás tartományaik színezett képeivel ábrázolják. Ezért először megmutatjuk a két stabil x^* fixpont vonzási tartományait viszonylag nagy disszipáció, $\beta = 0.05$ mellett a 15. ábrán. A különböző színek jelölik a különböző attraktorokhoz konvergáló mozgások kezdeti helyeit, a pályákat $E = 4.0$ rögzített kezdeti energiával indítottuk. Azt láthatjuk, hogy a vonzási tartományok bonyolult módon függenek a kezdőfeltételektől. Megjegyzendő, hogy a vonzási tartományok szokásos ábrázolásában a részecskék nyugalomból indulnak, ezért az energia a konfigurációs térben nem állandó. Mi itt az állandó kezdeti energiájú ábrázolást választjuk, mivel az energia monoton csökkenése a duplán tranzienst káosz központi jellemzője, és ezért érdemes megfigyelni a vonzási tartományok energiafüggését. Egy adott rögzített E energiánál a megengedett kezdeti állapotok egy, az inga és a mágnesek potenciális energiájának ekvipotenciális vonala által határolt régióra korlátozódnak. A potenciális energia

$$V(x, y) = \frac{1}{2}\omega_0^2(x^2 + y^2) - \frac{1}{D_1(x, y)} - \frac{1}{D_2(x, y)} + C, \quad (17)$$

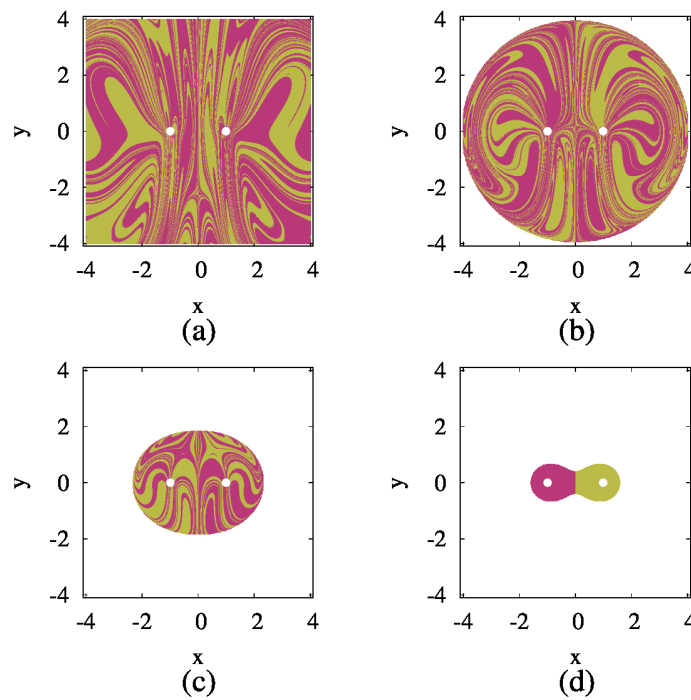
ahol a C konstans úgy választjuk, hogy a potenciális energia a fixpontokban zérus. A 15. ábrán látható vonzási tartomány szerkezet az $E = 4.0$ értékhez tartozik, a kezdeti sebességeket $\dot{x} = 0$, $\dot{y} > 0$ -nak választjuk, ahol a függőleges sebességkomponens nagysága az adott kezdeti energiából számítható.

A 16. ábrán látható, hogy az inga elindításakor a kezdeti energia értéke döntő hatással van a vonzási határokra. Kis energia esetén az inga már az egyik fixpont közelében van, ezért nem lép fel fraktalitás. Nagy



15. ábra. A két stabil fixpont vonzási tartományai az x, y síkban $E = 4$ fix kezdeti energia mellett, $\beta = 0.05$. Fehér pontok jelzik az x^* fixpontattraktorok helyét. A fázistér kiterjedésének kerek alakja abból következik, hogy az ekvipotenciális vonalak elég nagy energia esetén közel kör alakúak.

energia esetén azonban az energia lecsengése során elegendő idő áll rendelkezésre a bonyolult mozgáshoz, ezért a vonzási határok fraktál alakúak.



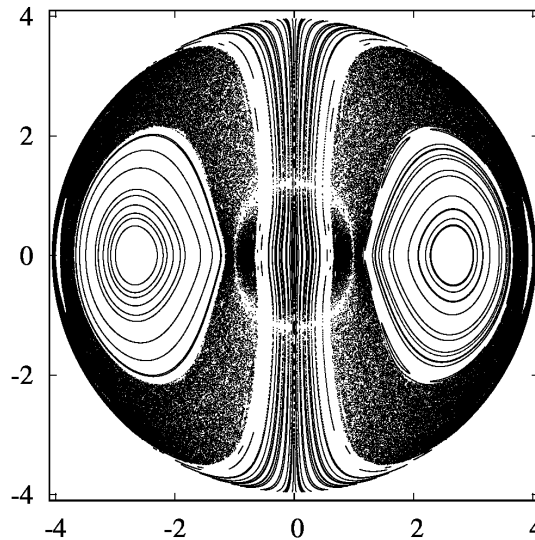
16. ábra. A két stabil fixpont vonzási tartományai az x, y síkban a kiindulási energia különböző értékeire: (a) $E = 5.0$, (b) $E = 4.0$, (c) $E = 3.0$, (d) $E = 2.0$. A disszipáció $\beta = 0.05$, a fixpontattraktorok helyét fehér pontok jelzik.

Hagyományos esetekben a fraktál vonzási határok egy olyan kaotikus nyereghalmaz létezését jelentik, amelynek stabil sokasága a vonzási határok része [54, 72]. Ezt kombinálva a 16. ábrán látható vonzási határok energiafüggő alakjával, a következő érvelést alkalmazhatjuk. Bár egy adott energiához tartozó kezdeti feltételek síkjában lévő pontok halmaza az idő előrehaladtával már nem lesz azonos energiájú, a halmaz átlagos energiája monoton csökken. Így tehát az energia változása hasonlít egy disszipatív rendszer (és az előző szakaszokban a gerjesztési amplitúdó) időbeli fejlődéséhez. A rendszer tehát egy stabil sokaság időben változó struktúrájával hasonló állapotokon megy keresztül, mint a 16. ábrán láthatóak. Fel lehet tehát tételezni egy, a (14) és (15) egyenletekből adódó *snapshot kaotikus nyereghalmaz* létezését, amely az origóban minden pillanatban tartalmazza a (16) sajátértékű hiperbolikus fixpontot. A mozgás végén a snapshot kaotikus nyereghalmaz az origóban lévő nyeregponthoz konvergál, és elveszíti kaotikus jellegét.

A snapshot kaotikus nyereghalmaz természetesen a négydimenziós fázistérben él, és nehezen ábrázolható. (Egy háromdimenziós metszetet korábban megkonstruáltak a hárommágnes probléma egy adott pillanatában [57].) E nehézség miatt mi itt egy komplementer szemléletet követünk egy megfelelő kezdeti sokaság választásával, amely segítségével akár kvantitatív módon is szemléltetni tudjuk a fent vázolt tulajdonságokat.

4.3. A kezdeti Hamiltoni tóruszok időfejlődése

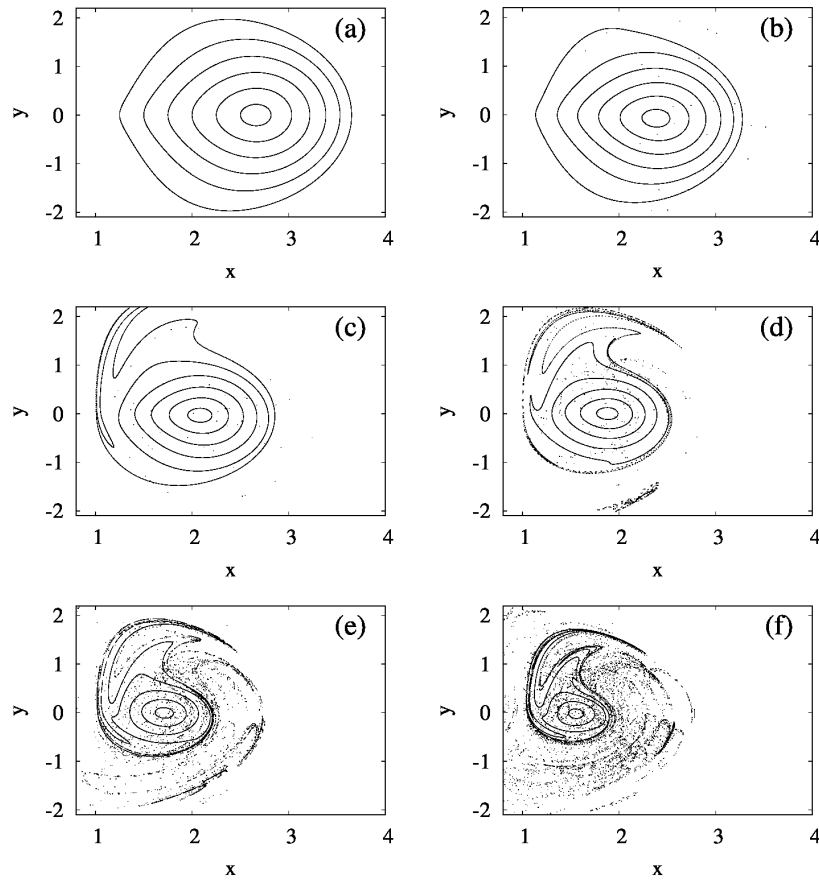
Disszipáció hiányában a mozgás a kezdeti feltételektől függően lehet kaotikus vagy reguláris. Ezt szemlélteti a 17. ábra, ahol ennek a konzervatív rendszernek a Poincaré-metszete látható, amely reguláris szigeteket tartalmaz egy kiterjedt kaotikus tartományban, ami az osztott fázistér szokásos mintázata.



17. ábra. A mágneses inga $\dot{x} = 0, \dot{y} > 0$ Poincaré-metszete az (x, y) síkban, $E = 4.0$ energiájú pályák esetén.

A duplán tranziens káosz új aspektusainak kibontásához a pillanatkép szemléletet alkalmazzuk a gerjesztetlen disszipatív esetre; sokaságok használatával követjük nyomon a fázistér szerkezeti változásainak történetét. Globális attraktorok hiányában (a nyugalmi állapotokon kívül), és mivel egy kiterjesztett sokaság csak a fázistér térfogatának két pont felé történő általános zsugorodását mutatná, hasznosnak találjuk, ha a mozgást a disszipációmentes esetben kezdjük követni, és az ottani bármelyik tórusz pontjait definiáljuk alsokaságnak. Ahogyan azt korábban a gerjesztett Hamiltoni Duffing-problémára a 3. szakaszban tettük, kiválasztjuk a KAM tóruszok egy egymásba ágyazott halmazát. Ezután bekapcsoljuk a disszipációt és követ-

jük a tóruszok sokaságát, és megfigyeljük hogyan deformálódnak, valamint hogy felbomlanak-e, és ha igen, hogyan. Mivel nincs semmilyen gerjesztési periódus, ezért a disszipatív dinamikát ugyanazon a Poincaré metszeten követjük, mint amit nulla disszipáció esetén használtunk. A dinamikát ezen a metszeten (mivel $\dot{x} = 0$ -t választunk) egy háromdimenziós leképezés reprezentálja, amely nem redukálódik síkbeli leképezéssé, mivel az energia most nem állandó. A dinamikát az x, y síkban megfigyelve a teljes fázistérnek a síkra vetített *vetületét* látjuk, a pályák ezért itt metszhetik is egymást. A 18. ábrán Poincaré-metszetek sorozata látható, amelyek pontjai a 17. ábra jobb oldalán látható nagy szigetben lévő 6 KAM tóruszból indulnak. A disszipáció itt viszonylag gyenge, $\beta = 0.005$, így a változás viszonylag kicsi két egymást követő Poincaré-metszet között.



18. ábra. Hat KAM tórusz Poincaré-metszete (14) és (15) disszipációmentes esetéből (a) indulva, majd $\beta = 0.005$ értékű csillapítás bekapcsolása után (b) 1, (c) 2, (d) 3, (e) 4, (f) 5 Poincaré- leképezéssel később. Vegyük észre, hogy az utolsó képeken a görbék metszik egymást, ami azt jelzi, hogy a kezdetben sík tórusz-sokaságok a lépések számának növekedésével jól láthatóan háromdimenzióssá váltak.

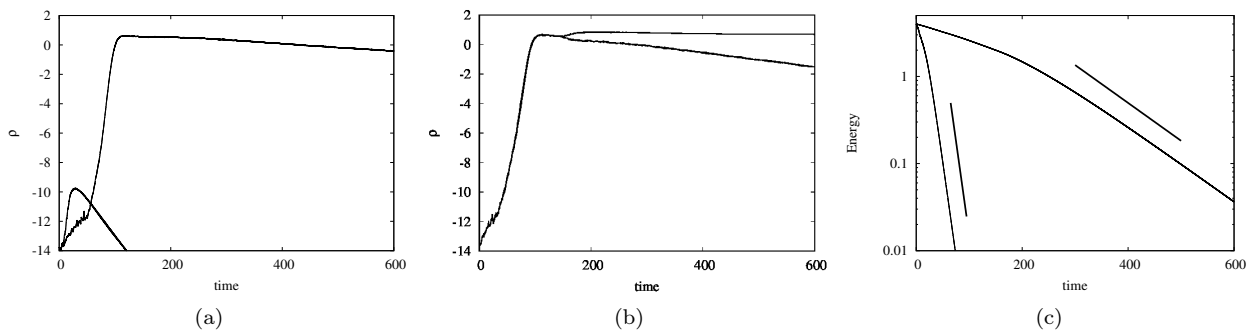
Figyelemre méltó, hogy az eredeti tóruszok képei több Poincaré-leképezésen keresztül megőrzik zárt görbe jellegüket. Láthatjuk, hogy a legkülső tórusz az 1. és 2. Poincaré- metszetek között deformálódni kezd, majd darabokra esik szét a következő két lépés során. A 3. Poincaré-metszeten (d panel) a belső tóruszok is deformálódni kezdenek, mielőtt felbomlanak a 4. lépésben. A viselkedés nagyon hasonló ahhoz, mint amit gerjesztett Hamiltoni rendszerekben, növekvő rámpa esetén látunk [37]. A belső változatosság szempontjából a tóruszok felbomlása azt jelenti, hogy a korlátozott változatosságú sokaságok jelentős változatosságúvá fejlődhetnek, ami ebben az esetben kaotikus viselkedést feltételez, ahogy azt a következő szakasz is szemlélteti.

4.4. A káosz erőssége

A tóruszok felbomlásának folyamatát tovább jellemezhetjük a (8) EAPD mérésével, jelen esetben a 18a ábra kívülről harmadik tóruszára. A ρ mennyiség időfüggését a 19a ábra mutatja a β csillapítási együttható két különböző értékére. Kis, $\beta = 0.005$ disszipáció esetén azt látjuk, hogy a kezdetben közeli pontok közötti távolság egy rövid tranziens után exponenciálisan növekszik, amíg el nem éri a fázistér rendelkezésre álló részének méretét, ami egység nagyságrendű, és $\rho \approx 0$ -nak felel meg. Ezután az átlagos távolság exponenciálisan lassú csökkenésbe kezd, mivel minden pont valamelyik fixpont felé kezd közelíteni. A káosz tehát ebben a sokaságban körülbelül a 100. iterációnál szűnik meg. Nagy, $\beta = 0.05$ disszipáció esetén azt látjuk, hogy a relaxáció sokkal gyorsabban kezdődik, még az előtt, hogy az exponenciálisan növekvő tartomány a fixpontok közötti távolsághoz hasonló kiterjedést eredményezne. Ez a kezdeti szakasz körülbelül a 35. iterációig tart, ami után a káosz megszűnik.

A 19b ábrán egy másik tóruszt követünk (a legkülsőt a 18a ábráról), itt azonban megkülönböztetjük azokat a párokat, amelyek végül ugyanarra, vagy különböző fixpontokra kerülnek. A 19b ábrán látjuk, hogy a két görbe kezdetben nagyon közel van egymáshoz, és egy exponenciális növekedés után eléri a rendelkezésre álló fázistér méretét. Ezután az azonos fixpontra kerülő pontpárok közötti távolság a disszipáció miatt csökken, ellenben a két fixpont közötti $2x^*$ távolsághoz konvergál a különböző attraktorokra kerülő párok esetén.

Megmérhetjük a pályák energiájának sokaságátlagát is, ugyanarra a tóruszra mint amit a 19a ábra esetében használtunk, ismét a β csillapítási együttható két különböző értékét vizsgálva. Az eredményt a 19c ábra mutatja. Ebben az autonóm problémában az energia időfüggése az előző szakaszokban látott gerjesztési amplitúdó időfüggésével analóg. Ezek a mennyiségek az idő múlásával lecsengenek, és végül nullához tartanak.



19. ábra. (a) EAPD egyetlen tóruszra, a disszipáció két különböző értéke mellett mérve: $\beta = 0.005$ (felső görbe) és $\beta = 0.05$ (alsó görbe). (b) EAPD egy másik tóruszra (a legkülső a 18a ábrán) $\beta = 0.005$ esetén. A két görbe az azonos (alsó) vagy különböző (felső) fixpontokra kerülő pontpároknak felel meg. (c) Az inga energiájának sokaságátlagája egyetlen tórusz pontjaira, a disszipáció két különböző $\beta = 0.005$ (felső görbe) és $\beta = 0.05$ (alsó görbe) értéke mellett. A vastag vonalak mindkét esetben a -2β meredekséget mutatják.

5. Összefoglalás

Ebben a dolgozatban olyan módszereket vizsgáltunk, amelyek lehetővé teszik a paraméterdrift által befolyásolt rendszerek dinamikájának követését: a párhuzamos dinamikai időfejlődések elméletének (vagyis a gyakorlatban sokaságoknak) a használatát a fázistérben bekövetkező változások nyomon követésére, snapshot

Smale-lópatkó struktúrák (kaotikus nyereghalmazok) megszerkesztését, valamint a sokaságátlagolt páronkénti távolság kiértékelését a káosz erősségének kvantitatív jellemzésére.

A vizsgált forgatókönyv típus az (i,ii) esetekben a gerjesztés teljes eltűnéséhez vezet, amit azért választottunk, hogy analóg maradjon a gerjesztetlen disszipatív (iii) esettel. A klímaváltozás szempontjából ez egy szélsőséges forgatókönyv; a valós éghajlat esetében egy olyan folyamatnak felelne meg, amely az egyenlítő és a pólus közötti hőmérséklet-kontraszt teljes eltűnéséhez vezetne, ami a szokásos globális cirkuláció megszűnését jelentené. Egy lehetséges mechanizmus a háttérben a beérkező napsugárzás eltűnése, azaz a Nap kihalása lehetne.. A drift természetesen még a zéus gerjesztés platójának elérése előtt szabadon megállítható, vagy pedig beépíthető plató az amplitúdó nem nulla értékénél is. Gazdag dinamikát fedezhetünk fel továbbá, ha a gerjesztésben növekvő rámpát is engedélyezünk [37].

A dinamikai rendszerek összefüggésében példáink különleges tulajdonsága a gerjesztés gyengesége volt. Ezt kihasználva találtunk perturbatív eredményt a periodikus pályák megfelelőire, pl. az időben mozgó snapshot hiperbolikus pontokra. Ezek stabil és instabil sokaságai alapvető fontosságúak voltak a lópatkó konstrukciójában. Az eredmények korlátjának tűnhet, hogy az ilyen pályák azonosítása erősebb gerjesztések esetén valószínűtlen. Ilyen esetekben azonban a stacionárius probléma hiperbolikus fixpontjait vagy cikluspontjait vehetjük, és ezek sokaságait felhasználhatjuk a változó paraméterű probléma stabil és instabil foliációinak közelítéséhez, amint arra [38] rámutatott. A káosz feltétele ekkor a foliációk közötti nagyszámú metszéspont létezése, ami megnyitja az utat a dolgozatban szereplő sokaságalapú eredmények általánosítására.

Az itt bemutatott módszerek felhasználhatóak snapshot fázisportrék készítésére mérnöki alkalmazásokban is. Ezek a hullámok miatt időben változó módon imbolygó hajóktól [74] kezdve, a több skálájú dinamikán [9] keresztül, egészen egy mozgó struktúrára helyezett tömeg viselkedéséig [71], vagy az időfüggő paraméterekkel jellemzett marási stabilitásig [17] terjednek. Az átbillenési események paraméterdrifteket kísérő hirtelen változások, és módszerünk ilyen esetekben is jól alkalmazható (lásd pl. [46, 67]), beleértve az instabilitás elkerülését a paraméterdrift elég gyors sebességével [6, 80]. Az éghajlati érzékenységgel analóg módon a paraméterérzékenység vagy modellbizonytalanság mechanikai rendszerekben is meghatározható (lásd pl. [3, 48]), amik olyan fogalmak, amelyekre az itt javasolt sokaság- megközelítés természetes módon kiterjeszthető.

Végezetül, a duplán tranziens káosz fogalmának lehetséges általánosításáról is spekulálhatunk. Az eredeti terminológia abból ered, hogy az aszimptotikus állapot egy attraktor (a nyugalmi állapot), az ezt megelőző kaotikus jellegű dinamika tehát csak tranziens lehet. Mivel azonban jellegüket tekintve a tranziensek az idő előrehaladtával változnak, a káosz gyengül, a duplán tranziens jelző került bevezetésre. Tekintsünk most egy gerjesztett disszipatív rendszert, az (i) esetet, amelynek tetszőleges előjelű rámpája egy rögzített gerjesztési amplitúdóval rendelkező platóba torkollik, itt tehát a platón létező attraktorok akár kaotikusak is lehetnek. Az ezt megelőző dinamika (a rámpán), ha kaotikus is, biztosan más jellegű, mert a platón lévő végső attraktor(ok) felé tartó tranziensek jellege a gerjesztés változása miatt időben változik. Ezért az ilyen típusú dinamika általánosított duplán tranziens káosznak is nevezhető.

Még általánosabban, mivel a snapshot lópatkó szerkezet (snapshot kaotikus nyereghalmaz) létezését mindkét típusú gerjesztett rendszerben (i), (ii) megmutattuk, valamint bizonyítékot találtunk a létezésére a gerjesztetlen disszipatív esetben (iii) is, azt mondhatjuk, hogy *bármely* tranziens káoszt mutató rendszer dinamikája, ha paraméterdriftnak van kitéve, az általánosított duplán tranziens káosz példájának tekinthető.

Köszönetnyilvánítás

Ez a dolgozat a [36] cikk alapján íródott, köszönet illeti tehát Károlyi Györgyöt és Tél Tamást, a cikk társszerzőit, akik nagy mértékben hozzájárultak a dolgozat elkészültéhez. A dolgozat az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-21-2 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának az NKFIH alpból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

Függelék: Snapshot pontok a Duffing-problémában

Az $x = 0$ körül linearizált (2), (3) mozgásegyenlet $t < \varepsilon_0/\alpha$ esetén a következő:

$$\ddot{x} = x - 2\beta\dot{x} + (\varepsilon_0 - \alpha t) \cos \omega t,$$

míg az $x = \pm 1$ egyensúlyi pontoktól való kis δ eltérésre a linearizált egyenlet

$$\ddot{\delta} = -2\delta - 2\beta\dot{\delta} + (\varepsilon_0 - \alpha t) \cos \omega t.$$

A kettő egységes kezeléséhez tekintsük az

$$\ddot{y} = -\omega_0^2 y - 2\beta\dot{y} + (\varepsilon_0 - \alpha t) \cos \omega t \quad (18)$$

egyenletet, ahol $\omega_0^2 = 2$ ($\omega_0^2 = -1$) megfelel az egyensúlyi pontok körüli viselkedésnek (az origó körüli viselkedésnek).

Első lépésként határozzuk meg ennek az inhomogén lineáris differenciálegyenletnek egy y_P partikuláris megoldását. Feltételezve, hogy ez örökli a gerjesztés frekvenciáját és megtartja időfüggésének jellegét, keressük a következő formában:

$$y_P(t) = A_1(\varepsilon_0 - \alpha t) \cos \omega t + A_2(\varepsilon_0 - \alpha t) \sin \omega t + B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t.$$

A sebességre kapjuk, hogy

$$\dot{y}_P(t) = A_2(\varepsilon_0 - \alpha t) \omega \cos \omega t - A_1(\varepsilon_0 - \alpha t) \omega \sin \omega t + (B_2 \omega - A_1 \alpha) \cos \omega t - (B_1 \omega + A_2 \alpha) \sin \omega t,$$

míg a partikuláris megoldás szerinti gyorsulás

$$\ddot{y}_P(t) = -A_1(\varepsilon_0 - \alpha t) \omega^2 \cos \omega t - A_2(\varepsilon_0 - \alpha t) \omega^2 \sin \omega t - (2A_2 \alpha + B_1 \omega) \omega \cos \omega t + (2A_1 \alpha - B_2) \omega \sin \omega t$$

alakú. Ezeket (18)-ba behelyettesítve, összegyűjtve az azonos időfüggésű kifejezéseket, és az együtthatókat nullával egyenlővé téve a következő kifejezéseket kapjuk:

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \omega_0^2)A_1 - 2\beta\omega A_2 + 1 &= 0, \\ 2\beta\omega A_1 + (\omega^2 - \omega_0^2)A_2 &= 0, \\ 2\alpha\beta A_1 + 2\alpha\omega A_2 + (\omega^2 - \omega_0^2)B_1 - 2\beta\omega B_2 &= 0, \\ -2\alpha\omega A_1 + 2\alpha\beta A_2 + 2\beta\omega B_1 + (\omega^2 - \omega_0^2)B_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ennek a lineáris egyenletrendszernek a megoldása

$$\begin{aligned} A_1 &= -(\omega^2 - \omega_0^2)/Z, \\ A_2 &= 2\beta\omega/Z, \\ B_1 &= 2\alpha\beta[(\omega_0^2 + \omega^2)^2 - 4\omega^2(\beta^2 + \omega^2)]/Z^2, \\ B_2 &= 2\alpha\omega[-(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\beta\omega_0)^2]/Z^2, \end{aligned} \quad (19)$$

ahol

$$Z = (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\beta\omega)^2.$$

A partikuláris megoldás átalakítható az

$$y_P(t) = A(\varepsilon_0 - \alpha t) \cos(\omega t + \phi) + B \cos(\omega t + \theta) \quad (20)$$

alakba, az

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$$

amplitúdók, és

$$\tan \phi = -A_2/A_1, \quad \tan \theta = -B_2/B_1$$

fázisok használatával. Ebből az alakból világosan látszik, hogy abban a t_0 pillanatban, amikor a gerjesztés eltűnik, y_P még nem nulla, hanem a $B \cos(\omega t_0 + \theta)$ értékét veszi fel.

Az n periódus után, $t = nT$ -nél felvett stroboszkopikus leképezésen a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} y_{P,n} &= A_1(\varepsilon_0 - \alpha nT) + B_1 = A(\varepsilon_0 - \alpha nT) \cos \phi + B \cos \theta, \\ \dot{y}_{P,n} &= A_2(\varepsilon_0 - \alpha nT)\omega - A_1\alpha + B_2\omega = -A(\varepsilon_0 - \alpha nT)\omega \sin \phi - A\alpha \cos \phi - B\omega \sin \theta. \end{aligned} \quad (21)$$

A Hamiltoni határesetben ($\beta = 0$) a fázisok egyszerűen $\phi = 0$ és $\theta = \pi/2$ lesznek, mivel $A_2 = B_1 = 0$ és $B_2 > 0$.

Térjünk most rá (18) általános megoldására. Ez a homogén rész általános megoldásának és a partikuláris megoldásnak az összege. A homogén megoldás $e^{\lambda t}$ exponenciális típusú két különböző kitevővel:

$$\lambda_{\pm} = -\beta \pm \sqrt{-\omega_0^2 + \beta^2}.$$

Az általános megoldás tehát

$$y(t) = c_+ e^{\lambda_+ t} + c_- e^{\lambda_- t} + y_P(t). \quad (22)$$

A $c_{\pm}$ együtthatókat y -ra és annak deriváltjára előírt kezdőfeltételek határozzák meg. Ezeket $y_0, \dot{y}_0$ -val jelölve az együtthatókra kapjuk:

$$c_+ = \frac{(\dot{y}_0 - \dot{y}_P(0)) - \lambda_-(y_0 - y_P(0))}{\lambda_+ - \lambda_-}, \quad c_- = \frac{-(\dot{y}_0 - \dot{y}_P(0)) + \lambda_+(y_0 - y_P(0))}{\lambda_+ - \lambda_-}.$$

A (22) egyenletet

$$y(t) - y_P(t) = c_+ e^{\lambda_+ t} + c_- e^{\lambda_- t}$$

módon átrendezve láthatjuk, hogy az $y_P(t)$ partikuláris megoldás egy *mozgó* pontot ír le, amely, *megtartja*

sajátértékeit, és így stabilitási jellegét, minden időpontban, amíg a lineáris közelítés érvényes marad. Bár eredetileg egy fázistérbeli tartományban végeztünk linearizálást, ez a végeredmény egy megkülönböztetett pálya körüli linearizálásnak felel meg, és annak stabilitási tulajdonságáról szolgáltat információt. Azt mondhatjuk tehát, hogy $y_P(t)$ megadja egy *snapshot pont* helyét, a deriváltja pedig a sebességet. $\omega_0^2 = -1$ esetén az egyik sajátérték pozitív, ez a hiperbolikus esetnek felel meg, és

$$x_H^*(t) = y_P(t)|_{\omega_0^2=-1}$$

a (4)-ban megadott snapshot hiperbolikus pont (SHP) helyét jelöli, míg $\omega_0^2 = 2$ esetén mindkét sajátérték negatív (valós részükben), ami egy snapshot nóduspontnak (SNP) felel meg az

$$x_N^*(t) = \pm 1 + y_P(t)|_{\omega_0^2=2}$$

helyen, (6) szerint. A csillapítás eltűnése esetén ($\beta = 0$) ez egy (12) szerint adott snapshot elliptikus pontba (SEP) megy át.

A Duffing-rendszerben azért tudtunk snapshot pályákat azonosítani, mivel az $\varepsilon(t)$ gerjesztési amplitúdót kicsinek feltételeztük. A gerjesztetlen ($\varepsilon = 0$) stacionárius eset az autonóm kétfenekű potenciál problémája, amelyben ismert egy hiperbolikus pont ($x, \dot{x} = 0$), és egy stabil pontpár ($x = 0, \dot{x} = \pm 1$), amelyekből a paraméterfüggő esetben a snapshot pályák öröklődnek. Az, hogy a snapshot pályák analitikus formái hogyan azonosíthatók általános esetekben (akár a Duffing-rendszerben is nem kis $\varepsilon(t)$ esetén), továbbra is valódi kihívás marad.

Hivatkozások

- [1] Argyris, J., Faust, G., Haase, M., Friedrich, R.: An Exploration of Dynamical Systems and Chaos, Springer, New York (2015)
- [2] Bach, E., Krishnamurthy V., Mote S., Sharma A.S., Ghil M. and Kalnay E.: Ensemble Oscillation Correction (EnOC): Leveraging oscillatory modes to improve forecasts of chaotic systems, J. Climate, **34**, 5673–5686 (2021)
- [3] Balasuriya, S.: Stochastic sensitivity: A computable Lagrangian uncertainty measure for unsteady flows. SIAM Review, **62**, 781–816 (2020)
- [4] Bódai T. and Tél T.: Annual variability in a conceptual climate model: Snapshot attractors, hysteresis in extreme events, and climate sensitivity, Chaos **22**, 023110 (2012)
- [5] Bódai T. et al.: The forced response of the El Niño–Southern Oscillation–Indian Monsoon teleconnection in ensembles of Earth System, Models, J. Climate **33**, 2163–2182 (2020)
- [6] Bonciolini, G., and Noiray, N.: Bifurcation dodge: avoidance of a thermoacoustic instability under transient operation, Nonlinear Dynamics **96**, 703 (2019)
- [7] Cantisán J., Seoane J. M., and Sanjuán M. A. F.: Transient chaos in time-delayed systems subjected to parameter drift, J. Phys. Complexity, accepted, 2021
- [8] Chekroun, M. D., Simonnet, E., and Ghil, M.: Stochastic climate dynamics: random attractors and time-dependent invariant measures, Physica D **240**, 1685–1700 (2011)
- [9] Chen, Z., and Chen, F.: Complex aperiodic mixed mode oscillations induced by crisis and transient chaos in a nonlinear system with slow parametric excitation, Nonlinear Dynamics **100**, 659 (2020).

- [10] Chen X., Nishikawa T., and Motter A. E.: Slim fractals: The geometry of doubly transient chaos, *Phys. Rev. X* **7**, 021040 (2017)
- [11] Chian A. C.-L., Suzana S. A., Silva S. S. A., Rempel E. L., Bellot Rubio L. R., Gošić M., Kusano K., and Park S.-H.: Lagrangian chaotic saddles and objective vortices in solar plasmas, *Phys. Rev. E* **102**, 060201(R), 2020
- [12] Cvitanovic P., Artuso R., Mainieri R., Tanner G., and Vattay G.: *Chaos: Classical and Quantum*, ChaosBook.org, edition17, Jul 19 2020
- [13] Crauel, H. and Flandoli, F., Attractors for random dynamical systems. *Probabilistic Theory and Related Fields*, **100**, 365 (1994)
- [14] Dai, A., Luo, D., Song, M. et al. Arctic amplification is caused by sea-ice loss under increasing CO₂. *Nat Commun* **10**, 121 (2019)
- [15] Deser, C.: Certain uncertainty: The role of internal climate variability in projections of regional climate change and risk management, *Earth's Future* **8**, e2020EF110854 (2020)
- [16] Dijkstra, H.A.: *Nonlinear Climate Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2013
- [17] Dombóvári, Z., Munoa, J., Kuske, R., Stépán, G.: Milling stability for slowly varying parameters, *Procedia CIRP* **77**, 110 (2018).
- [18] Drótos G., Bódai T., and Tél T.: Probabilistic concepts in a changing climate: A snapshot attractor picture, *J. of Climate* **28**, 3275 (2015)
- [19] Drótos G., Bódai T., and Tél T.: Quantifying nonergodicity in nonautonomous dissipative dynamical systems: An application to climate change, *Phys. Rev. E* **94**, 022214 (2016)
- [20] Flato, G.M.: Earth system models: an overview. *Wiley Interdiscip. Rev.* **2**, 783 (2011)
- [21] Froyland G., An analytic framework for identifying finite-time coherent sets in time-dependent dynamical systems, *Physica D* **250**, 1 (2013)
- [22] Ghil M., Chekroun M. D., and Simonnet E.: Climate dynamics and fluid mechanics: Natural variability and related uncertainties, *Physica D* **237**, 2111 (2008)
- [23] Ghil M, and Zaliapin I.: Understanding ENSO variability and its extrema. In: *Extreme Events: Observations, Modeling and Economics*, M. Chavez, M. Ghil and J. Urrutia-Fucugauchi (Eds.), Geophysical Monograph 214, American Geophysical Union, Wiley, pp. 63–78, 2015
- [24] Ghil M.: A century of nonlinearity in the geosciences, *Earth Space Sci* **6**, 1007 (2019)
- [25] Ghil M. and Lucarini V.: The physics of climate variability and climate change, *Rev Mod Phys* **92**, 035002, 2020 *Annual Review of Fluid Mechanics* **47**, 137-162
- [26] Guseva K., Daitche A., and Tél, T.: A snapshot attractor view of the advection of inertial particles in the presence of history force, *Eur. Phys. J. Special Topics* **226**, 2069-2078 (2017)
- [27] Hadjighasem A, Farazmand M. and Haller G.: Detecting invariant manifolds, attractors and generalized KAM tori in aperiodically forced mechanical systems, *Nonlinear Dyn.* **73**, 689 (2013)
- [28] Haller G.: Lagrangian coherent structures, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **47**, 137-162 (2015)
- [29] Haszpra T., and Herein M.: Ensemble-based analysis of the pollutant spreading intensity induced by climate change, *Scientific Reports* **9**, 3896 (2019)
- [30] Haszpra T., Herein M., and Bódai T.: Investigating ENSO and its teleconnections under climate change in an ensemble view – a new perspective, *Earth Syst. Dynam.* **11**, 267–280 (2020).

- [31] Haszpra T., Topál D., and Herein M.: On the Time Evolution of the Arctic Oscillation and Related Wintertime Phenomena under Different Forcing Scenarios in an Ensemble Approach, *J. Climate* **33**, 3107–3124 (2020)
- [32] Haszpra T., Topál D., and Herein M.: Detecting forced changes in internal variability using Large Ensembles: On the use of methods based on the “snapshot view”, *US CLIVAR Variations* **18**, 36–43, Summer (2020)
- [33] Herein M., Drótos G., Haszpra T., Márffy J., and T. Tél T.: The theory of parallel climate realizations as a new framework for teleconnection analysis, *Scientific Reports* **7**, 44529 (2017)
- [34] Hunt B., and Ott E.: Defining chaos, *Chaos* **25**, 097618 (2015)
- [35] Ide K., Small D., and Wiggins S.: Distinguished hyperbolic trajectories in time-dependent fluid flows: analytical and computational approach for velocity fields defined as data sets, *Nonlin. Processes Geophys.* **9**, 237–263 (2002)
- [36] János D., Károlyi G., and Tél T.: Climate change in mechanical systems: the snapshot view of parallel dynamical evolutions, *Nonlinear Dyn.* **106**, 2781–2805 (2021)
- [37] János D., and Tél T.: Chaos in Hamiltonian systems subjected to parameter drift, *Chaos* **29**, 121105 (2019)
- [38] János D. and Tél T.: Chaos in conservative discrete-time systems subjected to parameter drift, *Chaos* **31**, 033142 (2021)
- [39] Kalnay, E.: *Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002
- [40] Kapitaniak T.: *Chaos for Engineers*. Springer, Berlin, 2000
- [41] Károlyi G., Tél T., de Moura A. P., and Grebogi C.: Reactive particles in random flows. *Phys. Rev. Lett.* **92**, 174101 (2004).
- [42] Károlyi G., Prokaj R. D., Scheuring I., and Tél T.: Climate change in a conceptual atmosphere-phytoplankton model, *Earth System Dynamics* **11**, 603–615 (2020)
- [43] Károlyi Gy., and Tél T.: New features of doubly transient chaos: Complexity of decay, *J. Phys. Complexity*, accepted (2021)
- [44] Kaszás B., Feudel U., and Tél T.: Death and revival of chaos, *Phys. Rev. E* **94**, 062221 (2016)
- [45] Kaszás B., Feudel U., and Tél T.: Leaking in history space: A way to analyze systems subjected to arbitrary driving, *Chaos* **28**, 033612 (2018)
- [46] Kaszás B., Feudel U., and Tél T.: Tipping phenomena in typical dynamical systems subjected to parameter drift, *Scientific Reports* **9**, 8654 (2019)
- [47] Kaszás B., Haszpra T., and Herein M.: The snowball Earth transition in a climate model with drifting parameters: Splitting of the snapshot attractor, *Chaos* **29**, 113102 (2019)
- [48] Kaszás, B., and Haller, G.: Universal upper estimate for prediction errors under moderate model uncertainty. *Chaos* **30**, 113144 (2020)
- [49] Kloeden P.E., Pullback attractors in non-autonomous difference equations, *Journal of Difference equations and Applications*, **6**, 33 (2000)
- [50] Kovács T.: How can contemporary climate research help understand epidemic dynamics? Ensemble approach and snapshot attractors, *J. R. Soc. Interface* **17**, 20200648 (2020),
- [51] Ku W.L., Girvan M., and Ott E.: Dynamical transitions in large systems of mean field-coupled Landau-Stuart oscillators: Extensive chaos and cluster states, *Chaos* **25**, 123122 (2015)

- [52] Lai Y.-C.: Transient fractal behavior in snapshot attractors of driven chaotic systems, *Phys. Rev. E* **60**, 1558 (1999)
- [53] Lai, Y.-C., Feudel U., and Grebogi C.: Scaling behavior of transition to chaos in quasiperiodically driven dynamical systems. *Phys. Rev. E* **54**, 6070 (1996)
- [54] Lai Y.-C., and Tél T.: *Transient Chaos*, Springer, New York, 2011
- [55] Mathur M., Haller G., Peacock T., Ruppert-Felsot J.-E., and Swinney H. L.: Uncovering the Lagrangian skeleton of turbulence, *Phys.Rev. Lett.* **98**, 144502 (2007)
- [56] Milinski, S., Maher, N., and Olonscheck, D.: How large does a large ensemble need to be?, *Earth Syst. Dynam.*, **11**, 885–901 2020
- [57] Motter A., E., Gruiz M., Károlyi G., and Tél T.: Doubly transient chaos: Generic form of chaos in autonomous dissipative systems, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 194101 (2013)
- [58] Nagy, P., and Tasnádi, P.: Irregular Chaos in a Bowl, in: Dębowska E, Greczyło T (ed.) *Key Competences in Physics Teaching and Learning*, Proceedings of GIREP EPEC 2015, Institute of Experimental Physics, Wrocław, 2016, pp. 262-269.
- [59] Nagy, P., and Tasnádi P.: Double Transient Chaotic Behaviour of a Rolling Ball, *Open Access Journal of Physics* **2**, 11 (2018)
- [60] Neufeld Z, Tél T.: Advection in chaotically timedependent open flows. *Phys. Rev. E* **57**, 2832–2842 (1988)
- [61] Ott E.: *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge U. Press, Cambridge, 1993
- [62] Patel D., Canaday D., Girwan M., Pomerance A., Ott E., *Chaos* **31**, 033149 (2021)
- [63] Peitgen H.-O., Jürgens H., and Saupe D.: *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*, Springer, Dordrecht, 2004.
- [64] Pierini S., Ghil M. and Chekroun M. D.: Exploring the pullback attractors of a low-order quasigeostrophic ocean model: the deterministic case. *J. Climate* **29**, 4185-4202 (2016)
- [65] Pierini S., Chekroun . D., and Ghil, M.: The onset of chaos in nonautonomous dissipative dynamical systems: A low-order ocean–model case study, *Nonlinear Proc. Geophysics*, **25**, 671-692 (2018)
- [66] Pierini S.: Statistical significance of small ensembles of simulations and detection of the internal climate variability: An excitable ocean system case study, *J. Stat. Phys.*, **179**, 1475-1495 (2020)
- [67] Pierini, S., and Ghil M.: Climate tipping points induced by parameter drift: an excitable system study, *Scientific Reports*, **11**, 11126 (2021)
- [68] Romeiras F. J., Grebogi C., and Ott E.: Multifractal properties of snapshot attractors of random maps, *Phys. Rev. A* **41**, 784 (1990)
- [69] Serquina R., Lai Y.-C., and Chen Q.: Characterization of nonstationary chaotic systems, *Phys. Rev. E* **77**, 026208 (2008).
- [70] Stocker, T., Qin, D., Plattner, G.K., Tignor, M., Allen, S., Boschung, J., Nauels, A., Xia, Y., Bex, V., Midgley, P.: IPCC, *Climate Change 2013: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change*, Cambridge University Press, Cambridge, 2013
- [71] Tadibakhsh, I.G., Wangm Y.-M., Transient vibrations of a tau inclined cable with a riding accelerating mass, *Nonlinear Dynamics* **6**, 143 (1994)
- [72] Tél T., and Gruiz M.: *Chaotic Dynamics*, Cambridge, New York, 2006

-
- [73] Tél T, Bódai T, Drótos G, Haszpra T, Herein M, Kaszás B and Vincze M.: The theory of parallel climate realizations: A new framework of ensemble methods in a changing climate – an overview. *J. Stat. Phys.* **179**, 1496 (2020)
 - [74] Thompson, J. M. T., Rainey, R. C. T., and Soliman, M. S.: Mechanics of ship capsizing under direct and parametric wave excitation, *Philosophical Transactions of the Royal Society, London* **338**, 471 (1992)
 - [75] Yu L., Ott E., and Chen Q.: Transition to chaos for random dynamical systems, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2935 (1990)
 - [76] Vilela R D.: Doubly transient chaos in a decaying open flow, preprint 2020
 - [77] Vannitsem, S., Demaeyer J., and Ghil M.: Extratropical low-frequency variability with ENSO forcing: A reduced-order coupled model study, *Journal of Advances in Modeling Earth Systems*, **13**, e2021MS002530 (2021)
 - [78] Vincze M., Dan Borcia I., and Harlander U.: Temperature fluctuations in a changing climate: an ensemble based experimental approach, *Scientific Reports* **7**, 254 (2017)
 - [79] Wiggins S.: *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, 2nd ed., Springer, Berlin, 2003
 - [80] Zhang, X., Xu, Y., Liu, Q. et al: Rate-dependent bifurcation dodging in a thermoacoustic system driven by colored noise. *Nonlinear Dyn* **104**, 2733–2743 (2021)