

Logikus gondolkodás mérése a matematikában használt vizuális reprezentációk segítségével

Szerző: Back Annamária

Szak: Az óvodai- és elemi oktatás pedagógiája, BA.

Intézmény: Partiumi Keresztény Egyetem, Nagyvárad.

Témavezető: Dr. Debrenti Edith, egyetemi adjunktus

Tartalomjegyzék

Bevezetés	1
I. Elméleti rész	2
1. A problémamegoldás	2
2. A feladat.....	2
3. Bruner reprezentációs elmélete	2
4. A logika és a matematika	4
5. Geometria a matematikában.....	5
6. A síkidomok.....	6
7. Elforgatások a síkban	7
8. Térbeli viszonzyszavak.....	7
II. Kutatási rész - Logikus gondolkodás mérése a matematikában használt vizuális reprezentációk segítségével	8
1. A kutatás előzményei	8
2. Kutatási témám	8
3. A kutatás célja, kérdései	9
4. Hipotézisek	9
5. A kutatás résztvevői	9
6. A kutatás módszerei és eszközei	9
7. A feladatok és megoldásaik ismertetése	11
7.1. A Hexagonos feladat.....	11
7.2. A tortás feladat.....	12
7.3. Einstein feladványa	13
8. A weboldal ismertetése	16
9. A kutatás eredményei.....	17
9.1. Hexagonos játék eredményei	17
9.2. Tortás játék eredménye	19
9.2.1 A szigorúan vett eredmények.....	20
9.2.2 A „lazán” vett eredmények	21
9.3. Einstein feladatának eredményei.....	23
10. Első hipotézis igazolása	28
11. Második hipotézis igazolása	28
12. Következtetés a hipotézisek mentén	29
13. Összegzés.....	29
Források:	30
Melléklet	31

Bevezetés

A matematika mindig is közel állt hozzám, szeretek logikusan gondolkodni, és másokat arra ösztönözni és tanítani, hogy ugyanígy tegyenek. Emiatt, dolgozatom három matematikai-logikai feladatra épül, azok megoldási módszereire a különböző korcsoportokat is figyelve. Megvizsgáltam egyrészt azt, hogy a jelenlegi kisiskolások logikai gondolkodása milyen gyors és mennyire hatékony. Emellett utánajártam annak is, hogy a leendő pedagógusok, akik a következő generációkat tanítják majd a logikus gondolkodásra, milyen szinten birtokolják ezt a tudást. A tanítóképzős hallgatók mellett más szakon levő fiatal felnőtteket is megvizsgáltam, hiszen véleményem szerint minden területhez kapcsolható a logika fontossága. A feladatok során nem csak logikus gondolkodásra van szükség, hanem nagymértékű szövegértésre is, a feladatok komplexitása miatt.

A mai világban sajnos minden korosztály rákényszerült a számítástechnikai eszközök használatára, a vírusos helyzet miatt ezeken a felületeken zajlik az online oktatás. Tapasztalataim szerint ezt a kényszert a legfiatalabbak élvezik a legjobban, a korral viszont egyenesen arányosan nő az a tendencia, hogy ezt a szükségletet minimalizálják. Véleményem szerint nem számít mennyire okos az eszköz, nem mindig az a leghatékonyabb módszer, ha problémamegoldásról van szó. Dolgozatomban bemutatásra kerül pedagógiai kísérletem, mely megvizsgálja, hogy ugyanazt a logikai feladatot kétkezi manipulálás útján, vagy számítógépes játék formájában tudják a kísérletem alanyai sikerebben megoldani.

I. Elméleti rész

1. A problémamegoldás

A problémamegoldás az intelligenciának meghatározó teljesítménye, egy emberi fő jellemvonás. Tudatos gondolkodásunk túlnyomó része problémákkal foglalkozik. (Pólya, 1970) Pólya szerint, ha egy tanuló felteszi magában azt a kérdést, hogy a megoldandó feladat milyen típus közé sorolható, könnyebben rájöhet a megoldásra is. Emiatt hasznos a problémák osztályozása és a típusok megkülönböztetése.

A kíváncsiság, az akarat és az elhatározás mind közrejátszik a probléma megoldásában. Minél nagyobb a kíváncsiság bennünk, annál nehezebb problémákat tudunk megoldani. (Pólya, 1971)

A tapasztalt és tanultabb problémamegoldó másképp gondolkodik, mint a tapasztalatlan problémamegoldó. Mindenki találjat valamilyen szinten, de a tapasztalt megkísérli kitalálni a megoldás egy részét, van már egy elképzelése, elvárása a megoldási menettel, illetve megoldással kapcsolatban, az addigi ismereteit használja fel a problémamegoldásra. Ezzel szemben, Pólya szerint úgy a tapasztalt, mint a kevésbé jártas is képes eljutni a helyes megoldáshoz. (Pólya, 1971)

2. A feladat

A matematikában feladatnak hívjuk az olyan „pontosan megfogalmazott gyakorlati vagy elméleti kérdést, melyet gondolkodási és számítási műveletekkel lehet megoldani.” (Olosz E, Olosz F., 2000, 205. o)

3. Bruner reprezentációs elmélete

Bruner megvizsgálta, hogy az ember hogyan reprezentálja és tárolja a külvilág információit. Szerinte minden gondolkodási folyamat három síkon mehet végbe.

Az első a *materiális (enaktív) sík*, mely a konkrét cselekvéseket, manipulációs gyakorlatokat foglalja magába. Bruner meglátása szerint minél fiatalabb gyerekeket tanítunk, annál több konkrét cselekvést kell beiktatnunk.

A második az *ikonikus sík*, mely során az ismeretszerzés képeken és elképzelt szituációkon keresztül történik. A különböző rajzok, ikonok a melyebb megértést segítik. A vizuális reprezentáció gyakran segít egy probléma értelmezésében, használatukra tudatosan és türelemmel kell nevelni a tanulókat.

A harmadik a *szimbolikus sík*, melyben a matematikai szimbólumok és a nyelv játszanak nagy szerepet. Bruner szerint ez a három az oktatás minden fázisában jelen van. Ha az egyik fázisból a másikba térünk át, az növeli a problémamegoldó gondolkodás hatékonyságát és a rugalmasságot is. Fontos, hogy ne túl korán térjünk át erre a síkra, mert az osztály minden tanulója más-más szinten van még, nem mindenki értheti meg a harmadik síkhoz tartozó magyarázatokat. (Bruner, 1974)

Dienes szerint a matematikát a gyermek tevékenységére, játékára, az ő tapasztalatai és konkrét, életközeli élményeire kell építeni. Emiatt megfogalmazta a matematika alapelveit, melyek a következők:

1. *A dinamika elve*, mely szerint a játékos feladatokat megfelelő felosztással kell adagolni, legelőször előkészítő, majd strukturált, végül gyakorló játékokat, feladatokat kell bevinni. Legelőször konkrét tárgyakat használnak, végül, ha a korosztály is megengedi, be lehet vezetni a gondolati játékokat is.
2. *A konstruktivitás elve* szerint a játékok strukturálásában az elemzést mindig meg kell, hogy előzze a konstrukció, mely 12 éves kor előtt majdnem teljesen hiányzik.
3. *A matematikai változatosság elve*, mely szerint a változókat tartalmazó fogalmakat olyan tapasztalatok alapján lehet eredményesen kialakítani, amelyek a lehető legtöbb változót variálják.
4. *A perceptív (észlelési) változatosság vagy többszörös konkretizálás elve* alapján a gyermekeknek egy-egy matematikai struktúrát vagy fogalmat különbözőképp kell bemutatni, elmagyarázni, figyelve arra, hogy a fogalmak egyéni különbségei érvényesülhessenek, illetve, hogy a gyerekek a magyarázatot minél jobban megérthessék, az ismereteket elsajátíthassák. (Dienes, 2015, 47. old)

„A kéz és a tevékenység bevonása a gondolkodásba nem alacsony szintű gondolkodást jelent, hanem éppen az adott témakörben való absztrahálás lehetőségéhez való

alkalmazkodást.” (Szendrei, 2005, 319. o). Egyrészt ezért gondoltam úgy, hogy mindkét korcsoporttal (9-11 évesek és egyetemisták) oldatok kétkezi manipulálással megoldható feladatokat, ezzel nem a nagyokat leminősítve, hanem az ő dolgukat is megkönnyítve. Másrészt, véleményem szerint, az életkori sajátosságokat figyelembe véve, az elemi osztályosoknak ez a legmegfelelőbb megközelítés.

Comenius hozzájárult a szemléltetés kialakításához, a konkrét tárgyakkal való tanuláshoz a matematika terén. Pestalozzi kimondottan a számtan tanításához készített segédeszközöket, nyomtatott lapok formájában. (Szendrei, 2005)

Szendrei (2005) véleménye, hogy amit kétkezi manipulációval meg lehet oldani, az maradjon a konkrét eszközök számára, ne a számítógépekkel végezzék el a tanulók/ tanárok a probléma megoldását, mivel fejlesztő hatása van a különböző érzékszervekre, valamint az emlékezetre, képzeletre és a térszemléletre is.

4. A logika és a matematika

A matematika tanításához elengedhetetlenek a logikai, illetve a matematikai logikai ismeretek. A logika a filozófia egyik ága, amely rendszerezi és megvizsgálja a gondolkodás alapformáit és törvényeit. A matematikai logika módszere inkább a matematikához, míg tárgya a logikához tartozik. (Olosz E, Olosz F., 2000)

A matematikában használt logikai állítás olyan kijelentő mondat, amelyikről biztosan el lehet dönteni, hogy igaz vagy hamis. A logikai állítások megvizsgálása során figyelembe kell veyük a különböző lépéseket:

„- az állítások logikai értéknek meghatározása

- adott logikai értékhez, adott alaphalmazokhoz kapcsolódó állítás megfogalmazása

- az állítások átfogalmazása úgy, hogy a logikai értéke ne változzon meg.

- az állítás tagadása

- az és/vagy logikai műveletek alkalmazása egyszerű állítások összekapcsolásával.”

A „Minden” és „Mindegyik” szavakkal kezdődő logikai állítások egy bizonyos halmazra vonatkoznak. Ilyenkor a mondat akkor válik igazzá, amikor az alaphalmaz minden elemére egyaránt igaz. A logikai mondatokban fellelhető „és”, illetve „vagy” kötőszavak felhasználásával gyakorlatilag logikai műveletet végzünk. Az „és” szavakat tartalmazó

mondatok csak akkor válnak igazzá, ha a két összekapcsolt tagmondat mindkét része igaz. A „vagy” szóval ellátott mondat akkor eredményez igaz mondatot, ha a tagmondatok közül legalább az egyik igaz.

Ha egy szövegben két vagy több állítás található, akkor megfogalmazhatunk egy újabb állítást, melyet következtetésnek hívunk. Alsó tagozaton általában csak egyszerű következtetéseket fogalmazunk meg, de érettebb korban már a következmény helyességét is vitathatjuk. (Herendiné, 2013)

5. Geometria a matematikában

A geometria a matematika egyik legrégebben kialakult ága. A kezdetekben a földméréshez használták fel az ezzel kapcsolatos tudásukat. Manapság az elemi iskolák az euklideszi geometriának néhány részét tanítják, mint például a szögeket, vagy mértani alakzatokat, testeket. A mértani alapfogalmakat tekintve az a legfontosabb, hogy a tanuló fel tudja ismerni, be tudja azonosítani, képes legyen lerajzolni, el tudja képzelni, tudja reprezentálni azt. A tanulókat úgy kell oktatni, hogy a mértani ismereteiket a mindennapi életben is fel tudják használni. Ehhez elengedhetetlenek a szemléltetőanyagok, segédanyagok és a reprezentációk. Módszertanilag elengedhetetlen, hogy a különböző mértani testeket a diák tapogassa, rajzolhassa, pontosan lássa maga előtt. A szakirodalom szerint a logikusan történő gondolkodásban célravezető, ha a tanulók meg vannak szoktatva azzal, hogy a feladat értelmezéséhez csak a szükséges tudnivalót tartalmazza a probléma. (Olosz E, Olosz F., 2000)

Általános iskolában még csak a geometria fogalmainak alapozása történik meg. A gyermekek tényleges cselekvések által ismerik meg, tapasztalják az összefüggéseket, szabályszerűségeket. Herendiné szerint (2013) a geometriai tevékenységek négy csoportba sorolhatóak: 1. konstruálások és válogatások, 2. transzformációk, 3. tájékozódás, illetve a 4. geometriai alakzatok mérhető tulajdonságainak feltárása. A konstruálások (1) segítik a gyermekek tér- és síkszemléletének kialakulását. Ehhez hozzátartoznak a különböző építések, kirakósok, gyurmázás, papírhajtogatás. Válogatások alatt a különböző halmazokba való rendeltetést értjük. A transzformációk (2), úgy, mint elforgatás, eltolás, kicsinyítés, nagyítás, tükrözés, torzítás során a gyermekek a térben és síkban levő alakzatok tulajdonságát fedezhetik fel. A tudatos tájékozódás (3) a síkban és térben is elengedhetetlen. Saját mozgásunk helyes koordinálásában is szükségünk van e képességre. A geometriai alakzatok felfedezését követően

már kisiskolás korban foglalkozunk az alakzatok mérésével, terület- és kerület, illetve a felszín számításával.

A geometriai gondolkodás a van Hiele-elmélet szerint öt szinten keresztül épül ki. Ezek a következők:

1. szint: alakzatok globális megismerése
2. szint: alakzatok elemzése
3. szint: lokális logikai rendezés (informális dedukció)
4. szint: törekvés a teljes logikai felépítésre (formális dedukció)
5. szint: axiomatikus felépítés. (Herendiné, 2013)

Az elemi iskolában az első három szintig kell eljussanak a tanulók.

Az első szintben a gyermek egy egységes egésznek tekinti a különböző alakzatokat. Meg tudja nevezni a testeket, de nem tudja ezeket összehasonlítani tulajdonságaik alapján. Számára érthetetlen az, hogy például a négyzet gyakorlatilag téglalap is.

Az alakzatok elemzésénél, tehát a második szinten a gyerek szétszedi az alakzatokat, felfedezi a testek részeit (rájön, hogy van az alakzatnak éle, csúcsa, oldala...stb.), de a tulajdonságok közötti logikai kapcsolatokat még mindig nem érti. (Herendiné, 2013)

A harmadik szinten a tanulók képesek önállóan megalkotni egy alakzatot vagy testet, tudatában van ezeknek a tulajdonságaival.

6. A síkidomok

A világban észlelhető formákat vizsgálva nem csak a testfogalom, hanem a zárt síkrész, másnéven a síkidom fogalma is kialakul. Egy síkidomból ki lehet alakítani egy másikat, ezt kétkézi manipulációval, de akár rajzolással is meg lehet valósítani. Az úgynevezett parkettázás a sík lefedését jelenti különböző alakokkal. A gyermekeket fontos megtanítanunk erre, először ugyanolyan alakzatokat illesztve egymás mellé, majd akár különbözőket is. Az egybevágó parkettázás a későbbi területmérést készíti elő, illetve a geometriai transzformációkat. Sokszögeket legtöbbször négyzethálóra másoltatunk, parkettáztatunk, így könnyebben megtalálják a gyermekeknek a kiindulási pontot. (Herendiné, 2013)

7. Elforgatások a síkban

Az elemi osztályosoknál az elforgatás tanításakor is szemléltetést javasol a módszertan. Ebben az életkorban még csak negyed fordulatokkal kifejezhető forgatásokról esik szó. Ha össze szeretnénk hasonlítani az eredeti és az elforgatott alakzatot, rájövünk, hogy a két alakzat ugyanolyan alakú és ugyanaz a mérete is, illetve, hogy a körüljárási irány nem változik, hiszen a sablont nem fordították át. (Herendiné, 2013) Erre a tudásra alapozva oldattam meg a második, azaz a tortás - színezős feladatot.

8. Térbeli viszonzyszavak

Statikus szituáció alatt azt értjük, „hogya a tárgyak egymáshoz viszonyított helyzetét rögzített térbeli elrendezésben vizsgáljuk.” A gyermeknek fontos, hogy kifejlődjön ez az érzéke, hogy értse a viszonzyszavakat: alatt-felett, jobbra-balra, előtt-mögött és el tudjon helyezni akár a síkban, akár a térben tárgyakat ezen utasítások alapján. Ilyenkor problémát jelenthet a viszonyítási pont, hiszen, ha egy macit a szék mögé teszünk, akkor az a szék mögül tekintve a maci már a szék elejénél található. Az ilyen problémás helyzetekben jó, ha megbeszéljük, hogy melyik nézőpontra gondoltunk.

A szakirodalom szerint a hétköznapi életben sokszor találkozhatunk váratlanul felbukkanó, értelmezési problémával. Ha egy szekrénnel állunk szemben, és a bal oldaláról beszélünk, akkor nem a saját nézőpontunkat kell figyelembe venni, hanem a szekrényét, ezzel szemben, ha egy ház bal oldalára akarunk valamit elhelyezni, akkor ezt sajátmagunkhoz viszonyítjuk. (Herendiné, 2013)

II. Kutatási rész - Logikus gondolkodás mérése a matematikában használt vizuális reprezentációk segítségével

1. A kutatás előzményei

Vizsgálatom egy részét egy előző kutatásra (Debrenti, 2015) alapoztam, ahol ugyancsak a problémamegoldó képesség lett mérve Einstein feladványának felhasználásával, a közgazdasági szakos hallgatók esetén. A kutatás során a hallgatói csoportok a feladatot három különböző reprezentációt alkalmazva oldhatták meg. Az első csoport hagyományosan, azaz papír és ceruza segítségével dolgozott, a második csoport képkártyákkal, konkrét műveletek elvégzésével juthatott megoldásra, a harmadik pedig számítógépes játék formában végezhetett el a feladatot.

A kutatásból kiderült, hogy akik a hagyományos úton keresztül oldották meg a feladatot, azoknak sikerült a legkevésbé helyes eredményre jutni. A számítógépes játékon dolgozók kevéssel, de megelőzték a hagyományosan dolgozókat. A képkártyás módszerrel viszont kivétel nélkül mindenki sikeresen helyes megoldásra talált.

Mivel nagyon kíváncsi voltam, hogy néhány év elteltével, változik-e a feladatmegoldási hatékonyság a számítógépes játék, illetve a kétkézi manipuláció között, hasonló körülményeket biztosítva mértem fel a mai generációkat. A hagyományos utat nem vizsgáltam, mivel az bizonyult az előző kutatásban a legsikertelenebb módszernek, illetve inkább arra voltam kíváncsi, hogy néhány évnyi plusz „digitális közelség” fordított-e az eredményeken.

2. Kutatási témám

Kutatási témám a logikus gondolkodás, mely elengedhetetlen a matematikai képesség kialakulásához, illetve annak fejlesztése, mérése. Mivel pedagógusnak készülök, és sok generációnyi kisiskolást fogok terveim szerint nevelni, fontosnak tartom, hogy a logikus gondolkodás fejlesztésére kerüljön a hangsúly. Tapasztalatom szerint, aki logikusan gondolkodik, könnyebben tud tanulni, alkalmazkodni, hamarabb felfogja a körülötte levő dolgokat és az összefüggéseket.

3. A kutatás célja, kérdései

Kutatásom során egyrészt szeretnék olyan eredményre bukkanni, hogy a logikus gondolkodás nem korfüggő, emiatt mértem fel úgy a III-IV. osztályosokat, mint az egyetemistákat. Másrészt, be szeretném bizonyítani, hogy a konkrét, kétkezi manipulálással végzett feladatmegoldás eredményesebb a virtuális térben végzett feladatmegoldásnál (az én esetemben számítógépen, online térben való megoldásnál).

4. Hipotézisek

Első hipotézisem szerint a kétkezi manipulálással történő feladatmegoldás eredményesebb lesz az online térben való játék alapú megoldással szemben, úgy a digitális bennszülöttek, – azaz a kisiskolások - mint az egyetemisták csoportján belül is.

Második hipotézisem szerint a logikus gondolkodás nem korfüggő, tehát elképzelésem szerint az egyetemisták csoportjának eredménye és a kisiskolások eredménye között nem lesz szignifikáns különbség.

5. A kutatás résztvevői

A vizsgálatban összesen 214 fő vett részt, ebből 103 kisiskolás a jelenlétemben dolgozott (49 gyerek online, illetve 54 gyerek élőben) és 111 egyetemista (ebből 40 hallgató online, illetve 71 hallgató élőben velem dolgozott). A kisiskolások Arad és Bihar megyei tanulók, az egyetemisták nagy része a Partiumi Keresztény Egyetem hallgatói, emellett a Babeş-Bolyai Tudományegyetem és a Nyíregyházi Egyetem hallgatói is részt vettek.

6. A kutatás módszerei és eszközei

A jelenleg érvényben levő járványügyi helyzet miatt (is) a kutatásom két módon jött létre, fizikai találkozással és az online térben. Igyekeztem minél több alanyt ellenőrzött körülmények között felmérni. Az online kitöltő kisiskolások túlnyomó többségét az iskolában

volt szerencsém felmérni, számítógépek felhasználásával, így biztos lehetek benne, hogy senki sem segítette munkájukat. Az online kitöltő egyetemisták (40 hallgató), bár nem voltak ellenőrizve, feltételezem, hogy vannak annyira érettek, hogy néhány számítógépes játékhoz nem kérték senki segítségét. A személyes találkozások alkalmával felmért csoportokat személyesen felügyeltem, ugyanazokat az utasításokat kapták, és nagyjából azonos időkeretet kaptak, körülbelül 1 óra 20 percet.

Kutatási módszerként három logikai feladatot használtam fel, különböző típusúakat. Az első puzzle-szerű játék, a második a síkban történő térkitöltési képességeket méri fel, a harmadikat pedig Einstein feladványaként emlegetik, melyet a logikai táblázat módszerével lehetne leghatékonyabban megoldani. Mindegyik szövegértésen is alapul. Mindhárom logikai feladatot úgy a személyes, mint a virtuális térben is meg lehetett oldani. A virtuális teret 11. osztályos öcsém hozta létre, aki a JavaScript és PHP programozási nyelvek, valamint a HTML és CSS jelölőnyelvek segítségével alkotta meg a weboldalt, amin le lehetett játszani mind a három játékot. A személyes alkalmakra magam állítottam össze a képkártyákat, melyeket nyomtatás után belamináltam, majd borítékba csomagoltam úgy, hogy egy boríték egy játékot tartalmazzon.

A felmért alanyok pontos utasításokat kaptak, minden alkalommal felhívtam a figyelmet a szövegek összetettségére, kértem őket, hogy többször olvassák el azt, ha szükséges. A kisiskolások megoldási időintervallumát én mértem, az egyetemistáknál ezt mindenki saját maga végezte és jegyezte le. Minden alany kapott egy lapocskát, amire fel kellett írjon egy azonosítót, és a három feladat megoldási idejét. Miután valaki kész volt, a megoldás mellé helyeztem az azonosítós lapot, ezt lefotóztam, így tudtam később a három játék megoldásához társítani ugyanazt a személyt.

Az értékelés szempontjait sajátmagam határoztam meg, úgy, hogy részpontokat is lehessen szerezni a megoldásokkal.

Fontosnak tartom megemlíteni, hogy az általam bemutatott értékek csak irányadók, hiszen sokféle tényezőt kihagytam a felmérésből. Nem vettem figyelembe a lelkiállapotot, fáradtságot, kedvet és stresszt, melyek változtathatnak az eredményeken. Ezek mellett, biztosan léteznek kifejezetten logikát mérő tesztek, mely minden területet alaposan átvizsgálják. Emiatt hangsúlyozom, hogy az eredményeim csak a jelenlegi felméréseket tükrözik, a mostani feladatok megoldásának helyességét és időtartamát elemzik.

Adatok elemzéséhez Excel táblázatkezelő programot használtam. Ezen belül készültek a diagramok, táblázatok, átlagok, illetve a T és F tesztek próbái is.

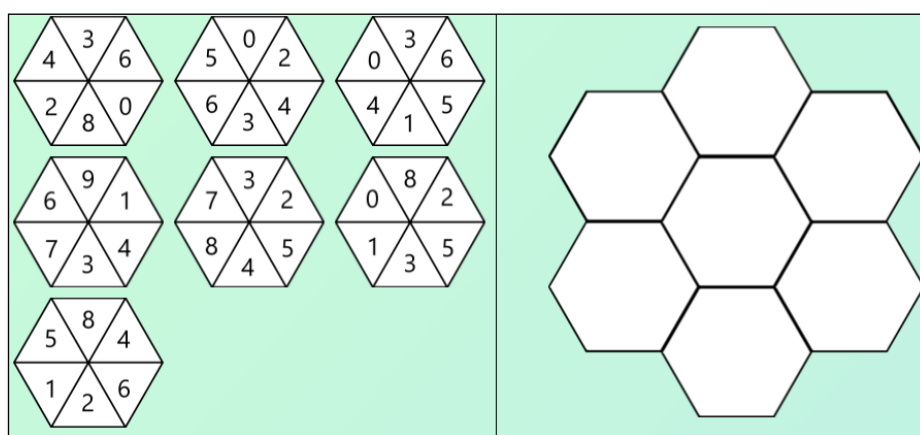
7. A feladatok és megoldásaik ismertetése

7.1. A Hexagonos feladat

A megoldandó feladatok közül az elsőt Hexagonosnak hívom, mivel hét darab hexagon alakú darabot kell megfelelően összeilleszteni a szabályok szerint. Ha a szakirodalmat tekintjük, ez egy transzformációs feladat. A feladat szövege a következő:

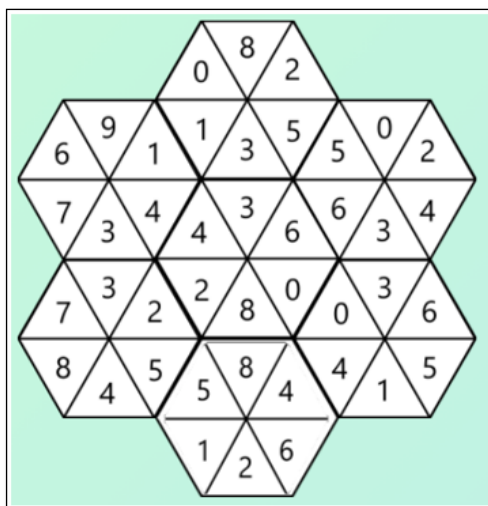
Helyezd el a kis hatszögeket a nagy alakzatba úgy, hogy két szomszédos háromszögben ugyanaz a szám legyen (két háromszöget szomszédosnak tekintünk, ha van egy közös oldaluk). A megadott hatszögeket nem lehet elforgatni. (Marchis, 2013)

Az alábbi ábrán (1. Ábra) megtekinthető a hét darab hatszög és a nagy alap, melyeket puzzle játékhoz hasonlóan kellett összerakni.



1. Ábra: A Hexagonos játék online formája

A feladatot többféle stratégiával lehetett megközelíteni, volt, aki igyekezett megtalálni a középső helyre passzoló darabot, volt olyan, aki kívülről indult, de volt, aki az egyszerű próbálgatás módszerével is helyes eredményre talált. Az egyetlen helyes eredményt a 2. Ábra szemlélteti.



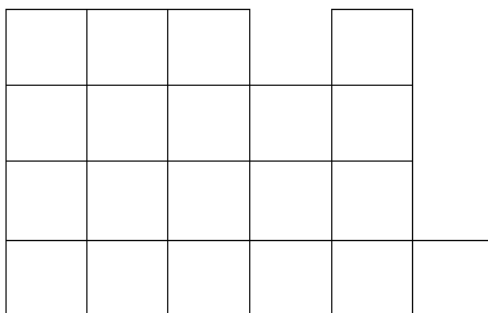
2. Ábra – Hexagonos játék helyes eredménye

Ennél az egy feladatnál nem láttam értelmét a részpontoknak, valaki vagy megoldotta helyesen, vagy nem. Így kaphattak a helyesen megoldók 100 pontot, míg a többiek nullát.

7.2. A tortás feladat

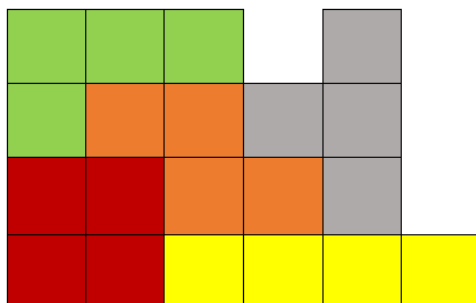
A második, azaz a tortás feladat tökéletes példája a különböző mértani alakzatokkal történő sík lefedésére. Egy ifjúsági matematikai lapban találtam, a Matlapban (Matlap 8, 308. o.), ahol a megoldását is közölték (Matlap 10, 384. o.) néhány lappal később. A feladat szövege és ábrája (3. Ábra) a következő:

Az ábrán egy megdézsmált rácsos sütemény látható, éppen 20 darab egyforma rácsnégyzettel díszítve. Öt barát úgy szeretné egymás között testvériesen elosztani a süteményt, hogy mindegyikük sütije egy darabból álljon, éppen négy rácsnégyzetet tartalmazzon, de mindegyikük más-más alakú sütit kapjon. Tudnál-e segíteni nekik? (Matlap 8, 308. o.)



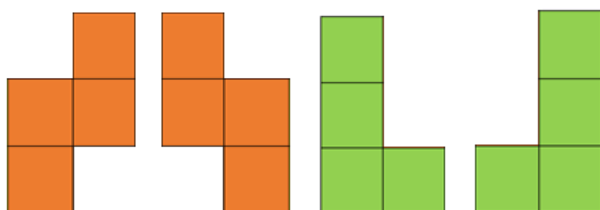
3. Ábra – A tortás feladat kitöltendő rácsnégyzetei

Bár a feladat készítői csak egyféle megoldást közöltek (4. *Ábra*), fontosnak tartottam megvizsgálni, hogy ha a tükörkép elemeket is figyelembe veszem, akkor hogyan növekszik a megoldási arány. Emiatt kétféleképpen pontoztam, szigorúan, mely az egyetlen helyes megoldást takarja, illetve „lazábban”, mely jónak tekinti a tükörkép elemek felhasználását is.



4. *Ábra* – A Matlapban közölt helyes megoldás

Tükörkép elemeknek tekintettem a következő alakzatokat (5. *Ábra*), és ezeknek akárhány fokos elforgatásait:



5. *Ábra* – Tükörkép elemek

7.3. Einstein feladványa

A harmadik, egyben legbonyolultabb feladat Einstein feladványa (Székely, 2012, 53. o.), melynek szintén csak egy megoldása van. Einstein azt állította a feladról, hogy az emberek 98%-a képtelen megfejtani. Az eredeti feladat adatait kissé átalakítottam. Két okból éreztem ezt hasznosnak, egyrészt, mert az interneten fellelhető a feladat megoldása, másrészt a kisiskolásoknak nem vihettem olyan feladatot, amelyik cigaretta márkákat és sört említ.

Az eredeti feladat itt található:

Adva van öt különböző színű ház egy sorban. Minden házban más nemzetiségű lakó él. Mind az öt háztulajdonos egyfajta italt iszik, egy adott márkájú cigarettát szív, és egy

bizonyos háziállatot tart. Mindegyik tulajdonosnak más a háziállata, más márkájú cigarettát szív, és más italt iszik. Ki tarthat halat?

1. A brit a piros házban lakik.
2. A svéd kutyákat tart háziállatként.
3. A dán teát iszik.
4. A zöld ház közvetlenül a fehér ház bal oldalán van.
5. A zöld ház tulajdonosa kávékat iszik.
6. Az a tulajdonos, aki Pall Mall-t szív, madarakat tart.
7. A sárga ház tulajdonosa Dunhill-t szív.
8. A középső ház tulajdonosa tejet iszik.
9. A norvég az első házban lakik.
10. A Blends márkát szívó tulajdonos a macskatartó mellett lakik.
11. A lovakat tartó tulajdonos a Dunhill-t szívó tulajdonos mellett lakik.
12. A Blue Masters-t szívó tulajdonos sört iszik.
13. A német Prince márkájú cigarettát szív.
14. A norvég a kék ház mellett lakik.
15. A Blends márkájú cigarettát szívó a vizet ivó tulajdonos mellett lakik.

Ennek megoldása a 6. Ábrán látható:

sárga	kék	piros	zöld	fehér
norvég	dán	brit	német	svéd
víz	tea	tej	kávé	sör
macska	ló	madár	hal	kutya
Dunhill	Blend	Pall Mall	Prince	Blue Master

6. Ábra – Einstein feladványának táblázatba foglalt megoldása

A következő szavakat alakítottam át a végleges feladatomhoz:

Dunhill – focizik

Blend – társasjátékozik

Pall Mall – táncol

Prince – zongorázik

Blue Master – golfozik

sör – gyümölcslé

madár – papagáj

Így születtek meg az általam felhasznált feladat és annak állításai, melyek a következők:

Van 5 ház, mindegyik más színű. Minden házban egy más-más nemzetiségű személy lakik. Minden háztulajdonos bizonyos italt részesít előnyben, különböző hobbjai van és más állatot tart. Ezen személyek közül EGYIK SEM iszik UGYANOLYAN italt. Nem ugyanaz a hobbjai és nem tart ugyanolyan állatot, mint valamelyik szomszédja.

Azt lehet tudni, hogy:

1. A brit piros házban lakik.
2. A svéd kutyát tart.
3. A dán szívesen iszik teát.
4. A német szeret zongorázni.
5. A norvég az első házban lakik.
6. A zöld ház tulajdonosa kávéat iszik.
7. Aki golfozik, szívesen iszik gyümölcslevet.
8. A sárga ház tulajdonosa szabadidejében focizik.
9. Az a személy, aki táncol, papagájt tart.
10. A férfi, aki a középső házban lakik, tejet iszik.
11. Aki társasjátékozni szokott, a mellett lakik az, aki macskát tart,
12. A férfi, akinek lóva van, a mellett lakik, aki focizik.
13. A norvég a kék ház mellett lakik.
14. Aki társasjátékozik, annak a szomszédja az, aki vizet iszik.
15. A zöld ház, a fehér ház mellett balra van.

Az átalakított feladat megoldása a már általam kidolgozott képekkel és házakkal együtt a 7. Ábrán látható.



7. Ábra – Einstein átalakított feladványának megoldása

A pontozást tekintve minden elem megfelelő házba való illesztése 4 pontot ért, és mivel 5 ház van, 5 féle sorrenddel, emiatt lett a maximum pontszám 100, melyet később százalékká alakítottam.

8. A weboldal ismertetése

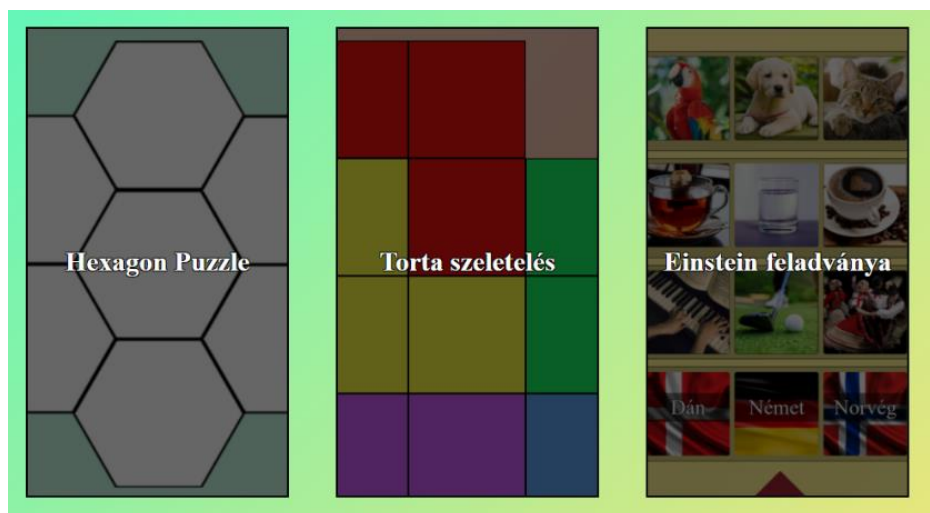
A weboldal főoldalán (8. Ábra) egy regisztrációs panel található, mely bekéri a tanuló státuszát (iskolás/egyetemista), intézményét, szakját, osztályát/évfolyamát és egy azonosítót.



The registration panel is titled "Add meg az adataidat!" (Enter your data!). It contains four dropdown menus for selection: "Egyetemista" (University student), "Partiumi Keresztény Egyetem" (Partium Christian University), "Óvó- és Tanítóképző" (Nursery and Teacher Training), and "Válaszd ki az osztályod/évfolyamod" (Select your class/year). Below these is a yellow "Regisztráció" (Registration) button. At the bottom, there is a link: "Van már azonosítód? Kattints ide!" (Do you already have an ID? Click here!).

8. Ábra – A weboldal főoldalán levő regisztrációs panel

Miután az alany bejelentkezett, megjelenik a három játék (9. Ábra), melyek megoldása után már nem lehet visszatérni rájuk, ezt a rendszer is jelzi. (10. Ábra)



9. Ábra – A weboldalon még meg nem oldott feladatok



10. Ábra – A weboldalon már megoldott feladatok

Minden egyes feladatmegoldás során a gép automatikusan mérte az időt, és a „Befejezem” gomb megnyomása után lementette az adatbázisba kép formájában az alany megoldását. Egy másik gomb is segítségére lehetett a feladatmegoldóknak, az „Újrakezdem”, mely egyenrangúvá teszi a számítógépes játékot a valóságban előforduló „leseprem és újrakezdem az egészet” mozdulattal. Az 1. sz. *Mellékletben* megtalálható mindhárom feladat online képe.

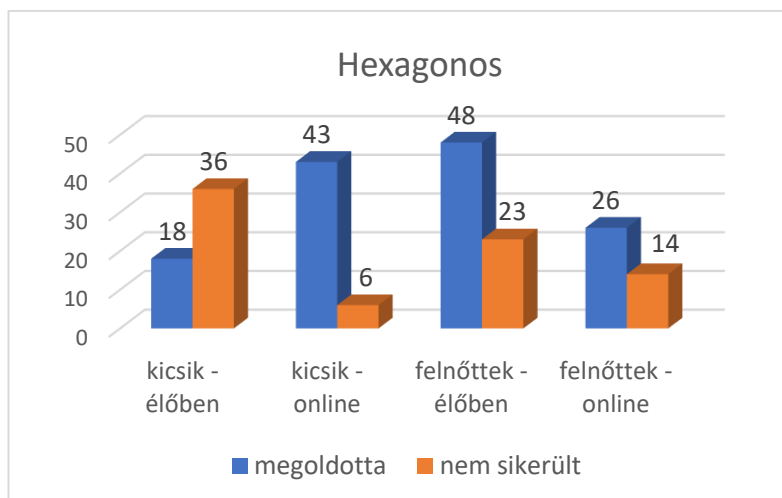
9. A kutatás eredményei

Legelőször bemutatom a kapott eredményeket játékokra lebontva, majd a hipotézisek mentén is levonom a következtetéseimet.

9.1. Hexagonos játék eredményei

A hexagonos játékot tekintve, a többség jól boldogult, az eredménytelenség nagy része a szövegértelmezés miatt jöhetett létre. Bár minden csoportnak kihangsúlyoztam, hogy nagyon figyelmesen olvassák el a szöveget, mégis nagyon sokan az egyetemisták közül is a szöveg szabályai ellen cselekedtek. Ilyen volt például az, hogy a darabokat nem volt szabad elfordítani, mégis sokan megtették. Az élőben megoldó kicsiknek nyomatékosabban hangsúlyoztam ezt, mivel az online térben megalkotott játék során a darabokat nem lehetett elforgatni, így ez könnyítésnek számított.

A 214 felmért alanyom feladatmegoldási eredményességét az alábbi diagram (11. Ábra) szemlélteti:



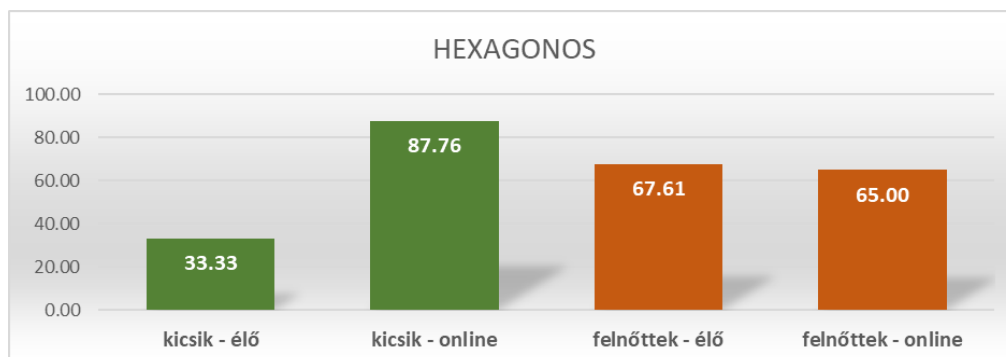
11. Ábra – A hexagonos feladatot megoldók száma (fő)

Megfigyelhető, hogy a többség (135 alany, 63,08%) helyesen megoldotta a feladatot, csupán 79-nek (36,91%) nem sikerült megoldania. Az élőben kitöltők együttesen 125 fő, ebből 66 fő, jól dolgozott (52,8%), míg 59 fő nem jól oldotta meg (47,2%). Az online kitöltők együttesen 89 fő, ebből 69 fő jól dolgozott (77,52%), míg 20 fő nem jól oldotta meg (22,47%). Elmondható, hogy összességében az élőben dolgozók közel fele megoldotta jól a feladatot, míg közel fele nem oldotta meg. A virtuális térben sokkal többen (77,52%) dolgoztak jól, mint rosszul.

Az élőben dolgozó elemisták egyharmada (18 fő, azaz 33,33%) tudta kártyákkal megoldani a feladatot, míg kétharmaduk nem tudta megoldani (36 fő, 66,66%). Azok az elemisták, akik a virtuális térben dolgoztak, 43 fő (87,76%) megoldotta, és csak 6 fő (12,24%) nem tudta megoldani. Az elemisták esetében elmondható, hogy sikeresebb volt a feladatmegoldás a virtuális térben, mint a másikk, kártyás reprezentáció esetében.

Az élőben dolgozó egyetemisták közel kétharmada (48 fő, azaz 67,60%) tudta kártyákkal megoldani a feladatot, míg egyharmaduk nem tudta megoldani (23 fő, 32,39%). Azok az egyetemisták, akik a virtuális térben dolgoztak, 26 fő (65%) megoldotta, és csak 14 fő (35%) nem tudta megoldani. Az egyetemisták esetében elmondható, hogy sikeresebb volt a feladatmegoldás a kártyás reprezentáció esetén, mint a virtuális térben.

A feladat megoldási átlagait, vagyis a feladatot jól megoldók arányát százalékban az alábbi diagram (12. Ábra) szemlélteti.



12. Ábra – A hexagonos feladat megoldási átlagainak diagramja (százalékban)

Megfigyelhető, hogy a kicsik körében ennél a feladatnál jobban teljesítettek az online megoldók, bár biztosan közre játszott a fent említett „könnyítés”. Az elemisták eredményeit vizsgálva F és T statisztikai próbákat végeztem (2. sz. *Melléklet*), ezek alapján kiderült, hogy ($T = 6.80$) szignifikáns eltérés van, az online térben oldók javára.

Ha a felnőttek eredményeit nézzük, kiderül, hogy nincs akkora eltérés a két platform átlaga között. Az eredményekre számított F és T próbák (3. sz. *Melléklet*) is bizonyítják, hogy nincs szignifikáns különbség ($T = 0.28$) a két átlag között.

Ha az élőben dolgozó csoportokat hasonlítjuk össze, megfigyelhető, hogy a felnőttek kiemelkedően jól teljesítettek a gyerekekhez képest. Ez az eltérés szignifikáns ($T = 4.08$) az F és T próbák (4. sz. *Melléklet*) számításai szerint.

Ezzel ellentétben, az online felületen a kicsik érték el szignifikánsan jobb eredményt, mint a felnőttek. Az ezzel kapcsolatos F és T próbák számításai az 5. sz. *Mellékletben* található, melyek kimutatták, hogy a T értéke 2.66.

9.2. Tortás játék eredménye

A tortás játékot nagyrészt mindenki jól értelmezte, a probléma inkább a tökéletes megoldás megtalálásával volt. Sokak szerint a tükrökép elemek is különféleképpen számítottak, ezt nem tartottam hibásnak, inkább a logikus gondolkodásnak tudtam be, hiszen az alanyok el tudtak térni a standardtól. Emiatt kétféle rendszer szerint figyeltem meg az eredményeket. Az

egyik szempont szigorúan csak a példatár által megadott megoldást tartja jónak. A második „lazább” ennél, mivel a tükörkép elemeket két teljesen különböző alaknak tekinti.

A feladat során öt alakot kellett beilleszteni az alakzatba, öt felé kellett vágni azt a bizonyos tortát. Éppen ezért volt 5 a maximum pontszám, amit el lehetett érni, ezt átalakítottam százalék formába. Értelemszerűen emiatt lett valakinek az 5/5-ös pontszámból 100%, a 4/5-ből 80% és így tovább.

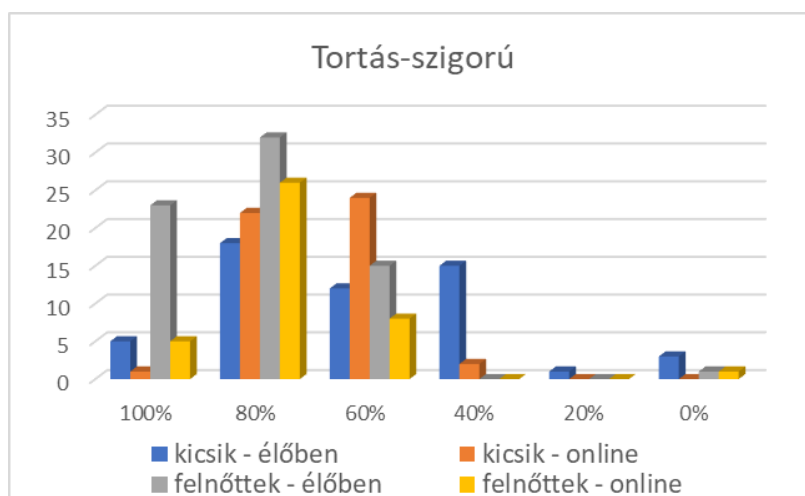
9.2.1 A szigorúan vett eredmények

A 214 felmért alanyomból 34 személynek sikerült megtalálni a példatár szerinti tökéletes megoldást, ebből csupán 6 kisiskolás, a többi felnőtt. Az alábbi táblázat (13. Ábra) részletesebben is tárgyalja a megoldási arányokat:

	kicsik - élőben	kicsik - online	felnőttek - élőben	felnőttek - online	össz.
100%	5	1	23	5	34
80%	18	22	32	26	98
60%	12	24	15	8	59
40%	15	2	0	0	17
20%	1	0	0	0	1
0%	3	0	1	1	5

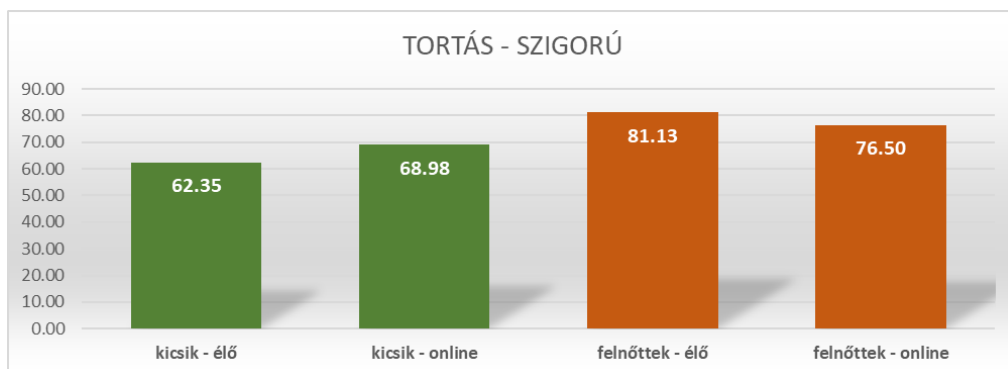
13. Ábra – Tortás feladat szigorúan vett eredményeinek táblázata

A táblázat alapján egy diagramot (14. Ábra) is készítettem, mely tökéletesen szemlélteti, hogy a többség 60-80%-os eredményt ért el. Ugyancsak innen leolvasható, hogy tökéletes eredmény inkább az élőben megoldó felnőttek körében volt.



14. Ábra – Tortás feladat szigorúan vett eredményeinek diagramja

Ha az átlagokat hasonlítjuk össze (15. *Ábra*), már nem ennyire eltérőek az eredmények, látható, hogy a két kisiskolás csoport és a két felnőtt csoport eredménye szinte fej-fej mellett halad.



15. *Ábra* – Tortás feladat szigorúan vett eredményeinek átlagai

Az átlagok alapján statisztikai számításokat végeztem, az F és T próbákkal. A két kisiskolás csoportot tekintve (6. sz. *Melléklet*) a különbség szignifikáns ($T = 1.75$) az online térben megoldók javára. Ha a felnőtt csoportokat hasonlítom össze, (7. sz. *Melléklet*) akkor kiderül, hogy nincs szignifikáns különbség a két csoport között ($T = 1.38$).

Második hipotézisem miatt az élőben dolgozók között is végeztem statisztikai számítást (8. sz. *Melléklet*), mely igazolta, hogy a két csoport között szignifikáns eltérés van ($T = 5.05$) a felnőttek javára. Ha az online térben megoldók közti különbséget vizsgáljuk (9. sz. *Melléklet*), kiderül, hogy az F és T próbák szerint ($T = 2.46$) szignifikáns különbség van ugyancsak a felnőttek javára.

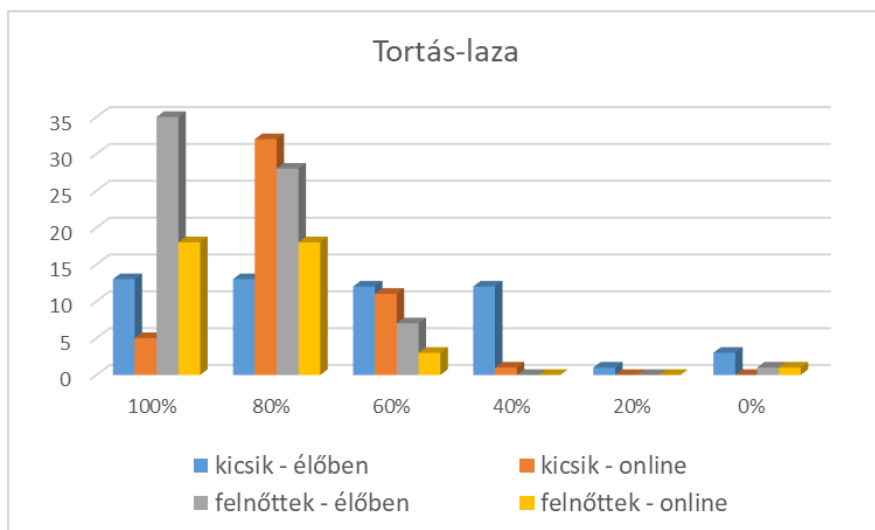
9.2.2 A „lazán” vett eredmények

Ez a rendszer többeknek kedvezett, sokkal több megoldást tarthattam jónak, és vannak olyanok is, melyek feljebb csúsztak az értékelésben (pl. 60%-ról 80%-ra). Az alábbi táblázat (16. *Ábra*) részletesebben mutatja a megoldási arányokat, azt, hogy melyik csoportból hányan érték el azt a bizonyos százalékot.

	kicsik - élőben	kicsik - online	felnőttek - élőben	felnőttek - online	össz.
100%	13	5	35	18	71
80%	13	32	28	18	91
60%	12	11	7	3	33
40%	12	1	0	0	13
20%	1	0	0	0	1
0%	3	0	1	1	5

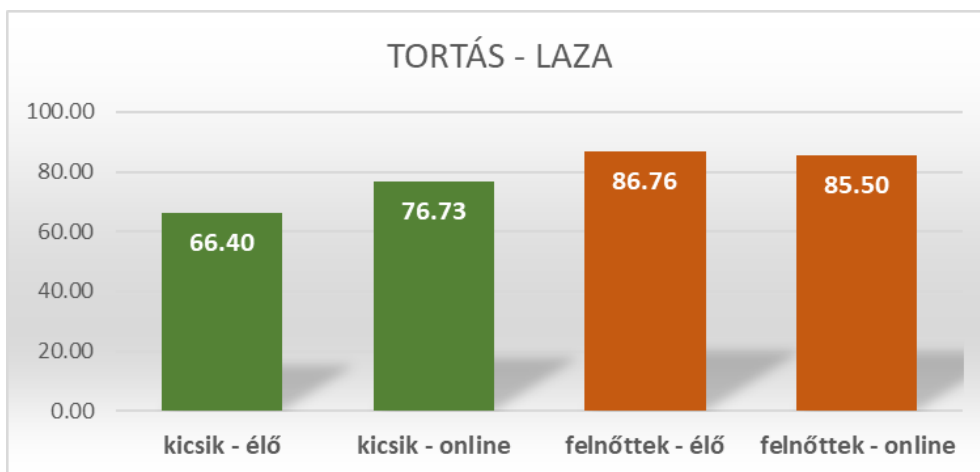
16. *Ábra* - Tortás feladat lazán vett eredményeinek táblázata

A táblázat alapján egy diagramot (17. Ábra) is készítettem, ahol megfigyelhető, hogy az előző diagramhoz képest több 100%-os és 80%-os megoldás született, és az előzőleg tornyosuló 60%-os megoldások száma megcsappant.



17. Ábra - Tortás feladat lazán vett eredményeinek diagramja

Ha az átlagokat hasonlítjuk össze (18. Ábra), látható, hogy ez esetben is ugyanaz a helyzet, mint a szigorúan számított rendszerben, a négy csoport között nincs hatalmas különbség.



18. Ábra - Tortás feladat lazán vett eredményeinek átlagai

Az átlagok alapján F és T statisztikai számításokat végeztem. A két gyermekcsoport között, mely a platformokon levő munkát hasonlítja össze, szignifikáns eltérés ($T = 2.49$) van az online térben dolgozók javára. (10. sz. Melléklet) Ha a két felnőtt csoportot vizsgáljuk, akkor

nincs szignifikáns eltérés az átlagok között (11. sz. Melléklet). Az viszont látszik, hogy a felnőttek az élőben történő feladatmegoldásban voltak jobbak. Az F és T próbák eredményei szerint (12. és 13. sz. Melléklet) úgy az élőben történő találkozásokkor mint az online felületen, a felnőttek szignifikánsan jobban teljesítettek mint a gyerekek. Az élő találkozás számításai alapján $T = 5.19$, az online felületen való megoldás során a $T = 2.68$.

9.3. Einstein feladatának eredményei

Az Einstein-feladat nagyon komplex, szövegértésen alapuló logikai probléma. A felmértjeim közül csupán 38-an (17,75%) oldották meg tökéletesen, 31 alany (14,48%) pedig vagy sikertelenül próbálkozott, vagy feladta.

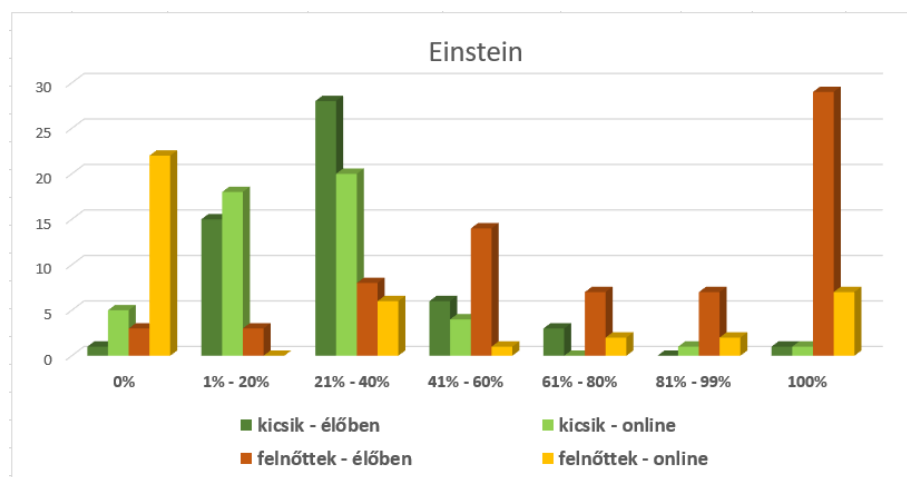
Érdekes volt látni, hogy milyen megoldási módszere van egy-egy tanulónak. Volt, aki táblázat-szerűen rakta ki a képkártyákat, olyat is tapasztaltam, hogy néhány gyermek a földre költözött, mondván, ott több helye van átlátni a dolgokat, mint az asztalán.

Az alábbi táblázatba (19. Ábra) foglaltam a részletesebb adatokat arról, hogy melyik csoport milyen eredményeket ért el. Elgondolkodtató, hogy a felmértjeim túlnyomó többsége nem érte el az 50%-ot sem.

	kicsik - élőben	kicsik - online	kicsik össz.	felnőttek - élőben	felnőttek - online	felnőttek össz.	mindenki össz.
0%	1	5	6	3	22	25	31
1% - 20%	15	18	33	3	0	3	36
21% - 40%	28	20	48	8	6	14	62
41% - 60%	6	4	10	14	1	15	25
61% - 80%	3	0	3	7	2	9	12
81% - 99%	0	1	1	7	2	9	10
100%	1	1	2	29	7	36	38

19. Ábra - Einstein feladat eredményeinek táblázata

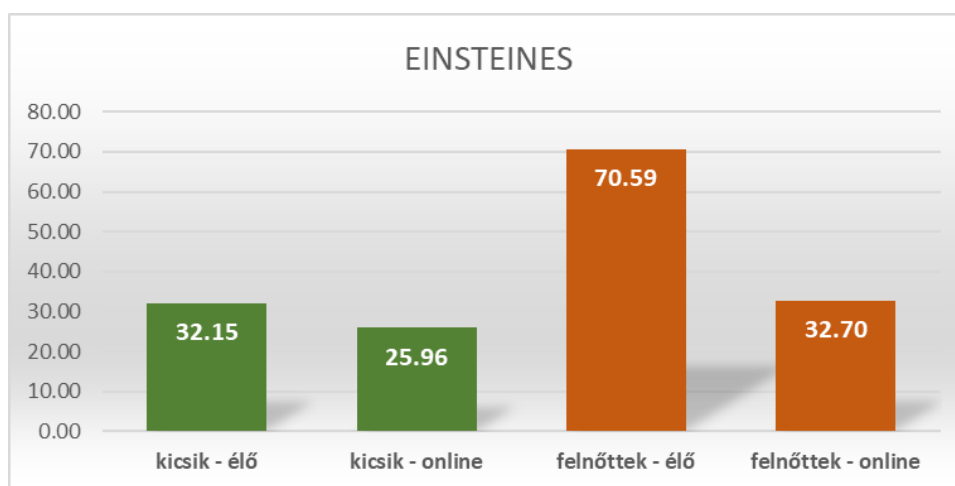
A táblázat adataiból diagram is készült, melyet a 20. Ábra szemléltet. Megfigyelhető egy furcsa jelenség, miszerint kimagaslóan a legjobbak, de a legrosszabbak is a felnőttek voltak. A diagram szerint a felnőttek hatékonyak voltak a kétkezi manipulálás következtében, de az online térben egyáltalán nem. A felnőttek csoportjának gyenge teljesítményét azzal magyarázom, hogy az esetek többségében ezek „idegen” tanulók, akikkel nem volt lehetőségem személyesen találkozni, csak a tanárnőjükön keresztül jutott el hozzájuk a weboldalam, melyen keresztül érhatték el a feladatokat. Bizonyára nem volt elég motivációjuk ahhoz, hogy komolyan vegyék a feladatot.



20. Ábra - Einstein feladat eredményeinek diagramja

Ugyancsak a diagramon látható, hogy a kisgyermekek nagyrésze maximum 40% -ot ért el, a felnőttek viszont inkább a 41-60% és 100% közötti értékeket töltik ki.

A különböző csoportokon belüli átlagokat az alábbi diagram (21. Ábra) szemlélteti.



21. Ábra - Einstein feladat eredményeinek átlagai

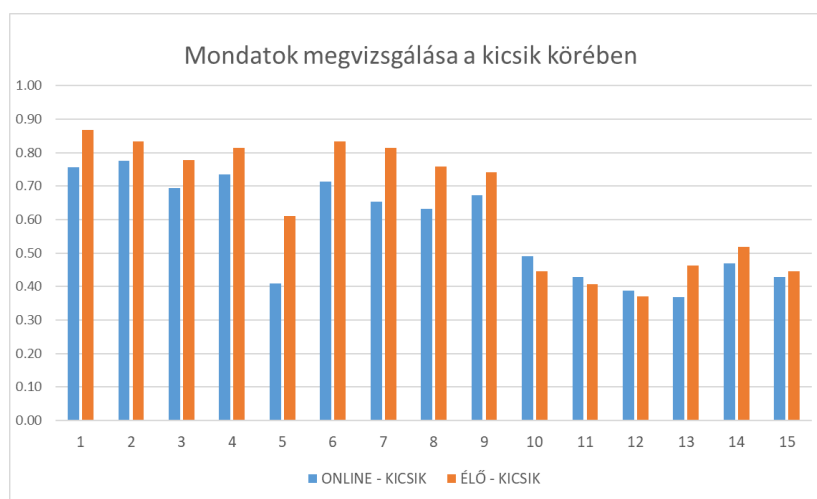
Itt is láthatjuk, hogy a legjobb teljesítményt az élőben megoldó felnőttek érték el. Ez az eredmény a T és F próbák számításai szerint szignifikánsan megelőzi a felnőttek másik csoportjának eredményeit ($T = 5.51$), mint ahogy azt a 14. sz. *Mellékletben* levő táblázatban is lehet látni. Nem csak saját korcsoportját haladta túl a felnőttek élőben történő felmérése, hanem a kisiskolások élőben történő eredményeit is. Ezt a különbséget is megvizsgáltam statisztikai számításokkal (15. sz. *Melléklet*), az eredmény szignifikanciát jelöl a felnőttek javára, ahol $T = 8.01$.

Mivel ránézésre nem lehet biztosan megállapítani, a két kisiskolás csoport eredményeit is szembeállítottam, a T és F próbák eredményei (16. sz. *Melléklet*) szerint a két csoport átlaga között nincs szignifikáns különbség ($T = 1.65$). Az viszont látszik, hogy a kicsik kivételesen a kétkezi módszer segítségével jutottak előlrébb.

Egy másik statisztikai számítást is végeztem, mely összehasonlítja az online megoldó kicsiket az online megoldó nagyokkal. A T és F statisztikai próbák (17. sz. *Melléklet*) szerint nincs szignifikáns különbség ($T = 1.02$) a kettő között, tehát a két csoport hasonlóképp szerepelt.

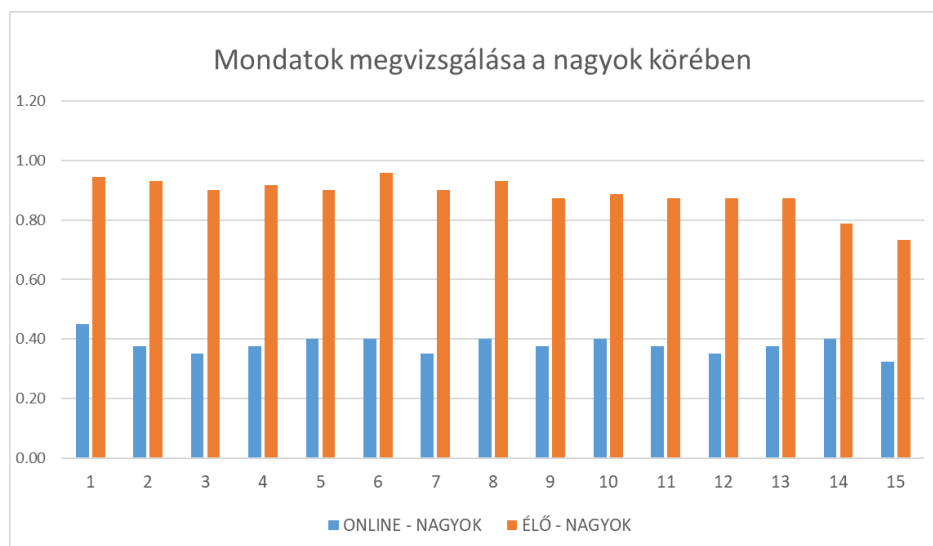
A feladatok kiértékelése alatt feltűnt, hogy egyeseknek kis százalékban sikerült megoldani pontosan a feladatot, de sok állítást pontosan követtek, csak nem a megfelelő helyre rakták, ezért nem járt pont neki. Emiatt megvizsgáltam külön mindenkinek a megoldását, lebontva a 15 állításra. Aki teljesítette az állítás feltételeit, az 1 pontot kapott, aki nem az 0-t. A végén ezekből a pontokból átlagokat számoltam. Az átlagokat kétféleképp csoportosítottam, hogy megvizsgáljam az alanyok megoldási stratégiáit és ezek hatékonyságát.

Az első stratégia, mely nagyon jellemző volt, az a mondatok teljesítése a megadott sorrend szerint. Ilyenkor az alanyok úgy dolgoztak, hogy sorban a mondatokat igazgá tették, de ha jött közben egy olyan állítás, mely megbolygatta volna a dolgokat, inkább figyelmen kívül hagyták. Az alábbi két diagramot (22. és 23. *Ábrák*) készítettem a stratégia megvizsgálására.



22. Ábra – Állítások megoldási diagramja a kisiskolások körében

A 22. Ábrán megfigyelhető, hogy úgy az online felületen, mint az élőben történő megoldás alatt a kicsik az első stratégiát követték, látszik a romló tendencia. Ezzel ellentétben, a nagyok esetében, melyet az 23. Ábra szemléltet, látszik, hogy megfontoltabban jártak el, próbáltak minden mondatnak megfelelni, többször variálták a képeket, hogy jó helyre kerüljenek.



23. Ábra - Állítások megoldási diagramja a felnőttek körében

A második stratégia, melyre a nagyok diagramja enged következtetni, az az állítás típusok szerinti vizsgálat és végrehajtás. A 15 állítást különböző kategóriákba lehet besorolni, melyek a következők:

I. Konkrét állítások:

- 5. A norvég az első házban lakik.
- 10. A férfi, aki a középső házban lakik, tejet iszik.

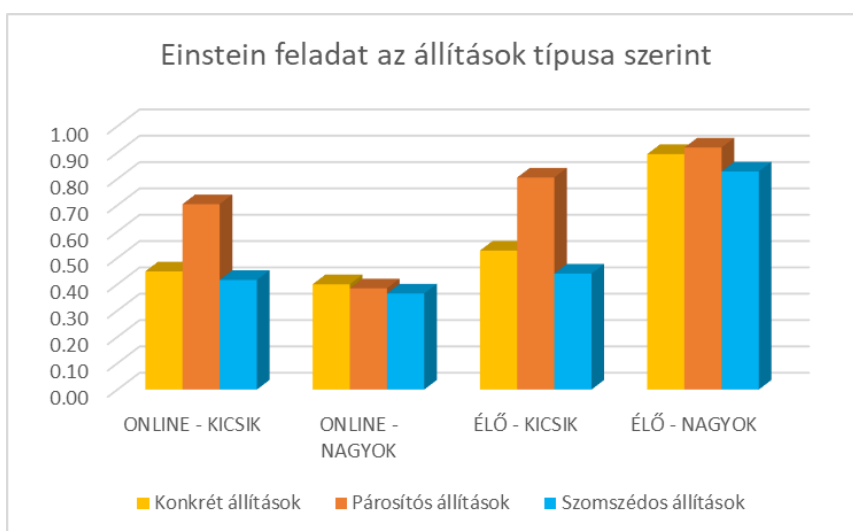
II. Párosítós állítások:

- 1. A brit piros házban lakik.
- 2. A svéd kutyát tart.
- 3. A dán szívesen iszik teát.
- 4. A német szeret zongorázni.
- 6. A zöld ház tulajdonosa kávékat iszik.
- 7. Aki golfozik, szívesen iszik gyümölcslevet.
- 8. A sárga ház tulajdonosa szabadidejében focizik.
- 9. Az a személy, aki táncol, papagájt tart.

III. Szomszédos állítások:

11. Aki társasjátékozni szokott, a mellett lakik az, aki macskát tart
12. A férfi, akinek lova van, a mellett lakik, aki focizik.
13. A norvég a kék ház mellett lakik.
14. Aki társasjátékozik, annak a szomszédja az, aki vizet iszik.
15. A zöld ház, a fehér ház mellett balra van.

Megfigyeltem, hogy bár a konkrét állításokkal biztosra lehet menni, mégsem az dominál, mindegyik csoportban a párosítós állításokat próbálták igazzá tenni, akár a konkrétak rovására is. Ezt az alábbi diagram (24. Ábra) is mutatja.



24. Ábra – Megoldott állítások diagramja az állítások típusa szerint

A szakirodalom szerint, (Herendiné, 2013) sokakban nem tudatosul, hogy ha egy háznak valamelyik oldaláról beszélünk, akkor azt a házzal szembenálló ember szemszögéből kell tekinteni. Kíváncsi voltam, hogy ez az állítás teljesül-e ebben az esetben, ahol az utolsó állítás pont ezt vizsgálta: „A zöld ház, a fehér ház mellett balra van.” A vizsgálat eredményeit a következő táblázat (25. Ábra) szemlélteti, mely megmutatja, hogy az összlétszámból hányan tájolták be helyesen a két említett házat.

ONLINE - KISIK	ÉLŐ - KISIK	ONLINE - FELNŐTTEK	ÉLŐ - FELNŐTTEK
49-ből 21	54-ből 24	40-ből 13	71-ből 52
42.85%	44.44%	32.50%	73.23

25. Ábra – A zöld és fehér házak sorrendjének helyessége a csoportokon belül

Az eredmények szerint csak az élőben dolgozó felnőttek érték el nagyobb átlagot, a többiek még az 50%-ot sem érték el. Úgy vélem, megerősíthetem Herendiné állítását, hiszen az én kutatásom esetében is fennáll.

10. Első hipotézis igazolása

Első hipotézisem szerint a kétkezi manipulálással történő feladatmegoldás eredményesebb, mint az online térben való játék alapú megoldás, úgy a kisiskolások - mint az egyetemisták csoportján belül is.

Az eredmények megleptek, mivel a kisiskolások majdnem minden esetben jobban teljesítettek az online felületen (kép erről a 18. sz. *Mellékletben*), mint a kétkezi manipulálás során. Az Einsteines játék kivételével minden játék során szignifikánsan kimutatható ez az eredmény. Az Einstein feladványa kivétel, mivel a feladatot jobban teljesítették a kétkezi manipulációval végrehajtók, de ott sem lett szignifikáns az eltérés. Tehát elmondhatom, hogy az általam felmért gyermekekre nem igazolódott a hipotézisem.

A felnőttek minden esetben jobban teljesítettek a kétkezi rakosgatós módszerrel, (kép erről a 19. sz. *Mellékletben*) viszont az eredmények között csak a 3. feladatnál, az Einstein feladványánál lett szignifikáns az eltérés. A felnőttek esetében beigazoltam a feltevésemet.

11. Második hipotézis igazolása

A második hipotézisem szerint a logika nem korfüggő, a felnőttek nem fogják a gyerekek teljesítményét szignifikánsan túlhaladni. Éppen ezért hasonlítottam össze minden esetben az egyetemisták megoldását a gyerekekével. A Hexagonos feladat során lettek csak eltérések, az online térben a gyerekek szignifikánsan jobbak a felnőtteknél, az élő térben viszont fordítva, a felnőttek szignifikánsan jobbak a gyerekeknél. Ez esetben állíthatom, hogy hipotézisemet igazoltam, de csak erre ez egy játékra.

A másik két játék során az egyetemisták szignifikánsan jobban teljesítettek, mint a gyermekek. Ez az eltérés csak az online felületen, a harmadik feladatnál nem jött ki szignifikánsnak.

12. Következtetés a hipotézisek mentén

Első hipotézisem, mely szerint a kétkezi manipuláció hatásosabb az online játéknál, nem igazolódott a gyermekek esetében, csak a felnőttek körében. Véleményem szerint ez azért van, mert az általam felmért 9-11 évesek már az „alfa” generációhoz tartoznak, akiket előzőleg digitális bennszülötteknek hívtam. Az ő mindennapjaikban fellelhető az online térben levő problémák megoldása. Másrészt, a járványhelyzet miatt a gyermekek még közelebb kerültek a digitális térhez, azok is, akik talán még addig sokat nem használták azt. Az egyetemisták körében azért teljesült az állításom, mert a nagyrészt 19-23 éves korosztály még a manipulálható eszközök használatával nőtt fel, nem az online tér „foglyaként”.

A második hipotézisem bár nem igazolódott, egy egész csoportra nem lehet általánosítani, mégis úgy gondolom, hogy van néhány kivétel. Ilyen kivételt képez az a kislány, aki 3. osztályos létére az online térben az Einstein feladványát 20 perc alatt oldotta meg tökéletesen, vagy az a kisfiú, aki 4. osztályos fejjel 26 perc alatt oldotta meg ugyanezt a feladatot kétkezi manipulálás során. Az ő eredményük sok egyetemistát leköröz.

Meglátásom szerint nem feltétlen mindig a logikával volt baj, hanem a szövegértéssel, illetve a tapasztalat hiányával. A felnőtt sokkal jobban tud már rendszerben gondolkodni, ki tudja szűrni a felesleges, illetve fontos információkat, mint az a kisiskolás, aki két-három éve tanult csak meg olvasni.

13. Összegzés

A kisiskolások és egyetemisták körében elvégzett vizsgálatom során rengeteg érdekes dologra bukkantam.

Bár nem sikerült hipotéziseimet tisztán igazolni, úgy vélem tanulságos volt ez a kutatás. Elgondolkodtam azon, hogy lehet a világ változásával a gyermekek felfogása és megoldási képességei is változnak. Ha ez beigazolódik egyszer, akkor lehet, hogy újféle módszereket és eszközöket kell kitaláljon az emberiség a gyermekek minőségi fejlesztésére.

A kutatásomat ki fogom egészíteni az időfaktorokkal, melyek a megoldások időtartamát jelzik, ezek lehet befolyásolják majd az eredményeket. Emellett terveim szerint összehasonlítom majd a tanítóképzős hallgatók eredményeit a közgazdaság szakon

tanulókéval, akiknek az egyik fő tantárgya a matematika, illetve a képzőművész hallgatók eredményeivel, akik nap mint nap szembesülnek vizuális reprezentációkkal.

A későbbiekben tovább kutatnám a kisgyermek és a digitális világ közti kapcsolatot, megbizonyosodva arról, hogy ilyen szempontból is változik a világ, esetleg ezt megcáfolva más következtetésekre jutnék.

Források:

Bruner, J. S. (1974). *Új utak az oktatás elméletéhez*. Budapest: Gondolat Kiadó, 13-40.o.

Debrenti, E. (2015) Visual representations in mathematics teaching: an experiment with students. *Acta Didactica Napocensia*, 8(1), 19-25. ISSN 2065-1430

Dienes, Z. P. (1973, 2015): *Építsük fel a matematikát!* Gondolat, Budapest, 47. o.

Herendiné Kónya Eszter (2013). *A matematika tanítása az alsó tagozaton*. Budapest: Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó, 130-135, 192-194, 206-208, 228-230, 234-235. o.

Marchis Julianna (2013). *Matematika óvó- és tanítóképzős hallgatóknak*, Galaxia Guttenberg Kiadó, Kolozsvár, 64. o.

Matlap (2018), XXII (10), Radó Ferenc Matematikaművelő Társaság, Kolozsvár, 384. o.

Matlap (2018), XXII (8), Radó Ferenc Matematikaművelő Társaság, Kolozsvár, 308. o.

Olosz Etelka és Olosz Ferenc (2000). *Matematika és módszertan*. Kolozsvár: Ábel, 10, 197-198, 205. o

Pólya György (1970). *A problémamegoldás iskolája. I. kötet*. Budapest: Tankönyvkiadó, 129. o.

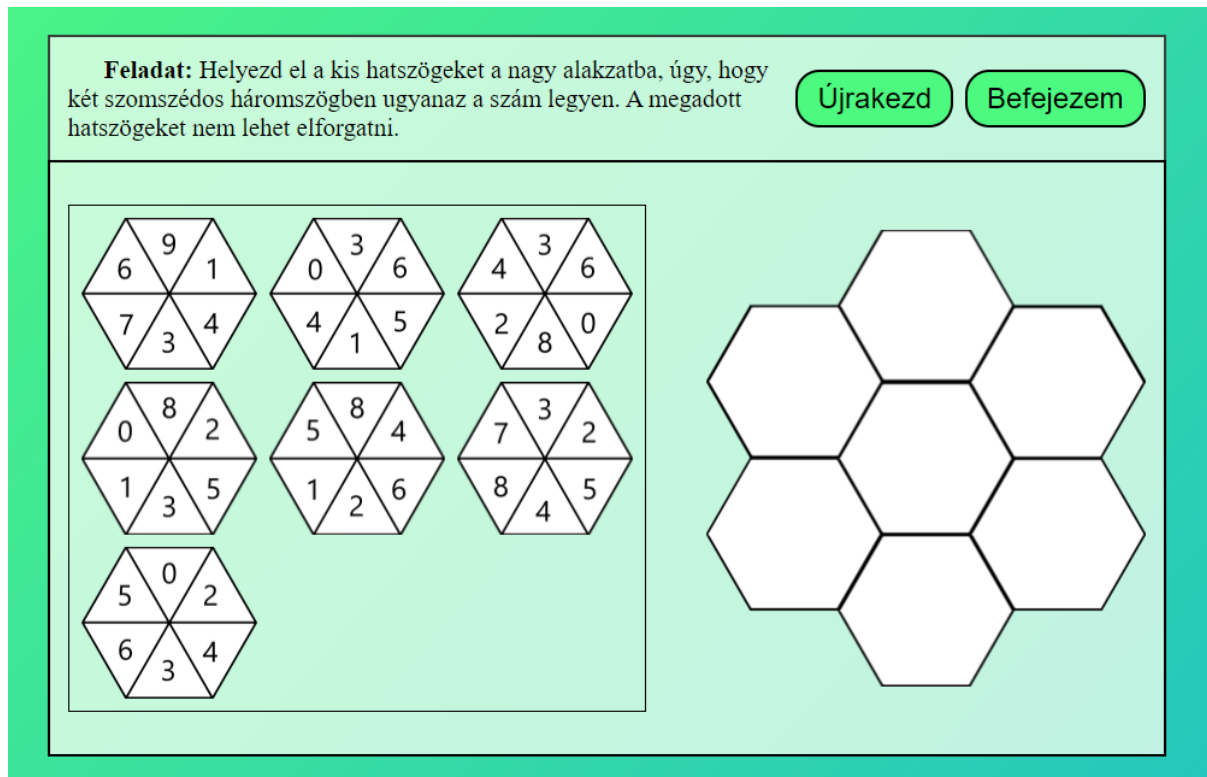
Pólya György (1971). *A problémamegoldás iskolája. II. kötet*. Budapest: Tankönyvkiadó, 76. o.

Székely Zoltán (2012). *Eszező – agypörgető feladványok*. Déva: Corvin Kiadó, 53. o.

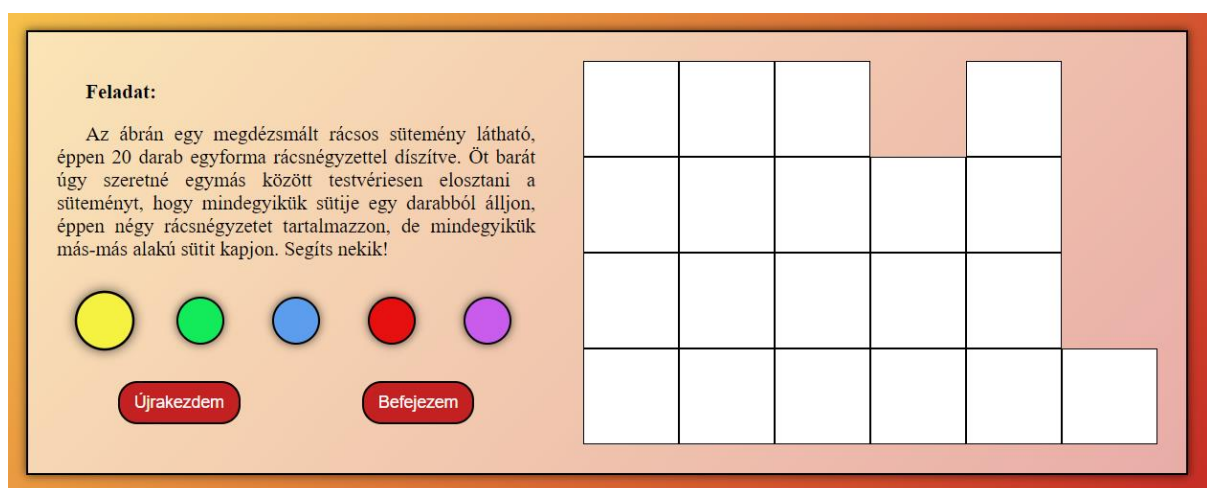
Szendrei Julianna (2005). *Gondolod, hogy egyre megy?* Budapest: Typotex, 319-320, 333. o

Melléklet

1. sz. Melléklet – A három játék online képe



Hexagonos



Tortaszeletelős

Einstein feladványa

Van 5 ház, mindegyik más színű. Minden házban egy más-más nemzetiségű személy lakik. Minden háztulajdonos bizonyos italt részesít előnyben, különböző hobbjai van és más állatot tart. Ezen személyek közül **egyik sem** iszik **ugyanolyan** italt. Nem ugyanaz a hobbjai és nem tart ugyanolyan állatot, mint valamelyik szomszédja.

Újrakezdés

Befejezem

Azt lehet tudni, hogy:

- ☐ A brit piros házban lakik.
- ☐ A svéd kutyát tart.
- ☐ A dán szívesen iszik teát.
- ☐ A német szeret zongorázni.
- ☐ A norvég az első házban lakik.
- ☐ A zöld ház tulajdonosa kávét iszik.
- ☐ Aki golfozik, szívesen iszik gyümölcslevet.
- ☐ A sárga ház tulajdonosa szabadidejében focizik.
- ☐ Az a személy, aki táncol, papagájt tart.
- ☐ A férfi, aki a középső házban lakik, tejet iszik.
- ☐ Aki társasjátékozni szokott, a mellett lakik az, aki macskát tart.
- ☐ A férfi, akinek lova van, a mellett lakik, aki focizik.
- ☐ A norvég a kék ház mellett lakik.
- ☐ Aki társasjátékozik, annak a szomszédja az, aki vizet iszik.
- ☐ A zöld ház, a fehér ház mellett balra van.




















Norvég


Brit


Svéd


Német


Dán

Einstein feladványa

2. sz. Melléklet – Hexagonos feladat F és T próbája a két gyerekcsoportot vizsgálva

F próba a szórások tesztelésére		
	teljes populáció	
előben megoldók létszáma (n)	55	
online megoldók létszáma (m)	50	
F próba a szórások tesztelésére	0.01	
alfa	0.05	
n-1 szabadsági fok	54	
m-1 szabadsági fok	49	
F(n-1,m-1) táblázatból	2.20	
t próba a teljes populációra		
	gyerekek	
	élő	online
létszám	55	50
átlag	33.33	87.76
korrigált szórás	47.14	32.78
korrigált szórásnégyzet	2222.22	1074.55
t próba statisztika abszolút értéke	6.80	
szignifikancia szint alfa	0.05	
szabadsági fok n+m-2	103	
t táblázatból t(0,05)	1.70	
Eredmény:	95%-ban szignifikáns az eredmény	

3. sz. Melléklet - Hexagonos feladat F és T próbája a felnőttek két csoportját vizsgálva

F próba a szórások tesztelésére		
	teljes populáció	
élőben megoldók létszáma (n)	72	
online megoldók létszáma (m)	41	
F próba a szórások tesztelésére	0.87	
alfa	0.05	
n-1 szabadsági fok	71	
m-1 szabadsági fok	40	
F(n-1,m-1) táblázatból	2.20	
t próba a teljes populációra		
	felnőttek	
	élő	online
létszám	72	41
átlag	67.61	65.00
korrigált szórás	46.80	47.70
korrigált szórásnégyzet	2275.00	2275.00
t próba statisztika abszolút értéke	0.28	
szignifikancia szint alfa	0.05	
szabadsági fok n+m-2	111	
t táblázatból t(0,05)	1.70	
Eredmény:	nincs szignifikáns különbség a két csoport eredményei között	

4. sz. Melléklet - Hexagonos feladat F és T próbája az élőben megoldók között

F próba a szórások tesztelésére		
	teljes populáció	
kicsik létszáma (n)	55	
felnőttek létszáma (m)	72	
F próba a szórások tesztelésére	0.95	
alfa	0.05	
n-1 szabadsági fok	54	
m-1 szabadsági fok	71	
F(n-1,m-1) táblázatból	2.20	
t próba a teljes populációra		
	élő-élő	
	kicsik	felnőttek
létszám	55	72
átlag	33.33	67.61
korrigált szórás	47.14	46.80
korrigált szórásnégyzet	2222.22	2190.04
t próba statisztika abszolút értéke	4.08	
szignifikancia szint alfa	0.05	
szabadsági fok n+m-2	125	
t táblázatból t(0,05)	1.70	
Eredmény:	95%-ban szignifikáns az eredmény	

5. sz. Melléklet - Hexagonos feladat F és T próbája az online térben megoldók között

F próba a szórások tesztelésére		
	teljes populáció	
kicsik létszáma (n)	49	
felnőttek létszáma (m)	41	
F próba a szórások tesztelésére	0.02	
alfa	0.05	
n-1 szabadsági fok	48	
m-1 szabadsági fok	40	
F(n-1,m-1) táblázatból	2.20	
t próba a teljes populációra		
	online - online	
	kicsik	felnőttek
létszám	49	41
átlag	87.76	65.00
korrigált szórás	33.12	47.70
korrigált szórásnégyzet	1096.94	2275.00
t próba statisztika abszolút értéke	2.66	
szignifikancia szint alfa	0.05	
szabadsági fok n+m-2	88	
t táblázatból t(0,05)	1.70	
Eredmény:	95%-ban szignifikáns az eredmény	

6. sz. Melléklet – Tortás feladat(szigorúan) F és T próbája a gyerekek csoportjai között

F próba a szórások tesztelésére		
	teljes populáció	
élőben megoldók létszáma (n)	52	
online megoldók létszáma (m)	50	
F próba a szórások tesztelésére	0.000004	
alfa	0.05	
n-1 szabadsági fok	51	
m-1 szabadsági fok	49	
F(n-1,m-1) táblázatból	2.20	
t próba a teljes populációra		
	gyerekek	
	élő	online
létszám	52	50
átlag	62.35	68.98
korrigált szórás	23.98	12.16
korrigált szórásnégyzet	574.86	147.94
t próba statisztika abszolút értéke	1.75	
szignifikancia szint alfa	0.05	
szabadsági fok n+m-2	100	
t táblázatból t(0,05)	1.70	
Eredmény:	95%-ban szignifikáns az eredmény	

7. sz. Melléklet – Tortás feladat(szigorúan) F és T próbája a felnőttek csoportjai között

F próba a szórások tesztelésére		
	teljes populáció	
élőben megoldók létszáma (n)	72	
online megoldók létszáma (m)	41	
F próba a szórások tesztelésére	0.78	
alfa	0.05	
n-1 szabadsági fok	71	
m-1 szabadsági fok	40	
F(n-1,m-1) táblázatból	2.20	
t próba a teljes populációra		
	felnőttek	
	élő	online
létszám	72	41
átlag	81.13	76.50
korrigált szórás	17.41	16.67
korrigált szórásnégyzet	302.96	277.75
t próba statisztika abszolút értéke	1.38	
szignifikancia szint alfa	0.05	
szabadsági fok n+m-2	111	
t táblázatból t(0,05)	1.70	
Eredmény:	nincs szignifikáns különbség a két csoport eredményei között	

8. sz. Melléklet – Tortás feladat(szigorúan) F és T próbája az előben megoldók között

F próba a szórások tesztelésére			
	teljes populáció		
kicsik létszáma (n)	52		
felnőttek létszáma (m)	72		
F próba a szórások tesztelésére	0.01		
alfa	0.05		
n-1 szabadsági fok	51		
m-1 szabadsági fok	71		
F(n-1,m-1) táblázatból	2.20		
t próba a teljes populációra			
	élő-élő		
	kicsik	felnőttek	
létszám	52	72	
átlag	62.35	81.13	
korrigált szórás	23.98	17.41	
korrigált szórásnégyzet	574.86	302.96	
t próba statisztika abszolút értéke	5.05		
szignifikancia szint alfa	0.05		
szabadsági fok n+m-2	122		
t táblázatból t(0,05)	1.70		
Eredmény:	95%-ban szignifikáns az eredmény		

9. sz. Melléklet – Tortás feladat(szigorúan) F és T próbája az online térben megoldók között

F próba a szórások tesztelésére		
	teljes populáció	
kicsik létszáma (n)	49	
felnőttek létszáma (m)	41	
F próba a szórások tesztelésére	0.04	
alfa	0.05	
n-1 szabadsági fok	48	
m-1 szabadsági fok	40	
F(n-1,m-1) táblázatból	2.20	
t próba a teljes populációra		
	online - online	
	kicsik	felnőttek
létszám	49	41
átlag	68.98	76.50
korrigált szórás	12.29	16.67
korrigált szórásnégyzet	151.02	277.75
t próba statisztika abszolút értéke	2.46	
szignifikancia szint alfa	0.05	
szabadsági fok n+m-2	88	
t táblázatból t(0,05)	1.70	
Eredmény:	95%-ban szignifikáns az eredmény	

10. sz. Melléklet – Tortás feladat(lazán) F és T próbája a gyerekcsoportok között

F próba a szórások tesztelésére		
	teljes populáció	
élőben megoldók létszáma (n)	51	
online megoldók létszáma (m)	50	
F próba a szórások tesztelésére	2.8E-07	
alfa	0.05	
n-1 szabadsági fok	50	
m-1 szabadsági fok	49	
F(n-1,m-1) táblázatból	2.20	
t próba a teljes populációra		
	gyerekek	
	élő	online
létszám	51	50
átlag	66.40	76.73
korrigált szórás	26.67	12.35
korrigált szórásnégyzet	711.04	152.60
t próba statisztika abszolút értéke	2.49	
szignifikancia szint alfa	0.05	
szabadsági fok n+m-2	99	
t táblázatból t(0,05)	1.70	
Eredmény:	95%-ban szignifikáns az eredmény	

11. sz. Melléklet – Tortás feladat(lazán) F és T próbája a felnőttek között

F próba a szórások tesztelésére		
	teljes populáció	
élőben megoldók létszáma (n)	72	
online megoldók létszáma (m)	41	
F próba a szórások tesztelésére	0.48	
alfa	0.05	
n-1 szabadsági fok	71	
m-1 szabadsági fok	40	
F(n-1,m-1) táblázatból	2.20	
t próba a teljes populációra		
	felnőttek	
	élő	online
létszám	72	41
átlag	86.76	85.50
korrigált szórás	16.76	18.43
korrigált szórásnégyzet	281.06	339.75
t próba statisztika abszolút értéke	0.37	
szignifikancia szint alfa	0.05	
szabadsági fok n+m-2	111	
t táblázatból t(0,05)	1.70	
Eredmény:	nincs szignifikáns különbség a két csoport eredményei között	

12. sz. Melléklet – Tortás feladat(lazán) F és T próbája az élőben megoldók között

F próba a szórások tesztelésére		
	teljes populáció	
kicsik létszáma (n)	51	
felnőttek létszáma (m)	72	
F próba a szórások tesztelésére	0.0003	
alfa	0.05	
n-1 szabadsági fok	50	
m-1 szabadsági fok	71	
F(n-1,m-1) táblázatból	2.20	
t próba a teljes populációra		
	élő-élő	
	kicsik	felnőttek
létszám	51	72
átlag	66.40	86.76
korrigált szórás	26.67	16.76
korrigált szórásnégyzet	711.04	281.06
t próba statisztika abszolút értéke	5.19	
szignifikancia szint alfa	0.05	
szabadsági fok n+m-2	121	
t táblázatból t(0,05)	1.70	
Eredmény:	95%-ban szignifikáns az eredmény	

13. sz. Melléklet – Tortás feladat(lazán) F és T próbája az online megoldók között

F próba a szórások tesztelésére		
	teljes populáció	
kicsik létszáma (n)	49	
felnőttek létszáma (m)	41	
F próba a szórások tesztelésére	0.01	
alfa	0.05	
n-1 szabadsági fok	48	
m-1 szabadsági fok	40	
F(n-1,m-1) táblázatból	2.20	
t próba a teljes populációra		
	online - online	
	kicsik	felnőttek
létszám	49	41
átlag	76.73	85.50
korrigált szórás	12.48	18.43
korrigált szórásnégyzet	155.78	339.75
t próba statisztika abszolút értéke	2.68	
szignifikancia szint alfa	0.05	
szabadsági fok n+m-2	88	
t táblázatból t(0,05)	1.70	
Eredmény:	95%-ban szignifikáns az eredmény	

14. sz. Melléklet – Einstein feladat F és T próbája a felnőtt megoldók között

F próba a szórások tesztelésére		
	teljes populáció	
élőben megoldók létszáma (n)	72	
online megoldók létszáma (m)	41	
F próba a szórások tesztelésére	0.07	
alfa	0.05	
n-1 szabadsági fok	71	
m-1 szabadsági fok	40	
F(n-1,m-1) táblázatból	2.20	
t próba a teljes populációra		
	felnőttek	
	élő	online
létszám	72	41
átlag	70.59	32.70
korrigált szórás	31.70	40.61
korrigált szórásnégyzet	1005.11	1649.51
t próba statisztika abszolút értéke	5.51	
szignifikancia szint alfa	0.05	
szabadsági fok n+m-2	111	
t táblázatból t(0,05)	1.70	
Eredmény:	95%-ban szignifikáns az eredmény	

15. sz. Melléklet – Einstein feladat F és T próbája az élőben megoldók között

F próba a szórások tesztelésére		
	teljes populáció	
kicsik létszáma (n)	55	
felnőttek létszáma (m)	72	
F próba a szórások tesztelésére	0.00006	
alfa	0.05	
n-1 szabadsági fok	54	
m-1 szabadsági fok	71	
F(n-1,m-1) táblázatból	2.20	
t próba a teljes populációra		
	élő-élő	
	kicsik	felnőttek
létszám	55	72
átlag	32.15	70.59
korrigált szórás	18.43	31.70
korrigált szórásnégyzet	339.53	1005.11
t próba statisztika abszolút értéke	8.01	
szignifikancia szint alfa	0.05	
szabadsági fok n+m-2	125	
t táblázatból t(0,05)	1.70	
Eredmény:	95%-ban szignifikáns az eredmény	

16. sz. Melléklet – Einstein feladat F és T próbája a gyerekek csoportjai között

F próba a szórások tesztelésére		
	teljes populáció	
élőben megoldók létszáma (n)	55	
online megoldók létszáma (m)	50	
F próba a szórások tesztelésére	0.59	
alfa	0.05	
n-1 szabadsági fok	54	
m-1 szabadsági fok	49	
F(n-1,m-1) táblázatból	2.20	
t próba a teljes populációra		
	gyerekek	
	élő	online
létszám	55	50
átlag	32.15	25.96
korrigált szórás	18.43	19.86
korrigált szórásnégyzet	339.53	394.53
t próba statisztika abszolút értéke	1.66	
szignifikancia szint alfa	0.05	
szabadsági fok n+m-2	103	
t táblázatból t(0,05)	1.70	
Eredmény:	incs szignifikáns különbség a két csoport eredményei között	

17. sz. Melléklet – Einstein feladat F és T próbája az online megoldók között

F próba a szórások tesztelésére		
	teljes populáció	
kicsik létszáma (n)	49	
felnttek létszáma (m)	41	
F próba a szórások tesztelésére	0.0000052	
alfa	0.05	
n-1 szabadsági fok	48	
m-1 szabadsági fok	40	
F(n-1,m-1) táblázatból	2.20	
t próba a teljes populációra		
	online - online	
	kicsik	felnttek
létszám	49	41
átlag	25.96	32.70
korrigált szórás	20.07	40.61
korrigált szórásnégyzet	402.75	1649.51
t próba statisztika abszolút értéke	1.02	
szignifikancia szint alfa	0.05	
szabadsági fok n+m-2	88	
t táblázatból t(0,05)	1.70	
Eredmény:	nincs szignifikáns különbség a két csoport eredményei között	

18. sz. Melléklet – Kép: kisiskolások az online feladatmegoldás alatt



19. sz. Melléklet – Képek: Egyetemisták az Einstein feladatának megoldása közben

